دیوید هالیدی _ رابرت رزنیک
جرل واکر

مبانی فیزیک
هالیدی

ویرایش دهم (۲۰۱۴)

جلد اول - مکانیک

مه: دکتر نعمت الله گلستانیان - دکتر محمود

دیوید هالیدی ـ رابرت رزنیک

جرل واکر

مبانی فیزیک

هالیدی

ویرایش دهم (۲۰۱۴)

جلد اول ـ مکانیک

ترجمه: دکتر نعمت‌الله گلستانیان ـ دکتر محمود بهــار

عنوان — صفحه

جمع کردن بردارها به کمک مؤلفه‌ها ۷۵
بردارها و قانون‌های فیزیک ۷۶

۳-۳ ضرب کرن بردارها ۷۹

ضرب کردن بردارها ۸۰
مرور و چکیده‌ی مطالب ۸۶
پرسش‌ها ۸۸
مسئله‌ها ۸۹

فصل ۴

حرکت‌های دوبعدی و سه‌بعدی ۹۹

۱-۴ مکان و جابه‌جایی ۹۹

فیزیک در این باره چه می‌گوید؟ ۹۹
مکان و جابه‌جایی ۱۰۰

۲-۴ سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای ۱۰۲

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای ۱۰۳

۳-۴ شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای ۱۰۶

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای ۱۰۶

۴-۴ حرکت پرتابه‌ای ۱۰۹

حرکت پرتابه‌ای ۱۰۹

۵-۴ حرکت دایره‌ای یکنواخت ۱۱۷

حرکت دایره‌ای یکنواخت ۱۱۷

۶-۴ حرکت نسبی یک بعدی ۱۲۰

حرکت نسبی یک بعدی ۱۲۱

۷-۴ حرکت نسبی دوبعدی ۱۲۳

حرکت نسبی دوبعدی ۱۲۳
مرور و چکیده‌ی مطالب ۱۲۵
پرسش‌ها ۱۲۶
مسئله‌ها ۱۲۹

عنوان — صفحه

فصل ۵

نیرو و حرکت ـ ۱ ۱۴۹

۱-۵ قانون‌های اول و دوم نیوتون ۱۴۹

فیزیک در این باره چه می‌گوید؟ ۱۵۰
مکانیک نیوتونی ۱۵۱
قانون اول نیوتون ۱۵۱
نیرو ۱۵۲
جرم ۱۵۴
قانون دوم نیوتون ۱۵۵

۲-۵ معرفی برخی نیروهای خاص ۱۶۰

معرفی برخی نیروهای خاص ۱۶۱

۳-۵ کاربرد قانون‌های نیوتون ۱۶۶

قانون سوم نیوتون ۱۶۷
کاربرد قانون‌های نیوتون ۱۶۹
مرور و چکیده‌ی مطالب ۱۷۷
پرسش‌ها ۱۷۹
مسئله‌ها ۱۸۱

فصل ٦

نیرو و حرکت ـ ۲ ۱۹۷

۱-۶ اصطکاک ۱۹۷

فیزیک در این باره چه می‌گوید؟ ۱۹۸
اصطکاک ۱۹۸
خاصیت‌های نیروی اصطکاک ۲۰۱

۲-۶ نیروی پَسار و تندی حد ۲۰۵

نیروی پَسار و تندی حد ۲۰۶

۳-۶ حرکت دایره‌ای یکنواخت ۲۰۹

حرکت دایره‌ای یکنواخت ۲۱۰
مرور و چکیده‌ی مطالب ۲۱۶
پرسش‌ها ۲۱۷
مسئله‌ها ۲۱۹

عنوان صفحه

فصل ۷

انرژی جنبشی و کار ۲۳۷

۷-۱ انرژی جنبشی ۲۳۷

فیزیک در این باره چه می‌گوید؟ ۲۳۷

انرژی چیست؟ ۲۳۸

انرژی جنبشی ۲۳۸

۷-۲ کار و انرژی جنبشی ۲۴۰

کار ۲۴۰

کار و انرژی جنبشی ۲۴۱

۷-۳ کار انجام شده توسط نیروی گرانشی ۲۴۷

کار انجام شده توسط نیروی گرانشی ۲۴۷

۷-۴ کار انجام شده توسط نیروی فنر ۲۵۲

کار انجام شده توسط نیروی فنر ۲۵۲

۷-۵ کار انجام شده توسط یک نیروی متغیر کلی ۲۵۷

کار انجام شده توسط یک نیروی متغیر کلی ۲۵۷

۷-۶ توان ۲۶۳

توان ۲۶۳

مرور و چکیده‌ی مطالب ۲۶۶

پرسش‌ها ۲۶۷

مسئله‌ها ۲۶۹

فصل ۸

انرژی پتانسیل و پایستگی انرژی ۲۸۳

۸-۱ انرژی پتانسیل ۲۸۳

فیزیک در این باره چه می‌گوید؟ ۲۸۴

کار و انرژی پتانسیل ۲۸۴

وابسته نبودن نیروهای پایستار به مسیر حرکت ۲۸۶

تعیین مقادیر انرژی پتانسیل ۲۸۹

۸-۲ پایستگی انرژی مکانیکی ۲۹۳

پایستگی انرژی مکانیکی ۲۹۳

عنوان صفحه

۸-۳ خواندن منحنی انرژی پتانسیل ۲۹۷

خواندن منحنی انرژی پتانسیل ۲۹۸

۸-۴ کار انجام شده روی یک دستگاه توسط نیروی خارجی ۳۰۳

کار انجام شده روی یک دستگاه توسط نیروی خارجی ۳۰۳

۸-۵ پایستگی انرژی ۳۰۸

پایستگی انرژی ۳۰۸

مرور و چکیده‌ی مطالب ۳۱۴

پرسش‌ها ۳۱۵

مسئله‌ها ۳۱۸

فصل ۹

مرکز جرم و تکانه‌ی خطی ۳۴۱

۹-۱ مرکز جرم ۳۴۱

فیزیک در این باره چه می‌گوید؟ ۳۴۱

مرکز جرم ۳۴۲

۹-۲ قانون دوم نیوتون درباره‌ی دستگاه ذرات ۳۴۸

قانون دوم نیوتون درباره‌ی دستگاه ذرات ۳۴۹

۹-۳ تکانه‌ی خطی ۳۵۴

تکانه‌ی خطی ۳۵۴

تکانه‌ی خطی دستگاه ذرات ۳۵۵

۹-۴ برخورد و ضربه ۳۵۶

برخورد و ضربه ۳۵۷

۹-۵ پایستگی تکانه‌ی خطی ۳۶۲

پایستگی تکانه‌ی خطی ۳۶۲

۹-۶ تکانه و انرژی جنبشی در برخوردها ۳۶۶

تکانه و انرژی جنبشی در برخوردها ۳۶۷

برخوردهای ناکشسان یک بعدی ۳۶۸

عنوان	صفحه
۹-۷ برخوردهای کشسان یک بعدی	**۳۷۱**
برخوردهای کشسان یک بعدی	۳۷۲
۹-۸ برخوردهای دو بعدی	**۳۷۶**
برخوردهای دو بعدی	۳۷۷
۹-۹ دستگاه‌های با جرم متغیر: موشک	**۳۷۸**
دستگاه‌های باجرم متغیر: موشک	۳۷۸
مرور و چکیده‌ی مطالب	۳۸۱
پرسش‌ها	۳۸۳
مسئله‌ها	۳۸۶

فصل ۱۰

دوران ۴۰۷

عنوان	صفحه
۱۰-۱ متغیرهای دورانی	**۴۰۷**
فیزیک در این باره چه می‌گوید؟	۴۰۸
متغیرهای حرکت دورانی	۴۰۹
آیا کمیت‌های زاویه‌ای کمیت‌هایی برداری‌اند؟	۴۱۶
۱۰-۲ حرکت دورانی با شتاب زاویه‌ای ثابت	**۴۱۸**
حرکت دورانی با شتاب زاویه‌ای ثابت	۴۱۸
۱۰-۳ رابطه‌ی میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای	**۴۲۱**
رابطه‌ی میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای	۴۲۱
۱۰-۴ انرژی جنبشی دورانی	**۴۲۶**
انرژی جنبشی دورانی	۴۲۶
۱۰-۵ محاسبه‌ی لختی دورانی	**۴۲۸**
محاسبه‌ی لختی دورانی	۴۲۹
۱۰-۶ گشتاور نیرو	**۴۳۴**
گشتاور نیرو	۴۳۵
۱۰-۷ قانون دوم نیوتون در حرکت دورانی	**۴۳۷**
قانون دوم نیوتون در حرکت دورانی	۴۳۷
۱۰-۸ کار و انرژی جنبشی دورانی	**۴۴۲**
کار و انرژی جنبشی دورانی	۴۴۲

عنوان	صفحه
مرور و چکیده‌ی مطالب	۴۴۶
پرسش‌ها	۴۴۸
مسئله‌ها	۴۵۰

فصل ۱۱

غلتش، گشتاور نیرو و تکانه‌ی زاویه‌ای ۴۶۷

عنوان	صفحه
۱۱-۱ حرکت غلتشی به صورت ترکیبی از حرکت‌های انتقالی و دورانی	**۴۶۷**
فیزیک در این باره چه می‌گوید؟	۴۶۷
حرکت غلتشی به صورت ترکیبی از حرکت‌های انتقالی و دورانی	۴۶۸
۱۱-۲ نیروها و انرژی جنبشی در حرکت غلتشی	**۴۷۰**
انرژی جنبشی در حرکت غلتشی	۴۷۱
نیروها در حرکت غلتشی	۴۷۲
۱۱-۳ طرز کار یو یو	**۴۷۶**
طرز کار یو یو	۴۷۷
۱۱-۴ مروری بر گشتاور نیرو	**۴۷۸**
مروری بر گشتاور نیرو	۴۷۸
۱۱-۵ تکانه‌ی زاویه‌ای	**۴۸۱**
تکانه‌ی زاویه‌ای	۴۸۲
۱۱-۶ شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون	**۴۸۴**
شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون	۴۸۵
۱۱-۷ تکانه‌ی زاویه‌ای یک جسم صُلب	**۴۸۸**
تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه ذرات	۴۸۹
تکانه‌ی زاویه‌ای جسم صُلب چرخنده به دور محور ثابت	۴۹۰
۱۱-۸ پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای	**۴۹۲**
پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای	۴۹۲
۱۱-۹ حرکت تقدیمی ژیروسکوپ	**۴۹۸**
حرکت تقدیمی ژیروسکوپ	۴۹۸
مرور و چکیده‌ی مطالب	۵۰۰

عنوان	صفحه
پرسش‌ها	۵۰۱
مسئله‌ها	۵۰۳

فصل ۱۲

تعادل و کشسانی ۵۱۹

۱۲–۱ تعادل	**۵۱۹**
فیزیک در این باره چه می‌گوید؟	۵۱۹
تعادل	۵۲۰
شرط‌های لازم تعادل	۵۲۲
گرانیگاه	۵۲۴
۱۲–۲ چند مثال درباره‌ی تعادل ایستا	**۵۲۶**
چند مثال درباره‌ی تعادل ایستا	۵۲۶
۱۲–۳ کشسانی	**۵۳۳**
ساختارهای نامعین	۵۳۴
کشسانی	۵۳۵
مرور و چکیده‌ی مطالب	۵۴۱
پرسش‌ها	۵۴۱
مسئله‌ها	۵۴۴

فصل ۱۳

گرانش ۵۶۳

۱۳–۱ قانون گرانش نیوتون	**۵۶۳**
فیزیک در این باره چه می‌گوید؟	۵۶۳
قانون گرانش نیوتون	۵۶۴
۱۳–۲ گرانش و اصل برهم نهی	**۵۶۷**
گرانش و اصل برهم نهی	۵۶۸
۱۳–۳ گرانش در نزدیکی سطح زمین	**۵۷۱**
گرانش در نزدیکی سطح زمین	۵۷۱
۱۳–۴ گرانش در درون زمین	**۵۷۵**
گرانش در درون زمین	۵۷۵
۱۳–۵ انرژی پتانسیل گرانشی	**۵۷۷**
انرژی پتانسیل گرانشی	۵۷۸
۱۳–۶ سیاره‌ها و ماهواره‌ها: قانون‌های کپلر	**۵۸۳**
سیاره‌ها و ماهواره‌ها: قانون‌های کپلر	۵۸۴
۱۳–۷ مدارها و انرژی ماهواره‌ها	**۵۸۸**
مدارها و انرژی ماهواره‌ها	۵۸۸
۱۳–۸ اینشتین و گرانش	**۵۹۲**
اینشتین و گرانش	۵۹۲
مرور و چکیده‌ی مطالب	۵۹۵
پرسش‌ها	۵۹۶
مسئله‌ها	۵۹۹

پیوست‌ها ۶۱۳

پیوست الف	۶۱۳
پیوست ب	۶۱۵
پیوست پ	۶۱۶
پیوست ت	۶۱۷
پیوست ث	۶۲۱
پیوست ج	۶۲۴
پیوست چ	۶۲۸
پاسخ‌ها	۶۲۹
نمایه‌ی نام‌ها	۶۴۷
فرهنگ‌نامه	۶۴۸
واژه‌نامه	۶۵۳
کتاب‌شناسی	۶۵۷
نمایه	۶۵۸

پیشگفتار

برنامه‌ریزی منطبق با نیازهای دانش و فنّاوری امروزی کشور، هماهنگ کردن برنامه‌های آموزشی در دانشگاه‌ها و مؤسسه‌های آموزش عالی و معرفی و پیشنهاد منابع درسی ارزنده و معتبر از جمله هدف‌های اساسی شورای عالی برنامه‌ریزی و کمیته‌های تخصصی وابسته به آن را تشکیل می‌دهد. بدین جهت، کتاب **مبانی فیزیک**، تألیف **دیوید هالیدی** و **رابرت رزنیک**، به عنوان کتاب مرجع برای تدریس **فیزیک پایه** در رشته‌های علوم پایه و مهندسی انتخاب شده است.

اینجانبان همواره امیدوار بوده‌ایم که بتوانیم در همکاری و همگامی با هدف‌های **مرکز نشر دانشگاهی** برای تأمین منابع درسی معتبر و مورد تأیید صاحب‌نظران و استادان محترم دانشگاه‌ها سهمی داشته باشیم. ترجمه‌ی سه جلد کتاب **فیزیک**، تألیف هالیدی ــ رزنیک (۱۹۷۷) و چاپ و انتشار آن‌ها توسط مرکز نشر دانشگاهی در سال ۱۳۶۶، سرآغازی برای تحقق یافتن این آرزوها بوده است.

پس از انتشار این کتاب‌ها تصمیم گرفته شد کار ادامه پیدا کند و از این رو برای ترجمه‌ی ویرایش دوم (۱۹۸۶)، ویرایش سوم (۱۹۹۰) و ویرایش ششم (۲۰۰۱) کتاب **مبانی فیزیک**، تألیف هالیدی، رزنیک و واکر اقدام شد و خوشبختانه، توانستیم برگردان فارسی **مبانی فیزیک** را در چهار جلد به مرحله‌ی چاپ و انتشار برسانیم. استقبال خوانندگان عزیز از کتاب‌ها چنان بوده که برخی مجلدهای آن‌ها، در مجموع ویرایش‌های مختلف، تاکنون بیش از ۹۰ بار تجدید چاپ شده است.

امروزه اهمیت کتاب‌های فیزیک پایه به حدی است که گویی ناشران و مؤلفان بزرگ دنیا در زمینه‌ی بالا بردن کیفیت و روزآمد کردن این کتاب‌ها با هم به رقابت پرداخته‌اند. در اهمیت تدوین این گونه کتاب‌ها همین قدر می‌توان گفت که فیزیک‌دانان و مؤلفان صاحب نامی، چون **مارک زیمانسکی**[1]، **فرانسیس سیرز**[2]، **هانس اوهانیان**[3]، **رابرت رزنیک**[4]، **ریموندسِروِی**[5]، **استفن گاسیوروویچ**[6]، **اوژن هِشت**[7]، **ریچارد ویدنر**[8]، **ریچارد فاینمن**[9]، و بسیاری دیگر، پس از سال‌ها تدریس دروس پیشرفته‌ی فیزیک، کسب تجربیات آموزشی و پژوهشی ارزنده و تألیف کتاب‌های تخصصی فیزیک در زمینه‌های مکانیک کوانتومی، نسبیت، فیزیک نوین، اپتیک و ترمودینامیک، دست به تألیف کتاب‌های فیزیک در سطح عمومی و پایه زده‌اند.

مؤلفان کتاب **مبانی فیزیک** به منظور توجه به اهمیت محتوای کتاب‌های فیزیک پایه، تقریباً، هر دو سه سال یک بار ویرایش تازه‌ای شامل تغییرات اساسی در جهت تکامل و ارتقای سطح آموزشی کتاب به خوانندگان و دانشجویان عرضه کرده‌اند. سرعت عرضه‌ی ویرایش‌های جدید چنان بود که مؤلفان با انتشار کتاب **اصول فیزیک**، ویرایش نهم (۲۰۱۱)، عنوان تازه‌ای به کتاب‌های ارزشمند و پرمحتوای خود افزودند. خوشبختانه، اینجانبان موفق شدیم ترجمه‌ی جلدهای ۱، ۲ و ۳ این کتاب را به دوستداران گرامی فیزیک تقدیم کنیم.

اینک خدای متعال را سپاس می‌گوییم که به دنبال ترجمه‌ی چهار دوره کتاب‌های **فیزیک**، **مبانی فیزیک** و **اصول فیزیک** توفیق یافته‌ایم که برای پنجمین دوره به ترجمه‌ی کتاب **مبانی فیزیک** (ویرایش دهم، سال ۲۰۱۴)، تألیف **دیوید هالیدی**، **رابرت رزنیک** و **جرل واکر**، بپردازیم و آن را به دانشجویان عزیز رشته‌های علوم پایه و مهندسی تقدیم کنیم.

این کتاب نسبت به کتاب‌های پیشین مؤلفان دارای تغییرات و همراه با اصلاحات قابل توجه و آموزنده‌ای است که مهم‌ترین آن‌ها عبارت‌اند از:

۱. تقسیم‌بندی فصل‌های کتاب به مفاهیم عمده‌تر از **بخش** به عنوان **پودمان**، که هر پودمان بخش‌هایی را دربرمی‌گیرد. مقدمه‌ی هر پودمان شامل دو قسمت مهم است.

(الف) هدف‌های آموزشی: در این قسمت انتظار می‌رود پس از خواندن مطالب پودمان توانایی درک و کاربرد مفاهیم موردنظر کسب شود.

(ب) نکته‌های کلیدی: در این قسمت چکیده‌ای از مفاهیم مطرح شده در پودمان یادآوری می‌شود.

۲. **فیزیک در این باره چه می‌گوید؟** بخش نخست هر فصل به این عنوان اختصاص دارد و مقدمه‌ی جالبی برای معرفی کردن موضوع‌ها و مفاهیم فیزیکی ارائه شده در فصل است.

---

1. Mark W.Zemansky
2. Francis W.Sears
3. Hans C.Ohanian
4. Robert Resnick
5. Raymond A.Serway
6. Stephen Gasiorowicz
7. Eugen Hecht
8. Richard T.Weidner
9. Richard P.Feynman

۳. خودآزمایی‌ها: هر فصل شامل چند خودآزمایی است که در پایان برخی بخش‌ها مطرح شده است و بدین وسیله دانشجو در ارتباط با موضوع بخش مورد آزمون قرار می‌گیرد.

۴. مسئله‌های نمونه: این مسئله‌ها چنان انتخاب شده‌اند که راه‌حل‌ها را با روش‌هایی استدلالی نشان می‌دهند و اغلب شامل راه‌حل‌های عددی و تشریحی هستند.

۵. نکته‌های کلیدی در مسئله‌های نمونه: این نکته‌ها توجه دانشجو را به مفاهیم اساسی مربوط به ریشه‌ی حل مسئله‌ی نمونه جلب می‌کنند. در این نکته‌ها روشی به کار برده شده است که برای حل کردن بسیاری از مسئله‌های دیگر آمادگی لازم را فراهم می‌کند.

۶. مرور و چکیده‌ی مطالب: این قسمت چکیده‌ای از مطالب فصل و شامل مفاهیم اصلی است. خواندن این بخش دانشجو را از مطالعه‌ی عمیق و دقیق محتویات فصل بی‌نیاز نمی‌کند.

۷. پرسش‌ها: این قسمت به درک مطلب و توانایی استدلال نیاز دارد و پاسخ‌ها اغلب تشریحی هستند. ***پاسخ‌های پرسش‌های با شماره‌ی فرد در پایان کتاب آمده‌اند.***

۸. مسئله‌ها: این مسئله‌ها بر پایه‌ی ترتیب بخش‌های هر فصل دسته‌بندی شده‌اند. در سمت راست شماره‌ی هر مسئله یک، دو یا سه ستاره (*) گذاشته شده است که درجه‌ی دشواری حل مسئله را نشان می‌دهد. ***پاسخ‌های مسئله‌های با شماره‌ی فرد در پایان کتاب آمده‌اند.***

۹. مسئله‌های بیشتر: این مسئله‌ها ترتیب مشخصی ندارند و دانشجو خود باید تشخیص دهد که هر مسئله را با استفاده کردن از مطالب و مفاهیم مطرح شده در کدام بخش می‌تواند حل کند.

۱۰. زمینه‌ی متفاوت مطالب مهم کتاب: در سراسر کتاب برخی از مطالب دارای زمینه‌ی متفاوتی با زمینه‌ی سفید کتاب هستند، که چکیده‌ی مطالب مهم، فرمول‌های مهم، خودآزمایی‌ها و مسئله‌های نمونه، از آن جمله‌اند.

۱۱. شرح روی شکل‌ها: علاوه بر تشریح مطالب مربوط به شکل‌ها در متن کتاب، در جاهای مناسب هم در کنار اجزاء شکل‌ها و درون کادرهایی توضیحات دقیق‌تری درباره‌ی شکل‌ها داده شده است.

کتاب حاضر جلد اول از دوره‌ی چهار جلدی ترجمه‌ی **مبانی فیزیک** (ویرایش دهم، سال ۲۰۱۴) و شامل ۱۳ فصل اول کتاب است، که برنامه‌ی **فیزیک پایه** (۱) رشته‌های علوم پایه، و فیزیک (مکانیک) رشته‌های مهندسی را دربرمی‌گیرد.

در ترجمه‌ی کتاب با تکیه بر تجربه‌های کسب شده به مدت نزدیک به ۴۰ سال در زمینه‌ی ترجمه و تألیف کتاب‌های عمومی و تخصصی فیزیک، تدریس فیزیک پایه و همکاری با مؤسسه‌های علمی و فرهنگی گوناگون، کوشیده‌ایم روانی و شیوایی مطالب را همراه با مفهوم و ارزش علمی آن‌ها حفظ کنیم و تازه‌ترین شیوه‌های نگارش و برابر نهاده‌های واژه‌ها و اصطلاحات انگلیسی را با توجه به مصوبه‌های فرهنگستان زبان و ادب فارسی به‌کار ببریم.

با اعتقاد به اینکه ***در ترجمه‌ی متن‌های علمی باید بیشتر انتقال علم مورد نظر باشد تا انتقال فرهنگ***، کوشیده‌ایم تا حد امکان به جنبه‌های فرهنگی متن فارسی کتاب چهره‌ای آشناتر بدهیم. از این‌رو، ضمن تلاش در تحقق این باور در ابعاد گوناگون، در موارد مقتضی به جای نام‌های اشخاص و مکان‌های مندرج در متن اصلی از نام‌های ایرانی استفاده شده است.

در پایان کتاب، علاوه بر پیوست‌های متن اصلی و پاسخ‌های خودآزمایی‌ها و پرسش‌ها و مسئله‌های با شماره‌ی فرد هر فصل، **نمایه‌ی نام‌ها** و معرفی کوتاه دانشمندان فیزیک ذکر شده در متن اصلی، تعریف مبسوط‌تر برخی اصطلاحات کلیدی متن، تحت عنوان **فرهنگ‌نامه**، معادل‌های برخی واژه‌های انگلیسی به کار رفته در متن، تحت عنوان **واژه‌نامه** و مشخصات برخی مرجع‌های فارسی و انگلیسی مورد استفاده در متن، تحت عنوان **کتاب‌شناسی** آمده است. در گزینش معادل‌ها کوشش شده است تا حد امکان واژه‌ها و اصطلاحات برای خوانندگان آشنا باشد تا در حین مطالعه‌ی کتاب ابهامی پیش نیاید.

چاپ و نشر این کتاب توسط **شرکت آموزشی و فرهنگی مبتکران** صورت گرفته است و بجاست از مدیر کاردان و اهل دانش و فرهنگ این شرکت **جناب آقای یحیی دهقانی**، که در نهایت سخاوتمندی اندوخته‌ی مادی و معنوی خویش را در راه تعالی و ترقی ارزش‌های آموزشی، علمی و فرهنگی کشور به کار گرفته است، تشکر و قدردانی کنیم.

هم‌چنین، از کارکنان شرکت آموزشی و فرهنگی مبتکران، به‌ویژه **خانم لیلا مهرعلی‌پور**، به خاطر حروف‌نگاری دقیق متن، صفحه‌آرایی مناسب و شایسته و دقت در انتقال و آرایش شکل‌های

کتاب، **آقای خدایار مبیّن** به خاطر راهنمایی در انتخاب شیوه‌ی حروف‌نگاری مناسب و تهیه‌ی امکانات لازم برای چاپ و نظارت فنی بر تولید کتاب، **خانم‌ها سمیرا ایمان‌فرد و سمانه ایمان‌فرد،** به‌خاطر انتقال دقیق شکل‌ها وتنظیم مناسب نوشته‌های روی شکل‌ها، **خانم ملیحه محمدی،** به خاطر اسکن کردن برخی شکل‌های کتاب، **خانم مینا هرمزی،** به خاطر طراحی ماهرانه و زیبای جلد کتاب و **خانم کبری مرادی،** به خاطر نظارت بر آماده‌سازی امکانات و نظارت برچاپ کتاب، صمیمانه سپاسگزاریم.

امید است با ارائه‌ی این خدمت ناچیز توفیق انجام دادن وظیفه‌ی خود در قبال شیفتگان دانش فیزیک، دانش‌پژوهان و دانشجویان عزیز کشورمان را داشته باشیم. اذعان می‌کنیم که با همه‌ی دقت و وسواسی که در کار ترجمه و تهیه و تدوین متن فارسی و در مرحله‌های گوناگون تولید کتاب به کار رفته است، بی‌شک کتاب عاری از خطا و لغزش نیست. تنها لطف و عنایت استادان، صاحب‌نظران و دانشجویان گرامی در یادآوری موارد لغزش می‌تواند کمک ارزنده‌ای در رفع و جبران خطاها و کاستی‌ها باشد. پیشاپیش از این محبت و همکاری سپاسگزاری می‌کنیم.

نعمت‌الله گلستانیان ـ محمود بهار

اعضای هیئت علمی دانشکده‌ی فیزیک دانشگاه خوارزمی

فصل ۱

اندازه‌گیری

۱-۱ اندازه‌گیری کمیت‌ها، از جمله طول‌ها

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱-۱ کمیت‌های اصلی مربوط به دستگاه SI را تشخیص دهید.

۱-۲ پیشوندهای مربوط به یکاهای SI با فراوان‌ترین کاربردها را نام ببرید.

۱-۳ یکاها (در اینجا طول، مساحت و حجم) را با استفاده کردن از تبدیل‌های زنجیره‌ای تغییر دهید.

۱-۴ توضیح دهید که متر برحسب تندی نور در خلاء تعریف می‌شود.

نکته‌های کلیدی

● دانش فیزیک مبتنی بر اندازه‌گیری کمیت‌های فیزیکی است. کمیت‌های فیزیکی ویژه‌ای به عنوان کمیت‌های اصلی (مانند طول، زمان و جرم) انتخاب شده‌اند؛ هر یک از این کمیت‌ها برحسب یک استاندارد تعریف شده و دارای یکای اندازه‌گیری (مانند متر، ثانیه و کیلوگرم) است. کمیت‌های فیزیکی دیگر برحسب کمیت‌های اصلی و استاندارها و یکاهای آن‌ها تعریف می‌شوند.

● دستگاه یکای مورد تأکید در این کتاب، دستگاه بین‌المللی یکاها (SI) است. سه کمیت فیزیکی درج شده در جدول ۱-۱ در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار خواهند گرفت. استاندارها، که باید هم دسترس‌پذیر و هم تغییرناپذیر باشند، با توافق بین‌المللی برای این کمیت‌های اصلی به وجود آمده‌اند. این استانداردها در همه‌ی اندازه‌گیری‌های فیزیکی، در مورد کمیت‌های اصلی و کمیت‌های مشتق شده از آن‌ها، به کار می‌روند. برای ساده کردن نمادگذاری اندازه‌گیری، از نمادگذاری علمی و پیشوندهای جدول ۱-۲ استفاده می‌شود.

● تبدیل یکاها را با استفاده کردن از تبدیل‌های زنجیره‌ای، که در آن داده‌های اولیه به گونه‌ای پی‌درپی در ضریب‌های تبدیل ضرب و به صورت واحد نوشته می‌شوند، می‌توان انجام داد. برای این کار، یکاها مانند کمیت‌های جبری آنقدر دستکاری می‌شوند تا فقط یکاهای مورد نظر باقی بمانند.

● متر به صورت مسافت پیموده شده توسط نور در یک بازه‌ی زمانی خاص، تعریف می‌شود.

فیزیک در این باره چه می‌گوید؟

پایه‌ی دانش و مهندسی، اندازه‌گیری و مقایسه است. بنابراین، برای پی بردن به چگونگی

اندازه‌گیری اشیا و مقایسه کردن آن‌ها به قاعده‌هایی نیاز داریم و برای تعیین یکاهای مربوط به این اندازه‌گیری‌ها و مقایسه‌ها باید آزمایش‌هایی انجام دهیم. یکی از هدف‌های فیزیک (و نیز مهندسی)، طراحی کردن و به پیش بردن این آزمایش‌هاست.

برای مثال، فیزیک‌دان‌ها می‌کوشند ساعت‌های خیلی دقیقی بسازند، به گونه‌ای که بتوانند هر زمان یا هر بازه‌ی زمانی را با دقت بسیار زیاد، معین و مقایسه کنند. شما ممکن است با شگفتی بپرسید که آیا چنین دقتی به واقع لازم است، یا چنین تلاشی ارزشمند است. در اینجا درباره‌ی ارزش این تلاش‌ها اشاره می‌کنیم که، بدون داشتن ساعت‌های خیلی دقیق، **سیستم مکان‌یابی جهانی** (GPS[1]) مورد استفاده در ناوبری سراسر دنیا بی‌فایده خواهد بود.

اندازه گرفتن اشیا

ما با آموختن چگونگی اندازه‌گیری کمیت‌های مربوط به **فیزیک**، دانش فیزیک را فرا می‌گیریم. از جمله‌ی این کمیت‌ها می‌توان طول، زمان، جرم، دما، فشار، و جریان الکتریکی را نام برد.

هر **کمیت فیزیکی** از راه مقایسه با یک **استاندارد** برحسب یکاهای آن کمیت اندازه‌گیری می‌شود. **یکا** نام یگانه‌ای است که به اندازه‌های یک کمیت نسبت می‌دهیم ـ چنان‌که **متر** (با نماد m) را برای کمیت طول در نظر می‌گیریم. استاندارد، درست متناظر با ۱٫۰ برابر یکای کمیت است. همان‌طور که خواهیم دید، استاندارد طول، که درست متناظر با ۱٫۰ متر است، مسافتی است که نور در خلاء در کسر معینی از ثانیه می‌پیماید. هر یکا و استاندارد مربوط به طول را به هر نحو دلخواه می‌توان تعریف کرد. اما آنچه اهمیت دارد این است که تعریف‌ها چنان معقول و عملی باشند که در سراسر جهان مورد پذیرش اهل دانش واقع شوند.

وقتی استانداردی را، مثلاً برای طول، در نظر گرفتیم باید روش‌هایی به کار ببریم که به کمک آن‌ها بتوان هر طولی، مانند شعاع اتم هیدروژن، فاصله‌ی میان چرخ‌های تخته‌ی اسکیت، یا، فاصله‌ی یک ستاره از زمین، را برحسب این استاندارد بیان کرد. خط‌کش، که وسیله‌ای برای برآورد استاندارد طول است، یکی از این گونه روش‌های اندازه‌گیری طول را در اختیار ما می‌گذارد. اما در برخی اندازه‌گیری‌ها باید از روش‌های غیرمستقیم استفاده کرد. زیرا، به عنوان مثال، برای اندازه‌گیری شعاع اتم، یا فاصله‌ی یک‌ستاره از زمین، نمی‌توان خط‌کش را به‌کار برد.

کمیت‌های اصلی. عده‌ی کمیت‌های فیزیکی به قدری زیاد است که سازمان دادن آن‌ها خود مسئله‌ای است. اما خوشبختانه، این کمیت‌ها از هم مستقل نیستند. به عنوان مثال، تندی برابر با نسبت طول به زمان است. بنابراین، آنچه باید کرد این است که ـ با توافق بین‌المللی ـ عده‌ی اندکی کمیت فیزیکی، مانند طول و زمان را انتخاب کنیم و فقط برای آن‌ها استانداردهایی را در نظر بگیریم. آنگاه، کمیت‌های فیزیکی دیگر را برحسب این **کمیت‌های اصلی** و استانداردهای آن‌ها (به نام ***استانداردهای اصلی***) تعریف کنیم. به طور مثال، سرعت برحسب کمیت‌های اصلی طول و زمان و استانداردهای وابسته به آن‌ها تعریف می‌شود.

1. Global Positioning System (GPS)

استانداردهای اصلی باید هم دسترس‌پذیر و هم تغییرناپذیر باشند. اگر استاندارد طول را به‌صورت فاصله‌ی میان بینی یک شخص تا نوک انگشت اشاره، در حالت کشیده بودن کامل بازو، تعریف کنیم استانداردی خواهیم داشت که به طور مسلم دسترس‌پذیر است، اما تغییرناپذیر نیست و از شخصی به شخص دیگر تغییر می‌کند. نیاز به دقت در دانش و مهندسی ما را بر آن می‌دارد که در درجه‌ی نخست به تغییرناپذیری توجه کنیم. آنگاه، به تلاشی جدی در راه تهیه‌کردن نمونه‌هایی از استانداردهای اصلی که برای مؤسسه‌های متقاضی دسترس‌پذیر باشند، بپردازیم.

دستگاه بین‌المللی یکاها

در سال ۱۹۷۱/۱۳۵۰* چهاردهمین مجمع عمومی اوزان و مقیاس‌ها هفت کمیت اصلی، که اساس دستگاه بین‌المللی یکاها** (با نماد SI با توجه به سرنام‌های عبارت فرانسوی آن) یا ***دستگاه متریک***، را تشکیل می‌دهند انتخاب کرد. جدول ۱-۱ یکاهای مربوط به سه کمیت اصلی ـ طول، زمان و جرم ـ را که در فصل‌های آغازین این کتاب بیشتر به کار می‌روند، نشان می‌دهد. این یکاها به گونه‌ای تعریف شده‌اند که در حد «اندازه‌های عادی» باشند.

جدول ۱-۱ یکاهای مربوط به سه کمیت اصلی SI

کمیت	نام یکا	نماد یکا
طول	متر	m
زمان	ثانیه	s
جرم	کیلوگرم	kg

برخی ***یکاهای فرعی*** SI برحسب این سه یکا تعریف می‌شوند. مثلاً، یکای توان در SI ، به نام **وات** (با نماد W)، برحسب یکاهای مربوط به جرم، طول و زمان نوشته می‌شود. بنابراین، همان‌طور که در فصل ۷ خواهیم دید، می‌توان نوشت

$$\text{۱ (وات)} = \text{۱}\mathrm{W} = \text{۱}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{\text{۲}}/\mathrm{s}^{\text{۳}} \qquad (\text{۱-۱})$$

که در آن یکای جمله‌ی سمت راست به‌صورت کیلوگرم ـ مترمربع بر مکعب ثانیه، خوانده می‌شود.

برای نشان دادن مقادیر بسیار بزرگ، یا بسیار کوچک، که اغلب، در فیزیک وجود دارند، از ***نمادگذاری علمی*** با به‌کار بردن توان‌های ۱۰ استفاده می‌شود. با این نمادگذاری می‌توان‌نوشت

$$\text{۳۵۶۰۰۰۰۰۰}\mathrm{m} = \text{۳٫۵۶}\times\text{۱۰}^{\text{۹}}\mathrm{m} \qquad (\text{۲-۱})$$

و

$$\text{۰٫۰۰۰۰۰۰۴۹۲}\mathrm{s} = \text{۴٫۹۲}\times\text{۱۰}^{-\text{۷}}\mathrm{s} \qquad (\text{۳-۱})$$

نمادهای علمی یاد شده را در کاربردهای رایانه‌ای، اغلب، به‌صورت ۳٫۵۶E۹ و ۴٫۹۲E−۷ می‌نویسند، که در آن E نشان‌دهنده‌ی «نمای ۱۰» است. در برخی حسابگرها نمادها را باز هم مختصرتر می‌کنند و E را با فاصله‌ی خالی نشان می‌دهند.

در جاهایی که با مقادیر بسیار بزرگ، یا بسیار کوچک، سروکار داریم از پیشوندهای درج شده در جدول ۱-۲ استفاده می‌کنیم. در این جدول، چنان‌که دیده می‌شود، هر پیشوند

---

* عدد سمت راست ممیز نماینده‌ی سال هجری شمسی و عدد سمت چپ نماینده‌ی سال میلادی است. ـ م.

** دستگاه بین‌المللی یکاها با توجه به سرنام‌های عبارت فرانسوی Le Système International d'unités با نماد SI نوشته می‌شود. ـ م.

نشان‌دهنده‌ی توان معینی از ۱۰ به‌صورت یک ضریب است. قرار گرفتن پیشوند در جلو یکی از یکاهای SI به این معنی است که آن یکا باید در ضریب وابسته به پیشوند ضرب شود. بدین ترتیب، مقدار یک توان الکتریکی معین را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$1/27 \times 10^{9}\ (\text{وات}) = 1/27\ (\text{گیگاوات}) = 1/27\,\mathrm{GW} \qquad (۱-۴)$$

یا، مقدار یک بازه‌ی زمانی معین را می‌توان چنین نوشت

$$2/35 \times 10^{-9}\,\mathrm{s} = 2/35\ (\text{نانو ثانیه}) = 2/35\,\mathrm{ns} \qquad (۱-۵)$$

برخی پیشوندها را که برای میلی‌متر، سانتی‌متر، کیلوگرم، و مگابایت به‌کار رفته‌اند، احتمالاً می‌شناسید.

جدول ۱-۲ پیشوندهای مربوط به یکاهای SI

ضریب	پیشوند*	نماد	ضریب	پیشوند*	نماد
10^{-1}	دِسی	d	10^{24}	یوتا	Y
$\mathbf{10^{-2}}$	**سانتی**	**c**	10^{21}	زِتا	Z
$\mathbf{10^{-3}}$	**میلی**	**m**	10^{18}	اِکزا	E
$\mathbf{10^{-6}}$	**میکرو**	$\boldsymbol{\mu}$	10^{15}	پِتا	P
$\mathbf{10^{-9}}$	**نانو**	**n**	10^{12}	تِرا	T
$\mathbf{10^{-12}}$	**پیکو**	**p**	$\mathbf{10^{9}}$	**گیگا**	**G**
10^{-15}	فِمتو	f	$\mathbf{10^{6}}$	**مگا**	**M**
10^{-18}	آتو	a	$\mathbf{10^{3}}$	**کیلو**	**k**
10^{-21}	زِپتو	z	10^{2}	هِکتو	h
10^{-24}	یوکتو	y	10^{1}	دِکا	da

* پیشوندهای با کاربرد متداول‌تر با حروف سیاه نشان داده شده‌اند.

تغییر دادن یکاها

گاهی نیاز پیدا می‌شود که یک کمیت فیزیکی داده شده با یک یکا را برحسب یکای دیگر بیان کنیم. برای این کار از روشی به نام ***تبدیل‌های زنجیره‌ای*** استفاده می‌شود. در این روش مقدار اصلی کمیت را در یک **ضریب تبدیل** (یعنی نسبتی از یکاها که برابر با واحد است) ضرب می‌کنیم. به‌عنوان مثال، چون یک‌دقیقه و ۶۰ ثانیه بازه‌های زمانی یکسانی هستند، داریم

$$\frac{1\,\mathrm{min}}{60\,\mathrm{s}} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{60\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{min}} = 1$$

بنابراین، نسبت‌های $(60\,\mathrm{s})/(1\,\mathrm{min})$ و $(1\,\mathrm{min})/(60\,\mathrm{s})$ را می‌توان به عنوان ضریب‌های تبدیل به کار برد. نوشتن این رابطه‌ها به صورت $1 = \frac{1}{60}$ یا $1 = 60$، درست نیست. ***عدد*** و ***یکای*** مربوط به هر کمیت باید همیشه با هم نوشته شوند.

چون با ضرب کردن هر کمیت در واحد، مقدار کمیت تغییر نمی‌کند ضریب‌های تبدیل را

در هر جا و به هر اندازه که مفید باشند می‌توان به کاربرد. در تبدیل زنجیره‌ای باید از ضریب‌ها به گونه‌ای استفاده شود که یکاهای ناخواسته حذف شوند. مثلاً، برای تبدیل ۲ دقیقه به ثانیه، داریم

$$۲\,\mathrm{min} = (۲\,\mathrm{min})(۱) = (۲\,\cancel{\mathrm{min}})\left(\frac{۶۰\,\mathrm{s}}{۱\,\cancel{\mathrm{min}}}\right) = ۱۲۰\,\mathrm{s} \qquad (۱-۶)$$

اگر ضریب تبدیلی را به صورتی به کار برید که یکاهای ناخواسته حذف نشدند، ضریب را وارون کنید و عمل را دوباره انجام دهید. در هنگام تبدیل کردن، یکاها از همان قاعده‌ی جبری مربوط به متغیرها و عددها پیروی می‌کنند.

در پیوست ت در پایان کتاب، ضریب‌های تبدیل میان SI و دستگاه‌های یکاهای غیر SI که هنوز در ایالات متحدامریکا به‌کار می‌روند، درج شده‌است. اما درجدول‌های این پیوست‌به‌جای ضریب‌های تبدیل به صورت کسر از روشی به صورت «۱ min = ۶۰ s» استفاده شده است. بنابراین، در هر کسر مورد نیاز می‌توانید درباره‌ی صورت و مخرج آن تصمیم مقتضی بگیرید.

طول

در سال ۱۷۹۲/۱۱۷۱ جمهوری نوپای فرانسه دستگاه اوزان و مقیاس‌های جدیدی را بنا نهاد. شالوده‌ی این دستگاه متر بود که برابر با یک ده میلیونوم فاصله‌ی میان قطب شمال تا استوا تعریف می‌شد. بعدها، به دلیل عملی نبودن این تعریف، استاندارد وابسته به زمین کنار گذاشته شد و متر به صورت فاصله‌ی میان دو خط باریک حک شده‌ی نزدیک به دو سر میله‌ای از جنس پلاتین ـ ایریدیوم، به نام **میله‌ی متر استاندارد**، تعریف شد. این میله در اداره‌ی بین‌المللی اوزان و مقیاس‌ها، واقع در نزدیکی پاریس، نگهداری می‌شود. نمونه‌های بدلی دقیقی از میله‌ی متر استاندارد به آزمایشگاه‌های استانداردکننده در سراسر دنیا فرستاده شدند. این **استانداردهای ثانوی** را برای تولید استانداردهای دیگر به کار می‌بردند و بدین ترتیب، استانداردها باز هم دسترس‌پذیرتر می‌شدند، به گونه‌ای که، سرانجام، هر وسیله‌ی اندازه‌گیری اعتبار خود را از میله‌ی متر استاندارد از طریق رشته‌ی پیچیده‌ای از مقایسه‌ها کسب می‌کرد.

سرانجام، معلوم شد که برای استاندارد طول دقتی بسیار بیش از فاصله‌ی میان دو خراش باریک بر روی یک میله‌ی فلزی مورد نیاز است. در سال ۱۹۶۰/۱۳۳۹ برای متر، استاندارد تازه‌ای که مبتنی بر طول موج نور بود پذیرفته شد. برای این منظور، استاندارد مربوط به متر به‌صورت ۱۶۵۰۷۶۳٫۷۳ برابر طول موج نور خاص نارنجی ـ سرخ گسیل شده از اتم‌های کریپتون ـ۸۶ (ایزوتوپ یا نوع خاصی از کریپتون) در لوله‌ی تخلیه‌ی الکتریکی، که در همه جای دنیا قابل فراهم شدن است، باز تعریف شد. این عده‌ی نه چندان گِرد از طول موج‌ها را به‌گونه‌ای انتخاب کردند که استاندارد جدید به استاندارد میله‌ی متر نزدیک باشد.

اما به سال ۱۹۸۳/۱۳۶۲ نیاز به دقت بیشتر به جایی رسید که حتی استاندارد کریپتون ـ۸۶ هم نمی‌توانست پاسخ‌گو باشد. در آن سال گام بزرگی برداشته شد و متر به صورت مسافت پیموده شده توسط نور در یک بازه‌ی زمانی مشخص باز تعریف شد. در هفدهمین مجمع

اوزان و مقیاس‌ها **متر** بدین گونه تعریف شد:

متر طول مسیری است که نور دربازه‌ی زمانی $\frac{۱}{۲۹۹۷۹۲۴۵۸}$ ثانیه در خلأ می‌پیماید.

این بازه‌ی زمانی چنان انتخاب شد که تندی نور c، درست برابر باشد با

$$c = ۲۹۹۷۹۲۴۵۸ \mathrm{m/s}$$

اندازه‌گیری‌های تندی نور چنان دقیق انجام شده‌اند که سبب شده است تندی نور به عنوان کمیتی تعریف شده پذیرفته شود و برای باز تعریف متر به کار رود.

جدول ۱-۳ گستره‌ی وسیعی از طول‌ها، از اندازه‌ی عالم گرفته (سطر اول جدول) تا ابعاد اشیای بسیار ریز، را نشان می‌دهد.

رقم‌های با معنی و رقم‌های اعشاری

فرض کنید مسئله‌ای را حل می‌کنید که در آن هر مقدار متشکل از دو رقم است. این رقم‌ها را **رقم‌های با معنی** می‌نامند و آن‌ها عده‌ی رقم‌هایی را نشان می‌دهند که شما برای گزارش پاسخ نهایی می‌توانید به کار ببرید. اگر داده‌ها با دو رقم با معنی ارائه شده باشند، پاسخ نهایی تنها باید دو رقم با معنی داشته باشد. اما بسته به حالتی که بر روی ماشین حساب انتخاب می‌شود، ممکن است رقم‌های بیشتری نمایش داده شوند. این رقم‌های اضافی بی‌معنی هستند.

در این کتاب، نتیجه‌های نهایی محاسبات، اغلب، گِرد شده‌اند تا با کم‌ترین تعداد رقم‌های با معنی در داده‌ها سازگار باشند. (با وجود این، گاهی یک رقم با معنی اضافی حفظ می‌شود). هرگاه آخرین رقم ۵ یا بیشتر باشد، آن رقم را حذف و به رقم پیشی یک واحد اضافه می‌کنیم؛ در غیر این صورت به آن رقم دست نمی‌زنیم. برای مثال، ۱۱/۳۵۱۶ تا سه رقم با معنی به‌صورت ۱۱/۳ گِرد می‌شود. (در این کتاب، پاسخ‌های مسئله‌های نمونه، به طور معمول، با نماد = به جای ≈ نشان داده شده‌اند، حتی اگر گِرد شده باشند).

وقتی عددی مانند ۳/۱۵ یا $۳/۱۵ \times ۱۰^{۳}$، در مسئله به وجود می‌آید، عده‌ی رقم‌های با معنی مشخص است، اما در مورد عدد ۳۰۰۰ چطور؟ آیا می‌توان گفت که این عدد یک رقم با معنی دارد (۳×۱۰^{۳})؟ یا می‌توان گفت که این عدد چهار رقم با معنی دارد ($۳/۰۰۰ \times ۱۰^{۳}$)؟ در این کتاب، فرض می‌کنیم که در عددی مانند ۳۰۰۰ همه‌ی صفرها با معنی‌اند، اما بهتر است در جای دیگر از این فرض استفاده نکنیم.

رقم‌های با معنی را با ***رقم‌های اعشاری*** اشتباه نکنید. طول‌های ۳/۵۶m، ۳۵/۶mm و ۰/۰۰۳۵۶m را در نظر بگیرید. این هر سه طول سه رقم با معنی دارند، اما به ترتیب، دارای یک، دو و پنج رقم اعشاری هستند.

جدول ۱-۳ برخی طول‌های تقریبی

اندازه‌گیری	طول برحسب متر
فاصله تا نخستین کهکشان‌های تشکیل شده	۲×۱۰^{۲۶}
فاصله تا کهکشان زن به زنجیربسته (امرأةالمسلسله)	۲×۱۰^{۲۲}
فاصله تا نزدیک‌ترین ستاره (پروکزیما قنطورس)	۴×۱۰^{۱۶}
فاصله تا سیّاره‌ی پلوتو	۶×۱۰^{۱۲}
شعاع زمین	۶×۱۰^{۶}
ارتفاع قله‌ی اورست	۹×۱۰^{۳}
ضخامت برگ کاغذ	۱×۱۰^{-۴}
طول یک ویروس نوعی	۱×۱۰^{-۸}
شعاع اتم هیدروژن	۵×۱۰^{-۱۱}
شعاع پروتون	۱×۱۰^{-۱۵}

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱-۱ برآورد مرتبه‌ی بزرگی، گلوله‌ی نخ

شعاع بزرگ‌ترین گلوله‌ی نخ دنیا در حدود ۲ متر است. طول کل نخ این گلوله L، در حد نزدیک‌ترین مرتبه‌ی بزرگی چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

ما می‌توانیم گلوله را باز کنیم و طول کل نخ، L ، را اندازه بگیریم. اما این کار پرزحمت است و تهیه‌کننده‌ی گلوله را هم شاد نخواهد کرد. در اینجا چون می‌خواهیم فقط نزدیک‌ترین مرتبه‌ی بزرگی را بدانیم، می‌توانیم هر کمیتی را که برای محاسبه نیاز داریم تخمین بزنیم.

محاسبات: گلوله‌ی نخ را به صورت کره‌ای با شعاع $R=۲\text{m}$ فرض می‌کنیم. در گلوله، نخ‌ها تنگ هم قرار نگرفته‌اند (یعنی، میان رشته‌های نخ مجاور فضای خالی وجود دارد که قابل اندازه‌گیری نیست). با درنظر گرفتن این فضای خالی مقطع نخ را مربعی به ضلع $d=۴\text{mm}$ می‌گیریم. در این صورت، نخ با مساحت مقطع $d^۲$ و طول L حجمی برابر با

$$V = (\text{مساحت مقطع})(\text{طول}) = d^۲L$$

را اشغال می‌کند. این حجم، به تقریب، برابر با حجم گلوله است، که از رابطه‌ی $\frac{۴}{۳}\pi R^۳$ به دست می‌آید. اگر عدد π را در حدود ۳ بگیریم حجم گلوله، به تقریب، برابر با $۴R^۳$ خواهد بود. در این صورت، داریم

$$d^۲L=۴R^۳$$

و از آنجا

$$L=\frac{۴R^۳}{d^۲}=\frac{۴(۲\text{m})^۳}{(۴\times ۱۰^{-۳}\text{m})^۲}\Rightarrow$$

$$L=۲\times ۱۰^۶\text{m}\approx ۱۰^۶\text{m}=۱۰^۳\text{km} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

(توجه کنید که در این محاسبه‌ی ساده به ماشین حساب نیازی نداریم). بنابراین، در حد نزدیک‌ترین مرتبه‌ی بزرگی طول نخ گلوله در حدود ۱۰۰۰km است!

۱-۲ استاندارد زمان

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱-۵ یکاهای مربوط به زمان را با استفاده کردن از تبدیل‌های زنجیره‌ای تغییر دهید.

۱-۶ از مقیاس‌های گوناگون زمان، مثلاً، در مورد حرکت یا مقادیر معین شده روی ساعت‌های متفاوت، استفاده کنید.

نکته‌های کلیدی

- ثانیه برحسب نوسان‌های نور گسیل شده توسط یک چشمه‌ی اتمی (سزیم ـ ۱۳۳) تعریف می‌شود. علامت‌های زمانی دقیق توسط علامت‌های رادیویی مرتبط با ساعت‌های اتمی در آزمایشگاه‌های استاندارد کننده، به سراسر جهان فرستاده می‌شوند.

زمان

اندازه‌گیری زمان دو جنبه دارد. در عرف و در برخی از منظورهای علمی نیاز داریم زمانی از

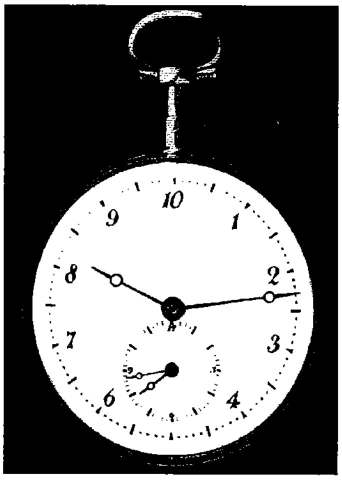
شبانه‌روز را بدانیم تا بتوانیم ترتیب زمانی رویدادها را مشخص کنیم. اما در بسیاری از کارهای علمی می‌خواهیم بدانیم که یک رخداد چه مدت طول می‌کشد. بنابراین، هر استاندارد زمانی باید قادر به پاسخ‌گویی به این دو پرسش باشد: «***چه وقت رخ داده است؟***» و «***چه مدت طول کشیده است؟***». جدول ۱-۴ برخی بازه‌های زمانی را نشان می‌دهد.

هر پدیده‌ی تکرارشونده می‌تواند یک استاندارد زمانی ممکن باشد. چرخش زمین به دور خود، که مدت زمان شبانه‌روز را معین می‌کند، در طی سده‌های متمادی معیاری برای این کار بوده است. شکل ۱-۱ نوعی ساعت را نشان می‌دهد که بر پایه‌ی چرخش زمین تنظیم شده است. ساعت کوارتز را، که در آن حلقه‌ای از کوارتز پیوسته ارتعاش می‌کند، با استفاده کردن از مشاهدات اخترشناختی می‌توان بر مبنای چرخش زمین درجه‌بندی کرد و آن را برای اندازه‌گیری بازه‌های زمانی در آزمایشگاه به کار برد. اما این درجه‌بندی را با دقتی که در فنّاوری علمی و مهندسی نوین مورد نیاز است، نمی‌توان انجام داد.

جدول ۱-۴ برخی بازه‌های زمانی تقریبی

اندازه‌گیری	بازه‌ی زمانی برحسب ثانیه	اندازه‌گیری	بازه‌ی زمانی برحسب ثانیه
عمر میانگین پروتون (پیشگویی شده)	۳×۱۰^{۴۰}	مدت زمان بین دو ضربان قلب انسان	۸×۱۰^{-۱}
عمر جهان	۵×۱۰^{۱۷}	عمر میانگین میوئون	۲×۱۰^{-۶}
عمر هرم کئوپس	۱×۱۰^{۱۱}	کوتاه‌ترین زمان تپ نوری آزمایشگاهی	۱×۱۰^{-۱۶}
عمر متوسط انسان	۲×۱۰^{۹}	عمر میانگین ناپایدارترین ذره	۱×۱۰^{-۲۳}
طول مدت شبانه‌روز	۹×۱۰^{۴}	زمان پلانک*	۱×۱۰^{-۴۳}

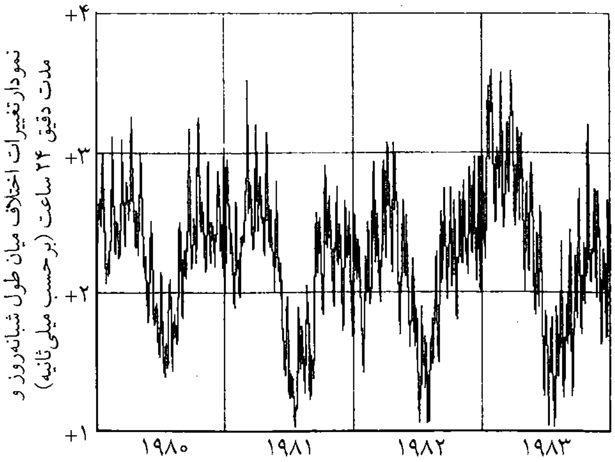
* زمان پلانک نزدیک‌ترین زمان پس از وقوع مِه‌بانگ (انفجار بزرگ) است که در آن قانون‌های فیزیک را آن طور که می‌شناسیم می‌توان به کاربرد.



شکل ۱-۱ هنگامی که در سال ۱۷۹۲/۱۱۷۱ دستگاه متریک پیشنهاد شد، ساعت را چنان باز تعریف کردند که یک شبانه‌روز را ۱۰ ساعت نشان دهد. این پیشنهاد رواج پیدا نکرد. سازنده‌ی این ساعت **۱۰ـ ساعتی**، خردمندانه صفحه‌ی مدرج کوچکی که زمان ۱۲ ساعت قراردادی را هم نمایش می‌داد در این ساعت در نظر گرفت. آیا این دو درجه‌بندی، زمان یکسانی را نشان می‌دهند؟

برای تأمین کردن نیاز به استاندارد زمانی بهتر، ساعت‌های اتمی را طراحی کرده و ساخته‌اند. ساعت اتمی **مؤسسه‌ی ملی استانداردها و فنّاوری** (NIST[1]) در بولدر[2] کلرادو[3] استانداردی برای **زمان جهانی هماهنگ شده** (UTC[4]) در ایالات متحد امریکا است. علامت‌های زمانی این ساعت از طریق موج‌های کوتاه رادیویی (ایستگاه‌های WWV و WWVH) و تلفن (به شماره‌ی ۷۱۱۱-۴۹۹-۳۰۳) در دسترس‌اند. هم‌چنین، علامت‌های زمانی (و اطلاعات وابسته) به وسیله‌ی **رصدخانه‌ی دریایی ایالات متحد**[5] در یک **وب گاه جهانی**[6] در اختیار قرار دارند.(برای میزان کردن یک ساعت به نحو بسیار دقیق در یک محل خاص زمان لازم برای رسیدن علامت‌ها به آن محل را هم باید درنظر گرفت).

1. National Institute of Standards and Technology (NIST)
2. Boulder
3. Colorado
4. Coordinated Universal Time (UTC)
5. United States Naval Observatory
6. Web site http: //tycho.usno.navy.mil/time.html



شکل ۱-۲ نمودار تغییرات طول شبانه‌روز در یک دوره‌ی چهارساله. توجه کنید که تمام محور عمودی برای ۳ میلی‌ثانیه ($3ms = 0/003s$) درجه‌بندی شده است.

شکل ۱-۲ تغییرات طول شبانه‌روز روی زمین در یک دوره‌ی چهار ساله را، که بر مبنای مقایسه با ساعت (اتمی) سزیومی معین شده است، نشان می‌دهد. چون تغییرات نمایش داده شده در شکل ۱-۲ فصلی و تکرار شونده هستند گمان می‌رود که اختلاف زمان اندازه‌گیری شده توسط ساعت‌های زمینی و اتمی به چرخش زمین مربوط باشد. این تغییرات از اثرهای کشندی (جزر و مدی) ماه و وجود بادهای بزرگ ـ مقیاس جوّی ناشی می‌شوند.

در سال ۱۹۶۷/۱۳۴۶ سیزدهمین مجمع عمومی اوزان و مقیاس‌ها بر پایه‌ی ساعت سزیومی، تعریف استاندارد زمان، **ثانیه**، را چنین پذیرفت

یک ثانیه زمانی است که طول می‌کشد تا نور (با طول موج خاص) گسیل شده از اتم سزیوم ـ۱۳۳، ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ نوسان انجام دهد.

سازگاری ساعت‌های اتمی چنان است که دو ساعت سزیومی پس از ۶۰۰۰ سال کار کردن بیش از یک ثانیه با هم اختلاف پیدا نمی‌کنند. این دقت در مقایسه با ساعت‌هایی که به تازگی ساخته شده‌اند باز هم ناچیز است. دقت این ساعت‌ها می‌تواند به یک در 10^{18}، یعنی، یک ثانیه در $1\times10^{18}s$ (در حدود 3×10^{10} سال) برسد.

۱-۳ استاندارد جرم

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱-۷ یکاهای جرم را با استفاده کردن از تبدیل‌های زنجیره‌ای تغییر دهید.

۱-۸ چگالی را به جرم و حجم، در صورت توزیع یکنواخت جرم، ربط دهید.

نکته‌های کلیدی

● کیلوگرم برحسب جرم استاندارد از جنس پلاتین - ایریدیوم نگهداری شده در نزدیکی پاریس تعریف می‌شود. برای اندازه‌گیری جرم در مقیاس اتمی، به طور معمول، از یکای جرم اتمی، تعریف شده برحسب اتم کربن - ۱۲، استفاده می‌شود.

● چگالی یک ماده ρ، برابر با جرم واحد حجم است:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

جرم

کیلوگرم استاندارد

استاندارد جرم در دستگاه بین‌المللی یکاها (SI) استوانه‌ای از جنس پلاتین - ایریدیوم (شکل ۱-۳) است که در اداره‌ی بین‌المللی اوزان و مقیاس‌ها، واقع در نزدیکی پاریس، نگهداری می‌شود و بنابر توافق بین‌المللی به آن جرم یک **کیلوگرم** نسبت داده شده است. از این کیلوگرم استاندارد نمونه‌های بدلی دقیقی به آزمایشگاه‌های استانداردکننده درکشورهای دیگرفرستاده شده است و جرم‌های اجسام را با برقرار کردن توازن با این نمونه‌ها می‌توان معین کرد. جدول ۱-۵ برخی جرم‌ها را که درگستره‌ای از مرتبه‌ی بزرگی ۸۳ قرار دارند، برحسب کیلوگرم، نشان می‌دهد.

نمونه‌ی کیلوگرم استاندارد مربوط به ایالات متحد درجعبه‌ای در مؤسسه‌ی ملی استانداردها و فنّاوری نگهداری می‌شود. این نمونه را برای مقایسه با نمونه‌هایی که در جاهای دیگر به کار می‌روند، بیش از سالی یک بار از جای خود حرکت نمی‌دهند. این کیلوگرم استاندارد از سال ۱۸۸۹/۱۲۶۸ تاکنون برای بازبینی و مقایسه با استاندارد اصلی فقط دوبار به فرانسه برده شده است.

جدول ۱-۵ برخی جرم‌های تقریبی

شیء	جرم برحسب کیلوگرم
جهان شناخته شده	۱×۱۰^{۵۳}
کهکشان ما	۲×۱۰^{۴۱}
خورشید	۲×۱۰^{۳۰}
ماه	۷×۱۰^{۲۲}
سیارک اِروس	۵×۱۰^{۱۵}
کوه کوچک	۱×۱۰^{۱۲}
کشتی اقیانوس‌پیما	۷×۱۰^{۷}
فیل	۵×۱۰^{۳}
دانه‌ی انگور	۳×۱۰^{-۳}
ذره‌ی غبار	۷×۱۰^{-۱۰}
مولکول پنی‌سیلین	۵×۱۰^{-۱۷}
اتم اورانیوم	۴×۱۰^{-۲۵}
پروتون	۲×۱۰^{-۲۷}
الکترون	۹×۱۰^{-۳۱}

جرم استاندارد دوم

جرم اتم‌ها را با هم دقیق‌تر می‌توان مقایسه کرد تا با کیلوگرم استاندارد. بدین‌جهت، جرم استاندارد دومی هم وجود دارد. مبنای این استاندارد، جرم اتم کربن -۱۲ است، که بنا به توافق بین‌المللی، به کربن جرمی برابر با ۱۲ برابر **یکای جرم اتمی** (با نماد u) نسبت داده شده است. رابطه‌ی میان دو یکای جرم چنین است

$$۱u = ۱/۶۶۰۵۳۸۸۶\times۱۰^{-۲۷}\,kg \qquad (۱-۷)$$

عدم قطعیت این عدد ۱۰± در دو رقم اعشاری آخر است. دانشوران با دقتی پذیرفتنی می‌توانند به طور تجربی جرم اتم‌های دیگر را نسبت به جرم کربن -۱۲ معین کنند. آنچه در حال حاضر از آن بی‌بهره‌ایم روشی قابل اعتماد است که بتواند دقت مربوط به استاندارد اتمی را در قلمرو یکاهای متداول‌تر جرم، نظیر کیلوگرم، تعمیم دهد.

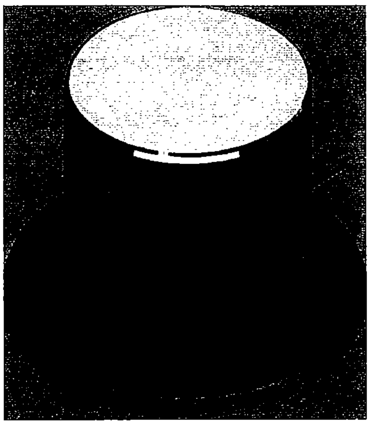
چگالی

همان‌گونه که در فصل ۱۴ (جلد دوم کتاب) بحث بیشتری خواهد شد، **چگالی** ρ (حرف

یونانی کوچک رو) یک جسم، جرم یکای حجم آن جسم است:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (۸-۱)$$

چگالی‌ها را برحسب **کیلوگرم بر متر مکعب**، یا **گرم بر سانتی‌متر مکعب**، بیان می‌کنند. چگالی آب (۱٫۰۰ گرم بر سانتی‌متر مکعب) را، اغلب، برای مقایسه به‌کار می‌برند. چگالی برف تازه در حدود ۱۰% چگالی آب و چگالی پلاتین در حدود ۲۱ برابر چگالی آب است.



شکل ۱-۳ تصویر کیلوگرم استاندارد بین‌المللی جرم، که استوانه‌ای از جنس پلاتین ـ ایریدیوم به ارتفاع، و نیز، به قطر ۳٫۹cm است.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱-۲ چگالی و آبگونش

در هنگام وقوع زمین‌لرزه اگر لرزش باعث ***آبگونش*** زمین شود ذرات خاک در هنگام لغزیدن بر روی هم با اصطکاک کمی روبه‌رو می‌شوند و هر شیء سنگینی می‌تواند در زمین فرو رود. در این صورت، سطح زمین به واقع به شکل باتلاقی از ماسه‌ی روان در می‌آید. امکان آبگونش زمین شنی را می‌توان برحسب ***نسبت فضای تهی*** e، برای نمونه‌ای از زمین پیشگویی کرد:

$$e = \frac{V_{\text{فضاهای تهی}}}{V_{\text{دانه ها}}} \quad (۹-۱)$$

در اینجا $V_{\text{دانه ها}}$ حجم کل دانه‌های شن در نمونه و $V_{\text{فضاهای تهی}}$ حجم کل بین دانه‌ها (***در فضاهای تهی***) است. اگر e از مقدار بحرانی ۰٫۸۰ بیشتر شود، در حین زمین‌لرزه آبگونش می‌تواند بروز کند. چگالی شن $\rho_{\text{شن}}$، چقدر است؟ چگالی دی‌اکسید سیلیسیوم جامد (جزء اصلی شن)، $\rho(\text{SiO}_۲) = ۲٫۶۰۰\times۱۰^۳ \text{kg/m}^۳$ است.

نکته‌ی کلیدی

چگالی شن در نمونه، $\rho_{\text{شن}}$، برابر با جرم یکای حجم ـ یعنی نسبت جرم کل دانه‌های شن، $m_{\text{شن}}$، به حجم کل نمونه $V_{\text{کل}}$، است:

$$\rho_{\text{شن}} = \frac{m_{\text{شن}}}{V_{\text{کل}}} \quad (۱۰-۱)$$

محاسبات: حجم کل نمونه $V_{\text{کل}}$، برابر است با

$$V_{\text{کل}} = V_{\text{دانه ها}} + V_{\text{فضاهای تهی}}$$

با جانشانی $V_{\text{فضاهای تهی}}$ از معادله‌ی ۱-۹ و حل کردن معادله نسبت به $V_{\text{دانه ها}}$، داریم

$$V_{\text{دانه ها}} = \frac{V_{\text{کل}}}{۱+e} \quad (۱۱-۱)$$

با توجه به معادله‌ی ۱-۸، جرم کل دانه‌های شن $m_{\text{شن}}$، برابر با حاصل‌ضرب چگالی دی‌اکسید سیلیسیوم در حجم کل دانه‌های شن است:

$$m_{\text{شن}} = \rho(\text{SiO}_۲)V_{\text{دانه ها}} \quad (۱۲-۱)$$

با جانشانی این رابطه در معادله‌ی ۱-۱۰ و سپس جانشانی $V_{\text{دانه ها}}$ از معادله‌ی ۱-۱۱، داریم

$$\rho_{\text{شن}} = \frac{\rho(\text{SiO}_۲)}{V_{\text{کل}}}\times\frac{V_{\text{کل}}}{۱+e} = \frac{\rho(\text{SiO}_۲)}{۱+e} \quad (۱۳-۱)$$

با جانشانی $\rho(\text{SiO}_۲) = ۲٫۶۰۰\times۱۰^۳ \text{kg/m}^۳$ و مقدار بحرانی $e = ۰٫۸۰$، در می‌یابیم که آبگونش هنگامی رخ می‌دهد که چگالی شن کمتر از مقدار زیر باشد

$$\rho_{\text{شن}} = \frac{۲٫۶۰۰\times۱۰^۳ \text{kg/m}^۳}{۱٫۸۰} = ۱٫۴\times۱۰^۳ \text{kg/m}^۳ \quad \textbf{(پاسخ)}$$

در هنگام بروز آبگونش یک ساختمان ممکن است چندین متر در زمین فرو برود.

مرور و چکیده‌ی مطالب

اندازه‌گیری در فیزیک دانش فیزیک مبتنی بر اندازه‌گیری کمیت‌های فیزیکی است. برخی کمیت‌های فیزیکی به عنوان **کمیت‌های اصلی** انتخاب شده‌اند (مانند طول، زمان و جرم)، که هر یک برحسب یک **استاندارد** و یک **یکای** اندازه‌گیری معین تعریف شده‌اند (مانند متر، ثانیه و کیلوگرم). سایر کمیت‌های فیزیکی برحسب کمیت‌های اصلی و استانداردها و یکاهای آن‌ها تعریف می‌شوند.

یکاهای SI در این کتاب دستگاه یکای مورد تأکید، دستگاه بین‌المللی یکاها (SI) است. در فصل‌های آغازین کتاب سه کمیت فیزیکی مندرج در جدول ۱-۱ کاربرد بیشتری دارند. استانداردها، که باید هم دسترس‌پذیر و هم تغییرناپذیر باشند، با توافق بین‌المللی برای کمیت‌های اصلی در نظر گرفته شده‌اند. این استانداردها هم برای کمیت‌های اصلی و هم برای کمیت‌های فرعی حاصل از آن‌ها در تمام اندازه‌گیری‌های فیزیکی به کار می‌روند. برای ساده‌سازی نمادهای اندازه‌گیری می‌توان از نمادهای علمی و پیشوندهای جدول ۱-۲ استفاده کرد.

تبدیل یکاها تبدیل یکاها را با استفاده کردن از روش ***تبدیل‌های زنجیره‌ای*** می‌توان انجام داد. در این روش داده‌ها پی‌درپی در ضریب‌های تبدیلی برابر با واحد ضرب می‌شوند و یکاها مانند کمیت‌های جبری به گونه‌ای دست‌کاری می‌شوند که فقط یکاهای مطلوب باقی بمانند.

طول **متر**، بنا به تعریف، مسافتی است که نور به طور دقیق در یک بازه‌ی زمانی مشخص می‌پیماید.

زمان **ثانیه** بر مبنای نوسان‌های نور گسیل شده از یک چشمه‌ی اتمی (سزیوم ـ ۱۳۳) تعریف می‌شود. علامت‌های زمانی دقیق از طریق علامت‌های رادیویی، که با ساعت‌های اتمی آزمایشگاه‌های استانداردکننده میزان شده‌اند به سراسر دنیا فرستاده می‌شوند.

جرم **کیلوگرم**، بنابه تعریف، عبارت است از پیش نمونه‌ای خاص از پلاتین ـ ایریدیوم که در نزدیکی پاریس، فرانسه، نگهداری می‌شود. برای اندازه‌گیری در مقیاس اتمی، به طور معمول، یکای جرم اتمی را، که برمبنای جرم اتم کربن ـ ۱۲ تعریف شده است، به‌کار می‌برند.

چگالی چگالی یک ماده ρ، جرم یکای حجم آن ماده است:

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad (۱-۸)$$

مسئله‌ها

پودمان ۱-۱ اندازه‌گیری کمیت‌ها، از جمله طول‌ها

* ۱ زمین کره‌ای با شعاع تقریبی $6{,}37\times10^{6}\,\mathrm{m}$ است. (الف) محیط زمین برحسب کیلومتر، (ب) مساحت سطح زمین برحسب کیلومتر مربع و (پ) حجم زمین برحسب کیلومتر مکعب، چیست؟

* ۲ ***گرای***[1] یک مقیاس قدیمی انگلیسی مربوط به طول است که به صورت $\frac{1}{10}$ ***خط*** تعریف می‌شود. خط مقیاس قدیمی انگلیسی دیگری برای طول است که بنا به تعریف $\frac{1}{12}$ اینچ است. در کار نشر و چاپ مقیاس مرسومی به نام ***پوینت***[2] برای طول وجود دارد که برابر با $\frac{1}{72}$ اینچ تعریف می‌شود. مساحتی به اندازه‌ی $0{,}50$ گرای مربع چند پوینت مربع می‌شود؟

* ۳ میکرومتر $(1\,\mu\mathrm{m})$ را اغلب ***میکرون*** می‌نامند. (الف) $1{,}0\,\mathrm{km}$ چند میکرون است؟ (ب) $1{,}0\,\mu\mathrm{m}$ چه کسری از سانتی‌متر است؟ (پ) یک یارد چند میکرون است؟

* ۴ فاصله‌ی سطرهای کتاب، به طور معمول، برحسب یکاهای پوینت و پیکا[3] انتخاب می‌شود. هر ۱۲ پوینت یک پیکا و هر ۶ پیکا یک اینچ است. اگر در برآورد جای شکلی در کتاب به

1. gry 2. point 3. pica

اندازه‌ی ۰٫۸۰cm اشتباه شود، این مقدار، (الف) برحسب پیکا و (ب) برحسب پوینت، چقدر است؟

** ۵ در چمن‌زاری در انگلیس اسب‌ها در مسابقه‌ای به مسافت ۴٫۰ فورلانگ[1] شرکت کردند. طول مسیر مسابقه برحسب یکاهای (الف) راد[2] و (ب) زنجیره، چقدر است؟ (یک فورلانگ برابر با ۲۰۱٫۱۶۸m، یک راد برابر با ۵٫۰۲۹۲m و یک زنجیره برابر با ۲۰٫۱۱۷m است).

** ۶ با آنکه به آسانی می‌توانید یکاها و مقیاس‌های مرسوم را با ماشین‌حساب الکترونیکی به یکدیگر تبدیل کنید، اما باز هم می‌توانید از یک جدول تبدیل یکاها، مانند جدول مندرج در پیوست ت کتاب استفاده کنید. جدول ۱-۶ بخشی ازیک جدول تبدیل مربوط به مقیاس‌های حجم را، که زمانی در اسپانیا مرسوم بود، نشان می‌دهد؛ حجم یک فانگا[3] معادل ۵۵٫۵۰۱dm³ (دسی‌متر مکعب) است. برای کامل کردن این جدول، چه عددهایی را (تا سه رقم بامعنی) باید در (الف) ستون کاهیز[4]، (ب) ستون فانگا، (پ) ستون کوارتیلا[5]، و (ت) ستون آلمود[6]، از بالا به پایین، وارد کنید؟ ۵٫۰۰ آلمود را برحسب (ث) میدیو[7]، (ج) کاهیز و (چ) سانتی‌متر مکعب (cm³) بیان کنید.

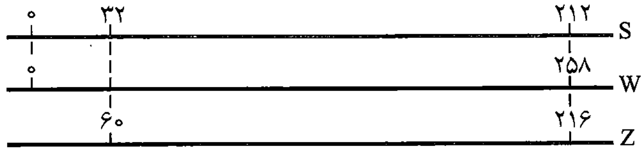
جدول ۱-۶ مسئله‌ی ۶

	کاهیز	فانگا	کوارتیلا	آلمود	میدیو
۱ کاهیز =	۱	۱۲	۴۸	۱۴۴	۲۸۸
۱ فانگا =		۱	۴	۱۲	۲۴
۱ کوارتیلا =			۱	۳	۶
۱ آلمود =				۱	۲
۱ میدیو =					۱

** ۷ در ایالات متحد امریکا مهندسان آب‌شناسی، معمولاً، به‌عنوان یکای حجم آب از ***جریب ـ فوت*** استفاده می‌کنند. جریب ـ فوت حجم آبی است که یک جریب زمین را تا عمق یک فوت می‌پوشاند. در یک رگبار شدید در شهری به مساحت ۲۶km² به مدت ۳۰ دقیقه ۲٫۰ اینچ باران می‌بارد. حجم آب باریده در آن شهر برحسب جریب ـ فوت چقدر است؟

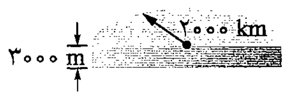
1. furlong 2. rod 3. fanega 4. cahiz
5. cuartilla 6. almude 7. medio

** ۸ پل هاروارد[1]، که **مؤسسه‌ی فنّاوری ماساچوستس** (MIT[2]) را به خانه‌های برادری[3] وابسته‌اش، واقع در آن طرف رودخانه‌ی چارلز[4] وصل می‌کند، ۳۶۴٫۴ اسموت به علاوه‌ی یک گوش، طول دارد! یکای **اسموت** مربوط به طول قد اولیورریْد اسموت (پسر)[5]، دانشجوی کلاس ۱۹۶۲* MIT بوده است. هنگام اندازه‌گیری طول پل، اعضای خانه‌ی برادری لاندا ـ کای ـ آلفا، اسموت را حمل می‌کردند یا روی زمین می‌کشیدند و با طول قد او پل را گز می‌کردند و در انتهای هر طول قد روی زمین علامتی (با رنگ) می‌گذاشتند. علامت‌ها به‌طور دوسالانه توسط اعضا دوباره رنگ می‌شوند. این کار هنگامی صورت می‌گیرد که ترافیک روی پل بند آمده و پلیس حضور نداشته باشد تا مانع کار شود. (حتماً دلیل ناخشنودی پلیس این است که اسموت یکای مربوط به SI نیست، اگرچه این روزها به نظر می‌رسد که این یکا از طرف آن‌ها هم پذیرفته شده است!) شکل ۱-۴، سه مسیر موازی را نشان می‌دهد که برحسب اسموت (S) ویلی[6] (W) و زِلدا[7] (Z) اندازه‌گیری شده‌اند. طول ۵۰٫۰ اسموت، (الف) برحسب ویلی و (ب) برحسب زِلدا، چیست؟



شکل ۱-۴ مسئله‌ی ۸.

** ۹ جنوبگان (قطب جنوب) ناحیه‌ای، به تقریب، نیم‌دایره‌ای به شعاع ۲۰۰۰km است (شکل ۱-۵). ضخامت متوسط پوشش یخ در این ناحیه ۳۰۰۰m است. حجم یخ ناحیه‌ی جنوبگان چند سانتی‌مترمکعب است؟ (خمیدگی سطح زمین را نادیده بگیرید).



شکل ۱-۵ مسئله‌ی ۹.

1. Harvard
2. Massachusetts Institute of Technology (MIT)
3. fraternity 4. Charles
5. Oliver Reed Smoot, Jr.

* کلاس ۱۹۶۲ به مجموعه‌ی دانشجویان دوره‌ای گفته می‌شود که قرار بوده است در سال ۱۹۶۲ دانش‌آموخته شوند. ـ م.

6. Willy 7. Zelda

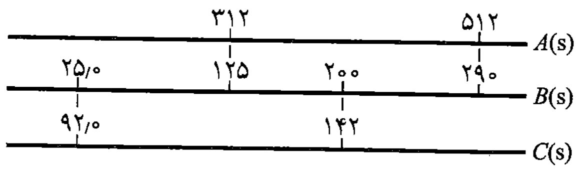
پودمان ۱-۲ استاندارد زمان

* ۱۰ تا سال ۱۸۸۳/۱۲۶۲ در ایالات متحد امریکا در هر ایالت و شهری وقت محلی خود را در نظر می‌گرفتند. امروزه، مسافران ساعت خود را فقط موقعی میزان می‌کنند که تغییر زمانی برابر با یک ساعت باشد. به طور متوسط، چه طول جغرافیایی‌ای را برحسب درجه باید پیمود تا تغییر زمان در بین مرزهای منطقه‌ی زمانی، به اندازه‌ی یک ساعت شود؟ (***راهنمایی:*** زمین در مدت ۲۴ ساعت به اندازه‌ی ۳۶۰ درجه می‌چرخد).

* ۱۱ در حدود ده سال پس از انقلاب فرانسه دولت فرانسه تلاش کرد مقیاس‌های زمان را به‌صورت مضرب‌هایی از ۱۰ پایه‌گذاری کند: یک هفته را ۱۰ روز، یک شبانه‌روز را ۱۰ ساعت، یک ساعت را ۱۰۰ دقیقه، و یک دقیقه را ۱۰۰ ثانیه در نظر گرفتند. نسبت (الف) هفته‌ی ده دهی فرانسوی به هفته‌ی استاندارد و (ب) ثانیه‌ی ده دهی فرانسوی به ثانیه‌ی استاندارد، چقدر است؟

* ۱۲ سریع‌ترین رشد گیاهی ثبت شده مربوط به ***هسپرویوکاویپلی***[1] است که در مدت ۱۴ شبانه‌روز به اندازه‌ی ۳/۷m رشد کرد. آهنگ رشد این گیاه برحسب میکرومتر بر میلی ثانیه چه بوده است؟

* ۱۳ سه ساعت با صفحه‌ی نمایش رقمی A، B و C با آهنگ‌های متفاوت کار می‌کنند و صفر آن‌ها هم‌زمان نیست. شکل ۱-۶ عددهای نشان داده شده توسط هر جفت ساعت را در چهار موقعیت زمانی برحسب ثانیه نشان می‌دهد. (در نخستین موقعیت، مثلاً، ساعت B زمان ۲۵/۰s و ساعت C زمان ۹۲/۰s را می‌خواند). اگر با ساعت A بازه‌ی زمانی دو رویداد ۶۰۰s باشد، این بازه‌ی زمانی، (الف) با ساعت B چند ثانیه و (ب) با ساعت C چند ثانیه، است؟ (پ) وقتی ساعت A زمان ۴۰۰s را می‌خواند، ساعت B چه زمانی را می‌خواند؟



شکل ۱-۶ مسئله‌ی ۱۳.

1. Hesperoyucca whipplei

(ت) وقتی ساعت C زمان ۱۵/۰s را می‌خواند، ساعت B چه زمانی را می‌خواند؟ (زمان‌های پیش از صفر هر ساعت را منفی بگیرید).

* ۱۴ مدت یک جلسه‌ی درس (۵۰ دقیقه) در حدود یک میکروقرن است. (الف) یک میکروقرن چند دقیقه است؟ (ب) با استفاده کردن از معادله‌ی زیر

$$\text{درصد اختلاف} = \left(\frac{\text{مقدار تقریبی} - \text{مقدار واقعی}}{\text{مقدار واقعی}}\right) \times ۱۰۰$$

درصد اختلاف را نسبت به مقدار تقریبی به دست آورید.

* ۱۵ فورت نایت[1] یک مقیاس زمان انگلیسی جذاب برابر با ۲/۰ هفته است (این نام مخفف اصطلاح «چهارده شب[2]» به انگلیسی است). این زمان یک دوره‌ی خوشایند از مصاحبت‌های دلپذیر، اما شاید یک رشته‌ی رنج‌آور از میکروثانیه‌هاست. یک فورت‌نایت چند میکروثانیه است.

* ۱۶ ساعت‌های اتمی پایه‌های استانداردهای زمانی امروزی را تشکیل می‌دهند. یکی دیگر از استانداردهای نوید بخش، ***تپ‌اخترها***، یا ستاره‌های نوترونی‌چرخان (ستاره‌های بسیار چگال که فقط از نوترون تشکیل شده‌اند) هستند. برخی از این ستاره‌ها با آهنگی بسیار پایدار علامت‌هایی رادیویی گسیل می‌دارند. این علامت‌ها مانند یک فانوس دریایی در هر چرخش در زمانی کوتاه زمین‌را پوشش می‌دهند. تپ‌اختر PSR 1937 + 21 یکی از این نمونه‌هاست. این تپ‌اختر در هر ۱/۵۵۷۸۰۶۴۴۸۸۷۲۷۵ ± ۳ms یک دور می‌چرخد، که در آن ۳± نشان دهنده‌ی عدم قطعیت در رقم آخر اعشاری است. (این عدد به معنی ۳ms± نیست). (الف) این تپ‌اختر در مدت ۷/۰۰ شبانه‌روز چند دور می‌چرخد؟ (ب) چه مدت طول می‌کشد تا این تپ‌اختر درست یک میلیون بار بچرخد؟ (پ) در این شرایط عدم قطعیت وابسته چیست؟

* ۱۷ در آزمایشگاهی پنج ساعت مورد آزمون قرار گرفته‌اند. درست سر ظهر که به وسیله‌ی علامت‌های زمانی WWV معین می‌شود، ساعت‌ها در روزهای پی‌درپی هفته عددهای مندرج در جدول زیر را نشان می‌دهند. با توجه به مقادیر داده شده این پنج

1. fortnight 2. fourteen nights

ساعت را از نظر کیفیت به عنوان زمان‌سنج، به ترتیب، از بهترین تا بدترین ساعت مرتب کنید. دلیل انتخاب خود را بیان کنید.

ساعت	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	شنبه
(الف)	۱۲:۳۶:۴۰	۱۲:۳۶:۵۶	۱۲:۳۷:۱۲	۱۲:۳۷:۲۷	۱۲:۳۷:۲۴	۱۲:۳۷:۵۹	۱۲:۳۸:۱۴
(ب)	۱۱:۵۹:۵۹	۱۲:۰۰:۰۲	۱۱:۵۹:۵۷	۱۲:۰۰:۰۷	۱۲:۰۰:۰۲	۱۱:۵۹:۵۶	۱۲:۰۰:۰۳
(پ)	۱۵:۵۰:۴۵	۱۵:۵۱:۴۳	۱۵:۵۲:۴۱	۱۵:۵۳:۳۹	۱۵:۵۴:۳۷	۱۵:۵۵:۳۵	۱۵:۵۶:۳۳
(ت)	۱۲:۰۳:۵۹	۱۲:۰۲:۵۲	۱۲:۰۱:۴۵	۱۲:۰۰:۳۸	۱۱:۵۹:۳۱	۱۱:۵۸:۲۴	۱۱:۵۷:۱۷
(ث)	۱۲:۰۳:۵۹	۱۲:۰۲:۴۹	۱۲:۰۱:۵۴	۱۲:۰۱:۵۲	۱۲:۰۱:۳۲	۱۲:۰۱:۲۲	۱۲:۰۱:۱۲

** ۱۸ چون چرخش زمین به تدریج در حال کُند شدن است، طول هر شبانه‌روز افزایش می‌یابد: طول شبانه‌روز در پایان یک قرن به اندازه‌ی ۱٫۰ms بیشتر از آغاز قرن است. در مدت ۳۰ قرن مقدار افزایش کل طول شبانه‌روز چیست؟

*** ۱۹ تصور کنید در حالی که در ساحلی در نزدیکی استوا دراز کشیده‌اید و غروب خورشید را در افق دریایی آرام تماشا می‌کنید، درست در لحظه‌ی ناپدید شدن لبه‌ی بالای قرص خورشید یک ساعت وقت نگهدار را به کار می‌اندازید. سپس سرپا می‌ایستید و در حالی که ارتفاع چشم‌های شما از سطح زمین $H =$ ۱٫۷۰m است، دوباره در لحظه‌ی ناپدید شدن لبه‌ی بالای قرص خورشید، ساعت را از کار می‌اندازید. اگر این بازه‌ی زمانی $t =$ ۱۱٫۱s باشد، شعاع کره‌ی زمین r، چقدر است؟

پودمان ۱-۳ استاندارد جرم

* ۲۰ رکورد ساخت بزرگ‌ترین بطری شیشه‌ای در سال ۱۹۹۲/۱۳۷۱ توسط گروهی در میلویل[1] ایالت نیوجرسی[2] (امریکا) به‌دست آمد. آنان بطری‌ای به حجم ۱۹۳ گالن امریکایی ساختند. (الف) حجم این بطری چقدر کمتر از ۱٫۰ میلیون سانتی‌متر مکعب بود؟ (ب) اگر بطری را با آهنگ ۱٫۸g/min از آب پر می‌کردند، پر شدن آن چه مدت طول می‌کشید؟ چگالی آب ۱۰۰۰$\mathrm{kg/m^3}$ است.

* ۲۱ جرم زمین ۵٫۹۸×۱۰^{۲۴}kg است. جرم متوسط اتم‌هایی که ماده‌ی زمین را تشکیل می‌دهند ۴۰u است. زمین از چند اتم تشکیل شده است؟

1. Millville 2. New Jersey

* ۲۲ طلا با چگالی ۱۹٫۳۲$\mathrm{g/cm^3}$، شکل‌پذیرترین فلزات است و می‌توان آن را در اثر فشردن به صورت یک برگه‌ی نازک یا در اثر کشیدن به صورت یک تار باریک درآورد. (الف) اگر نمونه‌ای از طلا به جرم ۲۷٫۶۳ گرم را در اثر فشردن به برگه‌ای به ضخامت ۱٫۰۰۰μm تبدیل کنیم، مساحت برگه‌ی طلا چقدر می‌شود؟ (ب) اگر این نمونه‌ی طلا را در اثر کشیدن به یک تار استوانه‌ای باریک با مقطعی به شعاع ۲٫۵۰۰μm تبدیل کنیم، طول تار چقدر می‌شود؟

* ۲۳ (الف) با فرض آنکه چگالی آب درست ۱$\mathrm{g/cm^3}$ است، جرم یک متر مکعب آب را برحسب کیلوگرم پیدا کنید. (ب) فرض کنید ۱۰٫۰ ساعت طول بکشد تا مخزنی حاوی ۵۷۰۰$\mathrm{m^3}$ آب خالی شود. «آهنگ شارش جرم» آب از مخزن، برحسب کیلوگرم بر ثانیه چیست؟

** ۲۴ در ساحل کالیفرنیا دانه‌های شن از جنس دی‌اکسید سیلیسیوم و کره‌هایی به شعاع متوسط ۵۰μm هستند. چگالی دی‌اکسید سیلیسیوم ۲۶۰۰$\mathrm{kg/m^3}$ است. چه جرمی از این دانه‌های شن دارای مساحتی (منظور مساحت سطح کل همه‌ی دانه‌های کروی شکل است) برابر با مساحت سطح مکعبی به ضلع ۱٫۰۰m است؟

** ۲۵ بر اثر بارندگی، بخشی از خاک دامنه‌ی یک کوه به ابعاد ۲٫۵km افقی، ۰٫۸۰km در راستای شیب کوه به سمت بالا و به عمق ۲٫۰m به صورت گل و لای کنده می‌شود و به یک دره می‌ریزد. فرض کنید این گل و لای به طور یکنواخت در سطح دره به ابعاد ۰٫۴۰km×۰٫۴۰km پخش می‌شود و چگالی گل و لای ۱۹۰۰$\mathrm{kg/m^3}$ است. جرم گل و لای تەنشین شده در مساحت ۴٫۰$\mathrm{m^2}$ از دره چقدر است؟

** ۲۶ یک سانتی‌متر مکعب از ابر کومه‌ای (کومولوس[1]) دارای ۵۰ تا ۵۰۰ قطره آب است. شعاع هر قطره آب معمولی ۱۰μm است. برای این گستره از عده‌ی قطره‌های آب کمترین و بیشترین مقادیر متناظر را، به ترتیب، در حالت‌های زیر مشخص کنید. (الف) در استوانه‌ای از ابر کومه‌ای به ارتفاع ۳٫۰km و شعاع ۱٫۰km، چند مترمکعب آب وجود دارد؟ (ب) این آب

1. cumulus

چند بطری یک لیتری را پر می‌کنند؟ (پ) چگالی آب $۱۰۰۰kg/m^۳$ است. جرم آب موجود در این ابر چقدر است؟

** ۲۷ چگالی آهن $۷٫۸۷g/cm^۳$ و جرم یک اتم آهن $۹٫۲۷\times۱۰^{-۲۶}kg$ است. اتم‌ها را به‌صورت کره‌های تنگ‌هم‌چیده شده در نظر می‌گیریم. (الف) حجم یک اتم آهن چقدر است؟ (ب) فاصله‌ی میان مرکزهای دو اتم مجاور چیست؟

** ۲۸ یک مول اتم برابر با $۶٫۰۲\times۱۰^{۲۳}$ اتم است. بدن یک گربه‌ی خانگی بزرگ تا نزدیک‌ترین مرتبه‌ی بزرگی، شامل چند مول اتم است؟ جرم اتم هیدروژن، اتم اکسیژن، اتم کربن، به‌ترتیب، ۱٫۰u، ۱۶u و ۱۲u است. (*راهنمایی:* گربه‌ها گاهی کشنده‌ی موش کور هستند).

** ۲۹ در یک مؤسسه‌ی فروش دام در مالزی گاو نری به وزن ۲۸٫۹ پیکول[1] را، که یک یکای محلی وزن است، فروخته‌اند. می‌دانیم که یک پیکول برابر با ۱۰۰ جین[2]، یک جین برابر با ۱۶ تاهیل[3]، یک تاهیل برابر با ۱۰ چی[4]، یک چی برابر با ۱۰ هون[5]، و وزن یک هون متناظر با جرم ۰٫۳۷۷۹ گرم است. وقتی می‌خواهند این گاو را با کشتی به شهری بفرستند جرم گاو را در فرم ارسال آن باید چند کیلوگرم اعلام کنند؟ (*راهنمایی:* از تبدیل‌های زنجیره‌ای چندگانه‌ی یکاها استفاده کنید).

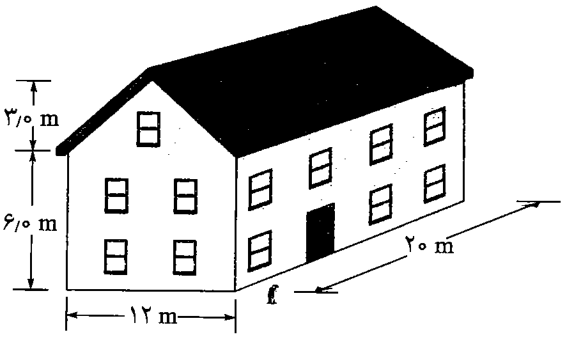
** ۳۰ در مخزنی که اندکی نشتی دارد آب ریخته می‌شود. جرم آب موجود در مخزن m، برحسب زمان t از معادله‌ی $m = ۵٫۰۰t^{۰٫۸} - ۳٫۰۰t + ۲۰٫۰۰$ به دست می‌آید، که در آن m برحسب گرم و $t \geq ۰$ برحسب ثانیه است. (الف) در چه زمانی مخزن بیشترین جرم آب را دارد؟ (ب) این بیشترین جرم چقدر است؟ آهنگ تغییر جرم آب برحسب کیلوگرم بر دقیقه در زمان‌های (پ) $t = ۲٫۰۰s$ و (ت) $t = ۵٫۰۰s$، چیست؟

*** ۳۱ ظرفی با دیوارهای قائم و مساحت قاعده‌ی $۱۴٫۰cm \times ۱۷٫۰cm$ را با دانه‌هایی از آب نبات، هر یک به حجم $۵۰٫۰mm^۳$ و جرم ۰٫۰۲۰۰g، پر می‌کنیم. فرض کنید حجم فضای خالی میان دانه‌های آب نبات قابل چشم‌پوشی است. اگر ارتفاع آب نبات‌های ظرف با آهنگ ۰٫۲۵۰cm/s افزایش یابد، آهنگ افزایش یافتن جرم آب نبات‌ها (برحسب کیلوگرم بر دقیقه) در ظرف چقدر است؟

1.picul 2. gin 3. tahil 4. chee 5. hoon

مسئله‌های بیشتر

۳۲ در ایالات متحد امریکا مقیاس هر خانه‌ی عروسکی نسبت به خانه‌ی واقعی ۱:۱۲ (یعنی، هر یک از ابعاد خانه‌ی عروسکی $\frac{۱}{۱۲}$ ابعاد خانه‌ی واقعی است) و مقیاس هر خانه‌ی مینیاتوری (خانه‌ای که در خانه‌ی عروسکی جا می‌گیرد) نسبت به خانه‌ی واقعی ۱:۱۴۴ است. فرض کنید یک خانه‌ی واقعی (شکل ۱-۷) دارای ۲۰m درازا، ۱۲m پهنا و ۶٫۰m ارتفاع باشد. ارتفاع شیب استاندارد سقف (ارتفاع وجه مثلثی عمودی بالای دیوار) ۳٫۰m است. (الف) حجم خانه‌ی عروسکی و (ب) حجم خانه‌ی مینیاتوری، برحسب مترمکعب چقدر است؟



شکل ۱-۷ مسئله‌ی ۳۲.

۳۳ تُن یک مقیاس حجم است که، اغلب، در کشتی‌رانی به کار می‌رود، اما این کاربرد نیازمند به احتیاط است زیرا دست کم سه نوع تُن وجود دارد: ***تُن جابه‌جایی*** برابر با ۷ بشکه‌ی حجمی، ***تُن باربری*** برابر با ۸ بشکه‌ی حجمی، و ***تُن سفارشی*** برابر با ۲۰ بشکه‌ی حجمی است و ***بشکه‌ی حجمی*** هم مقیاس دیگری برای حجم و برابر با $۰٫۱۴۱۵m^۳$ است. فرض کنید یک مشتری سفارشی برای فرستادن «۷۳ تُن» آب نبات M&M را داده باشد و مطمئن باشید که منظور مشتری از «تُن» همان تُن حجمی است (و نه وزن یا جرم، که در فصل ۵ مورد بحث قرار خواهد گرفت). اگر منظور مشتری در واقع تُن جابه‌جایی باشد، چند بوشل امریکایی آب نبات اضافی برای مشتری می‌فرستید، اگر به‌اشتباه سفارش را به‌صورت (الف) ۷۳ تُن باربری، و (ب) ۷۳ تُن سفارشی تعبیر کرده باشید؟ (هر مترمکعب برابر با ۲۸٫۳۷۸ بوشل امریکایی است).

۳۴ در دهه‌ی ۱۹۲۰ در ایالات متحد امریکا از دو نوع یکای **بشکه** استفاده می‌کردند. بنا به قانون، بشکه‌ی سیب حجمی برابر با ۷۰۵۶ اینچ مکعب و بشکه‌ی زغال اخته حجمی برابر با ۵۸۲۶ اینچ مکعب داشت. اگر تاجری ۱۵ بشکه‌ی زغال اخته از کالایی به یک مشتری بفروشد و مشتری تصور کند که ۱۵ بشکه‌ی سیب از آن کالا دریافت کرده است، اختلاف حجم این دو محموله چند لیتر است؟

۳۵ مضمون یک سرود کودکانه‌ی انگلیسی چنین است: «خانم کوچولو مافِت[1]، نشسته روی تافِت[2]، کشک و قره‌قروت می‌خوره، عنکبوته می‌بینه، میاد پهلوش می‌شینه...» عنکبوت نه به این خاطر که مافت کوچولو کشک می‌خورد کنارش می‌نشیند، بلکه به این‌خاطر که جعبه‌ای به‌حجم ۱۱ تافِت حشره‌ی خشک‌کرده داشت. حجم یک تافِت برابر با ۲ پِک[3] و برابر با ۰/۵۰ بوشِل امپریال[4] است. هر بوشل امپریال ۳۶/۳۶۸۷ لیتر است. حجم جعبه، (الف) چند پک، (ب) چند بوشل و (پ) چند لیتر، است؟

۳۶ جدول ۱-۷ برخی مقیاس‌های قدیمی مربوط به حجم مایعات را نشان می‌دهد. برای کامل کردن این جدول، چه عددهایی (تا سه رقم با معنی) را باید در جاهای خالی از بالا به پایین در ستون‌های (الف) وی[5]، (ب) چالدرون[6]، (پ) بَگ[7]، (ت) پاتل[8]، و (ث) جیل[9]، نوشت. (ج) حجم یک بَگ برابر با $۰/۱۰۹۱\,\text{m}^۳$ است. اگر بنا به یک داستان قدیمی جادوگری در پاتیلی به حجم ۱/۵ چالدرون آبگوشت بدمزه‌ای پخته باشد، حجم آن چند متر مکعب است؟

جدول ۱-۷ مسئله‌ی ۳۶

	وی	چالدرون	بَگ	پاتل	جیل
۱ وی =	۱	$\frac{۱۰}{۹}$	$\frac{۴۰}{۳}$	۶۴۰	۱۲۰۲۴۰
۱ چالدرون =					
۱ بَگ =					
۱ پاتل =					
۱ جیل =					

1. Muffet 2. tuffet 3. Peck
4. Imperial bushel 5. wey 6. chaldron
7. bag 8. pottle 9. gill

۳۷ حبه‌ی قند معمولی مکعبی به ضلع 1cm است. اگر جعبه‌ی مکعب شکلی حاوی یک مول حبه‌ی قند باشد، طول ضلع جعبه چقدر است؟ (هر مول $۶/۰۲\times۱۰^{۲۳}$ واحد است).

۳۸ یک دست‌نوشته‌ی قدیمی متعلق به زمان شاه آرتور نشان می‌دهد که مالکی صاحب ۳/۰۰ جریب زمین زراعی به علاوه‌ی مزرعه‌ای به ابعاد ۲۵/۰ نیزه[1] در ۴/۰۰ نیزه بوده است. مساحت کل زمین‌های مالک، (الف) برحسب یکای قدیمی رود[2] و (ب) یکای جدیدتر متر مربع، چقدر است؟ یک جریب سطحی به ابعاد ۴۰ نیزه در ۴ نیزه، یک رود سطحی به ابعاد ۴۰ نیزه در یک نیزه و یک نیزه ۱۶/۵ فوت است.

۳۹ جهانگردی در انگلستان خودرویی می‌خرد و آن را با کشتی به نشانی خانه‌اش در ایالات متحد امریکا می‌فرستد. شرکت فروشنده تبلیغ کرده بود که مصرف سوخت این خودرو در بزرگ‌راه یک گالن در هر ۴۰ مایل است. جهانگرد متوجه نبود که گالن انگلیسی با گالن امریکایی تفاوتی به صورت زیر دارد:

لیتر ۴/۵۴۶۰۹۰۰ = یک گالن انگلیسی

لیتر ۳/۷۸۵۴۱۱۸ = یک گالن امریکایی

برای پیمودن یک مسیر ۷۵۰ مایلی در ایالات متحد امریکا، این خودرو چند گالن سوخت (الف) از نظر این جهانگرد بی‌خیال و (ب) در واقع، نیاز دارد؟

۴۰ با استفاده کردن از تبدیل‌ها و داده‌های این فصل عده‌ی اتم‌های هیدروژن موجود در $۱/۰\,\text{kg}$ هیدروژن را حساب کنید. جرم یک اتم هیدروژن $۱/۰\,\text{u}$ است.

۴۱ یک **کورد**[3] حجمی از الوارهایی است که $۸\,\text{ft}$ درازا، $۴\,\text{ft}$ پهنا و $۴\,\text{ft}$ ارتفاع دارند. هر متر مکعب حاوی چند کورد است؟

۴۲ یک مولکول آب (H_2O) از دو اتم هیدروژن و یک اتم اکسیژن تشکیل شده است. جرم تقریبی یک اتم هیدروژن $۱/۰\,\text{u}$ و جرم تقریبی یک اتم اکسیژن $۱۶\,\text{u}$ است. (الف) جرم یک مولکول آب چند کیلوگرم است. (ب) در آب اقیانوس‌های دنیا با جرم تقریبی $۱/۴\times۱۰^{۲۱}\,\text{kg}$ چند مولکول آب وجود دارد؟

۴۳ شخصی که رژیم لاغری گرفته است ممکن است هفته‌ای $۲/۳\,\text{kg}$ از جرمش کم کند. با این فرض که لاغر شدن ثانیه به

1. perch 2. rood 3. cord

ثانیه محسوس باشد، آهنگ کاهش یافتن جرم شخص را برحسب میلی‌گرم بر ثانیه بیان کنید.

۴۴ در مسئله‌ی ۷ جرم آبی که روی شهر می‌ریزد چقدر است؟ چگالی آب $۱٫۰\times۱۰^{۳}\,\mathrm{kg/m^{۳}}$ است.

۴۵ یکی از یکاهای زمان که گاهی در فیزیک ریزمقیاس به‌کارمی‌رود *آن*[1] نام دارد، که برابر با $۱۰^{-۸}\,\mathrm{s}$ است. (الف) عده‌ی آن‌های موجود در یک ثانیه بیشتر است یا عده‌ی ثانیه‌های موجود در یک قرن؟ (ب) بشر از حدود $۱۰^{۶}$ سال پیش بر روی زمین می‌زیسته است، در حالی که عمر جهان در حدود $۱۰^{۱۰}$ سال است. اگر سن جهان را اکنون یک «روز جهانی» بگیریم، بشر تاکنون چند «ثانیه‌ی جهانی» بر روی زمین زیسته است؟

۴۶ ***هکتار*** یکایی است که، اغلب، برای اندازه‌گیری مساحت زمین‌ها به‌کار می‌رود و برابر با $۱۰^{۴}$ متر مربع است. مساحت یک معدن زغال سنگ روباز ۷۵ هکتار است و در هر سال به اندازه‌ی ۲۶ متر عمیق‌تر می‌شود. در این مدت چه حجمی از خاک، برحسب کیلومتر مکعب، از معدن برداشته شده است؟

۴۷ یکای نجومی (AU)، برابر با فاصله‌ی متوسط زمین تا خورشید، یعنی تقریباً $۱٫۵۰\times۱۰^{۸}\,\mathrm{km}$، است. تندی نور در حدود $۳٫۰\times۱۰^{۸}\,\mathrm{m/s}$ است. تندی نور را برحسب یکای نجومی بر دقیقه بیان کنید.

۴۸ موش کور شرقی معمولی پستان‌دار است و ۷۵ گرم جرم دارد. این جرم هم‌ارز با ۷٫۵ مول اتم است (هر مول اتم برابر با $۶٫۰۲\times۱۰^{۲۳}$ اتم است). در این موش میانگین جرم اتم‌ها، برحسب یکای جرم اتمی (u)، چقدر است؟

۴۹ یکای سنتی طول در ژاپن کِن[2] است (هر کِن ۱٫۹۷ متر است). نسبت (الف) کِن مربع به متر مربع و (ب) کِن مکعب به متر مکعب، چیست؟ مخزن آب استوانه شکلی دارای ارتفاع ۵٫۵۰ کِن و شعاع ۳٫۰۰ کِن است. حجم مخزن برحسب (پ) کِن مکعب، و (ت) متر مکعب، چقدر است؟

۵۰ ناخدای یک کشتی نجات چنین دستوری دریافت می‌کند که کشتی را به اندازه‌ی $۲۴٫۵\,\mathrm{mi}$ به سمت خاور هدایت کند تا درست به بالای کشتی غرق شده‌ی دزدان دریایی برسد. اما هنگامی که غواص‌ها در آن محل در کف دریا به جست و جو می‌پردازند اثری از کشتی غرق‌شده پیدا نمی‌کنند. ناخدا در ارتباط رادیویی دوباره با مرکز اطلاع‌رسانی، متوجه می‌شود که مسافتی که باید می‌پیمود ۲۴٫۵ ***مایل دریایی*** بوده است، نه مایل معمولی. با استفاده کردن از جدول تبدیل طول‌ها در پیوست ت پایان کتاب، معین کنید فاصله‌ی افقی کشتی نجات از کشتی دزدان دریایی چند کیلومتر است؟

۵۱ ذراع، یا اَرَش، یک یکای قدیمی طول است که معادل فاصله‌ی میان آرنج تا نوک انگشت میانی شخص اندازه گیرنده است. فرض کنید گستره‌ی این فاصله از ۴۳ تا ۵۳ سانتی‌متر است. هم‌چنین، فرض کنید ترسیمات قدیمی نشان می‌دهند که ستونی از استوانه ۹ ذراع طول و ۲ ذراع قطر دارد. به ازای گستره‌ی مقادیر داده شده، به ترتیب، کمترین و بیشترین مقدار (الف) طول استوانه برحسب متر، (ب) طول استوانه برحسب میلی‌متر، و (پ) حجم استوانه برحسب متر مکعب، چیست؟

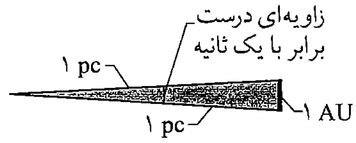
۵۲ برای درک تمایز میان اصطلاحات قدیم و جدید و بزرگ و کوچک به موضوع زیر توجه کنید: در جامعه‌ی روستایی قدیمی انگلستان یک هاید[1] (مساحتی بین ۱۰۰ تا ۱۲۰ جریب) زمینی بود که با یک گاوآهن برای اداره شدن خانواده‌ای به مدت یک سال مورد نیاز بود. (مساحت یک جریب برابر با $۴۰۴۷\,\mathrm{m^{۲}}$ است). هم‌چنین، یک ویپن تیک[2] زمینی بود که تعداد ۱۰۰ خانوار می‌توانستند با آن ابزار معاش کنند. در فیزیک کوانتومی مساحت سطح مقطع یک هسته را (که از روی احتمال برخورد و جذب شدن یک ذره توسط آن تعریف می‌شود) برحسب بارن[3] اندازه‌گیری می‌کنند. یک بارن $۱\times۱۰^{-۲۸}\,\mathrm{m^{۲}}$ است. (در فرهنگ فیزیک هسته‌ای اگر هسته‌ای «بزرگ» باشد، شلیک کردن یک ذره به سوی آن مانند شلیک کردن گلوله‌ای به درب انبار غله است، که احتمال خطا رفتن این گلوله بسیار کم است). نسبت ۲۵ ویپن تیک به ۱۱ بارن چیست؟

۵۳ ***یکای نجومی*** (AU[4]) برابر با فاصله‌ی متوسط زمین تا خورشید، یعنی در حدود $۹۲٫۹\times۱۰^{۶}\,\mathrm{mi}$ است. یک ***پارسک***[5]

1. shake 2. ken

1. hide 2. wapentake 3. barn
4. astronomical unit (AU) 5. parsec

(pc) فاصله‌ای است‌که در آن فاصله طول 1AU تحت زاویه‌ای، درست، برابر با یک ثانیه‌ی قوسی دیده می‌شود (شکل ۱-۸). ***سال ـ نوری*** (ly) مسافتی است که نور با تندی ۱۸۶۰۰۰mi/s در مدت یک سال در خلاء می‌پیماید. فاصله‌ی زمین ـ خورشید را برحسب (الف) پارسک و (ب) سال نوری، بیان کنید.



شکل ۱-۸ مسئله‌ی ۵۳.

۵۴ در برگه‌ی مشخصات نوعی رنگ برای مصرف‌های خانگی ادعا شده است که این رنگ دارای خاصیت پوشانندگی $460 ft^2/gal$ است. (الف) این کمیت را برحسب مترمربع بر لیتر بیان کنید. (ب) این کمیت را برحسب یکای SI بیان کنید (پیوست‌های الف و ت پایان کتاب را ببینید). (پ) معکوس کمیت داده شده‌ی اولی چیست و (ت) معنی فیزیکی آن چیست؟

۵۵ نوشابه‌ی مورد نیاز برای پذیرایی در یک مهمانی بزرگ باید در ظرفی بلوری با ابعاد درونی (ارتفاع) ۴۰cm × ۴۰cm × ۳۰cm خریداری شود. این ظرف در آغاز باید لب به لب پر شود. نوشابه را می‌توان در بطری‌هایی با اندازه‌های معین شده در جدول زیر خریداری کرد. خریدن یک بطری بزرگ‌تر به جای چند بطری کوچک‌تر، هزینه‌ی کل نوشابه را کاهش می‌دهد. برای به کمینه رساندن هزینه، (الف) بطری با چه اندازه‌ای و چند بطری باید خریداری شود، و هنگامی که ظرف نوشابه پر است، چقدر نوشابه برحسب (ب) بطری استاندارد و (پ) لیتر، در آن وجود دارد؟

یک بطری استاندارد
یک مگنوم = ۲ بطری استاندارد
یک جرابوم = ۴ بطری استاندارد
یک رهوبوم = ۶ بطری استاندارد
یک متوسلاه = ۸ بطری استاندارد
یک سالمانازار = ۱۲ بطری استاندارد
یک بالتازار = ۱۶ بطری استاندارد = ۱۱٫۳۵۶ لیتر
یک نبوشادنزار = ۲۰ بطری استاندارد

۵۶ نسبت ***غلّه ـ دام*** اصطلاحی اقتصادی متداول در بازار فروش دام است و به هزینه‌ی تغذیه‌ی یک دام برای رشد کافی و ارائه برای فروش در بازار مربوط می‌شود. این اصطلاح به صورت نسبت بهای بازاری یک دام به جرم ۳٫۱۰۸ اسلاگ به بهای یک بوشل امریکایی غلّه تعریف می‌شود (واژه‌ی «اسلاک» از یک واژه‌ی آلمانی قدیمی به معنی «کوفتن» اقتباس شده است و در زبان انگلیسی مدرن هم «اسلاگ» را به صورت فعل و به همین معنی به کار می‌برند). یک بوشل امریکایی برابر با ۳۵٫۲۳۸ لیتر است. اگر نسبت غلّه ـ دام در بازار به صورت ۵٫۷ باشد، این نسبت، یعنی

$$\frac{\text{بهای یک کیلوگرم دام}}{\text{یک لیتر غلّه}}$$

برحسب یکاهای متریک چیست؟ (***راهنمایی:*** جدول جرم را در پیوست ت پایان کتاب ببینید).

۵۷ می‌خواهیم برای ۴۰۰ نفر شام به سبک مکزیکی تهیه کنیم. بنا به دستور تهیه‌ی غذا، برای پذیرایی از هر نفر، ۲ عدد فلفل جالاپنو[1] لازم است. اما ما فقط یک فلفل هابانرو[2] در دسترس داریم. مزه‌ی تندی فلفل‌ها برحسب ***یکای گرمای اسکوویل*** (SHU[3]) اندازه‌گیری می‌شود. مزه‌ی تندی یک فلفل جالاپنو به‌طور متوسط ۴۰۰۰SHU و مزه‌ی تندی یک فلفل هابانرو ۳۰۰۰۰۰SHU است. برای دست‌یابی به مزه‌ی مورد نظر، به‌جای فلفل‌های جالاپنو در غذای ۴۰۰ نفر، چند فلفل هابانرو باید به کار برد؟

۵۸ پلکان‌های استاندارد درون خانه دارای پله‌هایی به ارتفاع ۱۹cm و عمق افقی ۲۳cm است. بررسی نشان می‌دهد که اگر عمق افقی ۲۸cm باشد، پایین رفتن از پلکان امن‌تر می‌شود. برای پلکانی خاص با ارتفاع کل ۴٫۵۷m، اگر از این تغییر عمق افقی استفاده کنیم، پلکان به چه اندازه بیشتر به درون اتاق کشیده خواهد شد؟

۵۹ در هنگام خریدن غذای مربوط به یک گردهمایی، به جای صدف خوراکی متوسط اقیانوس آرام (که هر ۸ تا ۱۲ عدد آن

1. jalapeno 2. Habanero
3. Scoville heat unit (SHU)

یک پینت[1] امریکایی است)، به اشتباه صدف خوراکی متوسط اقیانوس اطلس را (که هر ۲۶ تا ۳۸ عدد آن یک پینت امریکایی است) سفارش می‌دهید. بسته‌ی فرستاده شده برای شما دارای ابعاد درونی ۱٫۰m × ۱۲cm × ۲۰cm و هر پینت امریکایی معادل ۰٫۴۷۳۲ لیتر است. صدف‌های دریافت شده چه مقدار کمتر از تعداد مورد انتظار است؟

۶۰ در یک کتاب آشپزی قدیمی برای تهیه‌ی سوپ خامه‌ای گزنه چنین دستوری داده شده است «مقادیر زیر از مواد سوپ را با هم بجوشانید: یک فنجان صبحانه به اضافه‌ی یک فنجان چای به اضافه‌ی ۶ قاشق غذاخوری به اضافه‌ی یک قاشق دسرخوری. با استفاده کردن از دستکش، برگه‌های گزنه را جدا کنید تا ۰٫۵ کوارت از آن به دست آید؛ این برگ‌ها را به آب و مواد در حال جوشیدن اضافه کنید. یک قاشق غذاخوری برنج پخته شده و یک قاشق نمک خوری نمک اضافه کنید. مخلوط به دست آمده را به مدت ۱۵ دقیقه به آرامی بجوشانید». جدول زیر برخی تبدیل‌های بین مقیاس‌های بریتانیایی قدیمی (پیشامتریک) و مقیاس‌های امریکایی (باز هم پیشامتریک) را نشان می‌دهد. (متری کردن این مقیاس‌ها واقعاً سخت است) برای مقیاس‌های مایعات، یک قاشق چای‌خوری بریتانیایی برابر با یک قاشق چای‌خوری امریکایی است. برای مقیاس مواد خشک، یک قاشق چای‌خوری بریتانیایی برابر با ۲ قاشق چای‌خوری امریکایی، و یک کوارت بریتانیایی برابر با یک کوارت امریکایی است. برای تهیه کردن غذای مورد نظر، برحسب مقیاس‌های امریکایی، چقدر (الف) مواد سوپ، (ب) برگ گزنه، (پ) برنج و (ت) نمک، لازم است؟

مقیاس بریتانیایی قدیمی	مقیاس‌های امریکایی
قاشق چای‌خوری = ۲ قاشق نمک خوری	قاشق غذاخوری = ۳ قاشق چای‌خوری
قاشق دسرخوری = ۲ قاشق چای‌خوری	نیم فنجان = ۸ قاشق غذاخوری
قاشق غذاخوری = ۲ قاشق دسرخوری	فنجان = ۲ نیم فنجان
فنجان چای‌خوری = ۸ قاشق غذاخوری	
فنجان صبحانه خوری = ۲ فنجان چای‌خوری	

1. pint

فصل ۲

حرکت در طول خط راست

۲–۱ مکان، جابه‌جایی، و سرعت متوسط

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۲–۱ تشخیص دهید که اگر همه‌ی بخش‌های یک شیء در یک جهت و با یک آهنگ حرکت کنند، آن شیء را می‌توان به عنوان یک ذره (نقطه مانند) در نظر گرفت. (این فصل مربوط به حرکت چنین اشیایی است).

۲–۲ تشخیص دهید که مکان یک ذره محل آن بر روی یک محور مقیاس‌دار، مانند محور x، است.

۲–۳ رابطه‌ی میان جابه‌جایی یک ذره و مکان‌های آغازی و پایانی آن را به کار ببرید.

۲–۴ رابطه‌ی میان سرعت متوسط یک ذره، جابه‌جایی آن و بازه‌ی زمانی مربوط به آن جابه‌جایی را به کار ببرید.

۲–۵ رابطه‌ی میان تندی متوسط یک ذره، مسافت کل پیموده شده و بازه‌ی زمانی مربوط به آن حرکت را به کار ببرید.

۲–۶ با داشتن نمودار مکان ذره برحسب زمان، سرعت متوسط میان هر دو زمان خاص را معین کنید.

نکته‌های کلیدی

- مکان x یک ذره بر روی محور x، جای ذره نسبت به مبداء، یا نقطه‌ی صفر محور را معین می‌کند.
- مکان ذره، بسته به این که ذره در کدام سوی مبداء قرار دارد، مثبت یا منفی است، یا اگر ذره در مبداء باشد مکان آن صفر است. جهت مثبت بر روی یک محور همان جهت افزایش یافتن عددهای مثبت است؛ جهت مخالف، جهت منفی محور x است.
- جابه‌جایی یک ذره Δx، تغییر مکان ذره است:

$$\Delta x = x_۲ - x_۱$$

- جابه‌جایی کمیتی برداری است. این کمیت مثبت است اگر ذره در جهت مثبت محور x حرکت کرده باشد و منفی است اگر ذره در جهت منفی حرکت کرده باشد.
- هرگاه ذره‌ای در بازه‌ی زمانی $\Delta t = t_۲ - t_۱$ از مکان $x_۱$ تا مکان $x_۲$ حرکت کند، سرعت متوسط آن در این بازه‌ی زمانی برابر است با

$$v_{\text{avg}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱}$$

- علامت جبری v_{avg} جهت حرکت را نشان می‌دهد (v_{avg} کمیتی برداری است). سرعت متوسط به مسافت واقعی پیموده شده توسط ذره بستگی ندارد، اما در عوض، به مکان‌های آغازی و پایانی ذره بستگی دارد.

● در روی یک نمودار x برحسب t، سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی Δt، با شیب خط راست وصل کننده‌ی دو نقطه‌ی منحنی که معرف دو انتهای بازه‌ی زمانی هستند، برابر است.

● تندی متوسط s_{avg} یک ذره در طی بازه‌ی زمانی Δt به مسافت کل پیموده شده در این بازه‌ی زمانی بستگی دارد:

$$s_{avg} = \frac{\text{مسافت کل}}{\Delta t}$$

فیزیک در این باره چه می‌گوید؟

یکی از هدف‌های **دانش فیزیک** مطالعه‌ی حرکت اشیا است ـ مثلاً، اینکه یک شیء با چه سرعتی حرکت می‌کند و در مدتی معین چه مسافتی را می‌پیماید. مهندسان انجمن ملّی مسابقات خودروهای معمولی (NASCAR[1]) در حالی که کارایی خودروهای خود را پیش از مسابقه و در حین مسابقه بررسی می‌کنند، در مورد این جنبه از دانش فیزیک تعصب نشان می‌دهند. زمین‌شناسان در تلاش برای پیشگویی زمین‌لرزه از این بخش دانش فیزیک برای اندازه‌گیری حرکت صفحه‌های زمین ساخت استفاده می‌کنند. پژوهشگران حوزه‌ی پزشکی در هنگام تشخیص گرفتگی جزئی در یک سرخرگ، برای شناخت شارش خون در بدن بیمار به این بخش فیزیک نیاز دارند و راننده‌ها هم به این بخش فیزیک توجه دارند تا هنگام دریافت کردن اعلام خطر آشکارساز رادار خودرو خود بتوانند سرعت خودرو را با آهنگ مناسبی کم کنند. در این مورد مثال‌های زیادی را می‌توان بیان کرد. در این فصل کتاب، ما فیزیک پایه‌ی مربوط به حرکت را در حالتی مطالعه می‌کنیم که یک شیء (خودرو مسابقه، صفحه‌ی زمین ساخت، یاخته‌ی خون، یا هر شیء دیگر) در طول یک محور حرکت می‌کند. چنین حرکتی را ***حرکت یک بعدی*** می‌نامند.

حرکت

دنیا و هر چه در آن است در حال حرکت است. حتی اشیای به ظاهر ساکن، مانند یک جاده، با چرخش زمین به‌دور خود، حرکت مداری زمین به‌دور خورشید، حرکت مداری خورشید به‌دور مرکز کهکشان راه شیری وحرکت این کهکشان نسبت به کهکشان‌های دیگر، نیز حرکت می‌کنند. رده‌بندی و مقایسه‌ی حرکت‌ها (که **حرکت‌شناسی**، یا **سینماتیک** نام دارد) اغلب کاری چالش برانگیز است. ما دقیقاً چه چیزی را اندازه می‌گیریم و مقایسه را چگونه انجام می‌دهیم؟

پیش از آنکه برای پاسخ دادن به این پرسش‌ها تلاشی بکنیم، برخی ویژگی‌های کلی حرکت را که در سه موضوع زیر قرار می‌گیرند، بررسی می‌کنیم.

۱. حرکت فقط در طول یک خط راست انجام می‌شود. این خط ممکن است در راستای قائم، در راستای افقی، یا به صورت مورب، باشد، اما باید راست باشد.

۲. نیروها (هُل دادن‌ها و کشیدن‌ها) باعث ایجاد حرکت می‌شوند، اما تا فصل ۵ در مورد

1. National Association for Stock Car Auto Racing (NASCAR)

نیرو بحثی به میان نخواهد آمد. در این فصل، تنها خود حرکت و تغییر در حرکت را مطالعه می‌کنیم. در اینجا، می‌خواهیم بدانیم آیا شیء متحرک سرعتش زیاد می‌شود یا کم می‌شود، متوقف می‌شود یا جهت حرکتش عوض می‌شود؟ اگر حرکت تغییر می‌کند، زمان در این تغییر چگونه دخالت می‌کند؟

۳. شیء در حالت حرکت یک **ذره** است (منظور شیئی نقطه مانند نظیر الکترون است) یا شیئی است که مانند یک ذره حرکت می‌کند (بدین گونه که تمام اجزاء آن در یک جهت و با یک آهنگ حرکت می‌کنند). یک قطعه‌ی چدن خشک را که از بالای یک سطح شیب‌دار به پایین می‌لغزد، می‌توان یک ذره‌ی در حال حرکت در نظر گرفت؛ اما بوته‌ی خاری را که در حال وول خوردن به پایین است نمی‌توان یک ذره فرض کرد.

مکان و جابه‌جایی

تعیین مکان یک شیء به معنی پیدا کردن موضع شیء نسبت به یک نقطه‌ی مرجع است، که اغلب، **مبداء** (یا نقطه‌ی صفر) محوری مانند محور x، در شکل ۲-۱ است. **جهت مثبت** این محور همان جهت افزایش یافتن عددها (مختصه‌ها) است، که در شکل ۲-۱ به سمت راست است، و جهت مخالف، **جهت منفی** است.

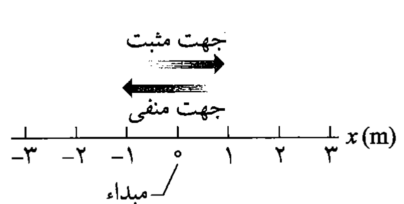
برای مثال، یک ذره ممکن است در مکان $x = 5\,\mathrm{m}$ باشد، که نشان می‌دهد ذره در فاصله‌ی ۵ متری طرف مثبت مبداء واقع شده است. اگر ذره در مکان $x = -5\,\mathrm{m}$ باشد، معنی‌اش این است که به همان فاصله در سوی مخالف مبداء واقع است. در روی محور x، مختصه‌ی $-5\,\mathrm{m}$ از مختصه‌ی $-1\,\mathrm{m}$ کوچک‌تر است و هر دو از مختصه‌ی $+5\,\mathrm{m}$ کوچک‌ترند. نوشتن علامت مثبت مختصه لازم نیست، اما علامت منفی را همیشه باید نوشت.

تغییر مکان ذره از x_1 به مکان دیگر x_2 را **جابه‌جایی** Δx، می‌نامند، که برابر است با

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad (۲-۱)$$

[نماد Δ، حرف یونانی دلتای بزرگ است، که نشان دهنده‌ی تغییر یک کمیت و معرف مقدار پایانی (نهایی) منهای مقدار آغازی (اولی) کمیت است]. هنگامی که عددهای مربوط به مکان‌های x_1 و x_2 را در معادله‌ی ۲-۱ قرار می‌دهیم، حاصل مثبت همیشه نشان می‌دهد که جابه‌جایی در جهت مثبت (در شکل ۲-۱ به راست‌سو) و حاصل منفی نشان می‌دهد که جابه‌جایی در جهت مخالف (در شکل ۲-۱ به چپ‌سو) است. به عنوان مثال، اگر ذره از $x_1 = 5\,\mathrm{m}$ به $x_2 = 12\,\mathrm{m}$ حرکت کند، $\Delta x = (12\,\mathrm{m}) - (5\,\mathrm{m}) = +7\,\mathrm{m}$ خواهد بود. این نتیجه‌ی مثبت نشان می‌دهد که حرکت در جهت مثبت صورت گرفته است. حال اگر ذره از $x_1 = 5\,\mathrm{m}$ به $x_2 = 1\,\mathrm{m}$ حرکت کند، در آن صورت $\Delta x = (1\,\mathrm{m}) - (5\,\mathrm{m}) = -4\,\mathrm{m}$ خواهد بود. این نتیجه‌ی منفی نشان می‌دهد که حرکت در جهت منفی صورت گرفته است.

عدد واقعی مترهای پیموده شده در طی یک مسافت به جابه‌جایی ربطی ندارد؛ جابه‌جایی



شکل ۲-۱ نمودار مکان یک شیء در روی محوری معین می‌شود که برحسب یکاهای طول (در اینجا متر) نشانه‌گذاری شده و در دو جهت مخالف تا بی‌نهایت امتداد یافته است. نام محور، که در اینجا x است، همیشه در طرف مثبت مبداء نوشته می‌شود.

فقط مربوط به مکان‌های آغازی و پایانی حرکت است. به عنوان مثال، اگر ذره از $x = ۵\,\text{m}$ به $x = ۲۰۰\,\text{m}$ برود و دوباره به $x = ۵\,\text{m}$ برگردد، جابه‌جایی از آغاز تا پایان برابر است با $\Delta x = (۵\,\text{m}) - (۵\,\text{m}) = ۰$.

علامت‌ها. علامت مثبت برای جابه‌جایی نیازی به نشان دادن ندارد، اما علامت منفی را همیشه باید نشان داد. اگر علامت (و در نتیجه جهت) جابه‌جایی را نادیده بگیریم، فقط **بزرگی** (یا قدر مطلق) جابه‌جایی مشخص می‌شود. برای مثال، جابه‌جایی $\Delta x = -۴\,\text{m}$ دارای بزرگی $۴\,\text{m}$ است.

جابه‌جایی نمونه‌ای از **کمیت برداری** است، که کمیتی دارای جهت و بزرگی، هر دو، است. در مورد بردارها در فصل ۳ به طور کامل بحث خواهد شد (اگرچه ممکن است برخی از شما پیش‌تر آن فصل را دیده باشید). اما در اینجا کافی است بدانیم که جابه‌جایی دو ویژگی دارد: (۱) ***بزرگی***، که مسافت (مثلاً تعداد مترهای) بین مکان‌های آغازی و پایانی است. (۲) ***جهت***، که از مکان آغازی به سمت مکان پایانی است، و اگر حرکت در راستای یک محور صورت گیرد، جهت با علامت مثبت یا منفی نشان داده می‌شود.

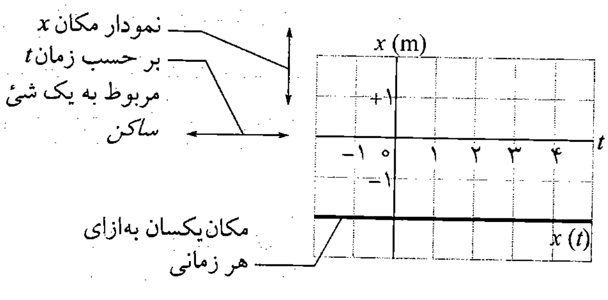
در اینجا نخستین نمونه از خودآزمایی‌های بسیاری آمده است که به شما امکان می‌دهد میزان فراگیری خود را با اندکی استدلال بازبینی کنید. پاسخ خودآزمایی‌ها در پایان کتاب آمده است.

☑ خودآزمایی ۱

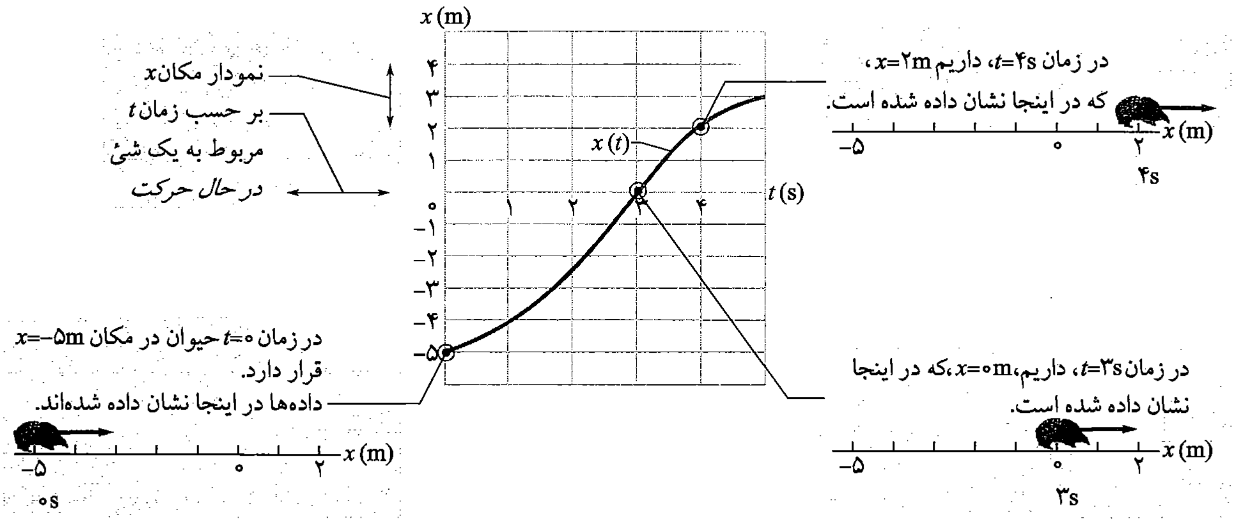
در اینجا سه زوج مکان‌های آغازی و پایانی در راستای محور x، به ترتیب، مشخص شده‌اند. (الف) $-۳\,\text{m}$، $+۵\,\text{m}$؛ (ب) $-۳\,\text{m}$، $-۷\,\text{m}$؛ (پ) $۷\,\text{m}$، $-۳\,\text{m}$. جابه‌جایی مربوط به کدام زوج‌ها منفی است؟

سرعت متوسط و تندی متوسط

برای توصیف مکان، یک روش ساده استفاده کردن از نمودار مکان x به صورت تابعی از زمان t، یعنی نمودار $x(t)$ است [نمادگذاری $x(t)$ به معنی x تابعی از t است، نه حاصل‌ضرب x در t]. به عنوان مثالی ساده، شکل ۲-۲ تابع $x(t)$ مربوط به یک حیوان گورکن در حال سکون (که آن را یک ذره در نظر می‌گیریم) در بازه‌ی زمانی ۷ ثانیه را نشان می‌دهد. این حیوان در مختصه‌ی $x = -۲\,\text{m}$ ساکن است.



شکل ۲-۲ نمودار تابع $x(t)$ برای یک حیوان گورکن که در مکان $x = -۲\,\text{m}$ ساکن است. در اینجا به ازای تمام زمان‌های t، مقدار x برابر با $-۲\,\text{m}$ است.



شکل ۲-۳ نمودار تابع $x(t)$ مربوط به حیوان گورکنی که حرکت می‌کند. شکل مسیر وابسته به نمودار نیز نشان داده شده است.

شکل ۲-۳ نیز برای حیوان رسم شده و جالب‌تر است، زیرا به حرکت مربوط می‌شود. گورکن ابتدا در زمان $t=0$ در مکان $x=-5\,\mathrm{m}$ قرار دارد. سپس، به سوی مکان $x=0$ حرکت می‌کند، در زمان $t=3\,\mathrm{s}$ از آن نقطه می‌گذرد، و آنگاه به سمت مقادیر مثبت و بزرگ‌تر x حرکت می‌کند. شکل ۲-۳ حرکت راست‌خط واقعی گورکن را هم (در سه زمان) نشان می‌دهد و شبیه آن چیزی است که می‌توانیم ببینیم. نمودار شکل ۲-۳ انتزاعی‌تر است، اما نشان می‌دهد که گورکن با چه سرعتی حرکت می‌کند.

در عمل، در حرکت ذره اصطلاح «با چه سرعتی» به چند کمیت وابسته است. یکی از این کمیت‌ها **سرعت متوسط** v_{avg}، است که برابر با نسبت جابه‌جایی انجام شده Δx، به بازه‌ی زمانی خاص Δt است:

$$v_{avg}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1} \qquad (۲-۲)$$

این نمادگذاری نشان می‌دهد که مکان x_1 مربوط به زمان t_1 و مکان x_2 مربوط به زمان t_2 است. یکای معمول برای v_{avg}، **متر بر ثانیه** (با نماد $\mathrm{m/s}$) است. در مسئله‌ها ممکن است از یکاهای دیگر هم استفاده شود، اما این یکاها همیشه به صورت نسبت $\frac{\text{طول}}{\text{زمان}}$ بیان می‌شوند.

نمودارها. در نمودار x برحسب t، v_{avg} **شیب** خط راستی است که دو نقطه‌ی خاص از منحنی $x(t)$ را به هم وصل می‌کند؛ یکی از نقطه‌ها متناظر با x_2 و t_2، و نقطه‌ی دیگر متناظر با x_1 و t_1 است. v_{avg} نیز مانند جابه‌جایی دارای بزرگی و جهت است (یعنی کمیتی برداری است). بزرگی v_{avg}، همان بزرگی شیب خط راست است. مثبت بودن v_{avg} (و شیب خط) نشان می‌دهد که خط به بالاسو و به سمت راست کشیده می‌شود و منفی بودن

v_{avg} (و شیب خط) نمایشگر آن است که خط به پایین‌سو و به سمت راست کشیده می‌شود. سرعت متوسط v_{avg} همیشه با جابه‌جایی Δx هم علامت است، زیرا در معادلـه‌ی ۲-۲، Δt همیشه مثبت است.

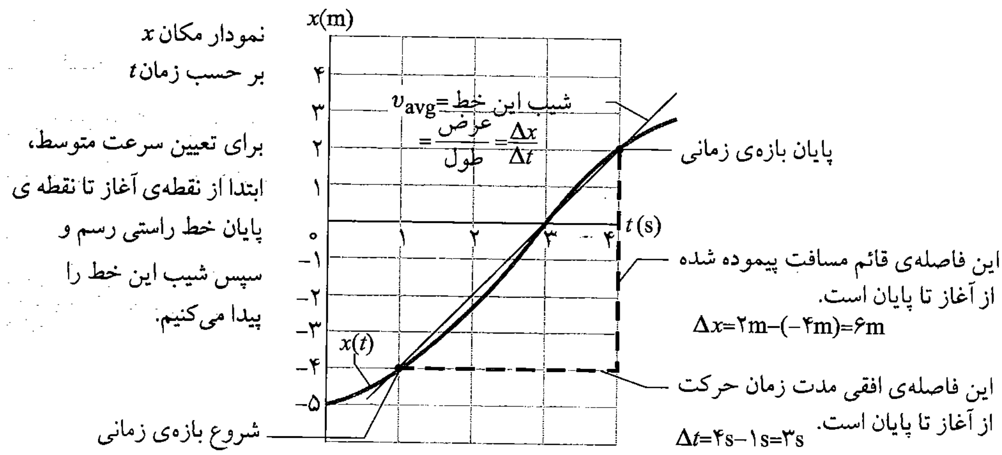
شکل ۲-۴ چگونگی پیدا کردن v_{avg} حیوان گورکن با استفاده کردن از شـکل ۲-۳ و در بازه‌ی زمانی $t = ۱s$ تا $t = ۴s$ را نشان می‌دهد. در این شکل نقطه‌ای از منحنی مکـان را کـه مربوط به آغاز بازه‌ی زمانی است، با یک خط راست به نقطه‌ی دیگر، که مربوط به پایان بازه‌ی زمانی است، وصل می‌کنیم. سپس، شیب $\Delta x / \Delta t$ این خط راسـت را پیـدا مـی‌کنـیم. بـه ازای بازه‌ی زمانی داده شده سرعت متوسط برابر است با

$$v_{avg} = \frac{۶\,\mathrm{m}}{۳\,\mathrm{s}} = ۲\,\mathrm{m/s}$$

تندی متوسط s_{avg}، کمیت دیگری است که «چگونه تنـد رفـتن» را در حرکـت یـک ذره توصیف می‌کند. در حالی که سرعت متوسط به جابه‌جـایی Δx ذره مربـوط مـی‌شـود، تنـدی متوسط به مسافت کل پیموده شده (مثلاً عده‌ی مترهای پیموده شده) بسـتگی دارد و از جهـت حرکت مستقل است؛ یعنی

$$s_{avg} = \frac{\text{مسافت کل پیموده شده}}{\Delta t} \qquad (۲-۳)$$

چون تندی متوسط به جهت بستگی ***ندارد***، بدون علامـت جبـری اسـت. گـاهی s_{avg} همـان v_{avg} (بدون توجه به علامت) است، اما این دو مقدار می‌توانند کاملاً متفاوت باشند.



شـکل ۲-۴ محاسـبه‌ی سـرعت متوسط در میـان زمان‌هـای $t = ۱s$ و $t = ۴s$، بـا اسـتفاده کـردن از شـیب خطی که در روی منحنـی $x(t)$ نقـاط متناظر با این زمان‌ها را بـه هـم وصـل می‌کند.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۲-۱ سرعت متوسط، حرکت کردن با خودرو وانت فرسوده

فرض کنید در جاده‌ی مستقیمی با یـک خـودرو وانـت فرسـوده مسافت $۸/۴\,\mathrm{km}$ را با تندی $۷۰\,\mathrm{km/h}$ می‌پیمایید. در این حـال بنزین وانت تمام می‌شود و خـودرو مـی‌ایسـتد. از ایـن بـه بعـد مسافت $۲/۰\,\mathrm{km}$ را در مدت ۳۰ دقیقه با پـای پیـاده و در همـان جاده پیش می‌روید تا به جایگاه پخش بنزین برسید.

(الف) جابه‌جایی کل شما از لحظه‌ی شروع به رانندگی تا رسیدن

به جایگاه پخش بنزین چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

برای آسانی فرض می‌کنیم در جهت مثبت محور x از مکان اول $x_{۱}=۰$ تا مکان دوم $x_{۲}$ در جایگاه پخش بنزین، حرکت می‌کنید. مکان دوم در نقطه‌ی $x_{۲}=۸/۴\,\text{km}+۲/۰\,\text{km}=۱۰/۴\,\text{km}$ قرار دارد. پس، جابه‌جایی شما Δx در راستای محور x از تفاضل مکان دوم و مکان اول به دست می‌آید.

محاسبه: با استفاده کردن از معادله‌ی ۲-۱، داریم

$$\Delta x = x_{۲}-x_{۱}=۱۰/۴\,\text{km}-۰ \Rightarrow$$

$$\Delta x = ۱۰/۴\,\text{km}$$ **(پاسخ)**

بنابراین، جابه‌جایی کل شما ۱۰/۴km در جهت مثبت محور x است.

(ب) بازه‌ی زمانی Δt از آغاز حرکت شما با خودرو تا رسیدن به جایگاه پخش بنزین چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

ما بازه‌ی زمانی مربوط به پیاده‌روی، یعنی $\Delta t_{(\text{پیاده روی})}$ (مساوی با ۰/۵۰h) را می‌دانیم، اما بازه‌ی زمانی $\Delta t_{(\text{رانندگی})}$ مربوط به رانندگی شما با خودرو را نمی‌دانیم. در عین حال، می‌دانیم که جابه‌جایی خودرو، یعنی $\Delta x_{(\text{رانندگی})}$ برابر با ۸/۴km و سرعت متوسط $v_{\text{avg}(\text{رانندگی})}$ برابر با ۷۰km/h است. این سرعت متوسط برابر با نسبت جابه‌جایی خودرو به بازه‌ی زمانی مربوط به رانندگی است.

محاسبات: ابتدا می‌نویسیم

$$v_{\text{avg}(\text{رانندگی})}=\frac{\Delta x_{(\text{رانندگی})}}{\Delta t_{(\text{رانندگی})}}$$

با مرتب کردن این رابطه و جانشانی داده‌ها، داریم

$$\Delta t_{(\text{رانندگی})}=\frac{\Delta x_{(\text{رانندگی})}}{v_{\text{avg}(\text{رانندگی})}}=\frac{۸/۴\,\text{km}}{۷۰\,\text{km/h}}=۰/۱۲\,\text{h}$$

پس، می‌توان نوشت

$$\Delta t=\Delta t_{(\text{رانندگی})}+\Delta t_{(\text{پیاده روی})}$$

$$\Delta t=۰/۱۲\,\text{h}+۰/۵۰\,\text{h}\Rightarrow$$

$$\Delta t=۰/۶۲\,\text{h}$$ **(پاسخ)**

(پ) سرعت متوسط شما، v_{avg}، از آغاز رانندگی تا رسیدن به جایگاه پخش بنزین چقدر است؟ این مقدار را به روش‌های عددی و ترسیمی به دست آورید.

نکته‌ی کلیدی

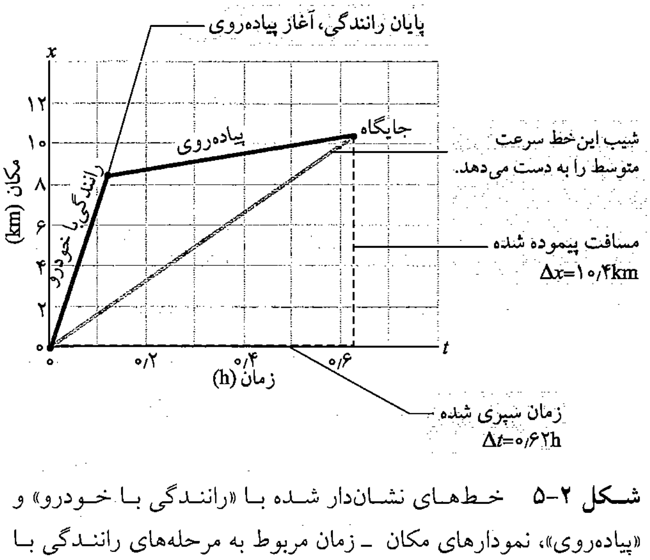
با توجه به معادله‌ی ۲-۲ می‌دانیم که v_{avg} ***برای کل مسافت***، از نسبت جابه‌جایی ۱۰/۴km ***مربوط به کل مسافت*** به بازه‌ی زمانی ۰/۶۲h ***مربوط به کل مسافت*** به‌دست می‌آید.

محاسبه: در اینجا، داریم

$$v_{\text{avg}}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۱۰/۴\,\text{km}}{۰/۶۲\,\text{h}}\Rightarrow$$

$$v_{\text{avg}}=۱۶/۸\,\text{km/h}\approx ۱۷\,\text{km/h}$$ **(پاسخ)**

برای پیدا کردن v_{avg} به روش ترسیمی، ابتدا نمودار تابع $x(t)$ را مطابق شکل ۲-۵، رسم می‌کنیم. در این شکل نقطه‌ی آغاز حرکت در مبداء مختصات و نقطه‌ی پایان در نمودار نقطه‌ی مشخص شده با «جایگاه» است. سرعت متوسط شما از شیب خط راست وصل کننده‌ی این دو نقطه، یعنی، از تقسیم کردن ***عرض*** نقطه‌ی مشخص شده با «جایگاه» $(\Delta x=۱۰/۴\,\text{km})$ به ***طول*** این نقطه $(\Delta t=۰/۶۲\,\text{h})$ به دست می‌آید، که برابر است با $v_{\text{avg}}=۱۶/۸\,\text{km/h}$.



شکل ۲-۵ خط‌های نشان‌دار شده با «رانندگی با خودرو» و «پیاده‌روی»، نمودارهای مکان ـ زمان مربوط به مرحله‌های رانندگی با خودرو و پیاده‌روی هستند (نمودار مرحله‌ی پیاده‌روی با فرض ثابت بودن سرعت پیاده‌روی رسم شده است). شیب خط راست وصل کننده‌ی مبداء به نقطه‌ی مشخص شده با «جایگاه»، سرعت متوسط مسافرت از آغاز تا رسیدن به جایگاه را به دست می‌دهد.

(ت) فرض کنید پس از گرفتن بنزین از جایگاه، ۴۵ دقیقه دیگر طول بکشد تا شما به خودرو خود برگردید. تندی متوسط شما از آغاز رانندگی تا بازگشت دوباره به خودرو چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

تندی متوسط از نسبت مسافت کل پیموده شده به بازه‌ی زمانی کل مربوط، به دست می‌آید.

محاسبه: مسافت کل برابر است با

$$8.4\,\text{km} + 2.0\,\text{km} + 2.0\,\text{km} = 12.4\,\text{km}$$

و بازه‌ی زمانی کل برابر است با

$$0.12\,\text{h} + 0.50\,\text{h} + 0.75\,\text{h} = 1.37\,\text{h}$$

بنابراین، با استفاده کردن از معادله‌ی ۲-۳، داریم

$$s_{\text{avg}} = \frac{12.4\,\text{km}}{1.37\,\text{h}} \Rightarrow$$

$$s_{\text{avg}} = 9.1\,\text{km/h}$$ **(پاسخ)**

۲-۲ سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۲-۷ با داشتن مکان یک ذره به صورت تابعی از زمان، سرعت لحظه‌ای را در هر زمان معین حساب کنید.

۲-۸ با داشتن نمودار مکان یک ذره برحسب زمان، سرعت لحظه‌ای را در هر زمان خاص معین کنید.

۲-۹ تندی را به صورت بزرگی سرعت لحظه‌ای مشخص کنید.

نکته‌های کلیدی

- سرعت لحظه‌ای (یا به بیان ساده سرعت) v یک ذره‌ی در حال حرکت برابر است با

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

که در آن، داریم $\Delta x = x_2 - x_1$ و $\Delta t = t_2 - t_1$.

- سرعت لحظه‌ای (در یک زمان خاص) را می‌توان به صورت شیب (در آن زمان خاص) نمودار x برحسب t پیدا کرد.
- تندی، بزرگی سرعت لحظه‌ای است.

سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای

تا اینجا دو راه برای توصیف سرعت حرکت یک جسم بیان کردیم: سرعت متوسط و تندی متوسط، که هر دو در طی یک بازه‌ی زمانی Δt اندازه‌گیری می‌شوند. اما عبارت «چگونه تند رفتن» بیشتر به اینکه یک ذره در یک لحظه‌ی معین چه سرعتی دارد اتلاق می‌شود ـ و آن **سرعت لحظه‌ای** v (یا به بیان ساده **سرعت**) یک ذره است.

سرعت در هر لحظه، از سرعت متوسط با کوتاه‌تر کردن بازه‌ی زمانی Δt و رفته رفته نزدیک شدن به صفر به دست می‌آید. به تدریج که Δt کوچک‌تر می‌شود سرعت لحظه‌ای به سمت مقداری حدی میل می‌کند، که سرعت در آن لحظه است:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (۲\text{-}۴)$$

توجه کنید که v آهنگ تغییر مکان ذره x، برحسب زمان، در یک لحظه‌ی معین است؛ یعنی v مشتق x نسبت به t است. هم‌چنین، توجه کنید که v در هر لحظه برابر با شیب منحنی مکان ـ زمان ذره در نقطه‌ی مربوط به آن لحظه است. سرعت نیز کمیتی برداری است و بنابراین دارای یک جهت وابسته است.

تندی، بزرگی سرعت است؛ یعنی تندی، سرعتی است که جهتش هیچ‌گونه نشانی چه به‌صورت بیانی و چه به صورت علامت جبری ندارد. (***هشدار***: تندی با تندی متوسط می‌تواند کاملاً متفاوت باشد). سرعت $+5\,m/s$ و سرعت $-5\,m/s$ هر دو دارای تندی $5\,m/s$ هستند. تندی سنج خودرو تندی را اندازه می‌گیرد نه سرعت را (این وسیله نمی‌تواند جهت را مشخص کند).

☑ خودآزمایی ۲

معادله‌های زیر تغییرات مکان $x(t)$ یک ذره را در چهار حالت نشان می‌دهند (در همه‌ی معادله‌ها x برحسب متر، t برحسب ثانیه و $t > 0$ است): (۱) $x = 3t - 2$، (۲) $x = -4t^2 - 2$، (۳) $x = 2/t^2$ و (۴) $x = -2$. (الف) در چه حالتی سرعت ذره v، ثابت است؟ (ب) در کدام حالت v در جهت منفی محور x است؟

مسئله‌ی نمونه‌ی ۲-۲ سرعت و شیب x برحسب t، اتاقک آسانسور

شکل ۲-۶ الف نمودار $x(t)$ مربوط به یک آسانسور را نشان می‌دهد که در آغاز ساکن است، سپس، آسانسور به سمت بالا (که آن را جهت مثبت محور x اختیار می‌کنیم) حرکت می‌کند و آنگاه، متوقف می‌شود. نمودار $v(t)$ را رسم کنید.

نکته‌ی کلیدی

در هر لحظه از روی شیب منحنی $x(t)$ می‌توان سرعت در آن لحظه را پیدا کرد.

محاسبات: شیب $x(t)$، و در نتیجه سرعت، در بازه‌های زمانی صفر تا 1s و از 9s به بعد، صفر و در نتیجه آسانسور ساکن است. در طول بازه‌ی bc، شیب منحنی ثابت و غیرصفر است. در نتیجه، آسانسور با سرعت ثابت حرکت می‌کند. بنابراین، شیب منحنی $x(t)$ چنین محاسبه می‌شود

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v = \frac{24\,m - 4.0\,m}{8.0\,s - 3.0\,s} = +4.0\,m/s \qquad (۲-۵)$$

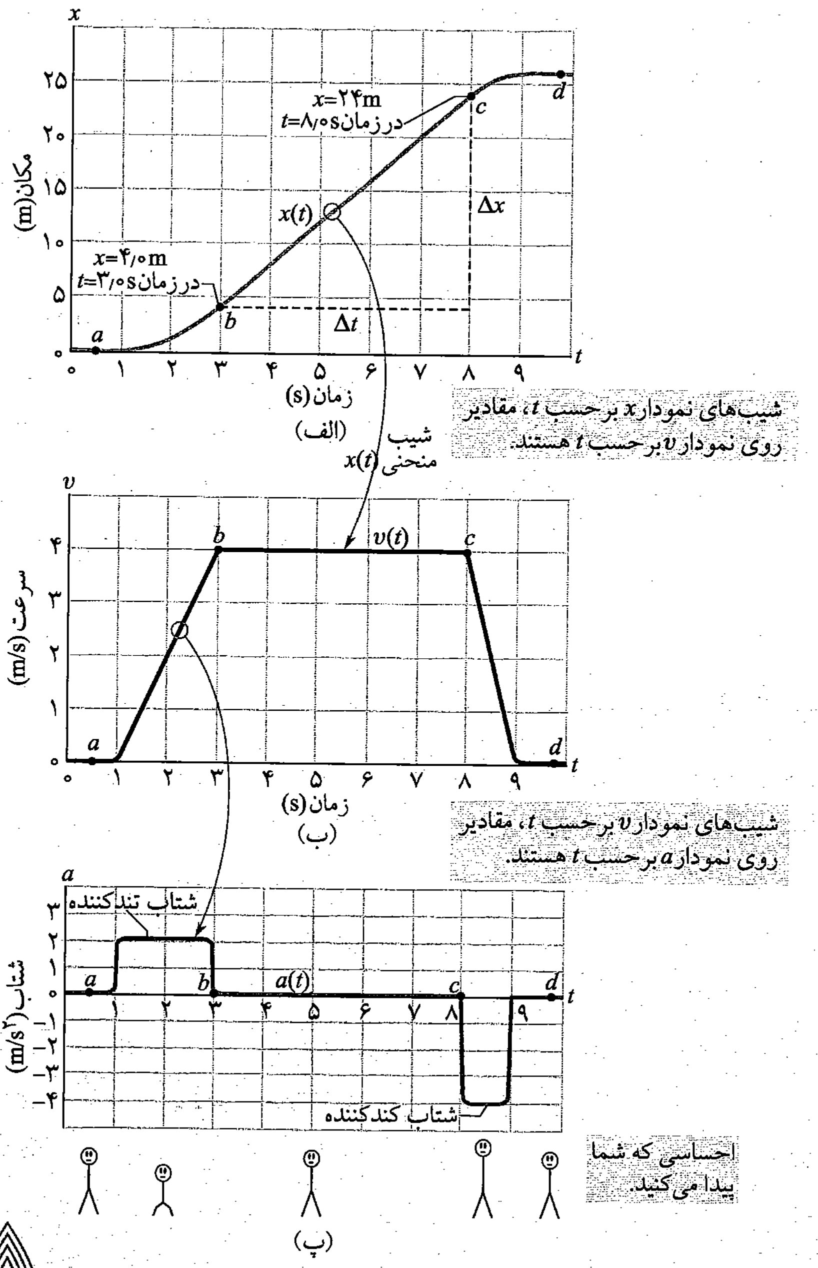
علامت مثبت نشان می‌دهد که آسانسور در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. منحنی‌های مربوط به بازه‌های ذکر شده (که در آن $v = 0$ و $v = 4\,m/s$) در شکل ۲-۶ ب، رسم شده‌اند. علاوه بر این، هم‌چنان که آسانسور شروع به حرکت می‌کند و سپس سرعتش کم می‌شود تا متوقف شود، v مطابق شکل، در بازه‌های 1s تا 3s و 8s تا 9s، تغییر می‌کند. بنابراین، شکل ۲-۶ ب، همان نمودار مورد نظر را نشان می‌دهد. (توصیف شکل ۲-۶ پ، در پودمان ۲-۳ خواهد آمد).

اگر نمودار تابع $v(t)$، مطابق شکل ۲-۶ ب، در دست باشد، می‌توان «وارون عمل کرد» و شکل نمودار $x(t)$ مربوط به آن را (به صورت شکل ۲-۶ الف) به دست آورد. اما واضح است که مقادیر واقعی x در زمان‌های مختلف را نمی‌دانیم، زیرا نمودار $v(t)$ فقط ***تغییرات*** x را نشان می‌دهد. برای پیدا کردن تغییر x در هر بازه‌ی زمانی به زبان ریاضی باید مساحت «زیر منحنی» نمودار $v(t)$ در آن بازه را حساب کرد. برای مثال، در طول بازه‌ی 3s تا 8s، که سرعت آسانسور $4.0\,m/s$ است، مقدار تغییر

x برابر است با

$$\Delta x = (۴/۰\,\mathrm{m/s})(۸/۰\,\mathrm{s} - ۳/۰\,\mathrm{s}) = +۲۰\,\mathrm{m} \quad (۶\text{-}۲)$$

(این مساحت مثبت است، زیرا منحنی $v(t)$ در بالای محور t قرار دارد). شکل ۲-۶ الف، نشان می‌دهد که x در این بازه‌ی زمانی به اندازه‌ی ۲۰m افزایش یافته است. اما شکل ۲-۶ ب، در مورد ***مقادیر*** x در ابتدا و انتهای بازه‌ی زمانی به ما اطلاعاتی نمی‌دهد. به همین جهت به اطلاعات دیگری، مانند مقدار x در برخی لحظه‌های معین، نیازمندیم.



شکل ۲-۶ (الف) منحنی تابع $x(t)$ مربوط به آسانسور که در راستای محور x به سمت بالا حرکت می‌کند. (ب) منحنی تابع $v(t)$ مربوط به آسانسور. توجه کنید که این منحنی مشتق منحنی $x(t)$ است $(v = dx/dt)$. (پ) منحنی تابع $a(t)$ مربوط به آسانسور. این منحنی مشتق منحنی $v(t)$ است $(a = dv/dt)$. آدمک‌های پایین منحنی شتاب، احساسی را که مسافر آسانسور در حین تغییر کردن شتاب ممکن است پیدا کند، نشان می‌دهند.

۲-۳ شتاب

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۲-۱۰ رابطه‌ی میان شتاب متوسط یک ذره، تغییر سرعت آن و بازه‌ی زمانی مربوط به این تغییر را به کار ببرید.

۲-۱۱ با داشتن سرعت ذره به صورت تابعی از زمان، شتاب لحظه‌ای را در هر زمان خاص حساب کنید.

۲-۱۲ با داشتن نمودار سرعت یک ذره برحسب زمان، شتاب لحظه‌ای را در هر زمان خاص معین کنید.

نکته‌های کلیدی

- شتاب متوسط برابر با نسبت تغییر سرعت Δv، به بازه‌ی زمانی مربوط به ایجاد این تغییر Δt، است:

$$a_{\text{avg}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

علامت جبری، جهت a_{avg} را نشان می‌دهد.

- شتاب لحظه‌ای (یا به بیان ساده شتاب) a، برابر با مشتق زمانی اول سرعت $v(t)$، و مشتق زمانی دوم مکان $x(t)$، است:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

- در روی نمودار v برحسب t، شتاب a در هر زمان t، برابر با شیب منحنی در نقطه‌ای است که t را نشان می‌دهد.

شتاب

وقتی سرعت یک ذره تغییر می‌کند، می‌گویند ذره دارای **شتاب** شده است (یا ذره شتاب گرفته است). برای حرکت کردن در راستای یک محور، **شتاب متوسط** a_{avg}، در بازه‌ی زمانی Δt برابر است با

$$a_{\text{avg}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (۲-۷)$$

که در آن ذره در زمان t_1 دارای سرعت v_1 و در زمان t_2 دارای سرعت v_2 است. **شتاب لحظه‌ای** (یا به بیان ساده **شتاب**) برابر است با

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad (۲-۸)$$

از لحاظ ریاضی، شتاب یک ذره در هر لحظه برابر با آهنگ تغییر سرعت در آن لحظه است. از نظر ترسیمی شتاب در هر نقطه برابر با شیب منحنی $v(t)$ در آن نقطه است. از ترکیب کردن معادله‌ی ۲-۸ با معادله‌ی ۲-۴ می‌توان نوشت

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (۲-۹)$$

بنابراین از لحاظ ریاضی، شتاب یک ذره در هر لحظه مشتق دوم تابع مکان $x(t)$ نسبت به زمان است.

یکای متداول شتاب، **متر بر ثانیه بر ثانیه**، یعنی $m/(ss)$ یا m/s^2 است. یکاهای دیگر شتاب به صورت نسبت‌های $\frac{\text{طول}}{(\text{زمان}\times\text{زمان})}$، یا $\frac{\text{طول}}{(\text{زمان})^2}$، هستند. شتاب دارای بزرگی و جهت، هر دو، است (یعنی باز هم کمیتی برداری است). علامت جبری شتاب، درست مانند جابه‌جایی و سرعت، جهت شتاب بر روی یک محور را نشان می‌دهد؛ یعنی شتاب مثبت در جهت مثبت محور، و شتاب منفی در جهت منفی محور است.

شکل ۲-۶ نمودارهای مکان، سرعت و شتاب یک آسانسور در حال حرکت به بالاسو را نشان می‌دهد. منحنی $a(t)$ را با منحنی $v(t)$ مقایسه کنید. هر نقطه از منحنی $a(t)$ مشتق (شیب) منحنی $v(t)$ را در زمان متناظر نشان می‌دهد. وقتی v ثابت (۰ یا $۴m/s$) است، مشتق آن صفر و شتاب هم صفر است. وقتی آسانسور شروع به حرکت می‌کند، مشتق منحنی $v(t)$ مثبت (شیب مثبت) است، که حاکی از مثبت بودن $a(t)$ است. وقتی حرکت آسانسور کند می‌شود تا متوقف شود، مشتق و شیب منحنی $v(t)$ منفی است؛ یعنی $a(t)$ منفی است.

اکنون، شیب‌های منحنی $v(t)$ را در حین دو مرحله‌ی شتاب‌گیری با هم مقایسه می‌کنیم. در مورد شتاب مربوط به حالت کم شدن سرعت آسانسور (که، به طور معمول، **شتاب کندکننده** خوانده می‌شود)، شیب منحنی تندتر است، چون آسانسور در نصف مدت زمان افزایش یافتن سرعتش متوقف می‌شود. همان‌طور که شکل ۲-۶ پ نشان می‌دهد، شیب تندتر به این معنی است که بزرگی شتاب کند کننده نسبت به **شتاب تندکننده** بیشتر است.

احساس‌ها: در پایین شکل ۲-۶ آدمک‌هایی رسم شده‌اند که احساس شما را به هنگام سوار بودن در آسانسور نشان می‌دهند. وقتی که در ابتدا آسانسور شتاب می‌گیرد، احساس می‌کنید که به پایین‌سو فشرده می‌شوید؛ چندی بعد که آسانسور ترمز می‌کند تا بایستد به نظرتان می‌آید که به بالاسو کشیده می‌شوید. در فاصله‌ی میان این دو حالت احساس خاصی ندارید. بدن شما نسبت به شتاب واکنش نشان می‌دهد (مانند شتاب‌سنج است) اما نسبت به‌سرعت واکنشی ابراز نمی‌کند (مانند تندی‌سنج نیست). هنگامی‌که در خودرو با سرعت $۹۰km/h$ یا در هواپیما با سرعت $۹۰۰km/h$ سفر می‌کنید بدن شما حرکتی را احساس نمی‌کند. اما اگر سرعت خودرو یا هواپیما ناگهان تغییر کند این تغییر را حس می‌کنید و شاید هم وحشت‌زده می‌شوید. بخشی از هیجانات ناشی از سوار بودن بر وسایل شهربازی به خاطر تغییرات ناگهانی سرعت است (چون شتاب‌ها بر شما اثر می‌گذارند نه سرعت‌ها). نمونه‌ی بسیار بارزی از احساس شتاب حرکت در عکس‌های شکل ۲-۷ نشان داده شده است. این عکس‌ها هنگامی گرفته شده‌اند که موشکی به سرعت شتاب گرفته و سپس به سرعت ترمز کرده است تا متوقف شود.

یکاهای g. شتاب‌های زیاد را گاهی برحسب یکای g بیان می‌کنند:

$$۱g = ۹/۸\,m/s^2 \qquad (\text{یکای } g) \qquad (۲\text{-}۱۰)$$

شکل ۲-۷ عکس‌هایی از سرهنگ جان استَپ[1] در یک سورتمه‌ی موشکی به هنگام حرکت کردن تا سرعت‌های بالا (که جهت شتاب به برون‌سوی صفحه‌ی کتاب است) و سپس متوقف شدن ناگهانی (که جهت شتاب به درون سوی صفحه‌ی کتاب است).

(همان‌گونه که در پودمان ۲-۵ خواهیم دید، g بزرگی شتاب سقوط اجسام در نزدیکی سطح زمین است). در یک قطار هوایی شهربازی شما شتاب‌های کم تا حد $۳g$، را می‌توانید تجربه کنید، که $(۹/۸\,m/s^۲)$ (۳) یا در حدود $۲۹\,m/s^۲$ است و بیش از آن است که بهای یک سواری گرفتن را جبران کند.

علامت‌ها. در گفت و گوهای عادی علامت شتاب معنی علمی ندارد: شتاب مثبت به این معنی است که تندی یک شیء در حال افزایش یافتن است و شتاب منفی به این معنی است که تندی یک شیء در حال کاهش یافتن است (شتاب شیء کندکننده است). اما در این کتاب علامت شتاب جهت آن را نشان می‌دهد نه افزایش یا کاهش یافتن تندی شیء را. برای مثال، اگر یک خودرو با سرعت آغازی $v = -۲۵\,m/s$ ترمز کند و پس از $۵/۰\,s$ متوقف شود، داریم $a_{avg} = +۵/۰\,m/s^۲$. این شتاب ***مثبت*** است، اما تندی خودرو کاهش یافته است. دلیلش اختلاف علامت‌های سرعت و شتاب است، یعنی شتاب در خلاف جهت سرعت است. به همین سبب در اینجا راه مناسبی برای تفسیر علامت‌ها ارائه می‌شود:

اگر علامت‌های سرعت و شتاب یک ذره یکی باشند، تندی ذره افزایش می‌یابد و اگر علامت‌ها مخالف باشند، تندی ذره کاهش می‌یابد.

1. John P.Stapp

خودآزمایی ۳

خرسی در راستای محور x حرکت می‌کند. علامت شتاب خرس در این حالت‌ها چیست؟ (الف) حرکت کردن با تندی در حال افزایش در جهت مثبت محور، (ب) حرکت کردن با تندی در حال کاهش در جهت مثبت محور، (پ) حرکت کردن با تندی در حال افزایش در جهت منفی محور و (ت) حرکت کردن با تندی در حال کاهش در جهت منفی محور.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۲-۳ شتاب و dv/dt

مکان ذره‌ای که روی محور x شکل ۲-۱، حرکت می‌کند با معادله‌ی زیر مشخص می‌شود

$$x = ۴ - ۲۷t + t^۳$$

که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است.

(الف) چون مکان x به زمان t بستگی دارد، ذره باید در حال حرکت باشد. تابع سرعت $v(t)$ وتابع شتاب $a(t)$ ذره را پیدا کنید.

نکته‌های کلیدی

(۱) برای به دست آوردن تابع سرعت $v(t)$، از تابع مکان $x(t)$ نسبت به زمان مشتق می‌گیریم. (۲) برای پیدا کردن تابع شتاب $a(t)$، از تابع سرعت $v(t)$ نسبت به زمان مشتق می‌گیریم.

محاسبات: با مشتق گرفتن از تابع مکان، داریم

(پاسخ) $$v = -۲۷ + ۳t^۲$$

که در آن v برحسب متر بر ثانیه است. با مشتق گرفتن از تابع سرعت، داریم

(پاسخ) $$a = +۶t$$

در اینجا a برحسب متر بر مجذور ثانیه است.

(ب) آیا در هیچ زمانی داریم $v = ۰$؟

محاسبه: با قرار دادن $v(t) = ۰$، داریم

$$۰ = -۲۷ + ۳t^۲$$

که دارای جواب زیر است

(پاسخ) $$t = \pm ۳\,\mathrm{s}$$

بنابراین، ۳s پیش و ۳s پس از زمان صفر، سرعت صفر است.

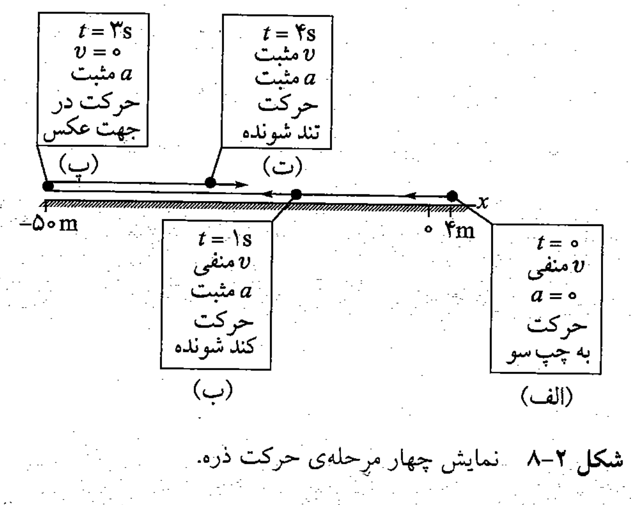
(پ) حرکت ذره را در زمان‌های $t \geq ۰$ توصیف کنید.

استدلال: ما باید رابطه‌های $x(t)$، $v(t)$ و $a(t)$ را مورد آزمون قرار دهیم.

به ازای $t = ۰$، ذره در مکان $x(۰) = +۴\,\mathrm{m}$ با سرعت $v(۰) = -۲۷\,\mathrm{m/s}$، یعنی درجهت منفی محور x، حرکت می‌کند. در این لحظه شتاب ذره $a(۰) = ۰$ است، زیرا سرعت آن تغییر نمی‌کند. (شکل ۲-۸ الف).

به ازای $۰ < t < ۳\,\mathrm{s}$، ذره هنوز هم سرعت منفی دارد و به حرکت در جهت منفی محور ادامه می‌دهد. اما شتاب آن دیگر صفر نیست، بلکه درحال افزایش یافتن و مثبت است. چون علامت‌های سرعت و شتاب مخالف یکدیگرند، حرکت ذره باید در حال کندشدن باشد. (شکل ۲-۸ ب).

در واقع، از پیش می‌دانیم که ذره در زمان $t = ۳\,\mathrm{s}$ به حال سکون لحظه‌ای در می‌آید. درست پس از آن، ذره در سمت چپ



شکل ۲-۸ نمایش چهار مرحله‌ی حرکت ذره.

مبداء در شکل ۲-۱ در حال دور شدن است. با جانشانی $t = 3\,\mathrm{s}$ در معادله‌ی مربوط به $x(t)$، در می‌یابیم که ذره در مکان $x = -50\,\mathrm{m}$ قرار می‌گیرد (شکل ۲-۸ پ) و شتاب ذره باز هم مثبت است.

به‌ازای $t > 3\,\mathrm{s}$، ذره به سمت راست محور x حرکت می‌کند، شتابش مثبت می‌ماند و بزرگی‌اش افزایش پیدا می‌کند. در این حالت، ذره سرعتش مثبت و بزرگی‌اش نیز در حال افزایش یافتن است (شکل ۲-۸ ت).

۲-۴ شتاب ثابت

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۲-۱۳ برای شتاب ثابت، رابطه‌ی میان مکان، جابه‌جایی، سرعت، شتاب و زمان سپری شده را به کار ببرید (جدول ۲-۱).

۲-۱۴ تغییر سرعت ذره را با انتگرال‌گیری از تابع شتاب نسبت به زمان حساب کنید.

۲-۱۵ تغییر مکان ذره را با انتگرال‌گیری از تابع سرعت نسبت به زمان حساب کنید.

نکته‌های کلیدی

- پنج معادله‌ی زیر، حرکت یک ذره با شتاب ثابت را توصیف می‌کنند:

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad v = v_0 + at$$

$$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2 \qquad x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t \qquad v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

این معادله‌ها در حالتی که شتاب ثابت نیست، معتبر نیستند.

شتاب ثابت: حالتی ویژه از شتاب

در بسیاری از انواع حرکت‌ها، شتاب ثابت، یا به تقریب، ثابت است. برای مثال، موقعی که چراغ قرمز راهنمایی سبز می‌شود ممکن است خودرو خود را با تغییر سرعت تقریباً ثابتی برانید. بنابراین، نمودار مکان، سرعت و شتاب خودرو شما نظیر شکل ۲-۹ خواهد بود. [توجه کنید که $a(t)$ در شکل ۲-۹ پ ثابت است و ایجاب می‌کند که شیب منحنی $v(t)$ در شکل ۲-۹ ب ثابت باشد]. بعداً که خودرو را ترمز می‌کنید تا متوقف شود، شتاب کند کننده نیز ممکن است، به تقریب ثابت باشد.

این حالت‌ها آن‌قدر عادی‌اند که برای بررسی آن‌ها مجموعه‌ای از معادله‌های خاص ارائه شده است. در این بخش یکی از راه‌های به دست آوردن این معادله‌ها را مطرح می‌کنیم و در بخش بعد هم راه دیگری ارائه خواهد شد. در این دو بخش و پس از آن، هنگامی که مسئله حل می‌کنید، به خاطر داشته باشید که ***این معادله‌ها فقط برای شتاب ثابت (یا در حالت‌هایی که می‌توان شتاب را، به تقریب ثابت در نظر گرفت)، معتبرند.***

معادله‌ی اصلی اول. وقتی شتاب ثابت است شتاب‌های متوسط و لحظه‌ای با هم برابرند و معادله‌ی ۲-۷ را با اندکی تغییر می‌توان چنین نوشت

$$a = a_{\text{avg}} = \frac{v - v_0}{t - 0}$$

در اینجا v_0 سرعت ذره در زمان $t = 0$ و v سرعت آن در هر زمانی مانند t است. با توجه به این رابطه، داریم

$$v = v_0 + at \qquad (۲-۱۱)$$

به عنوان یک آزمون توجه کنید که به ازای $t = 0$، داریم $v = v_0$، که باید چنین باشد. به عنوان آزمونی دیگر، از معادله‌ی ۲-۱۱ مشتق می‌گیریم. اگر چنین کنیم، خواهیم داشت $dv/dt = a$، که همان تعریف شتاب را به دست می‌دهد. شکل ۲-۹ ب، نمودار معادله‌ی ۲-۱۱، یعنی نمودار $v(t)$ را نشان می‌دهد که تابعی است خطی و نمودار آن یک خط راست است.

معادله‌ی اصلی دوم. به همین ترتیب، معادله‌ی ۲-۲ را (با اندکی تغییر در نماد) می‌توان بدین صورت

$$v_{\text{avg}} = \frac{x - x_0}{t - 0}$$

یا، به صورت زیر نوشت

$$x = x_0 + v_{\text{avg}}t \qquad (۲-۱۲)$$

که در آن x_0 مکان ذره در زمان $t = 0$ و v_{avg} سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی میان $t = 0$ و هر زمانی مانند t است.

برای تابع سرعت خطی در معادله‌ی ۲-۱۱، **سرعت متوسط** در هر بازه‌ی زمانی (مثلاً، از $t = 0$ تا هر زمانی مانند t) برابر با مقدار متوسط سرعت در آغاز بازه (مساوی با v_0) و سرعت در پایان بازه (مساوی با v) است. بنابراین، سرعت متوسط در بازه‌ی از $t = 0$ تا زمان بعدی t برابر است با

$$v_{\text{avg}} = \frac{1}{2}(v_0 + v) \qquad (۲-۱۳)$$

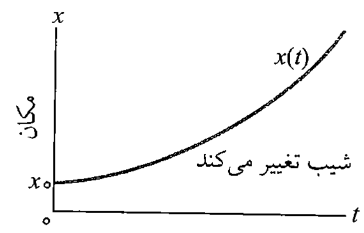
با جانشانی مقدار v از معادله‌ی ۲-۱۱ در طرف راست این معادله و اندکی بازآرایش، داریم

$$v_{\text{avg}} = v_0 + \frac{1}{2}at \qquad (۲-۱۴)$$

سرانجام، با جانشانی معادله‌ی ۲-۱۴ در معادله‌ی ۲-۱۲، خواهیم داشت

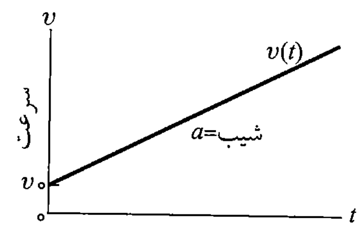
$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (۲-۱۵)$$

برای امتحان کردن درستی این معادله توجه کنید که به ازای $t = 0$، داریم $x = x_0$، که باید چنین باشد. به عنوان آزمونی دیگر، از معادله‌ی ۲-۱۵ مشتق می‌گیریم، درنتیجه معادله‌ی ۲-۱۱ به دست می‌آید، و همان است که باید باشد. شکل ۲-۹ الف، نمودار معادله‌ی ۲-۱۵ را نشان می‌دهد که تابعی درجه دوم است و نمودار آن به صورت یک منحنی خمیده است.



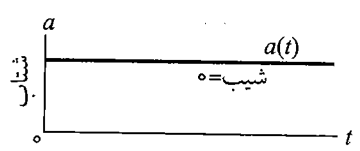
(الف)

شیب‌های نمودار مکان برروی نمودار سرعت رسم شده‌اند.



(ب)

شیب نمودار سرعت برروی نمودار شتاب رسم شده است.



(پ)

شکل ۲-۹ (الف) نمودار تغییرات مکان $x(t)$ ذره‌ای که با شتاب ثابت حرکت می‌کند. (ب) نمودار تغییرات سرعت $v(t)$ این ذره که از شیب نمودار $x(t)$ به دست می‌آید. (پ) نمودار شتاب (ثابت) ذره که با شیب (ثابت) منحنی $v(t)$ برابر است.

سه معادله‌ی دیگر. معادله‌های ۲-۱۱ و ۲-۱۵ ***معادله‌های اصلی مربوط به شتاب ثابت‌اند.*** این معادله‌ها را برای حل کردن هر مسئله‌ی مربوط به شتاب در این کتاب، می‌توان به کار برد. اما معادله‌های دیگری هم می‌توان به دست آورد که در برخی موارد مفیدند. نخست، توجه کنید که در هر مسئله‌ی مربوط به شتاب ثابت، ممکن است پنج کمیت $x-x_0$، v، t، a و v_0 دخالت داشته باشند. ***یکی از این کمیت‌ها، به طور معمول، به صورت معلوم یا نامعلوم، در مسئله ظاهر نمی‌شود.*** بنابراین، با معلوم بودن سه تا از کمیت‌های باقی مانده از ما خواسته می‌شود که کمیت چهارم را پیدا کنیم.

هر یک از معادله‌های ۲-۱۱ و ۲-۱۵ به طور متفاوت شامل چهار تا از این کمیت‌ها هستند. در معادله‌ی ۲-۱۱، کمیت «حذف شده» جابه‌جایی $x-x_0$ است. در معادله‌ی ۲-۱۵ سرعت v حذف شده است. این دو معادله را به سه طریق می‌توان با هم ترکیب کرد و سه معادله‌ی دیگر به دست آورد، که در هر یک از آن‌ها «متغیر حذف شده» متفاوت است. نخست، با حذف کردن t، داریم

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x-x_0) \qquad (۲-۱۶)$$

این معادله وقتی مفید است که t نامعلوم باشد و نیازی هم به پیدا کردن آن نباشد. دوم، اگر شتاب a را در بین معادله‌های ۲-۱۱ و ۲-۱۵ حذف کنیم معادله‌ای به دست می‌آید که در آن a وجود ندارد:

$$x-x_0 = \frac{1}{2}(v_0+v)t \qquad (۲-۱۷)$$

سرانجام، با حذف کردن v_0، داریم

$$x-x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2 \qquad (۲-۱۸)$$

به تفاوت ظریف این معادله و معادله‌ی ۲-۱۵ توجه کنید. یکی از معادله‌ها شامل سرعت آغازی v_0 و دیگری شامل سرعت v مربوط به زمان t است.

جدول ۲-۱، معادله‌های اصلی حرکت با شتاب ثابت (معادله‌های ۲-۱۱ و ۲-۱۵) را همراه با معادله‌های خاص استنتاج شده نشان می‌دهد. برای حل کردن مسئله‌های مربوط به شتاب ثابت، به طور معمول، یکی از معادله‌های این جدول را (اگر جدول در اختیار باشد) می‌توان به کاربرد. معادله را طوری انتخاب کنید که متغیر نامعلوم آن همان متغیر مورد نظر در مسئله باشد. بنابراین، ساده‌ترین راه این است که فقط معادله‌های ۲-۱۱ و ۲-۱۵ را به خاطر بسپارید و در موارد نیاز آن‌ها را به طور هم‌زمان حل کنید.

جدول ۲-۱ معادله‌های مربوط به حرکت با شتاب ثابت*

شماره‌ی معادله	معادله	کمیت حذف‌شده
۲-۱۱	$v = v_0 + at$	$x-x_0$
۲-۱۵	$x-x_0 = v_0t + \frac{1}{2}at^2$	v
۲-۱۶	$v^2 = v_0^2 + 2a(x-x_0)$	t
۲-۱۷	$x-x_0 = \frac{1}{2}(v_0+v)t$	a
۲-۱۸	$x-x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0

* پیش از استفاده کردن از این معادله‌ها سعی کنید از ثابت بودن شتاب حرکت مطمئن شوید.

☑ خودآزمایی ۴

معادله‌های زیر مکان $x(t)$ یک ذره را درچهار حالت به‌دست می‌دهند: (۱) $x = 3t - 4$؛ (۲) $x = -5t^3 + 4t^2 + 6$؛ (۳) $x = \frac{2}{t^2} - \frac{4}{t}$؛ (۴) $x = 5t^2 - 3$. در کدام یک از این حالت‌ها معادله‌های جدول ۲-۱ را می‌توان به کار برد.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۲-۴ مسابقه‌ی پس‌کشی خودرو و موتور سیکلت

یک بازی رایانه‌ای، یک هواپیمای جت، یک خودرو و یک موتور سیکلت را نشان می‌دهد که از حال سکون در طول باند پرواز فرودگاه مسابقه می‌دهند (شکل ۲-۱۰). در آغاز موتور سیکلت پیش می‌افتد، اما پس از آن هواپیما جلو می‌افتد، و سرانجام خودرو بر موتور سیکلت پیشی می‌گیرد. در اینجا اجازه دهید فقط خودرو و موتور سیکلت را در نظر بگیریم و برخی مقادیر پذیرفتنی را به حرکت آن‌ها نسبت دهیم. موتور سیکلت به این خاطر در ابتدا جلو می‌افتد که شتاب (ثابت) آن $a_m = ۸/۴۰ \mathrm{m/s^2}$، از شتاب (ثابت) خودرو $a_c = ۵/۶۰ \mathrm{m/s^2}$، بیشتر است، اما به زودی از خودرو عقب می‌ماند زیرا پیش از آنکه خودرو به بیشترین تندی خود $v_c = ۱۰۶ \mathrm{m/s}$، برسد موتور سیکلت به بیشترین تندی خود $v_m = ۵۸/۸ \mathrm{m/s}$، می‌رسد. خودرو پس از چه مدت به موتور سیکلت می‌رسد؟

نکته‌های کلیدی

ما می‌توانیم معادله‌های شتاب ثابت را برای هر دو وسیله‌ی نقلیه به کار ببریم، اما حرکت موتور سیکلت را باید در دو مرحله در نظر بگیریم: (۱) موتور سیکلت ابتدا مسافت x_{m1} را با سرعت آغازی صفر و شتاب $a_m = ۸/۴۰ \mathrm{m/s^2}$ طی می‌کند و به تندی $v_m = ۵۸/۸ \mathrm{m/s}$ می‌رسد؛ (۲) سپس، مسافت x_{m2} را با سرعت ثابت $v_m = ۵۸/۸ \mathrm{m/s}$ و شتاب صفر (یعنی باز هم با شتاب ثابت) می‌پیماید. (توجه کنید که مسافت‌ها را با نماد نشان داده‌ایم، حال آنکه مقادیر آن‌ها را نمی‌دانیم. نمادگذاری کمیت‌های نامعلوم، اغلب، در حل مسئله‌های فیزیک به ما کمک می‌کند، اما در نظر گرفتن این نوع کمیت‌های نامعلوم گاهی به ***جسارت فیزیکی*** نیاز دارد).

محاسبات: اکنون که می‌توانیم شکل‌ها را رسم کنیم و محاسبات را انجام دهیم، فرض می‌کنیم این وسیله‌های نقلیه در زمان $t = ۰$ از مکان $x = ۰$ شروع به حرکت می‌کنند و در جهت مثبت محور x پیش می‌روند. (ما می‌توانیم عددهای آغازی را به هر اندازه انتخاب کنیم زیرا ما در جست و جوی زمان سپری شده هستیم، نه یک زمان خاص مانند بعدازظهر، بنابراین بهتر است از همین عددهای ساده استفاده کنیم). ما می‌خواهیم خودرو از موتور سیکلت سبقت بگیرد، اما این موضوع از نظر ریاضی به چه معنی است؟

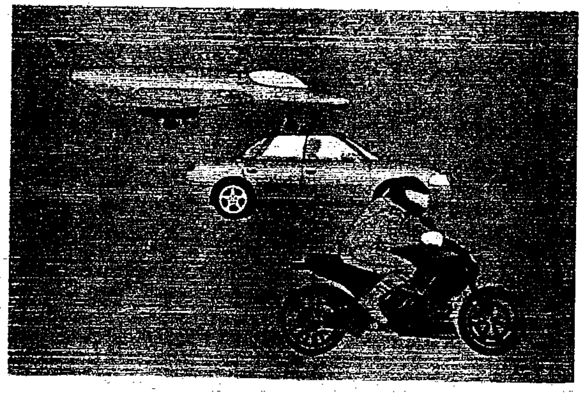
منظور این است که در زمانی مانند t، وسیله‌های نقلیه در حالت پهلو به پهلو دارای مختصه‌ی مکانی یکسان هستند: x_c مختصه‌ی مربوط به خودرو و مجموع $x_{m1}+x_{m2}$ مختصه‌ی مربوط به موتور سیکلت است. این نتیجه را از نظر ریاضی می‌توان چنین نوشت

$$x_c = x_{m1}+x_{m2} \qquad (۲-۱۹)$$

[نوشتن مرحله‌ی اول مشکل‌ترین بخش مسئله است. این موضوع در مورد اغلب مسئله‌های فیزیک صدق می‌کند. چگونه از صورت مسئله (به صورت گزاره‌ای) می‌توان به رابطه‌ی ریاضی رسید؟ یکی از هدف‌های کتاب این است که شما بتوانید توانایی نوشتن مرحله‌ی اول را پیدا کنید - این کار مانند یادگیری مثلاً تکواندو، به تمرین زیاد نیاز دارد].

اکنون، دو طرف معادله‌ی ۲-۱۹، ابتدا طرف چپ، را کامل می‌کنیم. خودرو برای رسیدن به نقطه‌ی سبقت x_c، از حال سکون شتاب می‌گیرد. با استفاده کردن از معادله‌ی ۲-۱۵ ($x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$)، به ازای $x_0 = ۰$ و $v_0 = ۰$، داریم

$$x_c = \frac{1}{2}a_c t^2 \qquad (۲-۲۰)$$



شکل ۲-۱۰ تصویری از هواپیمای جت، خودرو و موتور سیکلت، درست پس از شتاب گرفتن از حالت سکون.

برای نوشتن رابطه‌ی مربوط به $x_{m۱}$ موتور سیکلت، ابتدا مدت زمان t_m را که طول می‌کشد تا موتور سیکلت به تندی بیشینه‌ی v_m برسد، از معادله‌ی ۲-۱۱ $(v = v_۰ + at)$ به دست می‌آوریم. با جانشانی $v_۰ = ۰$، $v = v_m = ۵۸٫۸\,\mathrm{m/s}$، و $a = a_m = ۸٫۴۰\,\mathrm{m/s^۲}$، مدت زمان t_m برابر است با

$$t_m = \frac{v_m}{a_m} \qquad (۲۱\text{-}۲)$$

$$t_m = \frac{۵۸٫۸\,\mathrm{m/s}}{۸٫۴۰\,\mathrm{m/s^۲}} = ۷٫۰۰\,\mathrm{s}$$

برای پیدا کردن مسافت پیموده شده $x_{m۱}$، توسط موتور سیکلت در مرحله‌ی اول، باز هم معادله‌ی ۲-۱۵ را به ازای $x_۰ = ۰$ و $v_۰ = ۰$ به کار می‌بریم، اما زمان را از معادله‌ی ۲-۲۱ جانشانی می‌کنیم. در نتیجه، داریم

$$x_{m۱} = \frac{۱}{۲} a_m t_m^۲ = \frac{۱}{۲} a_m \left(\frac{v_m}{a_m}\right)^۲ = \frac{۱}{۲}\frac{v_m^۲}{a_m} \qquad (۲۲\text{-}۲)$$

موتور سیکلت در زمان باقی مانده‌ی $t - t_m$، با تندی بیشینه و با شتاب صفر حرکت می‌کند. برای پیدا کردن مسافت پیموده شده در مرحله‌ی دوم حرکت، از معادله‌ی ۲-۱۵ استفاده می‌کنیم، اما در این مرحله، سرعت آغازی $v_۰ = v_m$ (تندی در پایان مرحله‌ی اول) و شتاب $a = ۰$ است. بنابراین، مسافت پیموده شده در مرحله‌ی دوم برابر است با

$$x_{m۲} = v_m (t - t_m) = v_m (t - ۷٫۰۰\,\mathrm{s}) \qquad (۲۳\text{-}۲)$$

برای پایان دادن به محاسبه، معادله‌های ۲-۲۰، ۲-۲۲ و ۲-۲۳ را در معادله‌ی ۲-۱۹ قرار می‌دهیم. در نتیجه، داریم

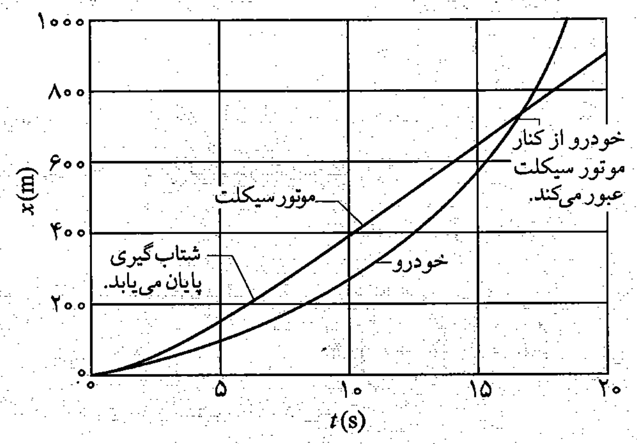
$$\frac{۱}{۲} a_c t^۲ = \frac{۱}{۲}\frac{v_m^۲}{a_m} + v_m (t - ۷٫۰۰\,\mathrm{s}) \qquad (۲۴\text{-}۲)$$

این معادله یک معادله‌ی درجه دوم است. با جانشانی داده‌ها این معادله را (با استفاده کردن از فرمول معادله‌ی درجه دوم یا یک ماشین حسابگر) حل می‌کنیم و پاسخ‌های $t = ۴٫۴۴\,\mathrm{s}$ و $t = ۱۶٫۶\,\mathrm{s}$ را به دست می‌آوریم.

اما ما با این دو پاسخ چه بکنیم؟ آیا خودرو برای بار دوم هم از کنار موتور سیکلت خواهد گذشت؟ البته که نه. بنابراین، یکی از پاسخ‌ها از نظر ریاضی درست است اما از نظر فیزیکی بی‌معنی است. چون می‌دانیم که پس از رسیدن موتور سیکلت به تندی بیشینه در زمان $t = ۷٫۰۰\,\mathrm{s}$، خودرو از کنار آن عبور می‌کند، پاسخ $t < ۷٫۰۰\,\mathrm{s}$ را که غیرفیزیکی است حذف می‌کنیم ونتیجه می‌گیریم که خودرو در زمان زیر از کنار موتور سیکلت عبور می‌کند:

(پاسخ) $$t = ۱۶٫۶\,\mathrm{s}$$

شکل ۲-۱۱ نمودارهای مکان برحسب زمان مربوط به هر دو وسیله را نشان می‌دهد و نقطه‌ی سبقت هم بر روی آن‌ها مشخص شده است. توجه کنید که در زمان $t = ۷٫۰۰\,\mathrm{s}$، نمودار مربوط به موتور سیکلت از حالت خمیده (چون تندی در حال افزایش بوده است) به خط راست (چون تندی ثابت می‌ماند) تبدیل شده است.



شکل ۲-۱۱ نمودارهای مکان برحسب زمان مربوط به خودرو و موتور سیکلت.

نگاهی دیگر به شتاب ثابت*

دو معادله‌ی اول جدول ۲-۱ معادله‌های اصلی برای به دست آوردن بقیه‌ی معادله‌ها هستند. این دو معادله را می‌توان با انتگرال‌گیری از تابع شتاب a با فرض ثابت بودن، به دست آورد. برای

* این بخش برای دانشجویانی در نظر گرفته شده است که حساب انتگرال را فرا گرفته‌اند.

پیدا کردن معادلهی ۲-۱۱، تعریف شتاب (معادلهی ۲-۸) را به صورت زیر مینویسیم

$$dv = adt$$

سپس، از دو طرف این رابطه ***انتگرال نامعین*** (یا ***پاد مشتق***) میگیریم. داریم

$$\int dv = \int adt$$

چون شتاب a ثابت است، آن را از انتگرال خارج میکنیم، در نتیجه داریم

$$\int dv = a\int dt$$

و از آنجا

$$v = at + C \tag{۲-۲۵}$$

برای محاسبهی ثابت انتگرالگیری C، میدانیم که در زمان $t = 0$، داریم $v = v_0$. با جانشانی این مقادیر در معادلهی ۲-۲۵ (که به ازای تمام مقادیر t، از جمله $t = 0$ معتبر است)، داریم

$$v_0 = (a)(0) + C = C$$

این مقدار را در معادلهی ۲-۲۵ قرار میدهیم تا معادلهی ۲-۱۱ به دست آید.

برای به دست آوردن معادلهی ۲-۱۵، تعریف سرعت (معادلهی ۲-۴) را بـه صـورت زیـر مینویسیم

$$dx = vdt$$

سپس، از دو طرف این رابطه انتگرال نامعین میگیریم. داریم

$$\int dx = \int vdt$$

سرعت v، به طور معمول، ثابت نیست و نمیتوان آن را از انتگرال خارج کرد. اما مقدار آن از معادلهی ۲-۱۱ را میتوان در این رابطه قرار داد:

$$\int dx = \int (v_0 + at)dt$$

چون v_0 ثابت و شتاب a نیز ثابت است، میتوان نوشت

$$\int dx = v_0\int dt + a\int tdt$$

با انتگرالگیری از رابطهی بالا، داریم

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + C' \tag{۲-۲۶}$$

در این معادله C' ثابت انتگرالگیری دیگری است. به ازای $t = 0$، داریم $x = x_0$. با جانشـانی این مقادیر در معادلهی ۲-۲۶، مقدار $x_0 = C'$ به دست میآید. با قرار دادن x_0 به جای C' در معادلهی ۲-۲۶، معادلهی ۲-۱۵ حاصل میشود.

۲-۵ شتاب سقوط آزاد

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۲-۱۶ تشخیص دهید که اگر ذره در حال پرواز آزاد (به بالاسو یا پایین‌سو) باشد و اگر بتوانیم در حرکت از اثرهای هوا چشم‌پوشی کنیم، ذره دارای شتاب ثابت پایین‌سو با بزرگی g خواهد بود که آن را برابر با $۹/۸ \, m/s^۲$ در نظر می‌گیریم.

۲-۱۷ معادله‌های شتاب ثابت (جدول ۲-۱) را برای حرکت سقوط آزاد به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

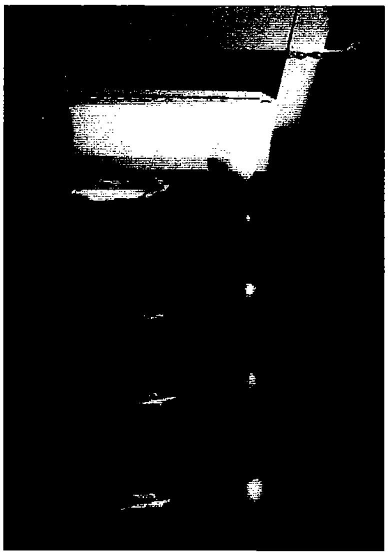
● یک مثال مهم در مورد حرکت راست - خط با شتاب ثابت مربوط به شیئی است که در نزدیکی سطح زمین آزادانه صعود یا سقوط می‌کند. این حرکت را معادله‌های شتاب ثابت توصیف می‌کنند، اما ما دو تغییر در نمادگذاری ایجاد می‌کنیم: (۱) حرکت در راستای محور y قائم به طرف بالا را با $+y$ نشان می‌دهیم؛ (۲) به جای شتاب a شتاب $-g$ را قرار می‌دهیم، که g بزرگی شتاب سقوط آزاد است. در نزدیکی سطح زمین، داریم

$$g = ۹/۸ \, m/s^۲ = ۳۲ \, ft/s^۲$$

شتاب سقوط آزاد

$a = \frac{F}{m}$ → ↑ → ↑ → a ثابت است $y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$ m تأثیری ندارد

اگر شیئی را به سمت بالا، یا پایین، بیندازیم و به گونه‌ای بتوانیم تأثیر هوا بر روی آن را از میان ببریم، در می‌یابیم که شیء با آهنگ ثابت و معین به پایین‌سو شتاب پیدا می‌کند. این آهنگ ثابت را **شتاب سقوط آزاد** می‌نامند و بزرگی آن‌را با g نشان می‌دهند. این شتاب به مشخصات شیء، مانند جرم، چگالی، یا شکل آن بستگی ندارد و برای همه‌ی اشیا یکسان است.



شکل ۲-۱۲ عکسی از سقوط آزاد یک پَر و یک سیب در خلاء، که هر دو با شتاب یکسان g به سمت پایین حرکت می‌کنند. این شتاب باعث افزایش یافتن فاصله‌ی میان تصویرهای پی‌درپی می‌شود. توجه کنید که در نبود هوا، پَر و سیب در هر زمان به یک اندازه سقوط می‌کنند.

شکل ۲-۱۲ دو نمونه از شتاب سقوط آزاد در خلاء را نشان می‌دهد که شامل عده‌ای عکس گرفته شده به روش استروبوسکوپی* از یک پَر و یک‌سیب است. هنگامی‌که این اشیا سقوط می‌کنند، هر دو با آهنگ یکسان g به‌سمت پایین شتاب می‌گیرند و تندی هر دو به‌یک اندازه افزایش می‌یابد.

مقدار g اندکی برحسب عرض جغرافیایی، و نیز برحسب ارتفاع از سطح زمین، تغییر می‌کند. در سطح دریا و در عرض جغرافیایی متوسط، مقدار g برابر با $۹/۸ \, m/s^۲$ (یا $۳۲ \, ft/s^۲$) است. شما می‌توانید از این مقدار دقیق برای حل کردن مسئله‌های این کتاب استفاده کنید، مگر آن که عدد دیگری داده شود.

معادله‌های حرکت مربوط به شتاب ثابت جدول ۲-۱ را در شرایط سقوط آزاد در نزدیکی سطح زمین نیز می‌توان به کار برد. یعنی، هرگاه از تأثیر مقاومت هوا چشم‌پوشی کنیم، هنگام حرکت کردن اشیا در راستای قائم، به سمت بالا، یا به سمت پایین، از این معادله‌ها می‌توان

---

* استروبوسکوپی روشی است که در آن با گرفتن عکس‌های پی در پی می‌توان چگونگی حرکت اشیا را مطالعه کرد. در این روش اسبابی به نام **استروبوسکوپ**، شیء مورد نظر را در بازه‌های زمانی یکسان با درخش‌هایی روشن می‌کند. ـ م.

استفاده کرد. با این همه، باید توجه داشت که در سقوط آزاد: (۱) حرکت در راستای محور قائم y، به جای محور x، صورت می‌گیرد و جهت مثبت y به سمت بالاست. (این موضوع در فصل‌های بعد، که با ترکیب کردن حرکت‌های افقی و قائم سر و کار داریم، اهمیت دارد). (۲) شتاب سقوط آزاد منفی است ـ یعنی، به سمت پایین محور y و به سوی مرکز زمین است ـ و از این رو، مقدار آن در معادله‌ها به صورت $-g$ وارد می‌شود.

شتاب سقوط آزاد در نزدیکی سطح زمین $a = -g = -۹/۸ m/s^2$ و *بزرگی آن* $g = ۹/۸ m/s^2$ است. دقت کنیدکه درمعادله‌ها به‌جای g، $-۹/۸ m/s^2$ را قرار ندهید.

فرض کنید یک گوجه‌فرنگی را با سرعت آغازی (مثبت) v_0 یک راست به بالاسو پرتاب می‌کنیم و هنگام برگشت به نقطه‌ی پرتاب، آن را می‌گیریم. در حین ***پرواز سقوط آزاد*** (درست پس از رها شدن و درست پیش از گرفته شدن گوجه فرنگی) معادله‌های جدول ۲-۱ را می‌توان در مورد حرکت گوجه‌فرنگی به‌کار برد. شتاب این حرکت $a = -g = -۹/۸ m/s^2$، همیشه منفی و به پایین‌سو است. اما همان‌طور که معادله‌های ۲-۱۱ و ۲-۱۶ نشان می‌دهند، سرعت تغییر می‌کند: در حین بالا رفتن سرعت مثبت است، اما بزرگی‌اش کاهش می‌یابد تا آنکه به‌طور لحظه‌ای صفر می‌شود. چون گوجه‌فرنگی متوقف شده است، در بالاترین ارتفاع قرار دارد. در حین پایین آمدن، سرعت (که حالا منفی است) بزرگی‌اش افزایش می‌یابد.

خودآزمایی ۵

(الف) اگر توپی را یک راست به سمت بالا پرتاب کنیم، علامت جابه‌جایی توپ در حین بالا رفتن، از نقطه‌ی جدا شدن تا بالاترین ارتفاع چیست؟ (ب) این علامت برای پایین آمدن توپ از بالاترین ارتفاع تا نقطه‌ی جدا شدن چیست؟ شتاب توپ در بالاترین نقطه چقدر است؟

مسئله‌ی نمونه‌ی ۲-۵ مدت زمان بالا و پایین رفتن کامل گوی بیس بال

در شکل ۲-۱۳، یک بازیکن بیس بال گویی را با تندی آغازی $۱۲ m/s$ در راستای محور y به بالا پرتاب می‌کند.

(الف) گوی پس از چه مدت به بالاترین ارتفاع مسیر خود (نقطه‌ی اوج) می‌رسد؟

نکته‌های کلیدی

(۱) در لحظه‌ی جدا شدن گوی از دست بازیکن تا برگشت دوباره به دست او شتاب گوی همان شتاب سقوط آزاد $a = -g$ است. چون شتاب ثابت است در این‌حرکت می‌توان از معادله‌های جدول ۲-۱ استفاده کرد. سرعت v در بالاترین نقطه‌ی مسیر حرکت صفر است.

محاسبه: با معلوم بودن v، a و سرعت آغازی $v_0 = ۱۲ m/s$ و با استفاده کردن از معادله‌ی ۲-۱۱ می‌توان t را به دست آورد. با حل کردن این معادله که شامل چهار متغیر است، داریم

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - ۱۲ m/s}{-۹/۸ m/s^2} \Rightarrow$$

$$t = ۱/۲ s \quad \text{(پاسخ)}$$

(ب) بالاترین ارتفاع گوی نسبت به محل آغازی پرتاب چقدر است؟

محاسبه: در نقطه‌ی رها شدن گوی می‌توان فرض کرد $y_0=۰$. اگر در معادله‌ی ۲-۱۶ به جای x، y را قرار دهیم، با فرض $y-y_0=y$ و $v=۰$ (در بالاترین ارتفاع) مقدار y چنین به‌دست می‌آید

$$y=\frac{v^۲-v_0^۲}{۲a}=\frac{۰-(۱۲\,m/s)^۲}{۲(-۹٫۸\,m/s^۲)}\Rightarrow$$

(پاسخ) $y=۷٫۳\,m$

(پ) چه مدت طول می‌کشد تا گوی پس از جدا شدن از دست بازیکن به ارتفاع ۵٫۰ متری برسد؟

محاسبات: در اینجا مقادیر v_0، $a=-g$، و جابه‌جایی $y-y_0=۵٫۰\,m$ معلوم‌اند و می‌خواهیم t را به دست آوریم. بنابراین، با استفاده کردن از معادله‌ی ۲-۱۵ و جانشانی $y_0=۰$ در آن، y را پیدا می‌کنیم

$$y=v_0t-\frac{۱}{۲}gt^۲$$

یا

$$۵٫۰\,m=(۱۲\,m/s)t-\left(\frac{۱}{۲}\right)(۹٫۸\,m/s^۲)t^۲$$

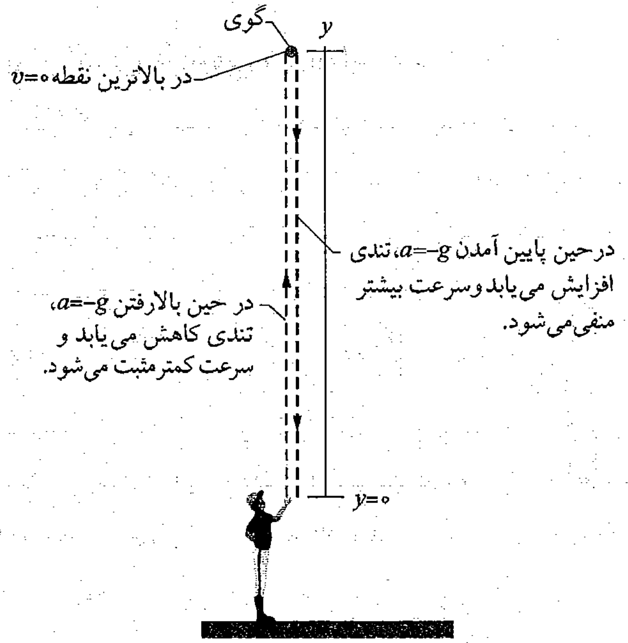
اگر یکاها را (که سازگارند) به طور موقت حذف کنیم، خواهیم داشت

$$۴٫۹t^۲-۱۲t+۵٫۰=۰$$

پس از حل کردن این معادله‌ی درجه دوم مقادیر زیر را برای t به دست می‌آوریم

(پاسخ) $t=۰٫۵۳\,s$ و $t=۱٫۹\,s$

در اینجا دو زمان وجود دارد، که البته شگفت‌آور هم نیست. زیرا گوی از ارتفاع $y=۵٫۰\,m$ دوبار می‌گذرد، یک بار در حین بالا رفتن و یک بار هم در حین پایین آمدن.



شکل ۲-۱۳ بازیکن بیس بال گویی را یک راست به بالا پرتاب می‌کند. اگر از تأثیر مقاومت هوا چشم‌پوشی شود، چه در حین بالا رفتن و چه در حین پایین آمدن گوی، می‌توان از معادله‌های مربوط به سقوط آزاد اشیا استفاده کرد.

۲-۶ انتگرال‌گیری ترسیمی در تحلیل حرکت

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۲-۱۸ تغییر سرعت یک ذره را با انتگرال‌گیری ترسیمی روی نمودار شتاب برحسب زمان، معین کنید.

۲-۱۹ تغییر مکان یک ذره را با انتگرال‌گیری ترسیمی روی نمودار سرعت برحسب زمان، معین کنید.

نکته‌های کلیدی

- روی نمودار شتاب a برحسب زمان t، تغییر سرعت برابر است با

$$v_1-v_0=\int_{t_0}^{t_1}a\,dt$$

این انتگرال منجر به پیدا کردن یک مساحت بر روی نمودار می‌شود:

$$\int_{t_0}^{t_1} a dt = \left(\begin{array}{c} \text{مساحت بین منحنی شتاب} \\ \text{و محور زمان، از } t_0 \text{ تا } t_1 \end{array} \right)$$

● روی نمودار سرعت v برحسب زمان t، تغییر مکان برابر است با

$$x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} v dt$$

در اینجا انتگرال را می‌توان از روی نمودار چنین به دست آورد

$$\int_{t_0}^{t_1} v dt = \left(\begin{array}{c} \text{مساحت بین منحنی سرعت} \\ \text{و محور زمان، از } t_0 \text{ تا } t_1 \end{array} \right)$$

انتگرال‌گیری ترسیمی در تحلیل حرکت

انتگرال‌گیری از شتاب. با در دست داشتن نمودار شتاب حرکت یک شیء برحسب زمان، با انتگرال‌گیری از این نمودار می‌توان سرعت شیء را در هر لحظه به دست آورد. چون شتاب a برحسب سرعت به صورت $a = dv/dt$ تعریف می‌شود، با توجه به قضیه‌ی بنیادی حسابان، داریم

$$v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a dt \qquad (۲\text{–}۲۷)$$

طرف راست این معادله شامل یک انتگرال معین است (که به جای تابع، یک نتیجه‌ی عددی به‌دست می‌دهد). در این معادله v_0 سرعت در زمان t_0 و v_1 سرعت در زمان t_1 است. انتگرال معین را می‌توان از یک نمودار $a(t)$، مانند نمودار شکل ۲-۱۲ الف، به دست آورد. بنابراین، داریم

$$\int_{t_0}^{t_1} a dt = (\text{مساحت بین نمودار شتاب و محور زمان، از } t_0 \text{ تا } t_1) \qquad (۲\text{–}۲۸)$$

اگر شتاب $1\,m/s^2$ و زمان $1s$ باشد، یکای مساحت در روی نمودار برابر است با

$$(1\,m/s^2)(1s) = 1\,m/s$$

که یکای (مناسب) سرعت است. وقتی نمودار شتاب در بالای محور زمان قرار دارد، این مساحت مثبت و وقتی نمودار در پایین محور زمان واقع است، این مساحت منفی است.

انتگرال‌گیری از سرعت. به همین ترتیب، چون سرعت v برحسب مکان x به صورت $v = dx/dt$ تعریف می‌شود، داریم

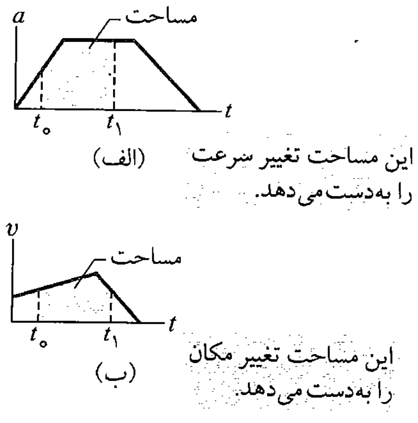
$$x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} v dt \qquad (۲\text{–}۲۹)$$

که در آن x_0 مکان در زمان t_0 و x_1 مکان در زمان t_1 است. انتگرال معین طرف راست معادله‌ی ۲-۲۹ را می‌توان از یک نمودار $v(t)$، مانند نمودار شکل ۲-۱۴ ب، حساب کرد. در نتیجه خواهیم داشت

$$\int_{t_0}^{t_1} v dt = (\text{مساحت بین نمودار سرعت و محور زمان، از } t_0 \text{ تا } t_1) \qquad (۲\text{–}۳۰)$$

اگر سرعت $1\,m/s$ و زمان $1s$ باشد، یکای متناظر برای مساحت درروی نمودار، برابراست‌با

$$(1\,m/s)(1s) = 1\,m$$



شکل ۲-۱۴ نمایش مساحت بین نمودار رسم شده و محور افقی زمان، از زمان t_0 تا زمان t_1، برای (الف) نمودار شتاب a برحسب t و (ب) نمودار سرعت v برحسب t.

که یکای (مناسب) مکان و جابه‌جایی است. مثبت یا منفی بودن این مساحت مانند آنچه برای نمودار $a(t)$ در شکل ۲-۱۴ شرح داده شد، مشخص می‌شود.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۲-۶ انتگرال‌گیری ترسیمی شتاب a برحسب t، آسیب ناشی از ضربه

«آسیب ناشی از ضربه»، به طور معمول، هنگامی بروز می‌کند که در یک تصادف، خودرویی به عقب خودرو جلویی برخورد می‌کند. در دهه‌ی ۱۹۷۰ پژوهشگران به این نتیجه رسیدند که این آسیب هنگامی به وجود می‌آید که یک خودرو در اثر تصادف به‌طور ناگهانی به سمت جلو رانده می‌شود و سرنشین خودرو از بالای صندلی به طرف عقب پرت می‌شود. به خاطر این نتیجه‌گیری، برای صندلی خودرو یک تشک پشت سری ساخته شد، اما این آسیب وارد شده به گردن در تصادف از عقب، هنوز ادامه دارد.

در آزمایشی که به تازگی برای مطالعه‌ی آسیب وارد شده به‌گردن در تصادف از عقب انجام شد، شخص داوطلبی را با تسمه به یک صندلی بستند و صندلی را ناگهان به سمت جلو راندند تا برخورد از عقب یک خودرو با تندی $10/5\,km/h$ شبیه‌سازی شود. شکل ۲-۱۵ الف نمودارهای شتاب‌های بالاتنه و سر داوطلب در حین تصادف را، که از زمان $t=0$ آغاز شده است، نشان می‌دهد. شتاب بالاتنه با $40\,ms$ تأخیر آغاز شده است زیرا در این بازه‌ی زمانی پشتی صندلی باید به پشت شخص فشار وارد کند. شتاب سر شخص با $70\,ms$ تأخیر بیشتر وارد شده است. تندی بالاتنه در هنگامی که سر شخص شروع به شتاب گرفتن می‌کند، چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

تندی بالاتنه در هر زمان را می‌توان از مساحت زیر نمودار شتاب $a(t)$ بالاتنه حساب کرد.

محاسبات: می‌دانیم که به ازای $t_0=0$، یعنی در زمان شروع «تصادف»، تندی آغازی بالاتنه $v_0=0$ است. اکنون، می‌خواهیم تندی v_1 بالاتنه در زمان $t_1=110\,ms$، یعنی در زمان آغاز شتاب گرفتن سر را حساب کنیم.

با ترکیب کردن معادله‌های ۲-۲۷ و ۲-۲۸، می‌توان نوشت

$$v_1-v_0=\left(\begin{array}{c}\text{مساحت بین نمودار شتاب}\\ \text{و محور زمان، از } t_0 \text{ تا } t_1\end{array}\right) \qquad (۲-۳۱)$$

برای آسانی، مساحت را به سه ناحیه (شکل ۲-۱۵ ب) تقسیم می‌کنیم. از زمان صفر تا $40\,ms$، در ناحیه‌ی A مساحتی وجود ندارد:

$$A\ \text{مساحت} = 0$$

از زمان $40\,ms$ تا زمان $100\,ms$، ناحیه‌ی B به شکل یک مثلث است و مساحت آن برابر است با

$$B\ \text{مساحت} = \frac{1}{2}(0/060\,s)(50\,m/s^2)=1/5\,m/s$$

از زمان $100\,ms$ تا زمان $110\,ms$، ناحیه‌ی C به شکل یک مربع مستطیل است و مساحت آن برابر است با

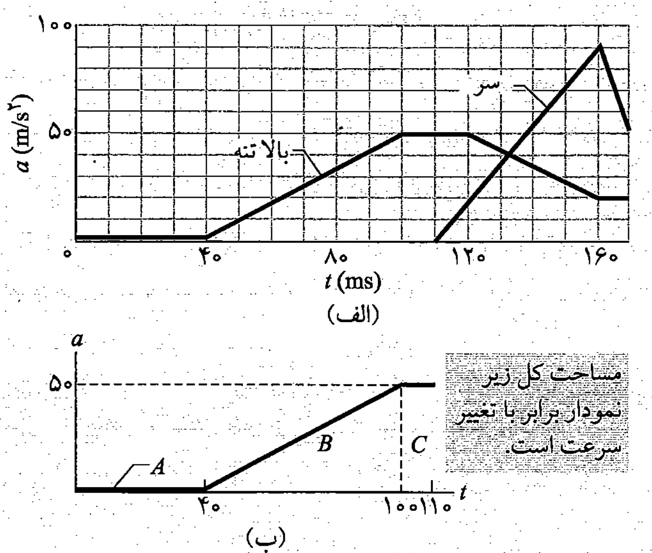
$$C\ \text{مساحت} = (0/010\,s)(50\,m/s^2)=0/50\,m/s$$

با جانشانی این مقادیر و $v_0=0$ در معادله‌ی ۲-۳۱، داریم

$$v_1-0=0+1/5\,m/s+0/50\,m/s$$

یا

$$v_1=2/0\,m/s=7/2\,km/h \qquad \textbf{(پاسخ)}$$



شکل ۲-۱۵ (الف) نمودار شتاب $a(t)$ بالاتنه و سر شخص داوطلب در شبیه‌سازی یک تصادف از عقب. (ب) تقسیم‌بندی ناحیه‌ی بین نمودار رسم شده و محور زمان برای حساب کردن مساحت.

توضیحات: وقتی سر به پیش سو شروع به حرکت می‌کند، بالاتنه به تندی $7/2\,\mathrm{km/h}$ رسیده است. پژوهشگران استدلال می‌کنند که همین تفاوت تندی‌ها در حین تصادف از عقب است که باعث آسیب دیدن گردن می‌شود. آسیب دیدن سر بعداً اتفاق می‌افتد و اگر نگهدارنده‌ی پشت سر وجود نداشته باشد آسیب وارد شده افزایش پیدا می‌کند.

مرور و چکیده‌ی مطالب

مکان ***مکان*** x یک ذره روی محور x، محل ذره نسبت به **مبداء**، یا نقطه‌ی صفر محور، را مشخص می‌کند. مکان ممکن است مثبت یا منفی باشد و به این بستگی دارد که ذره در کدام سمت مبداء یا نقطه‌ی صفر واقع شده است. در روی محور x جهت افزایش عددهای مثبت **جهت مثبت** و جهت مخالف، **جهت منفی** است.

جابه‌جایی ***جابه‌جایی*** Δx یک ذره، تغییر مکان آن ذره است:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$ (۲-۱)

جابه‌جایی کمیتی برداری است. جابه‌جایی مثبت است اگر ذره در جهت مثبت محور x حرکت کند و منفی است اگر ذره در جهت منفی محور حرکت کند.

سرعت متوسط هرگاه ذره‌ای در بازه‌ی زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ از مکان x_1 به مکان x_2 برود، ***سرعت متوسط*** آن در این بازه‌ی زمانی برابر است با

$$v_{\text{avg}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$ (۲-۲)

علامت جبری v_{avg} جهت حرکت را نشان می‌دهد (v_{avg} کمیتی برداری است). سرعت متوسط به مسافت واقعی پیموده شده توسط ذره بستگی ندارد، بلکه به‌مکان‌های آغازی و پایانی ذره وابسته است.

در روی نمودار x برحسب t، سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی Δt، برابر است با شیب خط راستی که نقطه‌های آغازی و پایانی متناظر با بازه‌ی زمانی را به هم وصل می‌کند.

تندی متوسط ***تندی متوسط*** s_{avg} یک ذره در بازه‌ی زمانی Δt به مسافت کل پیموده شده توسط ذره در آن بازه بستگی دارد:

$$s_{\text{avg}} = \frac{\text{مسافت کل}}{\Delta t}$$ (۲-۳)

سرعت لحظه‌ای ***سرعت لحظه‌ای*** (یا به بیان ساده **سرعت**) v یک ذره‌ی متحرک برابر است با

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$ (۲-۴)

که در آن Δx و Δt با معادله‌ی ۲-۲ تعریف شده‌اند. سرعت لحظه‌ای (در هر لحظه‌ی خاص) از شیب نمودار x برحسب t (در همان لحظه‌ی خاص) به دست می‌آید. **تندی** بزرگی سرعت لحظه‌ای است.

شتاب متوسط ***شتاب متوسط*** برابر است با نسبت تغییر سرعت Δv، به بازه‌ی زمانی Δt که در آن تغییر سرعت رخ داده است:

$$a_{\text{avg}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$ (۲-۷)

جهت a_{avg} از روی علامت جبری آن مشخص می‌شود.

شتاب لحظه‌ای ***شتاب لحظه‌ای*** (یا به بیان ساده **شتاب**) a، آهنگ تغییر سرعت نسبت به زمان و مشتق دوم مکان $x(t)$ نسبت به زمان است:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$ (۲-۸، ۲-۹)

در روی نمودار v برحسب t، شتاب a در هر زمان t از شیب نمودار در همان زمان به دست می‌آید.

شتاب ثابت پنج معادله‌ی ارائه شده در جدول ۲-۱، حرکت یک ذره‌ی با شتاب ثابت را توصیف می‌کنند:

$$v = v_0 + at$$ (۲-۱۱)

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$ (۲-۱۵)

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$ (۲-۱۶)

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$$ (۲-۱۷)

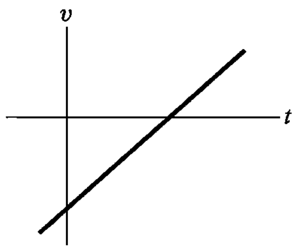
$$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$$ (۲-۱۸)

اگر شتاب ثابت نباشد، این معادله‌ها معتبر نیستند.

شتاب سقوط آزاد نمونه‌ی مهمی از حرکت راست ـ خط با شتاب ثابت، بالا رفتن یا پایین آمدن یک شیء در نزدیکی سطح زمین است. معادله‌های مربوط به شتاب ثابت برای توصیف این حرکت مناسب‌اند، اما در نمادگذاری دو تغییر باید داده شود: (۱) حرکت در راستای محور قائم y صورت می‌گیرد و جهت $+y$ به بالاسو است؛ (۲) به جای a شتاب $-g$ قرار داده می‌شود، که g بزرگی شتاب سقوط آزاد است. در نزدیکی سطح زمین، $g = ۹/۸\,m/s^2 = ۳۲\,ft/s^2$.

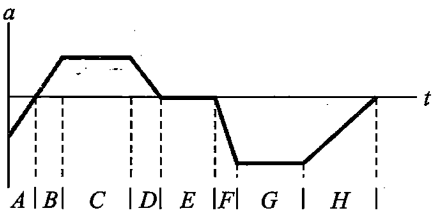
پرسش‌ها

۱ شکل ۲-۱۶، نمودار سرعت ذره‌ای را نشان می‌دهد که در راستای محور x حرکت می‌کند. جهت‌های (الف) آغازی و (ب) پایانی حرکت را مشخص کنید. (پ) آیا ذره به طور لحظه‌ای توقف می‌کند؟ (ت) شتاب حرکت مثبت است یا منفی؟ (ث) شتاب حرکت ثابت است یا متغیر؟



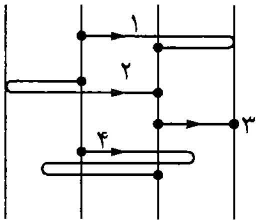
شکل ۲-۱۶ پرسش ۱.

۲ شکل ۲-۱۷، نمودار شتاب $a(t)$ سگ کوچکی را به هنگام تعقیب چوپان در راستای یک محور نشان می‌دهد. سگ در کدام دوره‌های زمانی با تندی ثابت حرکت می‌کند؟



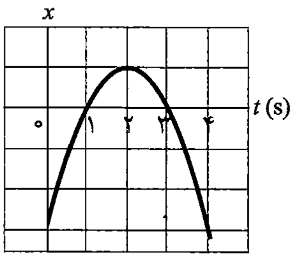
شکل ۲-۱۷ پرسش ۲.

۳ شکل ۲-۱۸ چهار مسیر حرکت را نشان می‌دهد، که آن‌ها را چهار ذره در مدت زمان مساوی از نقطه‌ی آغاز حرکت تا نقطه‌ی پایان می‌پیمایند. مسیرهای حرکت شبکه‌ای از خط‌های راست با فاصله‌ی یکسان را قطع می‌کنند. مسیرها را با توجه به (الف) سرعت متوسط ذره‌ها، و (ب) تندی متوسط ذره‌ها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



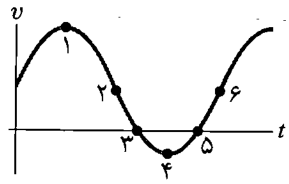
شکل ۲-۱۸ پرسش ۳.

۴ شکل ۲-۱۹ نمودار مکان یک ذره را در راستای محور x برحسب زمان نشان می‌دهد. (الف) در زمان $t = ۰$، علامت مکان ذره چیست؟ سرعت ذره در زمان‌های (ب) $t = ۱s$، (پ) $t = ۲s$، و (ت) $t = ۳s$، مثبت است، منفی است، یا صفر است؟ (ث) این ذره چند بار از مکان $x = ۰$ می‌گذرد؟



شکل ۲-۱۹ پرسش ۴.

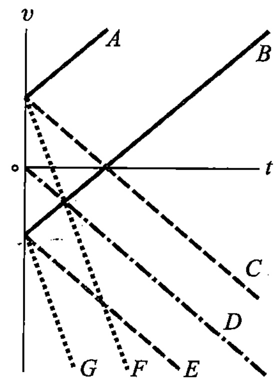
۵ شکل ۲-۲۰ نمودار سرعت یک ذره‌ی متحرک را در راستای محوری نشان می‌دهد. نقطه‌ی ۱ در بالاترین نقطه‌ی نمودار و نقطه‌ی ۴ در پایین‌ترین نقطه‌ی نمودار قرار دارد و نقطه‌های ۲ و ۶ در ارتفاع یکسان واقع شده‌اند. جهت حرکت در (الف) زمان $t = ۰$ و (ب) نقطه‌ی ۴ چگونه است؟ (پ) در کدام یک از شش نقطه‌ی شماره‌گذاری شده، جهت حرکت ذره عوض می‌شود؟ (ت) این شش نقطه را برحسب بزرگی شتاب، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۲-۲۰ پرسش ۵.

۶ ذره‌ای که در راستای محور x حرکت می‌کند، در زمان $t=۰$ در مکان $x=-۲۰\text{m}$ واقع است. علامت‌های سرعت آغازی $v_۰$ ذره (در زمان $t_۰$) و شتاب ثابت a در چهار حالت، به ترتیب، عبارت‌اند از: (۱) +، +؛ (۲) +، -؛ (۳) -، +؛ (۴) -، -. در کدام حالت، ذره (الف) توقف موقتی می‌کند، (ب) از مبداء می‌گذرد، و (پ) هرگز از مبداء نمی‌گذرد؟

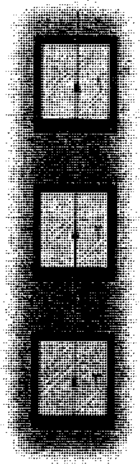
۷ در حالی که از روی نرده‌های یک پل به‌طرف پایین خم شده‌اید، یک تخم مرغ را (بدون سرعت آغازی) رها و در همین حال تخم مرغ دیگری را به پایین پرتاب می‌کنید. در شکل ۲-۲۱ کدام منحنی‌ها تغییرات سرعت $v(t)$ را برای (الف) تخم مرغ رها شده و (ب) تخم مرغ پرتاب شده، نشان می‌دهند؟ (منحنی‌های A و B موازی‌اند؛ هم‌چنین، منحنی‌های C، D و E نیز با هم و منحنی‌های F و G نیز با هم موازی‌اند).



شکل ۲-۲۱ پرسش ۷.

۸ رابطه‌های زیر معادله‌های سرعت $v(t)$ یک ذره را در چهار حالت به‌دست می‌دهند: (الف) $v=۳$؛ (ب) $v=۴t^۲+۲t-۶$؛ (پ) $v=۳t-۴$؛ (ت) $v=۵t^۲-۳$. در مورد کدام یک از این حالت‌ها معادله‌های جدول ۲-۱ را می‌توان به کار برد؟

۹ در شکل ۲-۲۲، پرتقالی که در راستای قائم به بالاسو پرتاب شده است از مقابل سه پنجره با ارتفاع و به فاصله‌ی مساوی

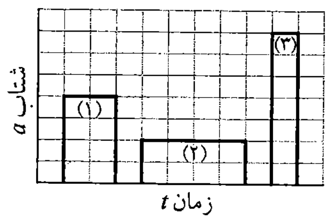


شکل ۲-۲۲ پرسش ۹.

عبور می‌کند. پنجره‌ها را از جنبه‌های زیر، به ترتیب از بیشترین تا کمترین مقدار، با ذکر شماره مرتب کنید (الف) تندی متوسط پرتقال هنگام رسیدن به پنجره‌ها، (ب) مدت زمان عبور پرتقال از مقابل پنجره‌ها، (پ) بزرگی شتاب پرتقال هنگام عبور از مقابل پنجره‌ها و (ت) تغییر تندی پرتقال، Δv، هنگام گذشتن از مقابل پنجره‌ها.

۱۰ فرض کنید مسافر یک بالون هوایی داغ در هنگام بالا رفتن سیبی را در بیرون بالون رها می‌کند. در لحظه‌ی رها شدن سیب، بالون با شتاب $۴/۰\,\text{m/s}^۲$ به بالاسو حرکت می‌کند و بزرگی سرعت بالاسوی آن ۲m/s است. (الف) بزرگی و (ب) جهت شتاب سیب درست پس از رها شدن چیست؟ (پ) سیب پس از رها شدن آیا به بالاسو حرکت می‌کند یا به پایین‌سو، یا ساکن می‌ماند؟ (ت) بزرگی سرعت سیب درست پس از رها شدن چیست؟ (ث) در چند لحظه‌ی بعد، آیا تندی سیب افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

۱۱ شکل ۲-۲۳ نشان می‌دهد که یک ذره‌ی در حال حرکت در راستای محور x، سه دوره‌ی شتاب‌گیری دارد. بدون انجام دادن محاسبه، دوره‌های شتاب‌گیری را برحسب افزایشی که در سرعت ذره ایجاد می‌شود، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۲-۲۳ پرسش ۱۱.

مسئله‌ها

پودمان ۲-۱ مکان، جابه‌جایی و سرعت متوسط

❋ ۱ در هنگام عطسه کردن شدید در حال رانندگی با تندی ۹۰km/h، چشم‌های شما به مدت ۰٫۵۰s بسته می‌شوند. در این مدت خودرو شما چه مسافتی را می‌پیماید؟

❋ ۲ سرعت متوسط خود را در دو حالت زیر حساب کنید: (الف) در طول یک مسیر راست، ابتدا مسافت ۷۳٫۲m را با تندی ۱٫۲۲m/s راه می‌روید و سپس مسافت ۷۳٫۲m را با تندی ۳٫۰۵m/s می‌دوید. (ب) در طول یک مسیر راست، ابتدا به مدت یک دقیقه با تندی ۱٫۲۲m/s راه می‌روید و سپس به مدت ۱٫۰۰min با تندی ۳٫۰۵m/s می‌دوید. (پ) نمودار تغییرات x برحسب t را برای هر دو حالت رسم کنید و چگونگی به دست آوردن سرعت متوسط از روی نمودار را نشان دهید.

❋ ۳ خودرویی در یک جاده‌ی راست، مسافت ۴۰km را با تندی ۳۰km/h می‌پیماید. سپس، خودرو مسافت ۴۰km دیگر را در همان جهت با تندی ۶۰km/h طی می‌کند. (الف) سرعت متوسط خودرو در این سفر ۸۰ کیلومتری چیست؟ (فرض کنید خودرو در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند). (ب) تندی متوسط خودرو چقدر است؟ (پ) نمودار تغییرات x برحسب t را رسم کنید و نشان دهید چگونه می‌توان سرعت متوسط را از روی نمودار معین کرد.

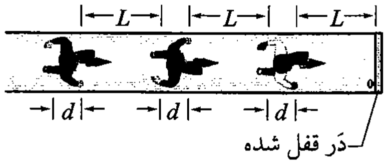
❋ ۴ خودرویی با تندی ثابت ۳۵km/h از تپه‌ای بالا می‌رود و با تندی ثابت ۶۰km/h از تپه پایین می‌آید. تندی متوسط خودرو در این رفت و برگشت را حساب کنید.

❋ ۵ مکان شیئی که در راستای محور x حرکت می‌کند، از معادله‌ی $x = ۳t - ۴t^۲ + t^۳$ به دست می‌آید، که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. مکان این شیء را در هر یک از زمان‌های زیر پیدا کنید: (الف) ۱s، (ب) ۲s، (پ) ۳s، و (ت) ۴s. (ث) جابه‌جایی شیء در بین زمان‌های $t = ۰$ و $t = ۴s$ چیست؟ (ج) سرعت متوسط شیء در بازه‌ی زمانی $t = ۲s$ تا $t = ۴s$ چیست؟ (چ) نمودار x برحسب t را در بازه‌ی زمانی $۰ \le t < ۴s$ رسم کنید و نشان دهید که چگونه می‌توان با استفاده کردن از این نمودار پاسخ قسمت (ج) را به‌دست آورد؟

❋ ۶ رکورد جهانی سال ۱۹۹۲ سرعت دوچرخه (به عنوان وسیله‌ی نقلیه وابسته به توان انسان) را کریس هابر[1] بر جای گذاشت. او مسافت ۲۰۰m را در مدت زمان شگفت‌انگیز ۶٫۵۰۹s پیمود و پس از مسابقه این طور اظهار کرد که «من فکر می‌کنم، پس تُند می‌روم!». در سال ۲۰۰۱، سام ویتینگهام[2] رکورد هابر را با سرعت ۱۹٫۰km/h شکست. ویتینگهام مسافت ۲۰۰m را در چه مدت پیمود؟

❋❋ ۷ دو قطار که تندی هر کدام ۳۰km/h است، بر روی یک مسیر مستقیم به سوی هم حرکت می‌کنند. وقتی که فاصله‌ی دو قطار از هم ۶۰km است، پرنده‌ای با تندی پرواز ۶۰km/h از روی یکی از قطارها به طور مستقیم به طرف قطار دیگر پرواز می‌کند. پرنده به محض رسیدن به قطار دوم، آن را ترک می‌کند و دوباره به طرف قطار اول برمی‌گردد و این کار را به همین ترتیب تکرار می‌کند. کل مسافتی که پرنده پیش از برخورد کردن دو قطار به هم می‌پیماید، چقدر است؟

❋❋ ۸ ***فرار با وحشت.*** شکل ۲-۲۴، وضعیتی را نشان می‌دهد که عده‌ای از مردم قصد فرار از یک دَر را دارند و متوجه می‌شوند که دَر قفل شده است. ضخامت بدن این افراد که با تندی $v_s = ۳٫۵۰m/s$ به سوی در فرار می‌کنند، $d = ۰٫۲۵m$ و فاصله‌ی افراد از یکدیگر $L = ۱٫۷۵m$ است. شکل ۲-۲۴ آرایش قرار گرفتن افراد را در زمان $t = ۰$ نشان می‌دهد. (الف) ضخامت لایه‌ی افراد جمع شده در پشت در با چه آهنگ متوسطی افزایش می‌یابد؟ (ب) ضخامت این لایه در چه مدتی به ۵٫۰m می‌رسد؟ (پاسخ‌ها نشان می‌دهند که چنین وضعیتی چقدر سریع به یک حالت خطرناک تبدیل می‌شود).



شکل ۲-۲۴ مسئله‌ی ۸.

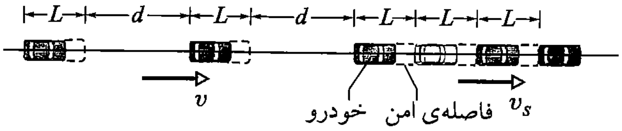
1. Chris Huber 2. Sam Whittingham

** ۹ در یک مسابقه‌ی دو یک کیلومتری به نظر می‌رسد دونده‌ی ۱ در خط ۱ (با زمان ۲min و ۲۷/۹۵s) نسبت به دونده‌ی ۲ در خط ۲ (با زمان ۲min و ۲۸/۱۵s) تندتر می‌دود. اما L_2 طول خط ۲، ممکن است اندکی از L_1 طول خط ۱، بیشتر باشد. مقدار $L_2 - L_1$ چقدر می‌تواند باشد تا باز هم نتیجه بگیریم که دونده‌ی ۱ تندتر می‌دود؟

** ۱۰ برای تعیین رکورد تندی در مسافت (راست خط) d، یک خودرو مسابقه ابتدا باید در یک‌جهت (به‌مدت t_1) و سپس در جهت مخالف (به مدت t_2) رانده شود. (الف) برای حذف‌کردن اثرهای باد و به‌دست آوردن تندی خودرو v_c در وضعیت بدون باد، آیا باید متوسط $\frac{d}{t_1}$ و $\frac{d}{t_2}$ را حساب کرد (روش ۱) یا باید d را به مقدار متوسط t_1 و t_2 تقسیم کرد؟ (ب) وقتی یک باد پایا درجهت حرکت خودرو می‌وزد و نسبت تندی باد v_w، به تندی خودرو v_c، برابر با ۰/۰۲۴۰ است، اختلاف نسبی مقادیر به دست آمده از این دو روش چقدر است؟

** ۱۱ برای شرکت کردن در جلسه‌ی مصاحبه‌ای که در شهر دیگری به فاصله‌ی ۳۰۰km از شهر شما برگزار می‌شود، در بزرگ‌راهی رانندگی می‌کنید. مصاحبه در ساعت ۱۱:۱۵ صبح آغاز می‌شود. چون تصمیم می‌گیرید با تندی ۱۰۰km/h در بزرگ‌راه رانندگی کنید ساعت ۸:۰۰ صبح به راه می‌افتید تا قدری زودتر برسید. شما مسافت ۱۰۰km اول را با این تندی رانندگی می‌کنید اما به خاطر آنکه بزرگ‌راه در دست تعمیر است مجبور می‌شوید مسافت ۴۰km را با تندی ۴۰km/h برانید. بقیه‌ی مسیر را دست کم با چه تندی‌ای باید رانندگی کنید تا به موقع به جلسه‌ی مصاحبه برسید؟

*** ۱۲ ***موج ضربه‌ای ترافیک***. کند شدن ناگهانی ترافیک فشرده ممکن است به صورت یک تپ، به نام ***موج ضربه‌ای***، در راستای خط حرکت خودروها، همسو با حرکت (همسو با ترافیک) یا ناهمسو با حرکت منتشر شود، یا ساکن بماند. شکل ۲-۲۵، مجموعه‌ای از خودروها را با فاصله‌ی یکسان از یکدیگر نشان می‌دهد که با تندی $v = 25.0\,m/s$ به سوی مجموعه‌ی دیگری از خودروهای کندتر و با فاصله‌ی یکسان و در حال حرکت با تندی $v_s = 5.00\,m/s$ پیش می‌روند. فرض کنید هر



شکل ۲-۲۵ مسئله‌ی ۱۲.

خودرو تندتر که به مجموعه‌ی جلوی افزوده می‌شود طول خودروهای کندتر را به اندازه‌ی $L = 12.0\,m$ (به اندازه‌ی طول هر خودرو و فاصله‌ی امن بین دو خودرو) می‌افزاید. هم‌چنین، فرض کنید به محض پیوستن خودرو به مجموعه‌ی خودروهای کندتر، تندی خودرو تند در آخرین لحظه به طور ناگهانی کم می‌شود. (الف) به ازای چه فاصله‌ای بین خودروهای تند d، موج ضربه‌ای ساکن می‌ماند؟ اگر این فاصله دو برابر شود، (ب) تندی و (پ) جهت انتشار موج ضربه‌ای (همسو یا ناهمسو با ترافیک) چیست؟

*** ۱۳ شخصی برای پیمودن فاصله‌ی میان تهران تا کرج، نصف ***زمان*** لازم را با تندی ۵۵km/h و نصف دیگر را با تندی ۹۰km/h رانندگی می‌کند. شخص در راه برگشت، نصف ***مسافت*** را باتندی ۵۵km/h ونصف دیگررا با تندی ۹۰km/h می‌پیماید. تندی متوسط خودرو، (الف) از تهران تا کرج، (ب) در راه برگشت از کرج به تهران و (پ) در کل مسافرت رفت و برگشت، چقدر است؟ (ت) سرعت متوسط خودرو در کل مسافرت رفت و برگشت چیست؟ (ث) نمودار تغییرات x برحسب t را برای قسمت (الف) با فرض آنکه حرکت در جهت مثبت محور x انجام شده است، رسم کنید. نشان دهید چگونه می‌توان سرعت متوسط را از روی نمودار معین کرد.

پودمان ۲-۲ سرعت لحظه‌ای و تندی لحظه‌ای

* ۱۴ مکان الکترونی که در راستای محور x حرکت می‌کند، از معادله‌ی، $x = 16te^{-t}\,m$ به دست می‌آید، که در آن t برحسب ثانیه است. الکترون در چه فاصله‌ای از مبداء به حال سکون لحظه‌ای در می‌آید؟

* ۱۵ (الف) معادله‌ی مکان یک ذره به‌صورت $x = 4 - 12t + 3t^2$ است (که در آن t برحسب ثانیه و x برحسب متر است).

سرعت ذره در زمان $t = 1\text{s}$ چیست؟ (ب) درست پس از این زمان، ذره در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند یا در جهت منفی؟ (پ) تندی ذره در این زمان چقدر است؟ (ت) در زمان‌های بعدی تندی ذره بیشتر می‌شود یا کمتر؟ (تلاش کنید به دو پرسش بعدی بدون انجام دادن محاسبه‌های اضافی پاسخ دهید). (ث) آیا هیچ زمانی وجود دارد که در آن سرعت ذره صفر باشد؟ (ج) آیا پس از زمان $t = 3\text{s}$ زمانی وجود دارد که ذره در جهت منفی محور x حرکت کند؟ اگر پاسخ مثبت است، t را مشخص کنید و اگر منفی است پاسخ دهید نه.

* ۱۶ تابع مکان $x(t)$ یک ذره‌ی در حال حرکت در راستای محور x به صورت $x = 4{,}0 - 6{,}0t^2$ است، که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. این ذره (الف) در چه زمانی و (ب) در کجا، به طور موقتی می‌ایستد؟ ذره (پ) در چه زمان منفی و (ت) در چه زمان مثبت از مبداء عبور می‌کند. (ث) نمودار x برحسب t را برای بازه‌ی -5s تا $+5\text{s}$ رسم کنید. (ج) برای جابه‌جا کردن نمودار به راست‌سو، باید جمله‌ی $+20t$ را به تابع $x(t)$ بیفزاییم یا جمله‌ی $-20t$ را؟ (چ) افزودن این جمله مقدار x مربوط به توقف موقتی ذره را افزایش می‌دهد یا کاهش؟

** ۱۷ مکان ذره‌ای که در راستای محور x حرکت می‌کند، برحسب سانتی‌متر از معادله‌ی $x = 9{,}75 + 1{,}50t^3$ به دست می‌آید، که در آن t برحسب ثانیه است. مطلوب است محاسبه‌ی، (الف) سرعت متوسط ذره در بازه‌ی زمانی $t = 2{,}00\text{s}$ تا $t = 3{,}00\text{s}$، (ب) سرعت لحظه‌ای ذره در زمان $t = 2{,}00\text{s}$، (پ) سرعت لحظه‌ای ذره در زمان $t = 3{,}00\text{s}$، (ت) سرعت لحظه‌ای ذره در زمان $t = 2{,}50\text{s}$ و (ث) سرعت لحظه‌ای ذره در موقعی که ذره در وسط فاصله‌ی میان دو مکان متناظر با $t = 2{,}00\text{s}$ و $t = 3{,}00\text{s}$ قرار دارد. (ج) نمودار تغییرات x برحسب t را رسم کنید و پاسخ‌های خواسته شده را به روش ترسیمی به دست آورید.

پودمان ۲-۳ شتاب

* ۱۸ مکان ذره‌ای که در راستای محور x حرکت می‌کند، از رابطه‌ی $x = 12t^2 - 2t^3$ به دست می‌آید، که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. مطلوب است تعیین (الف) مکان، (ب) سرعت، (پ) شتاب ذره، در زمان $t = 3{,}0\text{s}$. (ت) مختصه‌ی مثبت بیشینه‌ای که ذره به آن می‌رسد چیست، و (ث) ذره در چه زمانی به آنجا می‌رسد؟ (ج) سرعت مثبت بیشینه‌ی ذره چیست؟ و (چ) ذره در چه زمانی به این سرعت می‌رسد؟ (ح) ذره در زمانی که حرکت نمی‌کند (به جز $t = 0$)، شتابش چیست؟ (خ) سرعت متوسط ذره را در بین زمان‌های $t = 0$ تا $t = 3\text{s}$ حساب کنید.

* ۱۹ تندی یک ذره در زمان معینی در جهت مثبت محور x 18m/s است و $2{,}4\text{s}$ بعد تندی آن در سوی مخالف 30m/s است. شتاب متوسط ذره در این بازه‌ی زمانی $2{,}4\text{s}$ چیست؟

* ۲۰ (الف) مکان ذره‌ای از رابطه‌ی $x = 20t - 5t^3$ به دست می‌آید، که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. آیا سرعت ذره هرگز صفر می‌شود؟ (ب) در چه زمانی شتاب ذره a، صفر است؟ شتاب a در چه گستره‌ی زمانی‌ای (مثبت یا منفی) (پ) منفی است؟ (ت) مثبت است؟ (ث) نمودارهای $x(t)$، $v(t)$ و $a(t)$ را رسم کنید.

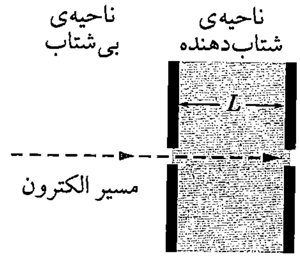
** ۲۱ شخصی از زمان $t = 0$ تا زمان $t = 5{,}00\text{min}$ در حال ایستادن است و از $t = 5{,}00\text{min}$ تا $t = 10{,}0\text{min}$ با چابکی تمام در یک خط راست با تندی ثابت $2{,}20\text{m/s}$ راه می‌رود. (الف) سرعت متوسط v_{avg} و (ب) شتاب متوسط a_{avg} شخص، در بازه‌ی زمانی $2{,}00$ دقیقه تا $8{,}00$ دقیقه چیست؟ (پ) v_{avg} و (ت) a_{avg} شخص، در بازه‌ی زمانی $3{,}00$ دقیقه تا $9{,}00$ دقیقه چیست؟ (ث) نمودار تغییرات x برحسب t و نمودار تغییرات v برحسب t را رسم کنید و نشان دهید که پاسخ‌های قسمت‌های (الف) تا (ت) را از روی نمودار چگونه می‌توان به دست آورد.

** ۲۲ مکان یک ذره‌ی در حال حرکت در راستای محور x برحسب زمان از معادله‌ی $x = ct^2 - bt^3$ به دست می‌آید، که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. یکای (الف) ثابت c و (ب) ثابت b، چیست؟ مقادیر عددی ثابت‌ها را به ترتیب، $3{,}0$ و $2{,}0$ در نظر بگیرید. (پ) در چه زمانی ذره به مکان مثبت بیشینه‌ی x می‌رسد؟ ذره در بازه‌ی زمانی $t = 0{,}0\text{s}$

تا $t = ۴/۰\,s$، (ت) چه مسافتی را می‌پیماید و (ث) جابه‌جایی آن چیست؟ سرعت ذره در زمان‌های زیر را پیدا کنید. (ج) ۱/۰s، (چ) ۲/۰s، (ح) ۳/۰s، و (خ) ۴/۰s. شتاب ذره را در زمان‌های (د) ۱/۰s، (ذ) ۲/۰s، (ر) ۳/۰s و (ز) ۴/۰s، پیدا کنید.

پودمان ۲-۴ شتاب ثابت

* **۲۳** الکترونی با سرعت آغازی $v_0 = ۱/۵۰ \times ۱۰^{۵}\,m/s$ وارد ناحیه‌ای به طول $L = ۱/۰۰\,cm$ می‌شود و تحت تأثیر میدان الکتریکی شتاب می‌گیرد (شکل ۲-۲۶). الکترون با سرعت $v = ۵/۷۰ \times ۱۰^{۶}\,m/s$ از این ناحیه خارج می‌شود. شتاب آن با فرض ثابت بودن، چیست؟



شکل ۲-۲۶ مسئله‌ی ۲۳.

* **۲۴** ***قارچ‌های منجنیقی.*** برخی قارچ‌ها هاگ‌های خود را با سازوکار منجنیقی پرتاب می‌کنند. هنگامی که آب موجود در هوا روی هاگ متصل به قارچ متراکم می‌شود، در یک طرف هاگ یک قطره‌ی آب و در طرف دیگر یک لایه‌ی نازک آب رشد می‌کند. هاگ در اثر وزن قطره به یک طرف خم می‌شود، اما وقتی که لایه‌ی نازک به قطره می‌رسد آب قطره ناگهان به درون لایه جریان پیدا می‌کند و هاگ مثل فنر ازجا درمی‌رود و با چنان سرعتی به‌بالا می‌پرد که ازقارچ جدا می‌شود. تندی هاگ، به طور معمول، هنگام پرتاب شدن در فاصله‌ای به طول $۵/۰\,\mu m$ به $۱/۶\,m/s$ می‌رسد؛ سپس، این تندی درفاصله‌ی بعدی $۱/۰\,mm$ در اثر مقاومت هوا به صفر می‌رسد. با استفاده کردن از این داده‌ها و با فرض ثابت‌بودن شتاب‌ها، شتاب هاگ را برحسب g در (الف) هنگام پرتاب شدن و (ب) هنگام کاهش یافتن تندی، پیدا کنید.

* **۲۵** یک وسیله‌ی نقلیه‌ی برقی از حال سکون به راه می‌افتد و با شتاب $۲/۰\,m/s^{۲}$ به خط راست حرکت می‌کند تا به تندی $۲۰\,m/s$ می‌رسد. سپس تندی وسیله با آهنگ $۱/۰\,m/s^{۲}$ کاهش می‌یابد تا متوقف شود. (الف) از زمان شروع حرکت تا توقف چه مدت طول می‌کشد؟ (ب) این وسیله از زمان شروع حرکت تا توقف، چه مسافتی را می‌پیماید؟

* **۲۶** یک میوئون (یکی از ذرات بنیادی) با تندی $۵/۰۰ \times ۱۰^{۶}\,m/s$ به ناحیه‌ای وارد و تندی‌اش با آهنگ $۱/۲۵ \times ۱۰^{۱۴}\,m/s^{۲}$ کم می‌شود. (الف) میوئون پیش از توقف چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ب) نمودار تغییرات x برحسب t و نمودار تغییرات v برحسب t مربوط به میوئون را رسم کنید.

* **۲۷** الکترونی دارای شتاب ثابت $+۳/۲\,m/s^{۲}$ است. در لحظه‌ی معینی سرعت الکترون $+۹/۶\,m/s$ است. سرعت الکترون، (الف) ۲/۵ ثانیه پیش و (ب) ۲/۵ ثانیه بعد، چیست؟

* **۲۸** در یک جاده‌ی خشک، خودرویی با لاستیک‌های خوب می‌تواند با شتاب ثابت $۴/۹۲\,m/s^{۲}$ ترمز کند. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا این خودرو که دارای تندی آغازی $۲۴/۶\,m/s$ است، متوقف شود. (ب) در این مدت خودرو چه مسافتی را می‌پیماید؟ (پ) نمودار x برحسب t و نمودار v برحسب t را در مدت حرکت با این شتاب کند کننده رسم کنید.

* **۲۹** اتاقک آسانسوری که در مجموع می‌تواند مسافت $۱۹۰\,m$ را با تندی بیشینه‌ی $۳۰۵\,m/min$ بالا یا پایین برود با شتاب $۱/۲۲\,m/s^{۲}$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و سپس با همین شتاب به حال سکون می‌رسد. (الف) این آسانسور از موقعی که از حال سکون به راه می‌افتد و با شتاب به تندی بیشینه می‌رسد چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ب) چه مدت طول می‌کشد تا آسانسور از حال سکون به راه بیفتد، بدون توقف ارتفاع $۱۹۰\,m$ را بپیماید و دوباره به حال سکون برسد؟

* **۳۰** در یک خودرو ترمزها می‌توانند تندی را با آهنگ $۵/۲\,m/s^{۲}$ کاهش دهند. (الف) اگر خودرو با تندی $۱۳۷\,km/h$ در حال حرکت باشد و ناگهان پلیس راهنمایی سر برسد، راننده حداقل در چه مدت می‌تواند تندی خودرو را به مقدار مجاز $۹۰\,km/h$ برساند؟ (پاسخ شما بی‌فایده بودن این

ترمز کردن را برای فرار از آشکار شدن تخلف توسط رادار یا تفنگ لیزری نشان می‌دهد). (ب) نمودار x برحسب t و نمودار v برحسب t را برای این حرکت کند شونده رسم کنید.

* **۳۱** موشکی در فضا با شتاب ثابت $۹/۸\,\mathrm{m/s^۲}$ حرکت می‌کند تا در حین پرواز احساس شتاب عادی گرانشی را ایجاد کند. (الف) اگر موشک از حالت سکون شروع به حرکت کرده باشد، چه مدت طول می‌کشد تا تندی آن به یک دهم تندی نور برسد؟ $(c = ۳/۰ \times ۱۰^{۸}\,\mathrm{m/s})$ (ب) موشک در این مدت چه مسافتی می‌پیماید؟

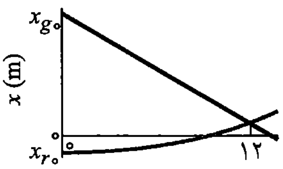
* **۳۲** رکورد جهانی سرعت در روی زمین توسط سرهنگ **جان استَپ** هنگامی به دست آمد که در مارس ۱۹۵۴ (اسفند ۱۳۳۲) در حال سوار بودن بر یک سورتمه‌ی با پیش‌ران موشکی با سرعت $۱۰۲۰\,\mathrm{km/h}$ در روی یک ریل حرکت می‌کرد. او و سورتمه در مدت ۱/۴ ثانیه متوقف شدند (شکل ۲-۷ را ببینید). جان استپ در هنگام متوقف شدن چه شتابی را برحسب g تجربه کرده است؟

* **۳۳** خودرویی با سرعت $۵۶/۰\,\mathrm{km/h}$ در حال حرکت است. هنگامی که خودرو به فاصله‌ی ۲۴/۰ متری یک راهبند مانع عبور می‌رسد، راننده ترمز می‌کند و خودرو پس از ۲/۰۰ ثانیه به راهبند برخورد می‌کند. (الف) شتاب کند کننده‌ی خودرو پیش از برخورد به راهبند چقدر است؟ (ب) سرعت خودرو هنگام برخورد چیست؟

** **۳۴** درشکل ۲-۲۷، دو خودرو مشابه قرمز r، و سبز g، در دو سوی خیابانی در راستای محور x به سوی هم حرکت می‌کنند. در زمان $t = ۰$ خودرو r در مکان $x_r = ۰$ و خودرو g در مکان $x_g = ۲۲۰\,\mathrm{m}$ قرار دارد. اگر خودرو r، با سرعت ثابت $۲۰\,\mathrm{km/h}$ حرکت کند، دو خودرو در مکان $x = ۴۴/۵\,\mathrm{m}$، و اگر با سرعت ثابت $۴۰\,\mathrm{km/h}$ حرکت کند، دو خودرو در مکان $x = ۷۶/۶\,\mathrm{m}$، از کنار هم عبور می‌کنند. (الف) سرعت آغازی و (ب) شتاب ثابت خودرو سبز، چیست؟

شکل ۲-۲۷ مسئله‌های ۳۴ و ۳۵.

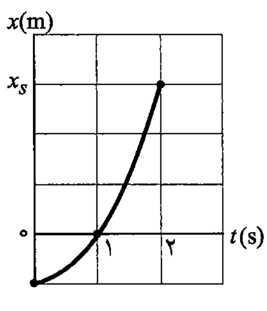
** **۳۵** شکل ۲-۲۷ خودروهای قرمز r، و سبز g، را نشان می‌دهد که به سوی هم حرکت می‌کنند. شکل ۲-۲۸ نشان دهنده‌ی نمودار حرکت خودروها ومکان‌های $x_{g۰} = ۲۷۰\,\mathrm{m}$ و $x_{r۰} = -۳۵/۰\,\mathrm{m}$ آن‌ها در زمان $t = ۰$ است. خودرو سبز دارای تندی ثابت $۲۰/۰\,\mathrm{m/s}$ است و خودرو قرمز از حال سکون شروع به‌حرکت می‌کند. بزرگی شتاب خودرو قرمز چقدر است؟



شکل ۲-۲۸ مسئله‌ی ۳۵.

** **۳۶** خودرویی مسافت $۹۰۰\,\mathrm{m}$ را در راستای محور x می‌پیماید. حرکت خودرو از حال سکون (در $x = ۰$) آغاز می‌شود و به حال سکون (در $x = ۹۰۰\,\mathrm{m}$) به پایان می‌رسد. شتاب خودرو در طول یک چهارم اول مسیر $+۲/۲۵\,\mathrm{m/s^۲}$ و در بقیه‌ی مسیر $-۰/۷۵۰\,\mathrm{m/s^۲}$ است. (الف) زمان پیمودن مسافت $۹۰۰\,\mathrm{m}$ چقدر است و (ب) بیشینه‌ی تندی خودرو چیست؟ (پ) نمودارهای مکان x، سرعت v و شتاب a برحسب زمان t مربوط به این سفر را رسم کنید.

** **۳۷** شکل ۲-۲۹، نمودار حرکت ذره‌ای را نشان می‌دهد که در راستای محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کند. مقیاس محور قائم شکل با مقدار $x_s = ۶/۰\,\mathrm{m}$ مشخص شده است. (الف) بزرگی و (ب) جهت شتاب ذره، چیست؟

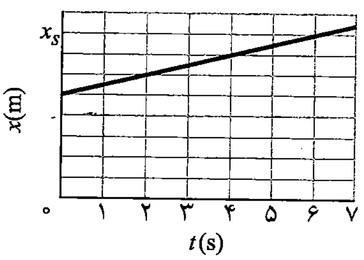


شکل ۲-۲۹ مسئله‌ی ۳۷.

** **۳۸** (الف) اگر شتاب بیشینه‌ی قابل تحمل برای مسافرهای یک قطار زیرزمینی $۱/۳۴\,\mathrm{m/s^۲}$ و فاصله‌ی ایستگاه‌های قطار از

هم ۸۰۶m باشد، تندی بیشینه‌ی قطار در بین ایستگاه‌ها به چه مقدار می‌تواند برسد؟ (ب) زمان پیمودن فاصله‌ی میان دو ایستگاه چقدر است؟ (پ) اگر این قطار در هر ایستگاه به مدت ۲۰s توقف کند، تندی بیشینه‌ی قطار از آغاز یک حرکت تا آغاز حرکت بعدی چقدر است؟ (ت) نمودارهای x، v و a برحسب t را برای بازه‌ی زمانی بین آغاز یک حرکت تا آغاز حرکت بعدی رسم کنید.

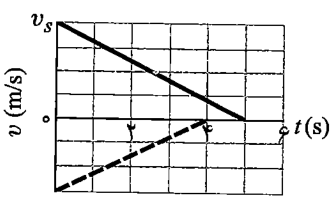
** ۳۹ خودروهای A و B در دو خط مجاور و در یک جهت حرکت می‌کنند. در بازه‌ی زمانی $t=$ ۰ تا $t=$ ۷٫۰s، نمودار مکان x خودرو A از شکل ۲-۳۰ به‌دست می‌آید. مقیاس محور قائم شکل با مقدار $x_s =$ ۳۲٫۰m مشخص شده است. در زمان $t=$ ۰ خودرو B در حال حرکت با سرعت ۱۲m/s و شتاب ثابت منفی a_B است و از مکان $x=$ ۰ عبور می‌کند. (الف) مقدار a_B چقدر باید باشد تا در زمان $t=$ ۴٫۰s این دو خودرو (برای یک لحظه) به کنار هم برسند (یعنی به‌طور لحظه‌ای دارای مقدار x یکسان باشند)؟ (ب) به ازای این مقدار a_B، این دو خودرو چند بار در کنار هم قرار می‌گیرند. (پ) نمودار مکان x خودرو B برحسب زمان t را در روی شکل ۲-۳۰ رسم کنید. اگر بزرگی شتاب a_B، (ت) بیشتر از و (ث) کمتر از، پاسخ قسمت (الف) باشد، دو خودرو چند بار در کنار هم قرار می‌گیرند؟



شکل ۲-۳۰ مسئله‌ی ۳۹.

** ۴۰ در حالی که با خودرو به چراغ راهنمایی نزدیک می‌شوید چراغ زرد می‌شود. تندی خودرو شما دارای مقدار مجاز $v_0 =$ ۵۵km/h است. بهترین آهنگ کاهش دادن تندی $a =$ ۵٫۱۸m/s^2 و بهترین زمان واکنش شما برای شروع به ترمز کردن $T =$ ۰٫۷۵s است. برای جلوگیری کردن از ورود به حریم چهارراه پس از قرمز شدن چراغ راهنمایی، آیا در حالت‌های زیر باید ترمز کنید تا متوقف شوید، یا باید با همان تندی ۵۵km/h به حرکت ادامه دهید، در حالی که فاصله‌ی خودرو شما تا چهارراه و مدت زمان زرد بودن چراغ به ترتیب (الف) ۴۰m و ۲٫۸s و (ب) ۳۲m و ۱٫۸s، باشد؟ پاسخ خود را به صورت ترمز کردن، ادامه دادن حرکت، انجام دادن هر دو کار (اگر هر دو کار مؤثر باشد)، یا هیچ کدام (اگر هیچ یک مؤثر نباشند و مدت زمان زرد ماندن چراغ نامناسب باشد)، بیان کنید.

** ۴۱ در هنگام حرکت کردن دو قطار در یک مسیر راننده‌های آن‌ها ناگهان متوجه می‌شوند که قطارها به سوی هم حرکت می‌کنند. شکل ۲-۳۱، نمودار سرعت‌های قطارها v، را به‌صورت تابعی از زمان t، پس از آنکه راننده‌ها حرکت قطارها را کند کردند، نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم شکل با مقدار $v_s =$ ۴۰٫۰m/s مشخص شده است. فرایند کند شدن قطارها هنگامی آغاز می‌شود که فاصله‌ی قطارها از یکدیگر ۲۰۰m باشد. فاصله‌ی دو قطار پس از متوقف شدن چیست؟

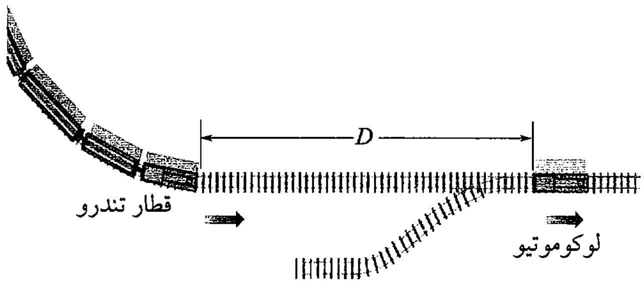


شکل ۲-۳۱ مسئله‌ی ۴۱.

*** ۴۲ در حالی که به فاصله‌ی ۲۵m در دنبال خودرو گشت نامحسوس پلیس در بزرگ‌راهی رانندگی می‌کنید، با تلفن همراه مشغول صحبت کردن هستید؛ تندی حرکت خودرو شما و خودرو پلیس ۱۱۰km/h است. درگیری با طرف مکالمه باعث می‌شود از توجه به خودرو پلیس به مدت ۲٫۰s غافل بمانید (این مدت برای نگاه کردن به تلفن و گفتن «من این کار را نمی‌کنم!» کافی است). در آغاز این ۲٫۰s افسر پلیس با شتاب ۵٫۰m/s^2 ناگهان ترمز می‌کند. (الف) سرانجام، وقتی دوباره حواس شما جمع می‌شود فاصله‌ی میان دو خودرو چقدر است؟ فرض کنید به مدت ۰٫۴۰s دیگر به زمان نیاز دارید تا متوجه خطر شوید و ترمز کنید. (ب) اگر شما نیز با شتاب ۵٫۰m/s^2

ترمز کنید، تندی خودرو شما هنگام برخورد با خودرو پلیس چقدر است؟

*** ۴۳ هنگامی‌که یک قطار تندرو مسافری با تندی $161 km/h$ در حال حرکت است، پس از گذر از یک پیچ به مسیر مستقیم می‌رسد. در این حال راننده‌ی قطار ناگهان در جلو خود و در فاصله‌ی $D = 676 m$ لوکوموتیوی را می‌بیند که در همان جهت و روی همان ریل با سرعت $29,0 km/h$ به پیش می‌رود (شکل ۲-۳۲). راننده‌ی قطار تندرو بی‌درنگ ترمز می‌کند. (الف) بزرگی شتاب ثابت کُند کننده‌ی ناشی از ترمز کردن چقدر باید باشد تا درست در آخرین لحظه از برخورد جلوگیری شود؟ (ب) فرض کنید راننده‌ی قطار تندرو نخستین بار در زمان $t = 0$ و در مکان $x = 0$ لوکوموتیو را می‌بیند. نمودارهای $x(t)$ مربوط به لوکوموتیو و قطار تندرو را برای حالتی رسم کنید که آن دو درست در آستانه‌ی برخورد قرار می‌گیرند و حالتی که، به طور کامل، از برخورد جلوگیری نشده است.



شکل ۲-۳۲ مسئله‌ی ۴۳.

پودمان ۲-۵ شتاب سقوط آزاد

* ۴۴ یک حیوان گورکن رم کرده در حین بالا پریدن در مدت $0,200$ ثانیه‌ی اول به ارتفاع $0,544$ متری می‌رسد. (الف) تندی آغازی این حیوان در لحظه‌ی جدا شدن از زمین چقدر است؟ (ب) تندی حیوان در ارتفاع $0,544$ متری چقدر است؟ (پ) این حیوان تا چه ارتفاعی بالاتر می‌پرد؟

* ۴۵ (الف) توپی را با چه سرعتی باید از سطح زمین به طور قائم به سوی بالا پرتاب کرد تا به ارتفاع بیشینه‌ی $50 m$ برسد؟ (ب) توپ چه مدت در هوا خواهد بود؟ (پ) نمودارهای تغییرات y، v و a برحسب t مربوط به توپ را رسم کنید.

در روی دو نمودار اول، زمان رسیدن گلوله به ارتفاع ۵۰ متری را مشخص کنید.

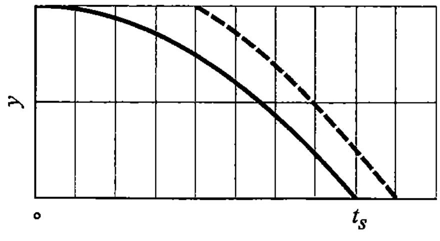
* ۴۶ قطره‌های باران از ابرهایی به ارتفاع $1700 m$ فرو می‌ریزند. (الف) اگر مقاومت هوا باعث کند شدن حرکت نشود، قطره‌ها با چه سرعتی به زمین برخورد می‌کنند؟ (ب) آیا راه رفتن در زیر چنین رگبار بارانی امن است؟

* ۴۷ در یک کارگاه ساختمانی، آچاری از بالا می‌افتد و با تندی $24 m/s$ به زمین می‌خورد. (الف) آچار از چه ارتفاعی سقوط کرده است؟ (ب) مدت زمان سقوط چقدر است؟ (پ) نمودارهای تغییرات y، v و a برحسب t را برای آچار رسم کنید.

* ۴۸ بچه‌ای سنگی را با تندی $12,0 m/s$ از بالای ساختمانی به ارتفاع $30,0 m$ در راستای قائم به پایین می‌اندازد. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا سنگ به زمین برسد؟ (ب) تندی سنگ در لحظه‌ی برخورد به زمین چقدر است؟

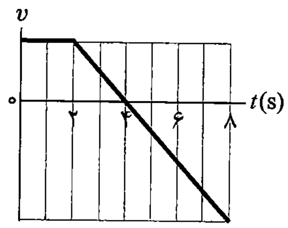
* ۴۹ یک بالون هوای داغ با تندی $12 m/s$ در حال صعود کردن است. هنگامی که بالون به ارتفاع ۸۰ متری زمین می‌رسد، بسته‌ای از آن رها می‌شود. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا بسته به زمین برسد؟ (ب) تندی بسته در لحظه‌ی برخورد به زمین چقدر است؟

* ۵۰ در زمان $t = 0$، سیب ۱ از کنار یک پل روی بزرگراهی واقع در زیر پل می‌افتد؛ لحظه‌ای بعد، سیب ۲ از همان ارتفاع به پایین پرتاب می‌شود. شکل ۲-۳۳، نمودارهای مکان‌های y این سیب‌ها را برحسب t در حین سقوط کردن تا برخورد آن‌ها به سطح بزرگ‌راه نشان می‌دهد. مقیاس محور زمان با مقدار $t_s = 2,0 s$ مشخص شده است. سیب ۲، به تقریب، با چه تندی‌ای به پایین پرتاب شده است؟



شکل ۲-۳۳ مسئله‌ی ۵۰.

** ۵۱ در حالی که یک بالون مجهز به ابزارهای علمی با تندی ۱۹٫۶m / s به‌بالاسو صعود می‌کند، یکی ازبسته‌های اندازه‌گیری آن از جا کنده می‌شود و آزادانه سقوط می‌کند. شکل ۲-۳۴، سرعت قائم این بسته برحسب زمان را، از پیش از کنده‌شدن تا رسیدن به زمین نشان می‌دهد. (الف) این بسته تا چه ارتفاع بیشینه‌ای نسبت به نقطه‌ی رها شدنش بالا می‌رود؟ (ب) نقطه‌ی رها شدن بسته در چه ارتفاعی نسبت به زمین قرار دارد؟



شکل ۲-۳۴ مسئله‌ی ۵۱.

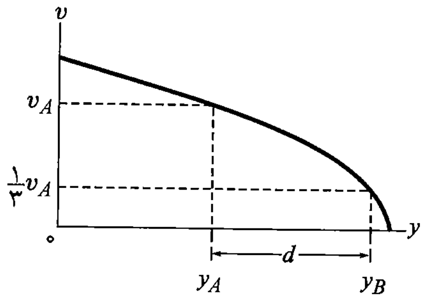
** ۵۲ پیچی از روی پلی که در حال ساخت است، به عمق ۹۰ متری دره‌ی زیر پل سقوط می‌کند. (الف) این پیچ ٪۲۰ آخر مسیرش را درچه مدتی می‌پیماید؟ پیچ، (ب) در لحظه‌ای که ٪۲۰ آخر مسیر را آغاز می‌کند و (پ) در لحظه‌ای که به دره‌ی زیر پل می‌رسد، دارای چه تندی‌ای است؟

** ۵۳ کلیدی از روی پلی که $45\,\mathrm{m}$ بالاتر از سطح آب قرار دارد، سقوط می‌کند. این کلید یک راست درون قایقی می‌افتد که با سرعت ثابت در حرکت است و در لحظه‌ی رها شدن در فاصله‌ی ۱۲ متری پیش از محل برخورد قرار داشته است. تندی قایق چقدر است؟

** ۵۴ سنگی از روی پلی که ۴۳٫۹m بالاتر از سطح آب قرار دارد، رها می‌شود. ۱٫۰۰ ثانیه پس از رها شدن این سنگ، سنگ دیگری در راستای قائم به پایین پرتاب می‌شود و دو سنگ به‌طور هم‌زمان به سطح آب می‌رسند. (الف) تندی آغازی سنگ دوم چیست؟ (ب) نمودار تغییرات سرعت هر سنگ را برحسب زمان روی یک نمودار رسم کنید و مبداء زمان را لحظه‌ی رها شدن سنگ اول بگیرید.

** ۵۵ گلوله‌ای گِلی از ارتفاع ۱۵٫۰ متری به زمین می‌افتد. این گلوله پس از گذشت ۲۰٫۰ms از آغاز شدن تماس بازمین متوقف می‌شود. (الف) بزرگی شتاب متوسط گلوله درمدت زمان تماس با زمین چیست؟ (گلوله را مانند یک ذره درنظر بگیرید). (ب) جهت شتاب متوسط به بالاسو است یا به پایین‌سو؟

** ۵۶ شکل ۲-۳۵، نمودار تندی v برحسب ارتفاع y توپی را نشان می‌دهد که در راستای محور y یک راست به بالاسو پرتاب شده است. مسافت d برابر با ۰٫۴۰m است. تندی توپ در ارتفاع y_A برابر با v_A و در ارتفاع y_B برابر با $\frac{1}{3}v_A$ است. تندی v_A چیست؟



شکل ۲-۳۵ مسئله‌ی ۵۶.

** ۵۷ برای آزمودن کیفیت یک توپ تنیس آن را از ارتفاع ۴٫۰۰ متری سطح زمین رها می‌کنیم. توپ پس از برخورد به زمین به اندازه‌ی ۲٫۰۰m وامی‌جهد. اگر توپ به مدت ۱۲٫۰ms با زمین در تماس بوده باشد، (الف) بزرگی شتاب متوسط توپ در حین تماس با زمین چیست و (ب) جهت شتاب به بالاسو است یا به پایین‌سو؟

** ۵۸ شیئی از حال سکون به اندازه‌ی ارتفاع h سقوط می‌کند. اگر شیء در ۱٫۰۰s آخر مسافتی به اندازه‌ی $0{,}50h$ سقوط کند، مطلوب است تعیین (الف) زمان و (ب) ارتفاع سقوط. (پ) جواب غیرقابل قبول t را که از معادله‌ی درجه دوم به دست آمده است از نظر فیزیکی توضیح دهید.

** ۵۹ از دوشی که در ارتفاع ۲۰۰ سانتی‌متری سطح زمین قرار دارد، قطره‌های آب به زمین می‌ریزند. این قطره‌ها در بازه‌های زمانی منظم (مساوی) سقوط می‌کنند و در لحظه‌ای که قطره‌ی اول به زمین می‌رسد، قطره‌ی چهارم شروع به افتادن می‌کند. در لحظه‌ای که قطره‌ی اول به زمین برخورد می‌کند قطره‌های، (الف) دوم و (ب) سوم، در چه فاصله‌ای از دوش قرار دارند؟

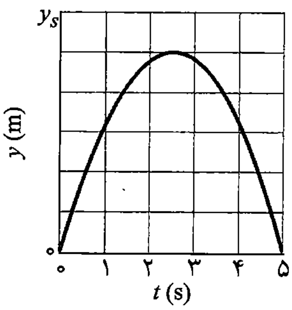
⁂ ۶۰ سنگی در زمان $t=0$ از زمین به طور قائم به بالاسو پرتاب می‌شود. این سنگ در زمان $t=1/5 s$ از مقابل نوک برج بلندی عبور می‌کند و $1/0 s$ بعد به ارتفاع بیشینه‌ی خود می‌رسد. ارتفاع برج چقدر است؟

⁂⁂ ۶۱ یک گلوله‌ی فولادی از پشت بام ساختمانی به پایین می‌افتد و از جلو پنجره‌ای به ارتفاع $1/20 m$ عبور می‌کند. مدت زمان عبور از جلو پنجره $0/125 s$ است. سپس، این گلوله به سطح یک پیاده‌رو می‌رسد و به بالا وامی‌جهد و در مدت $0/125 s$ از پایین تا بالای پنجره را می‌پیماید. فرض کنید حرکت رو به بالای گلوله درست عکس حرکت سقوطی آن است. مدت زمانی که طول می‌کشد تا توپ از زیر پنجره به پیاده‌رو برسد، $2/00 s$ است. ارتفاع ساختمان چقدر است؟

⁂⁂ ۶۲ یک بازیکن بسکتبال که نزدیک حلقه ایستاده است، برای قاپیدن توپ در برگشت از تخته تا ارتفاع $76/0 cm$ به طور قائم به بالا می‌پرد. این بازیکن، در کل، چه زمانی (بالا پریدن و پایین آمدن) (الف) در $15/0 cm$ بالای مسیر و (ب) در $15/0 cm$ پایین مسیر در حال پریدن است؟ آیا پاسخ‌ها به شما کمک می‌کنند تا بفهمید چرا به نظر می‌رسد بازیکن‌های بسکتبال در مرحله‌ی اوج پرش در هوا معلق می‌مانند؟

⁂⁂ ۶۳ گربه‌ای خواب‌آلود متوجه می‌شود که گلدانی از مقابل یک پنجره‌ی باز ابتدا بالا می‌رود و سپس پایین می‌آید. گلدان در کل رفت و برگشت به مدت $0/50$ ثانیه در معرض دید بوده و ارتفاع پنجره از بالا تا پایین $2/00 m$ است. گلدان تا چه ارتفاعی از لبه‌ی بالای پنجره بالاتر رفته است؟

⁂⁂ ۶۴ در سطح سیاره‌ای گلوله‌ای به طور قائم به بالا پرتاب می‌شود. شکل ۲-۳۶، نمودار تغییرات y برحسب t مربوط به گلوله را نشان‌می‌دهد، که در آن y ارتفاع گلوله از نقطه‌ی پرتاب و $t=0$ زمان پرتاب کردن گلوله است. مقیاس محور قائم شکل با $y_s = 30/0 m$ مشخص شده است. بزرگی، (الف) شتاب سقوط آزاد درسیاره و (ب) سرعت آغازی گلوله، چقدر است؟

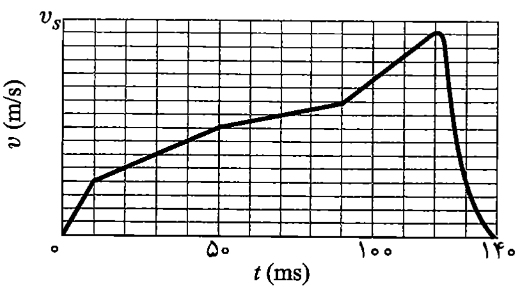


شکل ۲-۳۶ مسئله‌ی ۶۴.

پودمان ۲-۶ انتگرال‌گیری ترسیمی در تحلیل حرکت

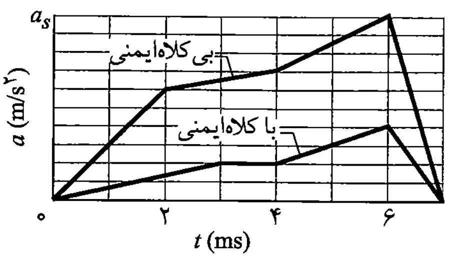
⁂ ۶۵ شکل ۲-۱۵ الف نمودار شتاب سر و بالاتنه‌ی داوطلب آزمایش در حین تصادف از عقب را نشان می‌دهد. وقتی شتاب سر بیشینه است، تندی (الف) سر و (ب) بالاتنه، چقدر است؟

⁂⁂ ۶۶ در یک ضربه‌ی رو به جلو در کاراته، مشت کاراته باز از حال سکون و از پهلوی کمر به سرعت به جلو آورده می‌شود تا بازو به طور کامل باز شود. در شکل ۲-۳۷، نمودار تندی $v(t)$ مشت برای یک کاراته باز ماهر نشان داده شده است. مقیاس محور قائم شکل با مقدار $v_s = 8/0 m/s$ مشخص شده است. مشت در مدت زمان (الف) $t = 50 ms$ و (ب) تا هنگامی که تندی آن به بیشینه می‌رسد، چقدر حرکت کرده است؟



شکل ۲-۳۷ مسئله‌ی ۶۶.

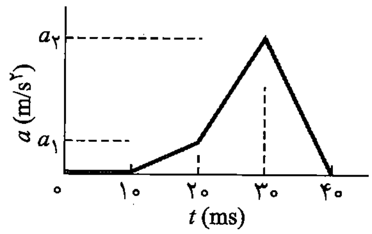
⁂⁂ ۶۷ هنگامی که توپ فوتبال به طرف بازیکنی می‌آید و او با «سرزدن» توپ را به سویی می‌فرستد شتاب حرکت سر بازیکن در حین برخورد توپ ممکن است قابل ملاحظه باشد. شکل ۲-۳۸، نمودار شتاب اندازه‌گیری شده‌ی $a(t)$ سر یک بازیکن



شکل ۲-۳۸ مسئله‌ی ۶۷.

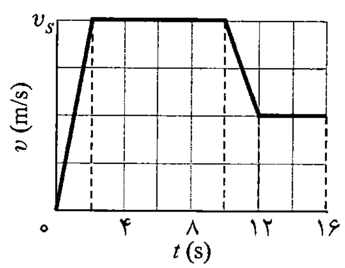
فوتبال را در حرکت از حال سکون برای دو حالت بی‌کلاه ایمنی و با کلاه ایمنی نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم شکل با مقدار $a_s = 200\,m/s^2$ مشخص شده است. در زمان $t = 7{,}0\,ms$ تفاوت تندی به دست آمده بین سر با کلاه ایمنی و بی‌کلاه ایمنی، چقدر است؟

** ۶۸ سمندر که ازخانواده‌ی ***مارمولک‌ها*** است، طعمه‌ی خود را با پرتاب‌کردن زبانش مانند یک پرتابه، می‌گیرد: بخش استخوانی زبان به جلو پرتاب می‌شود، بقیه‌ی زبان دراز می‌شود تا نوک آن به طعمه برسد و به آن بچسبد. شکل ۲-۳۹، نمودار تغییرات بزرگی شتاب برحسب t را برای مرحله‌ی شتاب‌گیری عمل پرتاب در یک وضعیت نوعی نشان می‌دهد. شتاب‌های نشان داده‌شده عبارت‌اند از $a_1 = 100\,m/s^2$ و $a_2 = 400\,m/s^2$. تندی رو به بیرون زبان در پایان مرحله‌ی شتاب‌گیری چقدر است؟



شکل ۲-۳۹ مسئله‌ی ۶۸.

** ۶۹ در شکل ۲-۴۰، نمودار سرعت ـ زمان یک دونده نشان داده شده است. دونده در مدت $16\,s$ چه مسافتی را می‌پیماید؟ مقیاس محور قائم شکل با مقدار $v_s = 8{,}0\,m/s$ مشخص شده است.



شکل ۲-۴۰ مسئله‌ی ۶۹.

*** ۷۰ دو ذره در راستای محور x حرکت می‌کنند. مکان ذره‌ی ۱ ازمعادله‌ی $x = 6{,}00t^2 + 3{,}00t + 2{,}00$ (برحسب متر و ثانیه) و شتاب ذره‌ی ۲ از معادله‌ی $a = -8{,}00t$ (برحسب متر بر مجذور ثانیه و ثانیه) به دست می‌آید. سرعت ذره‌ی ۲ در زمان $t = 0$ برابر با $20\,m/s$ است. سرعت این دو ذره در هنگامی که هم سرعت می‌شوند چیست؟

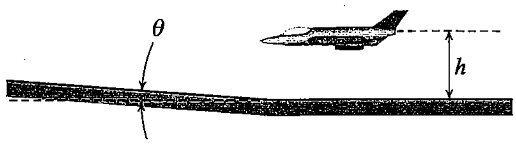
مسئله‌های بیشتر

۷۱ در یک بازی ویدئویی برنامه‌ریزی چنان است که یک نقطه در صفحه‌ی نمایش بنا به معادله‌ی $x = 9{,}00t - 0{,}750t^3$ حرکت می‌کند. در این معادله x فاصله برحسب سانتی‌متر است و از لبه‌ی سمت چپ صفحه‌ی نمایش اندازه‌گیری می‌شود و t زمان برحسب ثانیه است. وقتی این نقطه به یک لبه‌ی صفحه‌ی نمایش واقع در $x = 0$ یا $x = 15{,}0\,cm$ می‌رسد، t به طور لحظه‌ای صفر می‌شود و نقطه دوباره بنا به معادله‌ی $x(t)$ حرکت می‌کند. (الف) نقطه در چه زمانی پس از شروع حرکت به طور لحظه‌ای به حال سکون در می‌آید؟ (ب) به ازای چه مقداری از x این اتفاق می‌افتد؟ (پ) در این‌حالت شتاب نقطه (با توجه به جهت) چیست؟ (ت) نقطه درست پیش از رسیدن به حال سکون به راست‌سو حرکت می‌کند یا به چپ‌سو؟ (ث) درست پس از رسیدن به حال سکون لحظه‌ای چطور؟ (ج) در چه زمان $t > 0$، نقطه برای نخستین بار به لبه‌ی صفحه‌ی نمایش می‌رسد؟

۷۲ از لبه‌ی پشت بام یک ساختمان بلند سنگی به طور قائم به بالاسو پرتاب می‌شود. سنگ $1{,}60\,s$ پس از پرتاب به ارتفاع بیشینه‌ی خود نسبت به لبه‌ی پشت بام می‌رسد. سپس، این سنگ $6{,}00\,s$ پس از پرتاب با عبور از لبه‌ی ساختمان در هنگام سقوط به پایین‌سو، به زمین می‌رسد. این سنگ برحسب یکاهای SI: (الف) با چه سرعتی به بالاسو پرتاب شده است، (ب) به چه ارتفاع بیشینه‌ای در بالای ساختمان می‌رسد؟ (پ) ارتفاع ساختمان چقدر است؟

۷۳ در لحظه‌ای که چراغ راهنمایی سبز می‌شود، خودرویی با شتاب ثابت $a = 2{,}2\,m/s^2$ به راه می‌افتد. در همان لحظه کامیونی که با تندی ثابت $9{,}5\,m/s$ در حرکت است، به خودرو می‌رسد و از آن پیشی می‌گیرد. (الف) خودرو در چه فاصله‌ای از چراغ راهنمایی از کامیون جلو می‌افتد؟ (ب) تندی خودرو در آن لحظه چیست؟

۷۴ خلبانی با تندی ۱۳۰۰km/h در ارتفاع $h =$ ۳۵m به موازات یک دشت که در ابتدا افقی است در حال پرواز کردن است. اما در زمان $t =$ ۰ خلبان شروع به پرواز در بالای یک زمین شیب‌دار به سمت بالا با زاویه‌ی شیب $\theta =$ ۴٫۳° می‌کند (شکل ۲-۴۱). اگر خلبان جهت پرواز خود را تغییر ندهد در چه زمان t هواپیما به زمین برخورد می‌کند؟

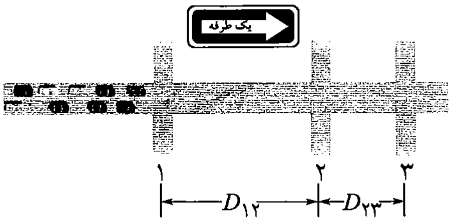


شکل ۲-۴۱ مسئله‌ی ۷۴.

۷۵ در متوقف کردن یک خودرو به هنگام لزوم، برای شروع به ترمز کردن ابتدا زمان واکنش معینی صرف می‌شود و سپس حرکت خودرو با آهنگ ثابتی کُند می‌شود. فرض کنید در موقع ترمز کردن، مسافت کل پیموده شده توسط خودرو شما در هر دو مرحله ۵۶٫۷m برای تندی آغازی ۸۰٫۵km/h، و ۲۴٫۴m برای تندی آغازی ۴۸٫۳km/h باشد. (الف) زمان واکنش شما چقدر است؟ (ب) بزرگی شتاب خودرو چیست؟

۷۶ شکل ۲-۴۲، بخشی از یک خیابان را نشان می‌دهد، که در آن جریان ترافیک باید چنان کنترل شود که یک ***دسته*** از خودروها بتوانند درطول آن به‌راحتی حرکت کنند. فرض کنید خودروهای سردسته در لحظه‌ای به تقاطع ۲ نزدیک شده‌اند، که چراغ سبز آن هنگامی که تا تقاطع به اندازه‌ی d فاصله دارند، روشن شده است. آن‌ها با تندی معین v_P (تندی مجاز بیشینه) به حرکت خود ادامه می‌دهند تا به تقاطع ۳ برسند و در فاصله‌ی d مانده به این تقاطع چراغ سبز آن هم روشن می‌شود. فاصله‌ی تقاطع‌ها از یکدیگر $D_{۲۳}$ و $D_{۱۲}$ است. (الف) زمان تأخیر سبز شدن چراغ تقاطع ۳ نسبت به چراغ تقاطع ۲ چقدر باید باشد تا دسته‌ی خودروها به‌طور یکنواخت و بدون توقف به‌حرکت ادامه دهند؟

اکنون، فرض کنید که دسته‌ی خودروها در پشت چراغ قرمز تقاطع ۱ متوقف مانده‌باشد. وقتی چراغ سبز می‌شود خودروهای سردسته زمان معین t_r را لازم دارند تا نسبت به عوض شدن رنگ چراغ واکنش نشان دهند و زمان بیشتری هم نیاز دارند تا با



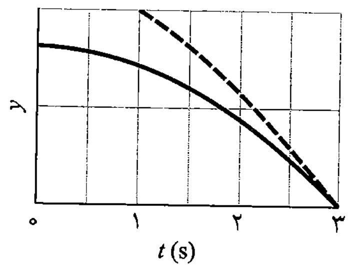
شکل ۲-۴۲ مسئله‌ی ۷۶.

شتاب a به تندی v_P برسند. (ب) اگر چراغ تقاطع ۲ هنگامی سبز شود که خودروهای سردسته به فاصله‌ی d از تقاطع می‌رسند، چه مدت پس از سبز شدن چراغ تقاطع ۱، چراغ تقاطع ۲ باید سبز شود؟

۷۷ تندی یک خودرو گرم‌تاز در مدت ۵٫۴s می‌تواند از صفر به ۶۰km/h برسد. (الف) در این مدت شتاب متوسط خودرو برحسب m/s² چقدر است؟ (ب) اگر خودرو دارای شتاب ثابت باشد، در مدت ۵٫۴s چه مسافتی را می‌پیماید؟ (پ) اگر شتاب خودرو در همان مقدار به دست آمده در قسمت (الف) ثابت بماند، چه مدت طول می‌کشد تا خودرو از حال سکون بتواند مسافت ۰٫۲۵km را بپیماید؟

۷۸ یک قطار قرمز رنگ با تندی ۷۲km/h و یک قطار سبز رنگ با تندی ۱۴۴km/h در یک مسیر راست و افقی به سوی هم حرکت می‌کنند. وقتی که فاصله‌ی قطارها به ۹۵۰m می‌رسد، راننده‌های آن‌ها هم‌زمان قطارهای یکدیگر را می‌بینند و ترمز می‌کنند. اگر این ترمز کردن، حرکت هر یک از قطارها را با شتاب ۱٫۰m/s² کُند بکند، آیا برخوردی رخ می‌دهد؟ اگر پاسخ مثبت است، تندی قطار قرمز رنگ و تندی قطار سبز رنگ در لحظه‌ی برخورد چقدر است؟ اگر پاسخ منفی است، فاصله‌ی میان قطارها در لحظه‌ی توقف چقدر است؟

۷۹ در زمان $t =$ ۰، صخره‌نوردی به‌طور تصادفی میخ صخره‌نوردی خود را رها می‌کند و میخ از آن نقطه‌ی مرتفع به دره‌ی زیر پای صخره‌نورد به طور آزاد سقوط می‌کند. اندکی بعد، دوست این صخره‌نورد که ۱۰m بالاتر از او واقع شده است، میخی را به پایین‌سو پرتاب می‌کند. نمودارهای مکان‌های y برحسب t این میخ‌ها در حین سقوط در شکل ۲-۴۳ رسم شده‌اند. میخ دوم با چه تندی‌ای به پایین انداخته شده است؟

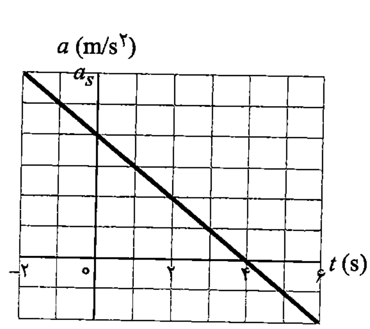


شکل ۲-۴۳ مسئله‌ی ۷۹.

۸۰ قطاری از حال سکون به راه می‌افتد و با شتاب ثابت حرکت می‌کند. تندی این قطار در یک زمان $۳۰ \mathrm{m/s}$ است و پس از پیمودن مسافت $۱۶۰\mathrm{m}$ به $۵۰\mathrm{m/s}$ می‌رسد. مطلوب است محاسبه‌ی (الف) شتاب، (ب) زمان لازم برای پیمودن مسافت $۱۶۰\mathrm{m}$، (پ) زمان لازم برای رسیدن به تندی $۳۰\mathrm{m/s}$، و (ت) مسافت پیموده شده از حال سکون تا زمانی که تندی قطار به $۳۰\mathrm{m/s}$ می‌رسد. (ث) نمودارهای x برحسب t و v برحسب t را با شروع کردن حرکت قطار از حال سکون رسم کنید.

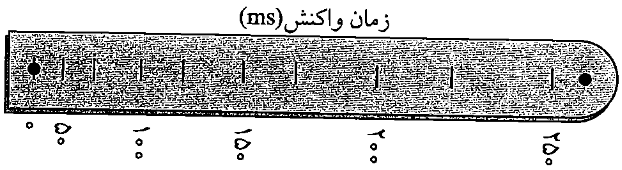
۸۱ معادله‌ی شتاب حرکت یک ذره در راستای محور x به‌صورت $a = ۵٫۰t$ است، که در آن t برحسب ثانیه و a برحسب متر بر مجذور ثانیه است. سرعت ذره در زمان $t = ۲٫۰\mathrm{s}$ برابر با $+۱۷\mathrm{m/s}$ است. سرعت آن در زمان $t = ۴٫۰\mathrm{s}$ چیست؟

۸۲ شکل ۲-۴۴ نمودار شتاب a برحسب زمان t را برای یک ذره‌ی در حال حرکت در راستای محور x نشان می‌دهد. مقیاس محور a در شکل با مقدار $a_s = ۱۲٫۰\mathrm{m/s^۲}$ مشخص شده است. سرعت ذره در زمان $t = -۲٫۰\mathrm{s}$، برابر با $۷٫۰\mathrm{m/s}$ است. سرعت آن در زمان $t = ۶٫۰\mathrm{s}$ چیست؟



شکل ۲-۴۴ مسئله‌ی ۸۲.

۸۳ شکل ۲-۴۵، وسیله‌ی ساده‌ای را برای اندازه‌گیری زمان واکنش نشان می‌دهد. این وسیله شامل یک نوار مقوایی مدرج و دو خال سیاه بزرگ است. فرض کنید دوست شما نوار را ***به طور قائم*** با دو انگشت شست و اشاره‌ی خود در محل خال سمت راست در شکل ۲-۴۵ می‌گیرد. سپس، در حالی که دو انگشت شست و اشاره‌ی خود را بدون تماس با نوار در مقابل خال دیگر (خال سمت چپ در شکل ۲-۴۵) نگه داشته‌اید، دوستتان نوار را رها می‌کند و شما باید سعی کنید به محض مشاهده‌ی سقوط نوار، آن را فوراً با دو انگشت خود بگیرید. عدد محل گرفتن نوار، زمان واکنش شما را نشان می‌دهد. (الف) در چه فاصله‌ای از خال پایینی باید نشانه‌ی $۵۰٫۰\mathrm{ms}$ را قرار داد؟ نشانه‌های (ب) ۱۰۰، (پ) ۱۵۰، (ت) ۲۰۰ و (ث) $۲۵۰\mathrm{ms}$ باید در چه فاصله‌هایی بالاتر قرار داشته باشند؟ (به عنوان مثال، آیا فاصله‌ی نشانه‌ی $۱۰۰\mathrm{ms}$ تا خال سیاه باید دو برابر فاصله‌ی نشانه‌ی $۵۰\mathrm{ms}$ تا آن خال باشد؟ آیا می‌توانید رابطه‌ای میان پاسخ‌ها پیدا کنید؟)



شکل ۲-۴۵ مسئله‌ی ۸۳.

۸۴ سورتمه‌ای مجهز به موشک، که در یک مسیر مستقیم و افقی حرکت می‌کند، برای پژوهش کردن درباره‌ی اثرهای شتاب‌های زیاد روی انسان به کار می‌رود. یکی از این سورتمه‌ها می‌تواند در مدت $۱٫۸\mathrm{s}$ از حال سکون به تندی $۱۶۰۰\mathrm{km/h}$ برسد. مطلوب است تعیین (الف) شتاب سورتمه (که ثابت فرض می‌شود) برحسب g و (ب) مسافت پیموده شده.

۸۵ یک گاری معدن با تندی $۲۰\mathrm{km/h}$ به بالای تپه‌ای کشیده می‌شود و سپس با تندی $۳۵\mathrm{km/h}$ به پایین تپه و نقطه‌ی شروع حرکت، برگشت داده می‌شود (زمان لازم برای تغییر دادن جهت حرکت گاری در بالای تپه قابل چشم‌پوشی است). تندی متوسط گاری در پیمودن این مسافت از نقطه‌ی شروع حرکت تا برگشت به نقطه‌ی شروع حرکت، چیست؟

۸۶ موتورسواری که در راستای محور x به‌سوی خاور حرکت می‌کند درزمان‌های $۰ \le t \le ۶/۰\,\mathrm{s}$ دارای شتاب $a = (۶/۱ - ۱/۲t)\,\mathrm{m/s^۲}$ است. در زمان $t = ۰$ سرعت و مکان موتورسوار $۲/۷\,\mathrm{m/s}$ و $۷/۳\,\mathrm{m}$ است. (الف) تندی بیشینه‌ای که موتورسوار به آن می‌رسد چقدر است؟ (ب) کل مسافتی که موتورسوار در بازه‌ی زمانی میان $t = ۰$ و $t = ۶/۰\,\mathrm{s}$ می‌پیماید، چیست؟

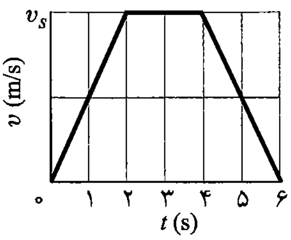
۸۷ هنگامی که تندی مجاز بیشینه در بزرگ‌راه نیویورک از $۵۵\,\mathrm{mi/h}$ به $۶۵\,\mathrm{mi/h}$ افزایش می‌یابد، درمدت زمان مسافرت خودرویی که مسافت $۷۰۰\,\mathrm{km}$ میان ورودی بافالو[1] و خروجی نیویورک سیتی[2] را با تندی مجاز بیشینه می‌پیماید چقدر صرفه‌جویی می‌شود؟

۸۸ خودرویی در حال حرکت کردن با شتاب ثابت، مسافت میان دو نقطه به فاصله‌ی $۶۰/۰\,\mathrm{m}$ را در مدت $۶/۰۰\,\mathrm{s}$ می‌پیماید. تندی خودرو در هنگام عبور از نقطه‌ی دوم $۱۵/۰\,\mathrm{m/s}$ بوده است. (الف) تندی خودرو در هنگام عبور از نقطه‌ی اول چیست؟ (ب) بزرگی شتاب خودرو چقدر بوده است؟ (پ) خودرو در چه فاصله‌ای پیش از نقطه‌ی اول در حال سکون بوده است؟ (ت) نمودارهای x برحسب t و v برحسب t مربوط به خودرو را از حال سکون $(t = ۰)$ رسم کنید.

۸۹ یک شعبده‌باز در نمایش خود، به طور معمول، توپ‌هایی را به‌طور قائم تا ارتفاع H پرتاب می‌کند. اگر توپ‌ها قرار باشد دو برابر مدت بیشتر در هوا بمانند تا چه ارتفاعی باید پرتاب شوند؟

۹۰ ذره‌ای در زمان $t = ۰$ از مبدأ در جهت مثبت محور x شروع به حرکت می‌کند. در شکل ۲-۴۶، نمودار سرعت ذره به‌صورت تابعی از زمان نشان داده شده است؛ مقیاس محور v شکل با مقدار $v_s = ۴/۰\,\mathrm{m/s}$ مشخص شده است. (الف) مختصه‌ی مکان ذره در زمان $t = ۵/۰\,\mathrm{s}$ چیست؟ (ب) سرعت ذره در زمان $t = ۵/۰\,\mathrm{s}$ چیست؟ (پ) شتاب ذره در زمان $t = ۵/۰\,\mathrm{s}$ چقدر است؟ (ت) سرعت متوسط ذره در بین زمان‌های $t = ۱/۰\,\mathrm{s}$ و $t = ۵/۰\,\mathrm{s}$ چیست؟ (ث) شتاب متوسط ذره در بین زمان‌های $t = ۱/۰\,\mathrm{s}$ تا $t = ۵/۰\,\mathrm{s}$ چقدر است؟

1. Buffalo 2. New York City



شکل ۲-۴۶ مسئله‌ی ۹۰.

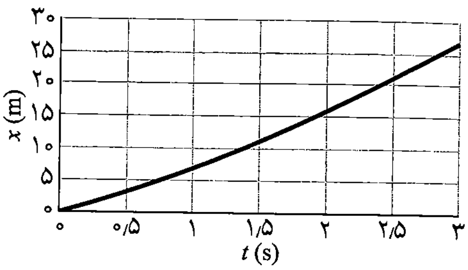
۹۱ سنگی را از بالای پرتگاهی به ارتفاع $۱۰۰\,\mathrm{m}$ رها می‌کنیم. چه مدت طول می‌کشد تا سنگ (الف) $۵۰\,\mathrm{m}$ اول و (ب) $۵۰\,\mathrm{m}$ دوم، را بپیماید؟

۹۲ فاصله‌ی دو ایستگاه قطار زیرزمینی $۱۱۰۰\,\mathrm{m}$ است. اگر یک قطار نصف این مسافت را از حال سکون با شتاب تند کننده‌ی $+۱/۲\,\mathrm{m/s^۲}$ و نصف دیگر مسافت را با شتاب کُند کننده‌ی $-۱/۲\,\mathrm{m/s^۲}$ بپیماید، (الف) مدت زمان پیمودن این مسافت و (ب) تندی بیشینه‌ی قطار چقدر است؟ (پ) نمودارهای x، v و a برحسب t را برای پیمودن این مسافت رسم کنید.

۹۳ سنگی به طور قائم به بالاسو پرتاب می‌شود. این سنگ در سر راه خود به بالاسو با تندی v از نقطه‌ی A و با تندی $\frac{۱}{۲}v$ از نقطه‌ی B به اندازه‌ی $۳/۰۰\,\mathrm{m}$ بالاتر از نقطه‌ی A، می‌گذرد. مطلوب است محاسبه‌ی (الف) تندی v و (ب) ارتفاع بیشینه‌ای که سنگ در بالاتر از نقطه‌ی B به آن می‌رسد.

۹۴ سنگی از بالای ساختمانی به ارتفاع $۶۰\,\mathrm{m}$ (از حال سکون) رها می‌شود. این سنگ $۱/۲\,\mathrm{s}$ پیش از برخورد به زمین در چه فاصله‌ای از زمین قرار دارد؟

۹۵ یک قایق یخ پیما با سرعت ثابت به‌سوی خاور پیش می‌رود. در این لحظه وزش ناگهانی باد سبب می‌شود قایق به مدت $۳/۰\,\mathrm{s}$ با شتاب ثابت به سوی خاور حرکت کند. در شکل ۲-۴۷، نمودار x برحسب t نشان داده شده است، که در آن $t = ۰$ زمان شروع وزش باد و جهت مثبت محور x به‌سوی خاور است. (الف) شتاب قایق در بازه‌ی زمانی $۳/۰\,\mathrm{s}$ چقدر است؟ (ب) سرعت قایق در پایان این بازه‌ی زمانی $۳/۰\,\mathrm{s}$ چیست؟ (پ) اگر شتاب به‌مدت $۳/۰\,\mathrm{s}$ دیگر ثابت بماند قایق در این بازه‌ی زمانی اضافی $۳/۰\,\mathrm{s}$ چه مسافتی را می‌پیماید؟



شکل ۲-۴۷ مسئله‌ی ۹۵.

۹۶ از روی یک تخته‌ی شیرجه‌ی واقع در ارتفاع ۵/۲۰ متری سطح آب یک دریاچه گلوله‌ای سربی انداخته می‌شود. این گلوله با سرعت معینی به آب برخورد می‌کند، با همان سرعت که ثابت است، در آب دریاچه فرو می‌رود و ۴/۸۰s پس از رها شدن، به ته دریاچه می‌رسد. (الف) عمق دریاچه چقدر است؟ (ب) بزرگی و (پ) جهت (به بالاسو یا به پایین سو) سرعت متوسط گلوله در کل زمان سقوط چیست؟ فرض کنید تمام آب دریاچه را خالی می‌کنیم. اکنون، گلوله از تخته‌ی شیرجه پرتاب می‌شود و پس از ۴/۸۰s به ته دریاچه می‌رسد. (ت) بزرگی و (ث) جهت سرعت آغازی گلوله چیست؟

۹۷ تک کابل نگهدارنده‌ی یک آسانسور ساختمانی بی‌سرنشین در حالی پاره می‌شود که آسانسور در بالای ساختمانی به ارتفاع ۱۲۰m متوقف است. (الف) آسانسور با چه تندی‌ای به زمین برخورد می‌کند؟ (ب) سقوط این آسانسور چه مدت طول می‌کشد؟ (پ) تندی آسانسور در هنگام عبور از نقطه‌ی نیمه راه مسیرش چقدر است؟ (ت) آسانسور پس از چه مدت از آغاز سقوط، از این نقطه عبور می‌کند؟

۹۸ دو سنگ از حالت سکون به فاصله‌ی زمانی ۱/۰ ثانیه از یک ارتفاع رها می‌شوند. چه مدت پس از رها شدن سنگ اول، فاصله‌ی سنگ‌ها از هم ۱۰m خواهد بود؟

۹۹ گلوله‌ای از بالای ساختمانی به ارتفاع ۳۶/۶m در راستای قائم به پایین‌سو پرتاب می‌شود. گلوله ۲/۰۰ ثانیه پس از پرتاب شدن، از لبه‌ی بالای پنجره‌ای می‌گذرد که در ارتفاع ۱۲/۲ متری زمین قرار دارد. تندی گلوله هنگام گذشتن از لبه‌ی بالای پنجره چقدر است؟

۱۰۰ چتربازی پس از بیرون پریدن از هواپیما به اندازه‌ی ۵۰m به‌طور آزاد سقوط می‌کند. سپس چتر، باز می‌شود و چترباز با شتاب کُندکننده‌ی ۲/۰m/s^2 پایین می‌آید و با تندی ۳/۰m/s به زمین می‌رسد. (الف) چترباز چه مدت در هوا بوده است؟ (ب) چترباز در چه ارتفاعی از هواپیما به بیرون پریده است؟

۱۰۱ گلوله‌ای از ارتفاع h با ***تندی آغازی*** v_0 به طور قائم ***به پایین‌سو*** پرتاب می‌شود. (الف) تندی آن درست در لحظه‌ی برخورد به زمین چیست؟ (ب) چه مدت طول می‌کشد تا گلوله به زمین برسد؟ اگر گلوله از همان ارتفاع و با همان تندی آغازی ***به بالاسو*** پرتاب شود، (پ) پاسخ قسمت (الف)، و (ت) پاسخ قسمت (ب)، چه خواهد بود؟ پیش از حل کردن هر معادله‌ای، معین کنید پاسخ‌های قسمت‌های (پ) و (ت) نسبت به پاسخ‌های قسمت‌های (الف) و (ب) بزرگ‌تر، کوچک‌تر یا مساوی‌اند.

۱۰۲ ورزشی که در آن توپ از هر ورزش دیگری سریع‌تر حرکت می‌کند، جای آلای[1] نام دارد، که در آن تندی توپ به ۳۰۳km/h رسیده است. اگر یک بازیکن حرفه‌ای جای آلای با توپی با این تندی مواجه شود و ناخواسته چشم به هم بزند به مدت ۱۰۰ms جایی را نخواهد دید. در این مدت یک چشم به هم زدن، توپ چه مسافتی را می‌پیماید؟

۱۰۳ اگر گوی انداز بیس بال یک گوی تند پرتاب را با تندی افقی ۱۶۰km/h پرتاب کند، چه مدت طول می‌کشد تا گوی به گوشه‌ی گوی زن، واقع در فاصله‌ی ۱۸/۴m، برسد؟

۱۰۴ پروتونی در راستای محور x بر طبق معادله‌ی $x = ۵۰t + ۱۰t^2$، که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است، حرکت می‌کند. مطلوب است محاسبه‌ی (الف) سرعت متوسط پروتون در مدت ۳/۰ ثانیه‌ی اول حرکت، (ب) سرعت لحظه‌ای پروتون در زمان $t = ۳/۰$s و (پ) شتاب لحظه‌ای پروتون در زمان $t = ۳/۰$s. (ت) نمودار x برحسب t را رسم کنید و نشان دهید که چگونه می‌توان پاسخ قسمت (الف) را از روی نمودار پیدا کرد. (ث) پاسخ قسمت (ب) را بر روی نمودار مشخص کنید. (ج) نمودار v برحسب t را رسم کنید و پاسخ قسمت (پ) را بر روی آن مشخص کنید.

---
1. jai alai

۱۰۵ موتور سیکلتی در حال حرکت با تندی $30 m/s$ است. در این لحظه موتورسوار ترمز می‌کند و به موتور سیکلت یک شتاب کند کننده‌ی ثابت می‌دهد. در بازه‌ی زمانی $3.0 s$ پس از ترمز کردن، تندی موتور سیکلت به $15 m/s$ کاهش می‌یابد. از لحظه‌ی ترمز کردن تا لحظه‌ی توقف، موتور سیکلت چه مسافتی را می‌پیماید؟

۱۰۶ یک قرص شافل بورد[1] از حال سکون تا تندی $6.0 m/s$ در طی مسافت $1.8 m$ توسط بازیکنی که از چوگان استفاده می‌کند، با آهنگ ثابت شتاب می‌گیرد. در این نقطه قرص تماس خود با چوگان را از دست می‌دهد و با آهنگ ثابت $2.5 m/s^2$ کُند شده و متوقف می‌شود. (الف) از لحظه‌ی شتاب گرفتن قرص تا متوقف شدن آن چه مدت طول می‌کشد؟ (ب) مسافت کل پیموده شده توسط قرص چیست؟

۱۰۷ سر یک مار زنگی در هنگام حمله کردن به یک قربانی می‌تواند با شتاب $50 m/s^2$ حرکت کند. اگر یک خودرو بتواند با این شتاب حرکت کند، در چه مدت از حال سکون به تندی $100 km/h$ می‌رسد؟

۱۰۸ یک جمبوجت در روی باند پرواز فرودگاه برای بلند شدن به تندی $360 km/h$ می‌رسد. کمترین شتاب ثابت لازم برای بلند شدن جمبوجت از روی باندی به طول $1.80 km$ چیست؟

۱۰۹ راننده‌ای تندی خودرو خود را در مدت $0.50 min$ با آهنگ ثابت از $25 km/h$ به $55 km/h$ افزایش می‌دهد. دوچرخه سواری تندی دوچرخه‌ی خود را در مدت $0.50 min$ با آهنگ ثابت از حال سکون به $30 km/h$ می‌رساند. بزرگی‌های (الف) شتاب راننده‌ی خودرو و (ب) شتاب دوچرخه سوار، چیست؟

۱۱۰ مدت زمان متوسط یک چشم برهم زدن در حدود $100 ms$ است. اگر سرعت متوسط هواپیمای شکاری میگ ـ ۲۵ «فاکس بَت[2]» $3400 km/h$ باشد، هواپیما در مدت یک چشم بر هم زدن خلبان چه مسافتی را می‌پیماید؟

۱۱۱ تندی بیشینه‌ی یک دونده‌ی دو سرعت $11.0 m/s$ است. اگر دونده از حال سکون و با آهنگ ثابت شتاب بگیرد، می‌تواند در طی مسافت $12.0 m$ به این تندی بیشینه برسد. او سپس، با این تندی بیشینه می‌تواند باقی مانده‌ی مسابقه‌ی $100 m$ را بدود. (الف) دونده مسافت $100 m$ مسابقه را در چه مدت می‌دود؟ (ب) او برای بهبود بخشیدن زمان مسابقه، می‌کوشد مسافت لازم تا رسیدن به تندی بیشینه را کاهش دهد. اگر او بخواهد در مسابقه به زمان $10.0 s$ دست پیدا کند، این مسافت چقدر باید باشد؟

۱۱۲ تندی گلوله‌ای هنگام خارج شدن از لوله‌ی تفنگ به طول $1.20 m$ برابر با $640 m/s$ اندازه‌گیری شده است. با فرض ثابت بودن شتاب، مدت زمانی را که گلوله پس از شلیک شدن در درون لوله سپری می‌کند، پیدا کنید.

۱۱۳ مرکز پژوهشی گلن[1] در سازمان ملی هوانوردی و فضایی (NASA[2]) (امریکا) دارای یک برج سقوط به ارتفاع $145 m$ برای آزمایش‌های مربوط به گرانش صفر (بی‌وزنی) است. این برج قائم خالی از هوا است و علاوه بر امکانات دیگر شامل کره‌ای به قطر یک متر حاوی وسایل آزمایشگاهی است، که می‌توان آن را از بالای برج به پایین انداخت. (الف) کره پس از رها شدن چه مدت در حال سقوط آزاد خواهد بود؟ (ب) تندی آن درست در لحظه‌ی برخورد به ضربه‌گیر واقع در پایین برج چقدر است؟ (پ) وقتی کره به ضربه‌گیر برخورد می‌کند، یک شتاب کُند کننده‌ی $25 g$ به آن وارد می‌شود تا تندی‌اش به صفر برسد. کره با این شتاب کُند کننده چه مسافتی را می‌پیماید؟

۱۱۴ یک خودرو را که در اتوبان با تندی $200 km/h$ حرکت می‌کند، می‌توان ترمز کرد تا در طی مسافت $170 m$ متوقف شود. با فرض ثابت بودن شتاب خودرو، بزرگی آن را برحسب (الف) یکاهای SI و (ب) g، پیدا کنید. (پ) زمان لازم T_b، برای ترمز کردن خودرو چیست؟ ***زمان واکنش*** راننده T_r، مدتی است که لازم است تا راننده با دیدن وضعیت اضطراری پایش را تا پدال ترمز حرکت دهد، و شروع به ترمز کردن بکند. اگر این زمان $T_r = 400 ms$ باشد، در آن صورت، (ت) T_b برحسب T_r چیست و (ث) آیا بیشترین بخش زمان کامل مورد نیاز برای متوقف کردن خودرو، صرف واکنش راننده می‌شود یا

1. shuffleboard 2. MiG-25 "Foxbat"

1. Glenn
2. National Aeronautics and Spce Administration (NASA)

صرف ترمز کردن؟ شیشه‌های عینک‌های تیره موجب تأخیر در رسیدن علائم بینایی از چشم‌ها به کورتکس بینایی در مغز می‌شوند و T_r را افزایش می‌دهند. (ج) در حالت فرین که در آن T_r به اندازه‌ی $100\,ms$ افزایش می‌یابد، خودرو چه مسافت بیشتری را در مدت زمان واکنش راننده می‌پیماید؟

۱۱۵ در سال ۱۸۸۹/۱۲۶۸ در جوبولپور[1] هند، در یک مسابقه‌ی طناب کشی، گروه برنده پس از ۲ ساعت و ۴۱ دقیقه توانست مرکز طناب را به اندازه‌ی $3/7\,m$ جابه‌جا کند. بزرگی سرعت متوسط نقطه‌ی مرکزی طناب برحسب سانتی‌متر بر دقیقه چقدر بوده است؟

۱۱۶ موضوع بسیار مهم در بررسی سانحه‌ی تصادم هواپیما توسط هیئت ایمنی ترابری ملی امریکا[2]، داده‌های ذخیره شده در دستگاه ثبت داده‌های پرواز هواپیماست، که معمولاً «جعبه‌ی سیاه» نامیده می‌شود، درحالی که این جعبه نارنجی رنگ و دارای نوار بازتابگر است. این دستگاه ثبت کننده به گونه‌ای ساخته شده است که در هنگام تصادم با شتاب متوسط $3400g$ در بازه‌ی زمانی $6/50\,ms$ مقاومت می‌کند. در چنین تصادمی، اگر تندی دستگاه ثبت کننده و هواپیما در انتهای این بازه‌ی زمانی صفر باشد، تندی آن در آغاز این بازه‌ی زمانی چقدر است؟

۱۱۷ جورج میگان[3] بریتانیایی از ۲۶ ژانویه‌ی سال ۱۹۷۷ تا ۱۸ سپتامبر سال ۱۹۸۳، از یوشوایا[4]، واقع در نوک جنوبی امریکای جنوبی تا خلیج پرودو[5] در آلاسکا به طول $30600\,km$ را با پای پیاده طی کرد. بزرگی سرعت متوسط او در این دوره‌ی زمانی چند متر بر ثانیه بوده است؟

۱۱۸ بال‌های سنگ مگس حرکت نمی‌کنند، و در نتیجه، این حشره نمی‌تواند پرواز کند اما حشره وقتی بر روی سطح آب قرار می‌گیرد، با بلند کردن بال‌هایش می‌تواند با نسیم حرکت کند. فرض کنید مدت زمان حرکت کردن این حشره با تندی ثابت در طول یک مسیر مستقیم را اندازه می‌گیرید. وقتی بال‌های حشره مانند بادبان عمل می‌کنند مدت زمان این حرکت $7/1\,s$ و وقتی بال‌هایش روی شکمش تا می‌شوند، مدت زمان حرکت $25/0\,s$ است. (الف) نسبت تندی حرکت با بادبان v_s، به تندی حرکت بی‌بادبان v_{ns}، چیست؟ (ب) اختلاف زمان حرکت حشره در مسیری به طول $2/0\,m$ اول با بادبان و بی‌بادبان، برحسب v_s چیست؟

۱۱۹ مکان ذره‌ای، که در راستای محور y حرکت می‌کند، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$y = (2/0\,\text{cm})\sin(\pi t / 4)$$

در این رابطه t برحسب ثانیه و y برحسب سانتی‌متر است. (الف) سرعت متوسط ذره در بین زمان‌های $t = 0$ و $t = 2/0\,s$ چیست؟ (ب) سرعت لحظه‌ای ذره در زمان‌های $t = 0, 1/0\,s, 2/0\,s$ چیست؟ (پ) شتاب متوسط ذره در بین زمان‌های $t = 0$ و $t = 2/0\,s$ چقدر است؟ (ت) شتاب لحظه‌ای ذره در زمان‌های $t = 0, 1/0\,s, 2/0\,s$ چیست؟

1. Jubbulpore
2. U.S National Transportation Safety Board
3. George Meegan 4. Ushuaia 5. Prudhoe

ب

فصل ۳

بردارها

۳-۱ بردارها و مؤلفه‌های آن‌ها

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۳-۱ بردارها را با رسم کردن‌شان به صورت سَر ـ به ـ دُم و به کار بردن قانون‌های جابه‌جایی و شرکت‌پذیری، با هم جمع کنید.

۳-۲ یک بردار را از بردار دیگر تفریق کنید.

۳-۳ مؤلفه‌های یک بردار را در یک دستگاه مختصات معین حساب کنید و آن‌ها را با ترسیم نشان دهید.

۳-۴ با داشتن مؤلفه‌های یک بردار، آن بردار را رسم کنید و بزرگی و سمت‌گیری‌اش را معین کنید.

۳-۵ زاویه‌ها را برحسب درجه و رادیان به یکدیگر تبدیل کنید.

نکته‌های کلیدی

● کمیت‌های نرده‌ای، مانند دما، فقط بزرگی دارند. آن‌ها با یک عدد و یک یکا (مثلاً، $10°C$) مشخص می‌شوند و از قاعده‌های حسابی و جبر معمولی پیروی می‌کنند. کمیت‌های برداری، مانند جابه‌جایی، هم بزرگی و هم جهت (مثلاً، $5m$، به سوی شمال)، هر دو، را دارند و از قاعده‌های جبر برداری پیروی می‌کنند.

● دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با رسم کردن‌شان با یک مقیاس مشترک و قرار دادن آن‌ها به صورت سر به دُم، می‌توان به طور هندسی با هم جمع کرد. برداری که دُم بردار اول را به سَر بردار دوم وصل می‌کند، مجموع برداری $\vec{s}$ است. برای تفریق کردن $\vec{b}$ از $\vec{a}$، جهت $\vec{b}$ را وارون کنید تا $-\vec{b}$ به دست آید؛ سپس $-\vec{b}$ را با $\vec{a}$ جمع کنید. جمع برداری جابه‌جایی‌پذیر است و از قانون شرکت‌پذیری پیروی می‌کند.

● مؤلفه‌های (نرده‌ای) a_x و a_y هر بردار دو بعدی $\vec{a}$ در راستای محورهای مختصات، از تصویر کردن سَر بردار $\vec{a}$ بر روی محورها و ترسیم خط‌های عمود بر محورها حاصل می‌شوند. این مؤلفه‌ها چنین به دست می‌آیند

$$a_y = a\sin\theta \quad \text{و} \quad a_x = a\cos\theta$$

که در آن θ زاویه‌ی میان جهت مثبت محور x و جهت $\vec{a}$ است. علامت جبری یک مؤلفه جهت آن را در راستای محور مربوط نشان می‌دهد. با داشتن مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$، می‌توان بزرگی و سمت‌گیری بردار $\vec{a}$ را چنین به دست آورد

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \quad \text{و} \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

فیزیک در این باره چه می‌گوید؟

فیزیک با کمیت‌های خیلی زیادی سر و کار دارد که هم دارای اندازه و هم دارای جهت‌اند. برای توصیف این کمیت‌ها زبان ریاضی ویژه‌ای، به نام زبان بردارها، مورد نیاز است. این زبان را در مهندسی، در علوم دیگر، و حتی در گفت و گوهای روزمره هم به کار می‌برند. وقتی برای نشانی دادن به کسی می‌گوییم «پنج تقاطع این خیابان را ردکن و سپس بپیچ به سمت چپ»، از زبان بردارها استفاده کرده‌ایم. در واقع، هر نوع جهت‌گیری یا هدایتی مبتنی بر بردارهاست، اما در فیزیک و مهندسی از دیدگاه‌های ویژه‌ای هم بردارها مورد نیازند تا پدیده‌های مربوط به دوران و نیروهای مغناطیسی توضیح داده شوند؛ این پدیده‌ها را در فصل‌های بعد مورد بررسی قرار خواهیم داد. در این فصل، توجه خود را به زبان پایه‌ای بردارها معطوف می‌کنیم.

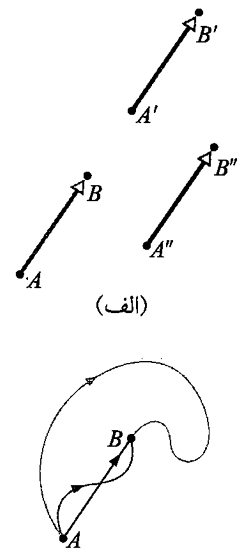
بردارها و نرده‌ای‌ها

ذره‌ی در حال حرکت در طول یک خط راست فقط در دو جهت می‌تواند حرکت کند. حرکت در یکی از این جهت‌ها را می‌توان مثبت و حرکت در جهت دیگر را می‌توان منفی در نظر گرفت. اما برای ذره‌ای که در سه بعد حرکت می‌کند، استفاده کردن از علامت‌های مثبت و منفی برای نشان دادن جهت حرکت کافی نیست. در چنین حالتی باید از ***بردار*** استفاده کرد.

بردار دارای بزرگی و جهت است و بردارها از قاعده‌های ترکیب (برداری) خاصی پیروی می‌کنند، که در این فصل به مطالعه‌ی آن‌ها خواهیم پرداخت. **کمیت برداری** کمیتی است که هم بزرگی و هم جهت دارد و بدین سبب می‌توان آن را با یک بردار نمایش داد. برخی کمیت‌های فیزیکی، از جمله جابه‌جایی، سرعت و شتاب کمیت‌هایی برداری‌اند. در این کتاب، چون با کمیت‌های برداری زیادی سر و کار خواهیم داشت آموختن قاعده‌های ترکیب برداری به درک مطلب در فصل‌های بعدی کمک بزرگی خواهد کرد.

همه‌ی کمیت‌های فیزیکی جهت ندارند. مثلاً، دما، فشار، انرژی، جرم و زمان جهت خاصی را در فضا «نشان نمی‌دهند». این نوع کمیت‌ها را **کمیت‌های نرده‌ای** (یا **کمیت‌های اسکالر**) می‌نامند و محاسبه‌های مربوط به آن‌ها با قاعده‌های جبری عادی انجام می‌شوند. هر تک مقدار همراه با علامت (مانند دمای $-40°F$) یک کمیت نرده‌ای را مشخص می‌کند.

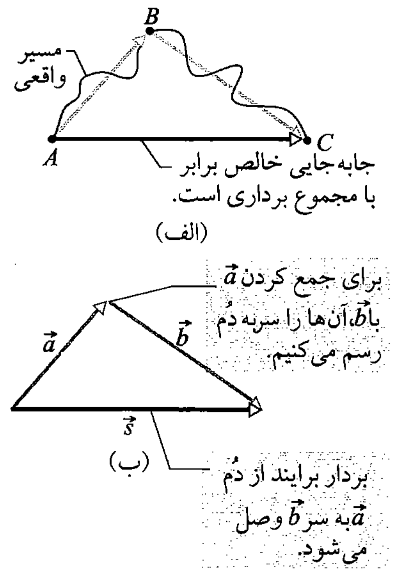
ساده‌ترین کمیت برداری، جابه‌جایی یا تغییر مکان است. برداری که جابه‌جایی را نشان می‌دهد، دارای نام مناسب **بردار جابه‌جایی** است. (به همین ترتیب، بردارهای سرعت و بردارهای شتاب را هم می‌توان نام برد). در شکل ۳-۱ الف، اگر ذره‌ای با رفتن از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B مکان خود را تغییر دهد، می‌گوییم ذره از A به B جابه‌جا شده است و بردار جابه‌جایی را با پیکانی که از A به سوی B است نشان می‌دهیم. این پیکان، بردار را به‌صورت ترسیمی مشخص می‌کند. در این کتاب برای متمایز کردن نمادهای برداری از پیکان‌های دیگر، سر پیکان بردار را به صورت مثلث رسم می‌کنیم.



شکل ۳-۱ (الف) در این شکل بزرگی و جهت هرسه پیکان یکسان است و از این رو جابه‌جایی یکسانی را نشان می‌دهند. (ب) سه مسیری که دو نقطه‌ی A و B را به هم وصل می‌کنند بردار جابه‌جایی‌شان یکی است.

در شکل ۳-۱ الف، پیکان‌های از A تا B، از A' تا B'، و از A'' تا B''، دارای بزرگی و جهت یکسان‌اند. بنابراین، این پیکان‌ها بردارهای جابه‌جایی یکسانی را نشان می‌دهند و **_تغییر مکان_** ذره یکسان است. یک بردار می‌تواند بدون تغییر مقدار جابه‌جا شود. **_به شرط آنکه_** بزرگی (طول) و جهت آن تغییر نکند.

بردار جابه‌جایی هیچ اطلاعی درباره‌ی مسیر واقعی ذره به دست نمی‌دهد. مثلاً، در شکل ۳-۱ ب، هر سه مسیری که نقطه‌های A و B را به هم وصل کرده‌اند، متناظر با همان بردارهای جابه‌جایی یکسان شکل ۳-۱ الف هستند. بردارهای جابه‌جایی فقط اثر کلی حرکت، و نه خود حرکت، را نشان می‌دهند.



شکل ۳-۲ (الف) AC جمع برداری بردارهای AB و BC است. (ب) نمودار نام‌گذاری شده‌ی همان بردارها.

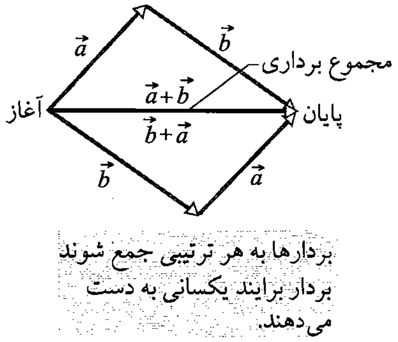
جمع کردن بردارها به روش هندسی

فرض کنید ذره‌ای مطابق نمودار برداری شکل ۳-۲ الف، از A تا B و سپس از B تا C حرکت می‌کند. جابه‌جایی کل این ذره را (بدون توجه به مسیر واقعی آن) می‌توان با دو بردار جابه‌جایی پی در پی AB و BC نشان داد. **_جابه‌جایی خالص_** این دو جابه‌جایی، یک تک جابه‌جایی از A تا C است. AC را **مجموع برداری** (یا **برایند**) بردارهای AB و BC می‌نامیم. این جمع، یک جمع جبری معمولی نیست.

در شکل ۳-۲ ب، بردارهای شکل ۳-۲ الف را دوباره رسم کرده‌ایم و آن‌ها را به صورتی نام‌گذاری کرده‌ایم که از این به بعد آن را انجام خواهیم داد. یعنی، اسم بردار را با نماد خمیده (ایتالیک) می‌نویسیم و دربالای آن پیکانی رسم می‌کنیم، مانند $\vec{a}$. اگر بخواهیم فقط بزرگی یک بردار (کمیتی که علامت یا جهت ندارد) را نشان دهیم، فقط از نماد خمیده، مانند a، b و s استفاده می‌کنیم. (یعنی کافی است حروف تحریری خمیده را به کار ببریم). حرفی که در بالای آن پیکانی وجود دارد همیشه می‌تواند دو خاصیت بردار، یعنی بزرگی و جهت، را نشان دهد.

رابطه‌ی میان سه بردار در شکل ۳-۲ ب را می‌توان به صورت **_معادله‌ی برداری_** زیر نمایش داد

$$\vec{s}=\vec{a}+\vec{b} \qquad (۳-۱)$$



شکل ۳-۳ دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با هر ترتیبی می‌توان باهم جمع کرد؛ معادله‌ی ۳-۲ را ببینید.

این معادله نشان می‌دهد که بردار $\vec{s}$، مجموع برداری بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. علامت + در معادله‌ی ۳-۱ و واژه‌های «مجموع» و «جمع»، برای بردارها معنی متفاوتی با کاربرد در جبر معمولی دارند، زیرا بردارها هم بزرگی و هم جهت دارند.

شکل ۳-۲ روش هندسی مربوط به جمع کردن بردارهای دو بعدی $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را نشان می‌دهد. (۱) روی کاغذ، بردار $\vec{a}$ را با یک مقیاس مناسب و تحت زاویه‌ای مناسب رسم می‌کنیم. (۲) بردار $\vec{b}$ را با همان مقیاس و با زاویه‌ای مناسب طوری رسم می‌کنیم که دُم آن به سَر بردار $\vec{a}$ وصل شود. (۳) مجموع برداری $\vec{s}$، برداری است که از دُم $\vec{a}$ به سَر $\vec{b}$ وصل می‌شود.

خاصیت‌ها. جمع برداری‌ای که به این صورت تعریف می‌شود، دو ویژگی مهم دارد. اول، ترتیب جمع کردن بردارها اهمیتی ندارد. جمع کردن $\vec{a}$ با $\vec{b}$ همان نتیجه‌ی جمع کردن $\vec{b}$ با $\vec{a}$ را به‌دست می‌دهد (شکل ۳-۳)؛ یعنی

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \qquad \text{(قانون جابه‌جایی)} \qquad (۲\text{-}۳)$$

دوم، هرگاه بیش از دو بردار داشته باشیم، برای جمع کردن می‌توانیم آن‌ها را به هر ترتیبی که بخواهیم گروه‌بندی کنیم. بنابراین، اگر بخواهیم بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را جمع کنیم می‌توانیم اول $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را جمع کنیم و سپس مجموع این دو را با $\vec{c}$ به دست آوریم. هم‌چنین، می‌توانیم اول $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را جمع و سپس آن مجموع را با $\vec{a}$ جمع کنیم. نتیجه‌ای که به دست می‌آوریم برای هر دو راه، مطابق شکل ۳-۴، یکسان است. یعنی

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \qquad \text{(قانون شرکت‌پذیری)} \qquad (۳\text{-}۳)$$

بردار $-\vec{b}$ برداری است که همان بزرگی بردار $\vec{b}$ را دارد اما جهتش مخالف است (شکل ۳-۵ را ببینید). با جمع کردن این دو بردار در شکل ۳-۵، داریم

$$\vec{b}+(-\vec{b})=0$$

بنابراین، جمع کردن $-\vec{b}$ همان اثر تفریق کردن $\vec{b}$ را دارد. از این خاصیت برای تعریف تفاضل دو بردار استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم، $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$، پس

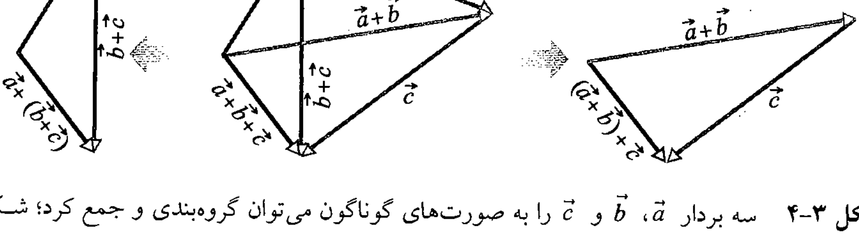
$$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}) \qquad \text{(تفریق برداری)} \qquad (۴\text{-}۳)$$

یعنی، برای تعیین بردار تفاضل $\vec{d}$، بردار $-\vec{b}$ را با بردار $\vec{a}$ جمع می‌کنیم. شکل ۳-۶ روش هندسی مربوط به انجام دادن این کار را نشان می‌دهد.

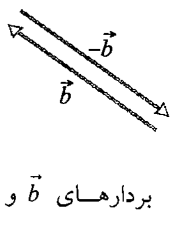
همان‌طور که در جبر معمولی عمل می‌کنیم، با عوض کردن علامت جمله‌ای که شامل یک نماد برداری است می‌توانیم آن را به طرف دیگر معادله‌ی برداری ببریم. مثلاً، اگر معادله‌ی ۳-۴ در دست باشد و بخواهیم آن را نسبت به $\vec{a}$ حل کنیم، می‌توانیم این معادله را به صورت زیر مرتب کنیم

$$\vec{a}=\vec{d}+\vec{b} \quad \text{یا} \quad \vec{d}+\vec{b}=\vec{a}$$

بردارها به هر ترتیبی جمع شوند بردار برایند یکسانی به دست می‌دهند.

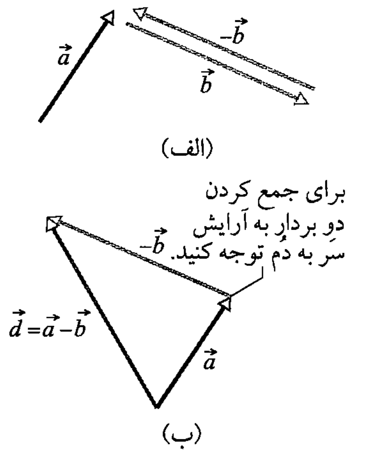


شکل ۳-۴ سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به صورت‌های گوناگون می‌توان گروه‌بندی و جمع کرد؛ شکل ۳-۳ را ببینید.



شکل ۳-۵ بردارهای $\vec{b}$ و $-\vec{b}$ بزرگی یکسان و جهت مخالف دارند.

یادآوری می‌شود که در اینجا، اگرچه از بردارهای جابه‌جایی استفاده شده است، قاعده‌های جمع و تفریق برای هر نوع برداری صادق‌اند، چه این بردارها معرف سرعت یا شتاب باشند و چه معرف کمیت‌های برداری دیگر. به هر حال، ما فقط بردارهای هم نوع را می‌توانیم با هم جمع کنیم. مثلاً، دو بردار جابه‌جایی یا دو بردار سرعت را می‌توان با هم جمع کرد. اما جمع‌کردن بردار جابه‌جایی با بردار سرعت بی‌معنی است و مانند این است که در حساب کمیت‌های نرده‌ای بخواهیم مقادیر ۲۱s و ۱۲m را با هم جمع کنیم.



شکل ۳-۶ (الف) نمودار بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $-\vec{b}$. (ب) برای تفریق کردن بردار $\vec{b}$ از بردار $\vec{a}$، بردار $-\vec{b}$ را با بردار $\vec{a}$ جمع می‌کنیم.

✔ خودآزمایی ۱

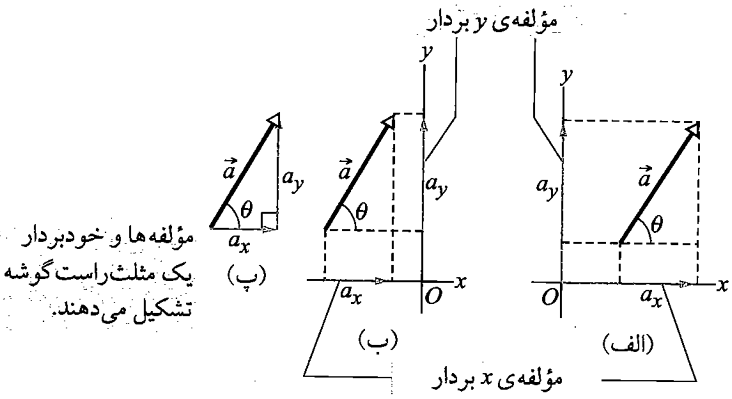
بزرگی‌های جابه‌جایی‌های $\vec{a}$ و $\vec{b}$، به ترتیب ۳m و ۴m هستند و $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. با در نظر گرفتن سمت‌گیری‌های مختلف $\vec{a}$ و $\vec{b}$، (الف) بیشینه‌ی بزرگی ممکن برای $\vec{c}$ و (ب) کمینه‌ی بزرگی ممکن برای $\vec{c}$، چیست؟

مؤلفه‌های بردارها

جمع کردن بردارها به روش هندسی، به طور معمول، خسته کننده است. در این مورد روش کارآمدتر و ساده‌تری وجود دارد که در آن از قاعده‌های جبری و قرار دادن بردارها در یک دستگاه مختصات راست‌گوشه‌ای استفاده می‌شود. محورهای x و y را، به طور معمول، مانند شکل ۳-۷ الف در صفحه‌ی کاغذ رسم می‌کنند و محور z از مبداء مختصات به برون‌سوی صفحه رسم می‌شود. فعلاً محور z را کنار می‌گذاریم و فقط بردارهای دوبعدی را بررسی می‌کنیم.

مؤلفه‌ی هر بردار، تصویر بردار بر روی یک محور است. مثلاً، در شکل ۳-۷ الف، a_x مؤلفه‌ی بردار $\vec{a}$ روی (یا در طول) محور x و a_y مؤلفه‌ی آن بردار در روی محور y است. برای پیدا کردن تصویر بردار بر روی یک محور دو خط از سَر و دُم بردار، مطابق شکل، بر آن محور عمود می‌کنیم. تصویر یک بردار بر روی محور x، ***مؤلفه‌ی*** x، و تصویر آن بر روی محور y، ***مؤلفه‌ی*** y بردار است. فرایند تعیین مؤلفه‌های یک بردار را **تجزیه کردن بردار** می‌نامند.

مؤلفه‌ی یک بردار (در طول یک محور) همان جهت بردار را دارد. در شکل ۳-۷، a_x و a_y هر دو مثبت‌اند زیرا $\vec{a}$ در جهت مثبت هر دو محور کشیده شده است (به پیکان‌های کوچک سر مؤلفه‌ها در شکل که جهت آن‌ها را نشان می‌دهند، توجه کنید). اگر جهت بردار $\vec{a}$ را وارون کنیم، هر دو مؤلفه‌ی آن منفی خواهند شد و پیکان‌های مؤلفه‌ها در جهت x و y منفی خواهند بود. از تجزیه کردن بردار $\vec{b}$ در شکل ۳-۸، مؤلفه‌ی مثبت b_x و مؤلفه‌ی منفی b_y به‌دست می‌آید.



شکل ۳-۷ نمودار مؤلفه‌های a_x، a_y بردار $\vec{a}$. (ب) اگر بردار طوری جابه‌جا شود که بزرگی و جهتش ثابت بماند، این مؤلفه‌ها تغییر نمی‌کنند. (پ) مؤلفه‌ها ضلع‌های مثلث راست‌گوشه‌ای را تشکیل می‌دهند که وتر آن بزرگی بردار است.

به طور کلی، هر برداری سه مؤلفه دارد و در حالتی مانند شکل ۳-۷ الف، مؤلفه‌ی مربوط به محور z صفر است. همان‌طور که شکل‌های ۳-۷ الف و ۳-۷ ب نشان می‌دهند، هرگاه برداری بدون تغییر جهت جابه‌جا شود، مؤلفه‌های آن تغییر نمی‌کنند.

پیدا کردن مؤلفه‌ها. مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$ را می‌توان به روش هندسی از مثلث راست‌گوشه‌ی شکل ۳-۷ الف چنین به دست آورد:

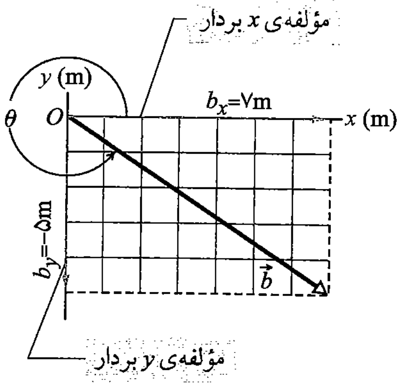
$$a_y = a\sin\theta \quad \text{و} \quad a_x = a\cos\theta \tag{۳-۵}$$

در این معادله‌ها θ زاویه‌ی بردار $\vec{a}$ نسبت به محور x مثبت و a بزرگی بردار $\vec{a}$ است. شکل ۳-۷ پ، نشان می‌دهد که $\vec{a}$ و مؤلفه‌های x و y آن یک مثلث راست‌گوشه تشکیل می‌دهند. هم‌چنین، این شکل نشان می‌دهد که چگونه می‌توان با روش اتصال ***سَر به دُم*** یک بردار را بازسازی کرد. برای این کار با ترسیم برداری که دُم یک مؤلفه را به سَر مؤلفه‌ی دیگر وصل می‌کند و وتر مثلث را تشکیل می‌دهد، مثلث راست‌گوشه را کامل می‌کنیم.

پس از آنکه یک بردار را به مؤلفه‌های آن بر روی محورها تجزیه کردیم، از خود مؤلفه‌ها هم به جای بردار می‌توانیم استفاده کنیم. برای مثال، در شکل ۳-۷ الف، بردار $\vec{a}$ به وسیله‌ی a و θ داده شده است (به طور کامل معین شده است). این بردار را با مؤلفه‌های a_x و a_y نیز می‌توان معین کرد. این دو زوج مقادیر درباره‌ی بردار اطلاعات یکسانی به دست می‌دهند. اگر برداری با ***نمادگذاری مؤلفه‌ای*** (a_x و a_y) معرفی شده باشد، و بخواهیم آن را با ***نمادگذاری بزرگی ـ زاویه*** (a و θ) معرفی کنیم، می‌توانیم از معادله‌های زیر برای تبدیل آن‌ها به یکدیگر استفاده کنیم

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \quad \text{و} \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \tag{۳-۶}$$

در حالت کلی‌تر سه بعدی، برای تعیین یک بردار لازم است یک بزرگی و دو زاویه (مثلاً a،

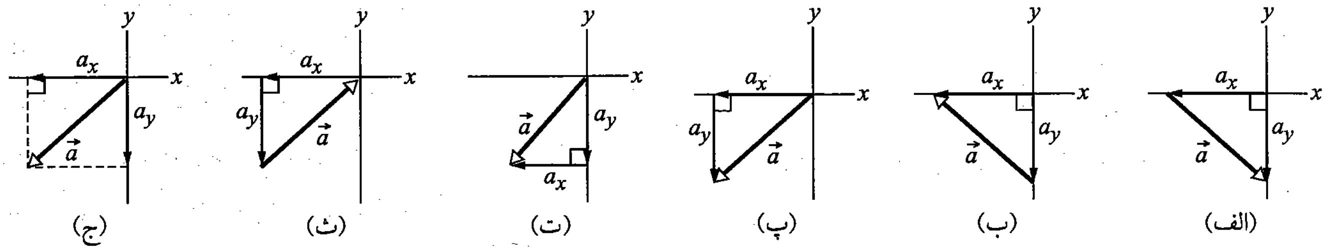


شکل ۳-۸ مؤلفه‌ی $\vec{b}$ روی محور x مثبت و روی محور y منفی است.

θ و ϕ) یا سه مؤلفه (a_x، a_y و a_z) در دست باشد.

خودآزمایی ۲

در شکل زیر کدام روش ترکیب مؤلفه‌های x و y برای تعیین بردار $\vec{a}$ درست است؟



مسئله‌ی نمونه‌ی ۳-۱ جمع کردن بردارها به روش ترسیمی، مسابقه‌ی جهت‌یابی

در یک کلاس آموزش جهت‌یابی شما می‌خواهید با انجام دادن سه حرکت در مسیر مستقیم تا بیشترین مسافت ممکن (در مسیر راست‌خط) از یک اردوگاه دور شوید. شما ممکن است جابه‌جایی‌های زیر را انجام دهید: (الف) جابه‌جایی $\vec{a}$ به مسافت ۲٫۰km در جهت خاور (یک راست به سوی خاور)؛ (ب) جابه‌جایی $\vec{b}$ به مسافت ۲٫۰km در راستای ۳۰ درجه‌ی شمال محور خاوری (تحت زاویه‌ی ۳۰ درجه به سمت شمال محور خاوری)؛ جابه‌جایی $\vec{c}$ به مسافت ۱٫۰km در جهت باختر. در ضمن شما می‌توانید از $-\vec{b}$ به جای $\vec{b}$ یا از $-\vec{c}$ به جای $\vec{c}$ هم استفاده کنید. بیشترین فاصله‌ای که در انتهای جابه‌جایی سوم می‌توانید از اردوگاه دور شوید چقدر است؟

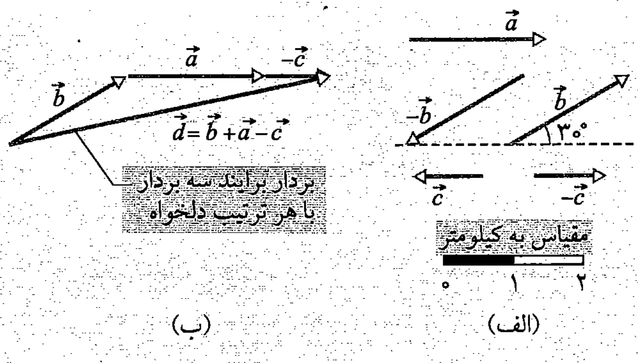
استدلال: با استفاده کردن از یک مقیاس مناسب، بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$، $-\vec{b}$ و $-\vec{c}$ را، مطابق شکل ۳-۹ الف، رسم می‌کنیم. سپس، در ذهن خود این بردارها را روی کاغذ می‌لغزانیم تا سه بردار به‌صورت یک آرایش سَر به دُم وصل شوند و مجموع برداری آن‌ها، $\vec{d}$، به دست آید. دُم بردار اول محل اردوگاه را مشخص می‌کند و سَر بردار سوم نقطه‌ی پایان و توقف را نشان می‌دهد. مجموع برداری $\vec{d}$ از دُم بردار اول تا سَر بردار سوم رسم می‌شود و بزرگی d معرف فاصله از اردوگاه است.

با توجه به شکل متوجه می‌شویم که بیشترین فاصله‌ی d موقعی به دست می‌آید که بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $-\vec{c}$ به‌صورت سَر به دُم به هم وصل شوند. این بردارها را با هر ترتیبی می‌توان جمع کرد، زیرا مجموع برداری آن‌ها به ترتیب جمع کردن بستگی ندارد. ترتیب نشان داده شده در شکل ۳-۹ ب مربوط به جمع برداری زیر است

$$\vec{d}=\vec{b}+\vec{a}+(-\vec{c})$$

با استفاده کردن از مقیاس به کار رفته در شکل ۳-۹ الف، طول این مجموع برداری، d، برابر است با

(پاسخ) $d=۴٫۸\,\text{m}$



شکل ۳-۹ (الف) نمودار سه بردار جابه‌جایی مورد استفاده. (ب) بیشترین فاصله از اردوگاه وقتی حاصل می‌شود که با هر ترتیبی جابه‌جایی‌های $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $-\vec{c}$ انجام شوند.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۳-۲ پیدا کردن مؤلفه‌ها، پرواز هواپیما

هواپیمای کوچکی در یک روز ابری مسافت ۲۱۵ km را در جهت ۲۲ درجه‌ی خاور محور شمالی می‌پیماید. منظور این است که جهت به طرف شمال (یک راست به سوی شمال) نیست، بلکه از محور شمالی به اندازه‌ی ۲۲ درجه به سوی خاور چرخیده است. هواپیما از نقطه‌ی آغاز حرکتش چه مسافتی را به سمت شمال و چه مسافتی را به سمت خاور پیموده است؟

نکته‌ی کلیدی

در اینجا بزرگی (۲۱۵ km) و زاویه‌ی (۲۲ درجه‌ی خاور محور شمالی) یک بردار را می‌دانیم و می‌خواهیم مؤلفه‌های بردار را پیدا کنیم.

محاسبات: دستگاه محورهای مختصات xy را طوری رسم می‌کنیم که در آن جهت مثبت محور x به سمت خاور و جهت مثبت محور y به سمت شمال باشد (شکل ۳-۱۰). برای آسانی، مبداء مختصات را در محل فرودگاه در نظر می‌گیریم. (ما مجبور نیستیم این کار را بکنیم. می‌توانیم دستگاه مختصات را جابه‌جا کنیم یا بچرخانیم و برای این کار مجاز هستیم، اما چرا مسئله را مشکل‌تر کنیم؟). جهت بردار جابه‌جایی هواپیما، $\vec{d}$، از مبدأ مختصات به سمت مقصد است.

برای پیدا کردن مؤلفه‌های $\vec{d}$، با استفاده کردن از معادله‌ی ۳-۵ به‌ازای $\theta = ۶۸^\circ$ (مساوی با $۹۰^\circ - ۲۲^\circ$)، داریم

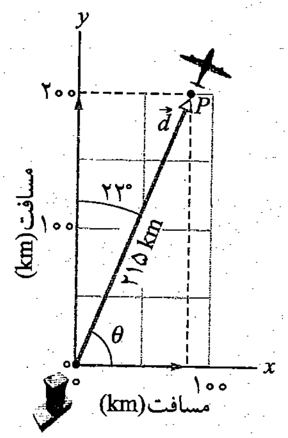
$$d_x = d\cos\theta = (۲۱۵\,\text{km})(\cos ۶۸^\circ) \Rightarrow$$

$$d_x = ۸۱\,\text{km} \qquad \text{(پاسخ)}$$

$$d_y = d\sin\theta = (۲۱۵\,\text{km})(\sin ۶۸^\circ) \Rightarrow$$

$$d_y = ۱۹۹\,\text{km} \approx ۲/۰\times ۱۰^۲\,\text{km} \qquad \text{(پاسخ)}$$

بنابراین، مقصد هواپیما در فاصله‌ی ۸۱ کیلومتری خاور و $۲/۰\times۱۰^۲$ کیلومتری شمال فرودگاه واقع است.



شکل ۳-۱۰ هواپیمایی از فرودگاه واقع در مبدأ مختصات بلند می‌شود و به سمت نقطه‌ی P پرواز می‌کند.

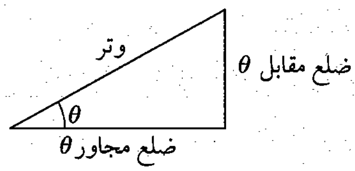
روش‌های حل کردن مسئله‌ها زاویه‌ها، تابع‌های مثلثاتی و تابع‌های مثلثاتی معکوس

روش ۱: زاویه‌ها ـ درجه‌ها و رادیان‌ها زاویه‌هایی که نسبت به محور x مثبت اندازه‌گیری می‌شوند در جهت پادساعت‌گرد، مثبت و در جهت ساعت‌گرد منفی‌اند. در این صورت، ۲۱۰ درجه و ۱۵۰- درجه زاویه‌هایی یکسان‌اند.

زاویه‌ها را برحسب درجه یا رادیان (با نماد rad) اندازه‌گیری می‌کنند. با توجه به این موضوع که یک دایره‌ی کامل معادل ۳۶۰ درجه، یا ۲πrad، است، می‌توان این دو مقدار را به هم تبدیل کرد. مثلاً، اگر بخواهیم ۴۰ درجه را به رادیان تبدیل کنیم باید بنویسیم

$$(۴۰^\circ)\left(\frac{۲\pi\text{rad}}{۳۶۰^\circ}\right) = ۰/۷۰\,\text{rad}$$

روش ۲: تابع‌های مثلثاتی ما باید تعریف تابع‌های مثلثاتی معمولی ـ سینوس، کسینوس و تانژانت ـ را بدانیم، زیرا این تابع‌ها بخشی از زبان علوم و مهندسی هستند. این تابع‌ها در شکل ۳-۱۱ طوری تعریف شده‌اند که به چگونگی نام‌گذاری اجزاء مثلث بستگی ندارند.



$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{وتر}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ضلع مجاور } \theta}{\text{وتر}}$$

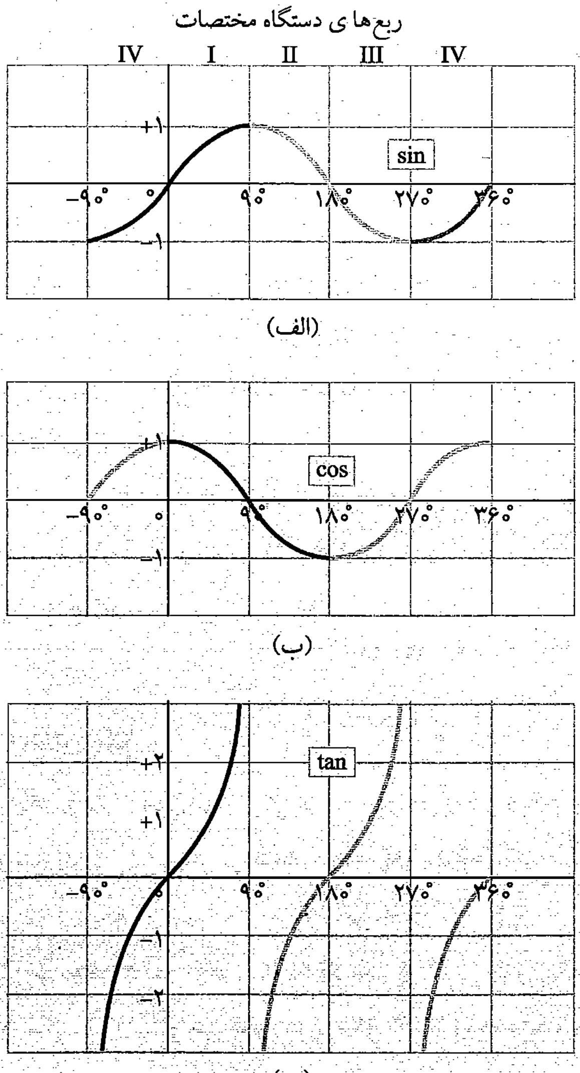
$$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل } \theta}{\text{ضلع مجاور } \theta}$$

شکل ۳-۱۱ نمودار مثلثی که برای تعریف تابع‌های مثلثاتی به کار می‌رود. پیوست ث پایان کتاب را نیز ببینید.

هم‌چنین، باید بتوانیم شرح بدهیم که این تابع‌های مثلثاتی چگونه مانند شکل ۳-۱۲، برحسب زاویه تغییر می‌کنند، تا قادر باشیم درباره‌ی پذیرفتنی بودن نتیجه‌ی حاصل از ماشین حساب داوری کنیم. حتی دانستن علامت تابع در رُبع‌های مختلف دستگاه مختصات هم می‌تواند به ما کمک کند.

روش ۳: تابع‌های مثلثاتی معکوس هنگامی که با ماشین حساب تابع‌های مثلثاتی معکوس $\sin^{-1}$، $\cos^{-1}$ و $\tan^{-1}$ را به‌دست می‌آوریم، باید پذیرفتنی بودن پاسخ را با توجه به شرایط مسئله در نظر بگیریم، زیرا، به طور معمول ، پاسخ دیگری هم ممکن است وجود داشته باشد، که ماشین حساب آن را به ما نمی‌دهد. گستره‌ی عملیات یک ماشین حساب در محاسبه‌ی تابع‌های مثلثاتی معکوس در شکل ۳-۱۲ نشان داده شده است. به عنوان مثال، $\sin^{-1} ۰/۵$ مربوط به زاویه‌های ۳۰ درجه (که ماشین حساب آن را نمایش می‌دهد، زیرا زاویه‌ی ۳۰ درجه در گستره‌ی عملیات ماشین حساب قرار دارد) و ۱۵۰ درجه است. برای به دست آوردن هر دو مقدار در شکل ۳-۱۲ الف، یک خط افقی از ۰/۵ رسم کنید و ببینید منحنی سینوس را در کجا قطع می‌کند. پاسخ درست را چگونه باید تشخیص داد؟ در شرایط مسئله تنها یک پاسخ است که از همه مقبول‌تر است.

روش ۴: اندازه‌گیری زاویه‌های بردارها رابطه‌های مربوط به $\cos\theta$ و $\sin\theta$ درمعادله‌ی ۳-۵ و رابطه‌ی $\tan\theta$ درمعادله‌ی ۳-۶ فقط به شرطی معتبرند که زاویه نسبت به جهت مثبت محور x اندازه‌گیری شود. اگر زاویه نسبت به هرجهت دیگری اندازه‌گیری شود تابع‌های مثلثاتی معادله‌ی ۳-۵ باید تغییر کنند و نسبت در معادله‌ی ۳-۶ باید وارون شود. یکی از روش‌های مطمئن این است که هر زاویه‌ی مورد نظر را به زاویه‌ای تبدیل کنیم که نسبت به محور x مثبت اندازه‌گیری می‌شود.



شکل ۳-۱۲ نمایش سه منحنی مفیدی که یاد گرفتن آن‌ها لازم است. گستره‌ی عملیات ماشین‌های حساب برای ***معکوس کردن*** تابع‌های مثلثاتی به صورت قسمت‌های پررنگ‌تر در روی منحنی‌ها نشان داده شده است.

۳-۲ بردارهای یکه، جمع کردن بردارها به کمک مؤلفه‌ها

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۳-۶ یک بردار با نمادگذاری بزرگی - زاویه و نمادگذاری بردارهای یکه را به هم تبدیل کنید.

۳-۷ بردارهای با نمادگذاری بزرگی - زاویه و نمادگذاری بردارهای یکه را با هم جمع و از هم تفریق کنید.

۳-۸ مشخص کنید که برای یک بردار معین، چرخاندن دستگاه مختصات به دور مبداء، می‌تواند مؤلفه‌های بردار را تغییر دهد، اما خود بردار را تغییر نمی‌دهد.

نکته‌های کلیدی

● بردارهای یکه‌ی $\hat{\mathrm{i}}$، $\hat{\mathrm{j}}$ و $\hat{\mathrm{k}}$ دارای بزرگی واحد هستند و در یک دستگاه مختصات راست - دست در جهت مثبت محورهای x، y و z قرار دارند. بردار $\vec{a}$ را با استفاده کردن از بردارهای یکه می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\vec{a} = a_x\,\hat{\mathrm{i}} + a_y\,\hat{\mathrm{j}} + a_z\,\hat{\mathrm{k}}$$

که در آن $a_x\,\hat{\mathrm{i}}$، $a_y\,\hat{\mathrm{j}}$ و $a_z\,\hat{\mathrm{k}}$ مؤلفه‌های برداری $\vec{a}$ و a_x، a_y، a_z مؤلفه‌های نرده‌ای آن بردار هستند.

● برای جمع کردن بردارها در شکل مؤلفه‌ای، قاعده‌های زیر را به‌کار می‌بریم

$$r_x = a_x + b_x \text{،} \quad r_y = a_y + b_y \quad \text{و} \quad r_z = a_z + b_z$$

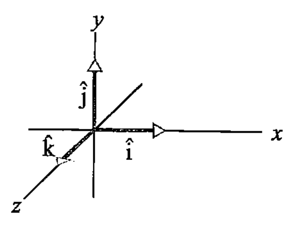
در اینجا $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهایی هستند که باید با هم جمع شوند و $\vec{r}$ مجموع برداری آن‌هاست. توجه کنید که مؤلفه‌ها را محور به محور با هم جمع می‌کنیم.

بردارهای یکه

بردار یکه، برداری است که بزرگی‌اش به طور دقیق ۱ و دارای جهت ویژه‌ای است. این بردار یکا و بُعد ندارد. تنها هدف از انتخاب بردار یکه مشخص کردن یک جهت است.

بردارهای یکه در جهت‌های مثبت محورهای x، y و z را، به ترتیب، با $\hat{\mathrm{i}}$، $\hat{\mathrm{j}}$ و $\hat{\mathrm{k}}$ نمایش می‌دهند، که در آن‌ها علامت کلاهک ($\hat{}$) به جای پیکان روی بردارها به کار رفته است (شکل ۳-۱۳). آرایش محورهای شکل ۳-۱۳ را **دستگاه مختصات راست - دست** right-hand می‌نامند. اگر این دستگاه مانند یک جسم صُلب به سوی یک سمت‌گیری جدید بچرخد باز هم به صورت راست - دست باقی می‌ماند. در این کتاب از چنین دستگاه‌های مختصاتی استفاده خواهد شد.

بردارهای یکه در جهت محورها قرار دارند.



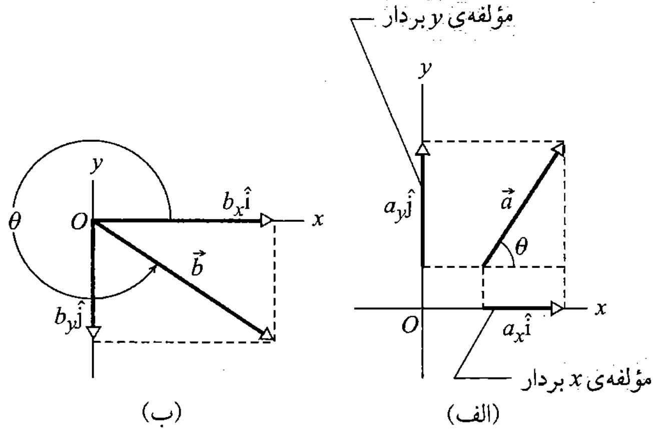
شکل ۳-۱۳ بردارهای یکه‌ی $\hat{\mathrm{i}}$، $\hat{\mathrm{j}}$ و $\hat{\mathrm{k}}$، جهت‌های محورهای دستگاه مختصات راست - دست را معین می‌کنند.

بردارهای یکه برای نشان دادن سایر بردارها بسیار مفیدند؛ مثلاً، بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در شکل‌های ۳-۷ و ۳-۸ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} \tag{۳-۷}$$

و

$$\vec{b} = b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} \tag{۳-۸}$$



شکل ۳-۱۴ (الف) نمودار مؤلفه‌های برداری بردار $\vec{a}$. (ب) نمودار مؤلفه‌های برداری بردار $\vec{b}$.

این دو معادله در شکل ۳-۱۴ به طور ترسیمی نمایش داده شده‌اند. کمیت‌های $a_x\hat{\mathrm{i}}$ و $a_y\hat{\mathrm{j}}$ بردارند و **مؤلفه‌های برداری** $\vec{a}$ نام دارند و کمیت‌های a_x و a_y نرده‌ای‌اند و **مؤلفه‌های نرده‌ای** $\vec{a}$ (یا به طور ساده، **مؤلفه‌های** $\vec{a}$) نامیده می‌شوند.

جمع کردن بردارها به کمک مؤلفه‌ها

بردارها را با استفاده کردن از ترسیم می‌توان به روش هندسی با هم جمع کرد. روش دیگر، استفاده کردن از ماشین‌های ویژه‌ی محاسبه‌های برداری برای جمع کردن مستقیم بردارها بر روی صفحه‌ی نمایش ماشین و روش سوم جمع کردن بردارها با استفاده کردن از ترکیب مؤلفه‌های برداری مربوط به هر محور است، که در اینجا بررسی می‌شود.

برای شروع کار، معادله‌ی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} \qquad (۳-۹)$$

این معادله نشان می‌دهد که بردار $\vec{r}$ برابر با بردار $(\vec{a}+\vec{b})$ است. اگر چنین باشد، باید هر یک از مؤلفه‌های $\vec{r}$ با مؤلفه‌ی متناظر بردار $(\vec{a}+\vec{b})$ برابر باشند، یعنی

$$r_x = a_x + b_x \qquad (۳-۱۰)$$

$$r_y = a_y + b_y \qquad (۳-۱۱)$$

$$r_z = a_z + b_z \qquad (۳-۱۲)$$

به عبارت دیگر، دو بردار به شرطی با هم برابرند که مؤلفه‌های متناظر آن‌ها با هم برابر باشند. معادله‌های ۳-۹ تا ۳-۱۲ نشان می‌دهند که برای جمع کردن بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$، باید: (۱) بردارها را به مؤلفه‌های نرده‌ای آن‌ها تجزیه کنیم؛ (۲) مؤلفه‌های نرده‌ای مربوط به هر محور را با هم ترکیب کنیم تا مؤلفه‌های بردار مجموع، $\vec{r}$، به‌دست آید؛ و (۳) مؤلفه‌های $\vec{r}$ را باهم جمع کنیم تا خود $\vec{r}$ معین شود. در مرحله‌ی ۳ این حق انتخاب را داریم که $\vec{r}$ را با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه یا با استفاده کردن از نمادگذاری بزرگی ـ زاویه، معرفی کنیم.

روش جمع کردن بردارها با استفاده کردن از مؤلفه‌ها در مورد تفریق بردارها هم به‌کارمی‌رود. یادآوری می‌شود که عبارت تفریق $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$ را می‌توان به صورت مجموع $\vec{d}=\vec{a}+(-\vec{b})$ نوشت. برای انجام دادن تفریق بردارها مؤلفه‌های $\vec{a}$ و $-\vec{b}$ را با هم جمع می‌کنیم. در نتیجه، داریم

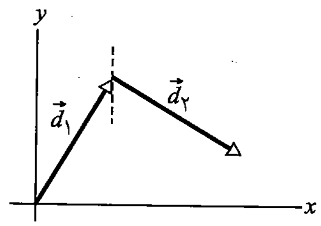
$$d_x = a_x - b_x \quad ، \quad d_y = a_y - b_y \quad و \quad d_z = a_z - b_z$$

و از آنجا

$$\vec{d} = d_x\hat{\mathrm{i}} + d_y\hat{\mathrm{j}} + d_z\hat{\mathrm{k}} \qquad (۱۳-۳)$$

خودآزمایی ۳

(الف) درشکل زیر، علامت مؤلفه‌های x بردارهای $\vec{d}_1$ و $\vec{d}_2$ چیست؟ (ب) علامت مؤلفه‌های y بردارهای $\vec{d}_1$ و $\vec{d}_2$ چیست؟ (پ) علامت مؤلفه‌های x و y بردار $\vec{d}_1+\vec{d}_2$ چیست؟



خواص و قوانین فیزیکی تحت چرخش محورهای مختصات تغییری نمی‌کند

بردارها و قانون‌های فیزیک

تا اینجا در هر شکلی که شامل دستگاه مختصات بود محورهای x و y دستگاه با لبه‌های صفحه‌ی کتاب موازی بودند. بنابراین، وقتی که بردار $\vec{a}$ مورد نظر باشد، مؤلفه‌های a_x و a_y بردار نیز با لبه‌های صفحه‌ی کتاب (مانند شکل ۳-۱۵ الف) موازی خواهند بود. تنها دلیل مربوط به انتخاب این سمت‌گیری برای محورها، «مناسب بودن» آن است و دلیل بهتری وجود ندارد. این محورها را (و نه بردار $\vec{a}$ را) می‌توانیم تحت زاویه‌ی ϕ، مطابق شکل ۳-۱۵ ب، بچرخانیم. در این صورت، مؤلفه‌ها مقادیر جدید a'_x و a'_y را خواهند داشت. چون برای ϕ بی‌نهایت انتخاب وجود دارد، برای $\vec{a}$ هم بی‌نهایت زوج‌های مؤلفه‌ی متفاوت خواهیم داشت.

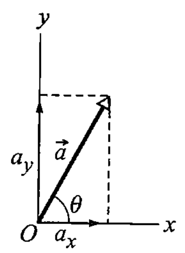
کدام یک از این زوج‌ها «درست» هستند؟ پاسخ این است که همه‌ی آن‌ها هم‌ارزند، زیرا هر زوج (با محورهایش) همان بردار $\vec{a}$ را به نحو متفاوتی توصیف می‌کند. اما در همه‌ی حالت‌ها، بزرگی و جهت بردار یکسان است. در شکل ۳-۱۵، داریم

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a'^2_x + a'^2_y} \qquad (۱۴-۳)$$

و

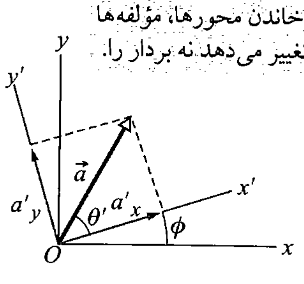
$$\theta = \theta' + \phi \qquad (۱۵-۳)$$

نکته‌ی اصلی این‌است‌که ما در انتخاب دستگاه مختصات آزادی عمل داریم، زیرا رابطه‌های میان بردارها به محل مبداء دستگاه مختصات یا به سمت‌گیری محورها بستگی ندارد. این



(الف)

چرخاندن محورها، مؤلفه‌ها را تغییر می‌دهد نه بردار را.



(ب)

شکل ۳-۱۵ (الف) نمودار بردار $\vec{a}$ و مؤلفه‌هایش. (ب) نمودار همان بردار درحالی‌که دستگاه مختصات تحت زاویه‌ی ϕ چرخیده است.

موضوع در مورد رابطه‌های فیزیک نیز صادق است؛ تمام رابطه‌های فیزیک به انتخاب دستگاه مختصات بستگی ندارند. علاوه براین، زبان بردارها ساده و پرمعنی است و می‌توان دید که چرا قانون‌های فیزیک را تقریباً همیشه، با زبان بردارها بیان می‌کنند. معادله‌ای مانند معادله‌ی ۳-۹ را می‌توان به صورت سه رابطه (حتی بیشتر) نظیر معادله‌های ۳-۱۰، ۳-۱۱ و ۳-۱۲ معرفی کرد.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۳-۳ جست و جو در یک پیچراه پُرچینی

پیچراه پرچینی پیچراهی است که با ردیف‌های بلندی از پرچین تشکیل شده است. پس از واردشدن به یک پیچراه به‌دنبال نقطه‌ی مرکزی و سپس به دنبال راه خروجی می‌گردیم. شکل ۳-۱۶ الف محل ورود به چنین پیچراهی را همراه با دو انتخاب اول نشان می‌دهد، که در هنگام حرکت کردن از نقطه‌ی i تا نقطه‌ی c در تقاطع‌ها با آن مواجه می‌شویم. چنان که در تصویر از بالا در شکل ۳-۱۶ ب دیده می‌شود، ما سه جابه‌جایی را انجام می‌دهیم:

$$d_۱ = ۶/۰۰\ \mathrm{m} \qquad \theta_۱ = ۴۰^\circ$$
$$d_۲ = ۸/۰۰\ \mathrm{m} \qquad \theta_۲ = ۳۰^\circ$$
$$d_۳ = ۵/۰۰\ \mathrm{m} \qquad \theta_۳ = ۰^\circ$$

که در آن قسمت آخر با محور x موازی است. هنگام رسیدن به نقطه‌ی c، بزرگی و زاویه‌ی جابه‌جایی برایند ما $\vec{d}_{\text{net}}$، نسبت به نقطه‌ی i چیست؟

نکته‌های کلیدی

(۱) برای پیدا کردن جابه‌جایی برایند $\vec{d}_{\text{net}}$، باید سه بردار جابه‌جایی جداگانه را با هم جمع کنیم:

$$\vec{d}_{\text{net}} = \vec{d}_۱ + \vec{d}_۲ + \vec{d}_۳$$

(۲) برای انجام دادن این کار، ابتدا این جمع را برای مؤلفه‌های x تنها برآورد می‌کنیم:

$$d_{\text{net},x} = d_{۱x} + d_{۲x} + d_{۳x} \qquad (۱۶\text{-}۳)$$

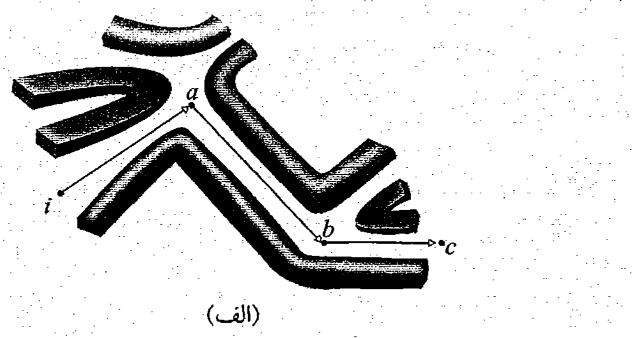
سپس، جمع کردن را برای مؤلفه‌های y تنها انجام می‌دهیم:

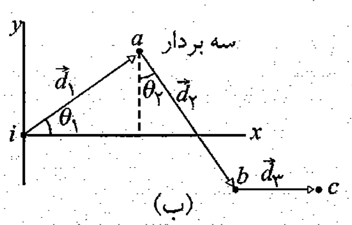
$$d_{\text{net},y} = d_{۱y} + d_{۲y} + d_{۳y} \qquad (۱۷\text{-}۳)$$

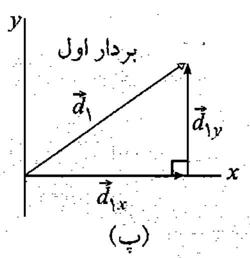
(۳) سرانجام، $\vec{d}_{\text{net}}$ را با استفاده کردن از مؤلفه‌های x و y آن به دست می‌آوریم.

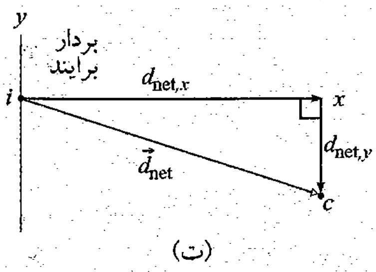
محاسبات: برای محاسبه‌ی معادله‌های ۳-۱۶ و ۳-۱۷، مؤلفه‌های x و y هر جابه‌جایی را پیدا می‌کنیم. به عنوان مثال، مؤلفه‌های جابه‌جایی اول در شکل ۳-۱۶ پ، نشان داده شده‌اند. نمودارهای مشابه مربوط به دو جابه‌جایی دیگر را هم رسم می‌کنیم و سپس با استفاده کردن از زاویه‌ها نسبت به جهت مثبت محور x، بخش x معادله‌ی ۳-۵ را برای هر جابه‌جایی به کار می‌بریم:

$$d_{۱x} = (۶/۰۰\ \mathrm{m})\cos ۴۰^\circ = ۴/۶۰\ \mathrm{m}$$
$$d_{۲x} = (۸/۰۰\ \mathrm{m})\cos(-۶۰^\circ) = ۴/۰۰\ \mathrm{m}$$
$$d_{۳x} = (۵/۰۰\ \mathrm{m})\cos ۰^\circ = ۵/۰۰\ \mathrm{m}$$









شکل ۳-۱۶ (الف) سه جابه‌جایی در یک پیچراه. (ب) بردارهای جابه‌جایی. (پ) بردار جابه‌جایی اول و مؤلفه‌هایش. (ت) بردار جابه‌جایی برایند و مؤلفه‌هایش.

سپس، با استفاده کردن از معادله‌ی ۳-۱۶، داریم

$$d_{net,x} = +۴/۶۰m + ۴/۰۰m + ۵/۰۰m = ۱۳/۶۰m$$

به همین ترتیب، برای محاسبه‌ی معادله‌ی ۳-۱۷، بخش y معادله‌ی ۳-۵ را برای هر جابه‌جایی به کار می‌بریم:

$$d_{1y} = (۶/۰۰m)\sin ۴۰° = ۳/۸۶\,m$$

$$d_{2y} = (۸/۰۰m)\sin(-۶۰°) = -۶/۹۳\,m$$

$$d_{3y} = (۵/۰۰m)\sin ۰° = ۰\,m$$

سپس، با استفاده کردن از معادله‌ی ۳-۱۷، داریم

$$d_{1net,y} = +۳/۸۶m - ۶/۹۳m + ۰m = -۳/۰۷m$$

اکنون، این مؤلفه‌های $\vec{d}_{net}$ را برای پیدا کردن بردار نشان داده شده در شکل ۳-۱۶ ت، به کار می‌بریم: مؤلفه‌ها در یک آرایش سَر به دُم قرار دارند و ضلع‌های یک مثلث راست گوشه و بردار نیز وتر مثلث را تشکیل می‌دهند. بزرگی و زاویه‌ی $\vec{d}_{net}$ را از معادله‌ی ۳-۶ به دست می‌آوریم. بزرگی بردار برابر است با

$$d_{net} = \sqrt{d_{net,x}^{2} + d_{net,y}^{2}} \qquad (۳-۱۸)$$

$$d_{net} = \sqrt{(۱۳/۶۰m)^{2} + (-۳/۰۷m)^{2}} \Rightarrow$$

$$d_{net} = ۱۳/۹\,m$$ **(پاسخ)**

برای پیدا کردن زاویه (اندازه‌گیری شده نسبت به جهت مثبت محور x)، از تانژانت معکوس استفاده می‌کنیم:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{d_{net,y}}{d_{net,x}}\right) \qquad (۳-۱۹)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-۳/۰۷m}{۱۳/۶۰m}\right) \Rightarrow$$

$$\theta = -۱۲/۷°$$ **(پاسخ)**

این زاویه منفی است زیرا در جهت ساعت‌گرد نسبت به محور x مثبت اندازه‌گیری شده است. در هنگام محاسبه‌ی تانژانت معکوس با ماشین حساب، همیشه باید به این موضوع توجه کنیم. پاسخی که ماشین حساب نشان می‌دهد از نظر ریاضی درست است اما ممکن است پاسخ درست مربوط به وضعیت فیزیکی مورد نظر نباشد. در چنین مواردی، برای معکوس کردن بردار باید عدد ۱۸۰ درجه را به پاسخ نشان داده شده بیفزاییم. برای آزمودن، همیشه لازم است بردار و مؤلفه‌هایش را، مانند کاری که در شکل ۳-۱۶ ت انجام دادیم، رسم کنیم. در وضعیت فیزیکی مربوط به این مسئله، شکل نشان می‌دهد که $\theta = -۱۲/۷°$ پاسخی قابل قبول است، در حالی که پاسخ $-۱۲/۷° + ۱۸۰° = ۱۶۷°$ آشکارا پذیرفته نیست.

همه‌ی این موارد را در روی نمودار تانژانت برحسب زاویه در شکل ۳-۱۲ پ، می‌توان دید. در مسئله‌ی پیچ‌راه، شناسه‌ی تانژانت معکوس $\frac{-۳/۰۷}{۱۳/۶۰}$، یا ۰/۲۲۶-، است. در روی این نمودار خطی افقی چنان رسم کنید که در روی محور قائم از این مقدار عبور کند. این خط، شاخه‌ی تیره‌ی نمودار رسم شده را در ۱۲/۷- درجه و نیز شاخه‌ی روشن نمودار را در ۱۶۷ درجه قطع می‌کند. نقطه‌ی تلاقی اول عددی است که ماشین حساب نمایش می‌دهد.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۳-۴ جمع کردن بردارها با استفاده کردن از مؤلفه‌ها و بردارهای یکه

شکل ۳-۱۷ الف سه بردار زیر را نشان می‌دهد:

$$\vec{a} = (۴/۲m)\hat{i} - (۱/۵m)\hat{j}$$

$$\vec{b} = (-۱/۶m)\hat{i} + (۲/۹m)\hat{j}$$

و

$$\vec{c} = (-۳/۷m)\hat{j}$$

مجموع برداری این سه بردار $\vec{r}$، که آن هم در شکل رسم شده است، چیست؟

نکته‌ی کلیدی

این سه بردار را می‌توان به کمک مؤلفه‌ها و محور به محور، با هم جمع و سپس برای نوشتن بردار مجموع $\vec{r}$ مؤلفه‌ها را با هم ترکیب کرد.

محاسبات: برای محور x، مؤلفه‌های x بردارهای $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ را با هم جمع می‌کنیم تا مؤلفه‌ی x بردار $\vec{r}$ به دست آید:

$$r_x = a_x + b_x + c_x$$

$$r_x = ۴/۲\,\text{m} - ۱/۶\,\text{m} + ۰ = ۲/۶\,\text{m}$$

به همین ترتیب، برای محور y می‌توان نوشت

$$r_y = a_y + b_y + c_y$$

$$r_y = -۱/۵\,\text{m} + ۲/۹\,\text{m} - ۳/۷\,\text{m} = -۲/۳\,\text{m}$$

سپس، مؤلفه‌های $\vec{r}$ را می‌توان با هم ترکیب کرد و این بردار را با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه نمایش داد:

(پاسخ) $$\vec{r} = (۲/۶\,\text{m})\,\hat{\text{i}} - (۲/۳\,\text{m})\,\hat{\text{j}}$$

که در آن $(۲/۶\,\text{m})\,\hat{\text{i}}$ مؤلفه‌ی برداری $\vec{r}$ در راستای محور x و $-(۲/۳\,\text{m})\,\hat{\text{j}}$ مؤلفه‌ی برداری $\vec{r}$ در راستای محور y است. شکل ۳-۱۷ ب، روشی را برای مرتب کردن مؤلفه‌های بردار به‌منظور به دست آوردن $\vec{r}$ نشان می‌دهد (آیا می‌توانید روش دیگری را نشان دهید؟).

با داشتن بزرگی و زاویه‌ی مربوط به $\vec{r}$ نیز به این پرسش می‌توان پاسخ داد. با استفاده کردن از معادله‌ی ۳-۶ بزرگی بردار چنین به دست می‌آید

$$r = \sqrt{(۲/۶\,\text{m})^۲ + (-۲/۳\,\text{m})^۲} \Rightarrow$$

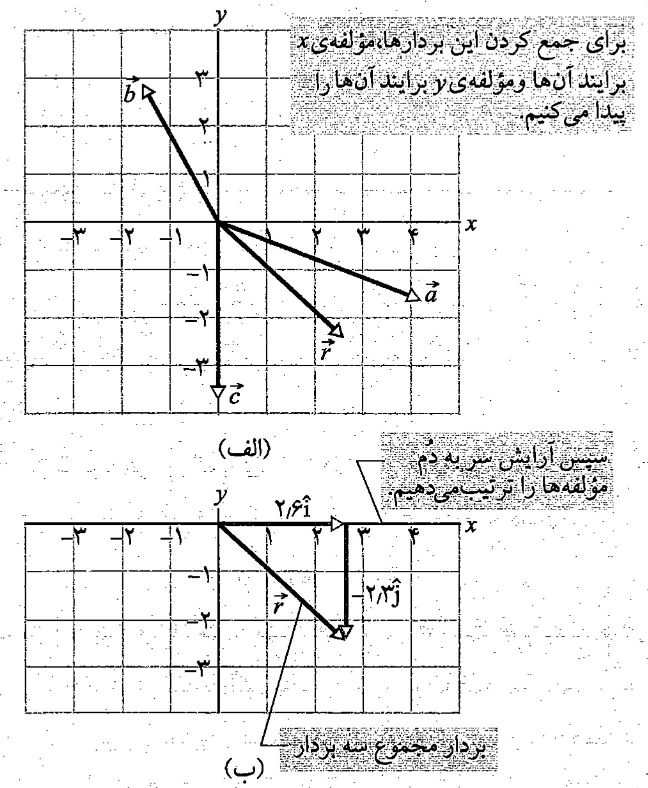
(پاسخ) $$r \approx ۳/۵\,\text{m}$$

زاویه‌ی بردار (نسبت به محور x مثبت) برابر است با

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-۲/۳\,\text{m}}{۲/۶\,\text{m}}\right) \Rightarrow$$

(پاسخ) $$\theta = -۴۱^\circ$$

علامت منفی نشان می‌دهد که زاویه در جهت ساعت‌گرد اندازه‌گیری شده است.



شکل ۳-۱۷ بردار $\vec{r}$ برابر با مجموع برداری سه بردار دیگر است.

۳-۳ ضرب کردن بردارها

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۳-۹ بردارها را در نرده‌ای‌ها ضرب کنید.

۳-۱۰ مشخص کنید که حاصل ضرب کردن یک بردار در یک نرده‌ای، یک بردار به دست می‌دهد، حاصل ضرب نقطه‌ای (یا نرده‌ای) دو بردار، یک نرده‌ای است و حاصل ضرب ضربدری (یا برداری) دو بردار، یک بردار جدید است که بر دو بردار اولی عمود است.

۳-۱۱ حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار را به صورت نمادگذاری بزرگی ـ زاویه و به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، به‌دست آورید.

۳-۱۲ زاویه‌ی میان دو بردار را به کمک حاصل ضرب نقطه‌ای آن‌ها به صورت نمادگذاری بزرگی ـ زاویه و نمادگذاری بردارهای یکه، به دست آورید.

۳-۱۳ با داشتن دو بردار، از ضرب نقطه‌ای برای پیدا کردن تصویر یک بردار بر روی بردار دیگر، استفاده کنید.

۳-۱۴ حاصل ضرب برداری دو بردار را به صورت نمادگذاری بزرگی ـ زاویه و به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، به‌دست آورید.

۳-۱۵ قاعده‌ی دست راست را برای پیدا کردن جهت بردار حاصل از ضرب برداری به کار ببرید.

۳-۱۶ در ضرب‌های تو هم رو، که یک حاصل ضرب در درون دیگری قرار دارد، روش جبری معمولی را دنبال کنید، یعنی ابتدا حاصل ضرب‌های درونی‌تر را به دست آورید.

نکته‌های کلیدی

● حاصل ضرب نرده‌ای s و بردار $\vec{v}$، برداری جدید است که بزرگی‌اش v و جهتش، اگر s مثبت باشد، همسو با $\vec{v}$ و اگر s منفی باشد ناهمسو با $\vec{v}$ است. برای تقسیم کردن $\vec{v}$ بر s، بردار $\vec{v}$ را در $1/s$ ضرب کنید.

● ضرب نرده‌ای (یا نقطه‌ای) دوبردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به‌صورت $\vec{a}\cdot\vec{b}$ نوشته می‌شود و حاصل آن کمیتی نرده‌ای است، که چنین به دست می‌آید

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\phi$$

که در آن ϕ زاویه‌ی میان جهت‌های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. ضرب نرده‌ای برابر با حاصل ضرب بزرگی یک بردار در مؤلفه‌های نرده‌ای بردار دوم بر روی بردار اول است. با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه، داریم

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\,\hat{\mathrm{i}}+a_y\,\hat{\mathrm{j}}+a_z\,\hat{\mathrm{k}})\cdot(b_x\,\hat{\mathrm{i}}+b_y\,\hat{\mathrm{j}}+b_z\,\hat{\mathrm{k}})$$

این رابطه را می‌توان به کمک قانون توزیع‌پذیری بسط داد. توجه کنید که $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

● ضرب برداری (یا ضربدری) دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به صورت $\vec{a}\times\vec{b}$ نوشته می‌شود و حاصل آن ***بردار*** $\vec{c}$ است، که بزرگی c از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$c=ab\sin\phi$$

در اینجا ϕ زاویه‌ی کوچک‌تر میان جهت‌های $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. بردار $\vec{c}$ بر صفحه‌ی تعریف شده با $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است و از قاعده‌ی دست راست نشان داده شده در شکل ۳-۱۹ معین می‌شود. توجه کنید که $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$. با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه، داریم

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\,\hat{\mathrm{i}}+a_y\,\hat{\mathrm{j}}+a_z\,\hat{\mathrm{k}})\times(b_x\,\hat{\mathrm{i}}+b_y\,\hat{\mathrm{j}}+b_z\,\hat{\mathrm{k}})$$

این رابطه را می‌توان به کمک قانون توزیع‌پذیری بسط داد.

● در ضرب‌های تو هم رو، که یک حاصل‌ضرب در درون دیگری قرار دارد، روش جبر معمولی را دنبال کنید، یعنی ابتدا حاصل‌ضرب‌های درونی‌تر را به دست آورید.

ضرب کردن بردارها*

بردارها را به سه طریق می‌توان در هم ضرب کرد، اما هیچ یک از این ضرب‌ها مانند ضرب جبری معمولی نیستند. همان‌طور که در این بخش می‌بینید، به خاطر داشته باشید که با برخی ماشین‌های ویژه‌ی محاسبه‌های برداری می‌توان بردارها را در هم ضرب کرد، به شرط آنکه قاعده‌های اساسی ضرب کردن را بدانید.

ضرب کردن یک بردار در یک نرده‌ای

اگر بردار $\vec{a}$ را در نرده‌ای s ضرب کنیم، بردار جدیدی به دست می‌آید. بزرگی این بردار

* مطالب این بخش را بعداً در متن کتاب به کار خواهیم برد (از ضرب نرده‌ای در فصل ۷ و از ضرب برداری در فصل ۱۱ استفاده خواهد شد). از این رو، مدرسان در صورت تمایل می‌توانند تدریس این بخش را به بعد موکول کنند.

برابر با حاصل‌ضرب بزرگی بردار $\vec{a}$ در قدر مطلق s است. جهت این بردار، اگر s مثبت باشد همسو با بردار $\vec{a}$، و اگر s منفی باشد ناهمسو با بردار $\vec{a}$ است. برای تقسیم کردن بردار $\vec{a}$ بر s، بردار $\vec{a}$ را در $\frac{1}{s}$ ضرب می‌کنیم.

ضرب کردن یک بردار در یک بردار

برای ضرب کردن یک بردار در یک بردار دو راه وجود دارد؛ حاصل یکی از این ضرب کردن‌ها یک مقدار نرده‌ای است (و ***ضرب نرده‌ای*** نامیده می‌شود)، و حاصل ضرب کردن دیگر یک بردار جدید است (و ***ضرب برداری*** نام دارد). (دانشجویان باید مواظب باشند که این دو روش ضرب کردن را با هم اشتباه نکنند).

ضرب نرده‌ای

ضرب نرده‌ای (یا **ضرب اسکالر**) بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مربوط به شکل ۳-۱۸ الف، به صورت $\vec{a}\cdot\vec{b}$ نوشته می‌شود. و تعریف آن چنین است

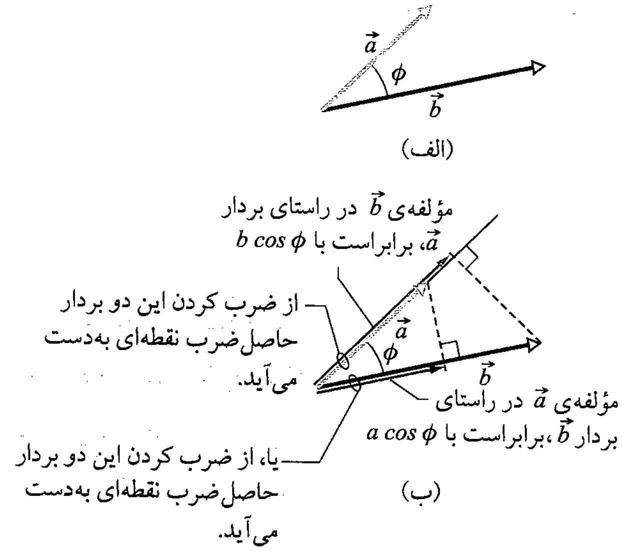
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi \qquad (۳-۲۰)$$

که در آن a بزرگی بردار $\vec{a}$، b بزرگی بردار $\vec{b}$ و ϕ زاویه‌ی میان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ (یا بهتر بگوییم، زاویه‌ی میان راستاهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$) است. در واقع، زاویه‌ی میان بردارها دو مقدار دارد: ϕ و $360° - \phi$. در معادله‌ی ۳-۲۰ هر یک از این زاویه‌ها را می‌توان به کار برد، زیرا کسینوس آن‌ها با هم برابر است.

توجه کنید که در طرف راست معادله‌ی ۳-۲۰ کمیت‌ها (از جمله مقدار $\cos\phi$) **فقط** نرده‌ای‌اند. بنابراین، $\vec{a}\cdot\vec{b}$ در طرف چپ معادله هم معرف یک ***کمیت نرده‌ای*** است. به خاطر این نمادگذاری، $\vec{a}\cdot\vec{b}$ را **ضرب نقطه‌ای** نیز می‌نامند و آن‌را به‌صورت «a نقطه b» می‌خوانند.

ضرب نقطه‌ای را می‌توان به صورت ضرب دو کمیت در نظر گرفت: (۱) بزرگی یکی از بردارها و (۲) مؤلفه‌ی نرده‌ای بردار دوم بر روی بردار اول. برای مثال، در شکل ۳-۱۸ ب، مؤلفه‌ی نرده‌ای $\vec{a}$ بر روی $\vec{b}$، برابر با $a\cos\phi$ است؛ توجه کنید خطی که از سَر بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ عمود می‌شود، مؤلفه‌ی مورد نظر را معین می‌کند. به همین ترتیب، مؤلفه‌ی نرده‌ای $\vec{b}$ بر روی بردار $\vec{a}$، برابر با $b\cos\phi$ است.

هرگاه زاویه‌ی میان دو بردار ϕ، صفر باشد، مؤلفه‌ی یک بردار بر روی بردار دیگر بیشینه است و در نتیجه، حاصل‌ضرب بردارها نیز بیشینه خواهد بود. هرگاه زاویه‌ی ϕ برابر با ۹۰ درجه باشد، مؤلفه‌ی یک بردار بر روی بردار دیگر صفر است و در نتیجه حاصل‌ضرب بردارها نیز صفر خواهد بود.



شکل ۳-۱۸ (الف) دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و زاویه‌ی میان آن‌ها ϕ، معلوم است. (ب) هر بردار یک مؤلفه در راستای بردار دیگر دارد.

معادله‌ی ۳-۲۰ را با توجه به مؤلفه‌ها می‌توان چنین نوشت:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a\cos\phi)(b) = (a)(b\cos\phi) \qquad (۳-۲۱)$$

قانون جابه‌جایی در مورد ضرب نرده‌ای صادق است، در نتیجه، می‌توان نوشت

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

اگر دو بردار به صورت بردارهای یکه در دست باشند ضرب نقطه‌ای آن‌ها چنین نوشته می‌شود

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}})\cdot(b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}) \qquad (۳-۲۲)$$

این معادله را بنابه قانون توزیع‌پذیری می‌توان بسط داد؛ یعنی، هر مؤلفه‌ی برداری بردار اول باید در هر مؤلفه‌ی برداری بردار دوم ضرب شود. با انجام دادن این کار، می‌توان نشان داد که

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \qquad (۳-۲۳)$$

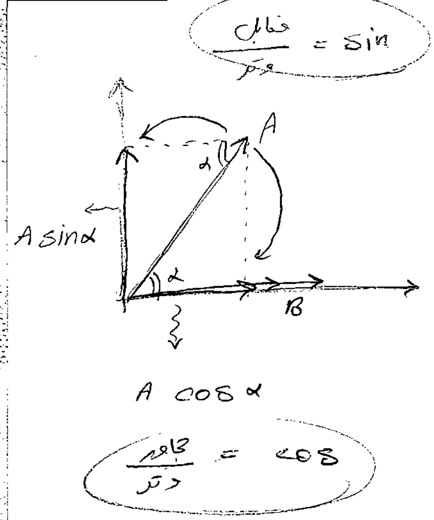
خودآزمایی ۴

بزرگی بردارهای $\vec{C}$ و $\vec{D}$، به ترتیب، ۳ و ۴ واحد است. زاویه‌ی میان بردارهای $\vec{C}$ و $\vec{D}$ را در حالت‌هایی پیدا کنید که $\vec{C}\cdot\vec{D}$ برابر با، (الف) صفر، (ب) ۱۲ واحد، و (پ) ۱۲- واحد، باشد.

ضرب برداری

ضرب برداری دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، که به صورت $\vec{a}\times\vec{b}$ نوشته می‌شود، بردار سوم $\vec{c}$ را به‌وجود می‌آورد، که بزرگی‌اش برابر است با

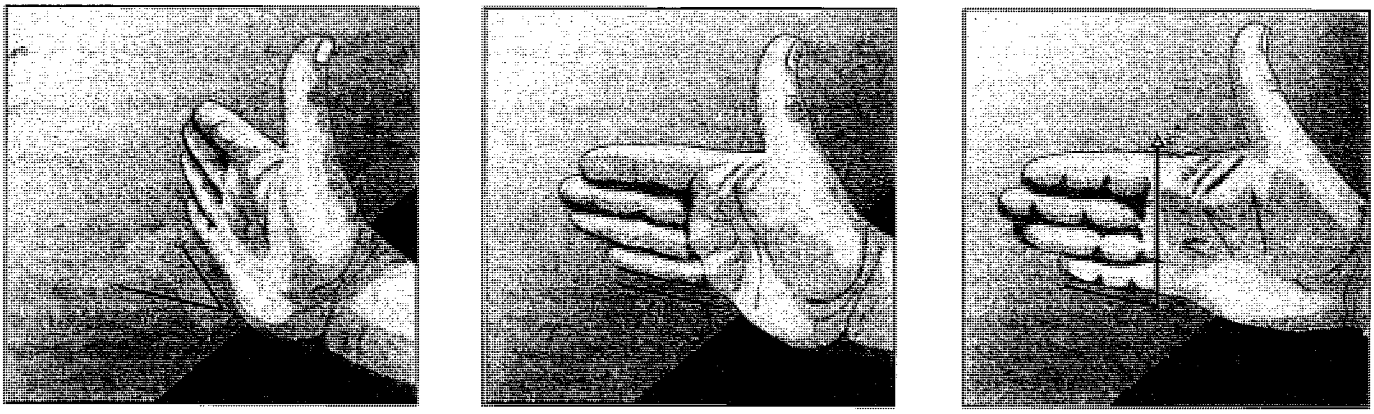
$$c = ab\sin\phi \qquad (۳-۲۴)$$



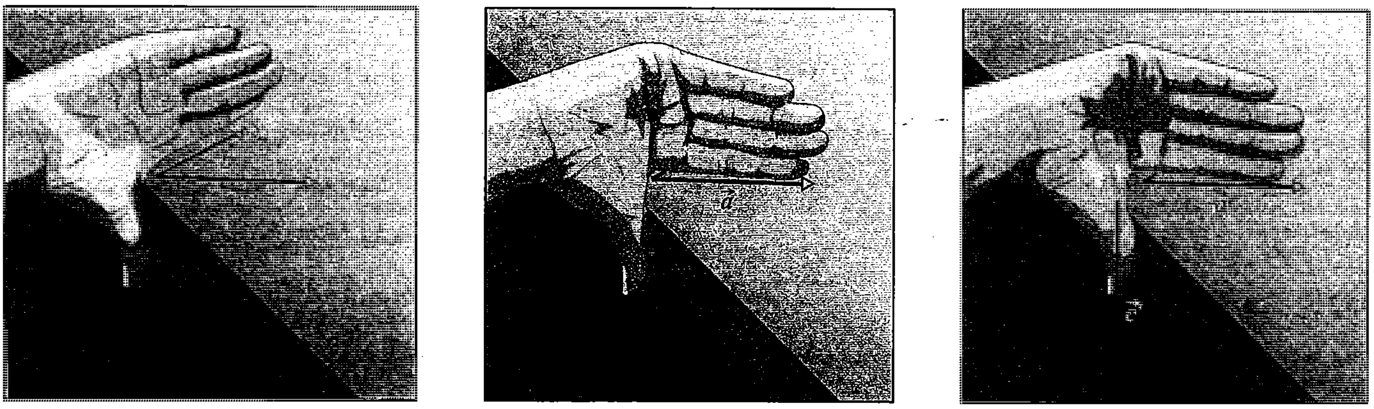
در این معادله ϕ زاویه‌ی **کوچک‌تر** میان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. [باید از زاویه‌ی کوچک‌تر میان بردارها استفاده کرد، زیرا علامت جبری $\sin\phi$ با $\sin(۳۶۰^\circ - \phi)$ تفاوت دارد]. با توجه به نمادگذاری، $\vec{a}\times\vec{b}$ را **ضرب ضربدری** می‌نامند و آن را به صورت «a ضربدر b» می‌خوانند.

هرگاه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ موازی یا پاد موازی باشند، داریم $\vec{a}\times\vec{b} = ۰$. بزرگی $\vec{a}\times\vec{b}$، که به‌صورت $|\vec{a}\times\vec{b}|$ نوشته می‌شود، وقتی بیشینه است که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند.

راستای $\vec{c}$ بر صفحه‌ی شامل $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است. شکل ۳-۱۹ الف، چگونگی تعیین جهت $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ را با استفاده کردن از **قاعده‌ی دست راست** نشان می‌دهد. بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بدون تغییر سمت‌گیری آن‌ها دُم به دُم وصل می‌کنیم و در ذهن خود از محل تلاقی آن‌ها خطی را عمود بر صفحه‌ی شامل بردارها رسم می‌کنیم. اکنون، اگر انگشتان ***دست راست*** خود



(الف)



(ب)

شکل ۳-۱۹ نمایش قاعده‌ی دست راست برای تعیین حاصل‌ضرب دو بردار. (الف) چهار انگشت دست راست را در جهت $\vec{a}$ قرار می‌دهیم و با آن‌ها به طرف بردار $\vec{b}$ اشاره می‌کنیم. انگشت شست در حالت کشیده جهت بردار $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ را نشان می‌دهد. (ب) نشان دادن این خاصیت که $\vec{b}\times\vec{a}$ ناهمسو با $\vec{a}\times\vec{b}$ است.

را به‌طور فرضی حول این خط عمود خم کنیم و از طرف بردار $\vec{a}$ با نوک انگشتان خود بردار $\vec{b}$ را در جهت زاویه‌ی کوچک‌تر میان دو بردار نشان دهیم، انگشت شست در حالت کشیده جهت بردار $\vec{c}$ را نشان خواهد داد.

در ضرب برداری ترتیب عامل‌های ضرب اهمیت دارد. در شکل ۳-۱۹ ب، می‌خواهیم جهت $\vec{c}\,' = \vec{b} \times \vec{a}$ را معین کنیم. پس با چهار انگشت دست راست از بردار $\vec{b}$ تحت زاویه‌ی کوچک‌تر به سمت بردار $\vec{a}$ اشاره می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم که انگشت شست خلاف جهت پیشی را نشان می‌دهد و نتیجه می‌گیریم که $\vec{c}\,' = -\vec{c}$، و از آنجا، داریم

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}) \qquad (۳-۲۵)$$

بنابراین، قانون جابه‌جایی در مورد ضرب برداری صدق نمی‌کند.

با استفاده کردن از نمادگذاری بردار یکه می‌توان نوشت

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}) \times (b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}) \qquad (۳-۲۶)$$

این رابطه را بنا به قانون توزیع‌پذیری می‌توان بسط داد؛ یعنی، هر مؤلفه‌ی برداری بردار اول باید به صورت برداری در هر مؤلفه از بردار دوم ضرب شود. ضرب برداری بردارهای یکه در پیوست ث پایان کتاب ارائه شده است («ضرب بردارها» را ببینید). برای مثال، از بسط دادن معادله‌ی ۳-۲۶، داریم

$$a_x\hat{\mathrm{i}} \times b_x\hat{\mathrm{i}} = a_x b_x(\hat{\mathrm{i}} \times \hat{\mathrm{i}}) = 0$$

زیرا دو بردار یکه‌ی $\hat{\mathrm{i}}$ و $\hat{\mathrm{i}}$ موازی‌اند و حاصل ضرب برداری آن‌ها صفر است. به همین ترتیب، داریم

$$a_x\hat{\mathrm{i}} \times b_y\hat{\mathrm{j}} = a_x b_y(\hat{\mathrm{i}} \times \hat{\mathrm{j}}) = a_x b_y\hat{\mathrm{k}}$$

در مرحله‌ی اخیر برای نشان دادن اینکه بزرگی بردار $\hat{\mathrm{i}} \times \hat{\mathrm{j}}$ برابر با واحد است از معادله‌ی ۳-۲۴ استفاده کرده‌ایم. (بردارهای $\hat{\mathrm{i}}$ و $\hat{\mathrm{j}}$ دارای بزرگی واحدند و زاویه‌ی میان آن‌ها ۹۰ درجه است). هم‌چنین، از قاعده‌ی دست راست برای تعیین جهت $\hat{\mathrm{i}} \times \hat{\mathrm{j}}$ استفاده کرده‌ایم، که همان جهت مثبت محور z (و در نتیجه جهت $\hat{\mathrm{k}}$) است.

اگر به بسط دادن معادله‌ی ۳-۲۶ ادامه دهیم می‌توانیم نشان دهیم که

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{\mathrm{i}} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{\mathrm{j}} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{\mathrm{k}} \qquad (۳-۲۷)$$

برای محاسبه از یک دترمینان (به پیوست ث پایان کتاب رجوع کنید) یا از ماشین‌های ویژه‌ی محاسبه‌های برداری نیز می‌توان استفاده کرد.

برای بررسی این موضوع که هر دستگاه مختصات xyz یک دستگاه مختصات راست ـ دست است، از قاعده‌ی دست راست برای حاصل ضرب برداری $\hat{\mathrm{i}} \times \hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}$ استفاده می‌کنیم. اگر با چهار انگشت دست راست از $\hat{\mathrm{i}}$ (جهت مثبت محور x) به سمت $\hat{\mathrm{j}}$ (جهت مثبت محور y) اشاره کنیم، انگشت شست در حالت کشیده جهت مثبت z (نه جهت منفی z) را نشان خواهد داد. پس، دستگاه مختصات راست ـ دست است.

خودآزمایی ۵

بزرگی بردارهای $\vec{C}$ و $\vec{D}$، به ترتیب ۳ و ۴ واحد است. زاویه‌ی میان $\vec{C}$ و $\vec{D}$ را در حالت‌هایی پیدا کنید که بزرگی حاصل‌ضرب برداری $\vec{C}\times\vec{D}$ برابر با، (الف) صفر، و (ب) ۱۲ واحد، باشد.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۳-۵ محاسبه‌ی زاویه‌ی میان دو بردار با استفاده کردن از ضرب نقطه‌ای

زاویه‌ی ϕ میان بردارهای $\vec{a}=۳/۰\hat{i}-۴/۰\hat{j}$ و $\vec{b}=-۲/۰\hat{i}+۳/۰\hat{k}$ چیست؟ (**هشدار:** اگرچه با استفاده کردن از ماشین‌های ویژه‌ی محاسبه‌های برداری می‌توان عده‌ای از مرحله‌های زیر را فرو گذاشت، اما برای فرا گرفتن ضرب نرده‌ای بهتر است، دست کم در اینجا، تمام این مرحله‌ها را به کار ببریم).

نکته‌های کلیدی

زاویه‌ی میان دو بردار در تعریف ضرب نرده‌ای وجود دارد (معادله‌ی ۳-۲۰):

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\phi \qquad (۳\text{-}۲۸)$$

محاسبات: در معادله‌ی ۳-۲۸، a بزرگی بردار $\vec{a}$ است، که برابر است با

$$a=\sqrt{(۳/۰)^۲+(-۴/۰)^۲}=۵/۰۰ \qquad (۳\text{-}۲۹)$$

و b بزرگی بردار $\vec{b}$ است، که برابر است با

$$b=\sqrt{(-۲/۰)^۲+(۳/۰)^۲}=۳/۶۱ \qquad (۳\text{-}۳۰)$$

طرف چپ معادله‌ی ۳-۲۸ را با نوشتن بردارها به صورت بردارهای یکه و با استفاده کردن از قانون توزیع‌پذیری، می‌توان به طور جداگانه حساب کرد:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(۳/۰\hat{i}-۴/۰\hat{j})\cdot(-۲/۰\hat{i}+۳/۰\hat{k})$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(۳/۰\hat{i})\cdot(-۲/۰\hat{i})+(۳/۰\hat{i})\cdot(۳/۰\hat{k})+(-۴/۰\hat{j})\cdot(-۲/۰\hat{i})+(-۴/۰\hat{j})\cdot(۳/۰\hat{k})$$

اکنون، برای هر یک از جمله‌های رابطه‌ی بالا از معادله‌ی ۳-۲۰ استفاده می‌کنیم. زاویه‌ی میان بردارها در جمله‌ی اول صفر، و در جمله‌های دیگر ۹۰ درجه است. بنابراین، داریم

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-(۶/۰)(۱)+(۹/۰)(۰)+(۸/۰)(۰)-(۱۲)(۰)=-۶/۰$$

با جانشانی این مقدار و نتیجه‌های حاصل از معادله‌های ۳-۲۹ و ۳-۳۰ در معادله ی ۳-۲۸، داریم

$$-۶/۰=(۵/۰۰)(۳/۶۱)\cos\phi$$

و از آنجا

$$\phi=\cos^{-۱}\frac{-۶/۰}{(۵/۰۰)(۳/۶۱)}\Rightarrow$$

$$\phi=۱۰۹^\circ\approx ۱۱۰^\circ \qquad \text{(پاسخ)}$$

مسئله‌ی نمونه‌ی ۳-۶ ضرب برداری، قاعده‌ی دست راست

در شکل ۳-۲۰، بردار $\vec{a}$، که در صفحه‌ی xy قرار دارد، دارای بزرگی ۱۸ واحد و زاویه‌ی آن نسبت به محور x مثبت ۲۵۰ درجه است. بردار $\vec{b}$ در جهت محور z مثبت قرار دارد و بزرگی‌اش ۱۲ واحد است. حاصل ضرب برداری $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ چیست؟

نکته‌ی کلیدی

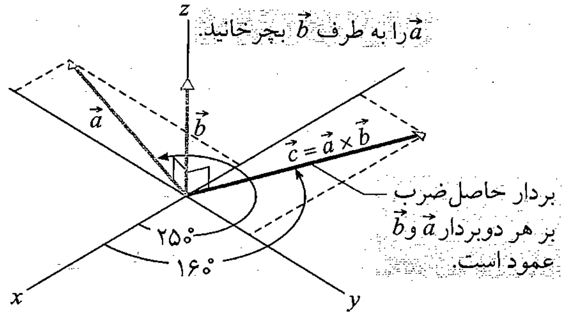
وقتی دو بردار به صورت نمادگذاری بزرگی ـ زاویه معلوم باشند، بزرگی حاصل‌ضرب برداری آن‌ها ازمعادله‌ی ۳-۲۴ وجهت حاصل‌ضرب برداری از قاعده‌ی دست راست شکل ۳-۱۹ به‌دست می‌آید.

محاسبات: برای بزرگی بردار می‌نویسیم

$$c = ab\sin\phi = (۱۸)(۱۲)(\sin ۹۰^\circ) = ۲۱۶ \quad \textbf{(پاسخ)}$$

برای تعیین جهت بردار در شکل ۳-۲۰، فرض کنید انگشتان دست راست خود را حول خط عمود بر صفحه‌ی شامل $\vec{a}$ و $\vec{b}$ (خطی که $\vec{c}$ بر روی آن نشان داده شده است) طوری خم کنید که از بردار $\vec{a}$ به طرف بردار $\vec{b}$ اشاره شود. در این صورت، انگشت شست در حالت کشیده جهت $\vec{c}$ را نشان خواهد داد. بنابراین، همان‌طور که شکل نشان می‌دهد، بردار $\vec{c}$ در صفحه‌ی xy قرار دارد. چون این بردار بر بردار $\vec{a}$ عمود است (حاصل‌ضرب برداری همیشه یک بردار عمود تولید می‌کند) زاویه‌ی آن نسبت به جهت مثبت محور x برابر است با

$$۲۵۰^\circ - ۹۰^\circ = ۱۶۰^\circ \quad \textbf{(پاسخ)}$$



شکل ۳-۲۰ بردار $\vec{c}$ (واقع در صفحه‌ی xy) برابر با حاصل‌ضرب برداری بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۳-۷ ضرب برداری، نمادگذاری بردارهای یکه

اگر داشته باشیم $\vec{a} = ۳\hat{i} - ۴\hat{j}$ و $\vec{b} = -۲\hat{i} + ۳\hat{k}$، حاصل‌ضرب برداری $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ چیست؟

نکته‌ی کلیدی

وقتی دو بردار به صورت نمادگذاری بردار یکه معلوم باشند حاصل‌ضرب برداری آن‌ها را می‌توان با استفاده کردن از قانون توزیع‌پذیری به‌دست آورد.

محاسبات: در اینجا می‌توان نوشت

$$\vec{c} = (۳\hat{i} - ۴\hat{j}) \times (-۲\hat{i} + ۳\hat{k})$$

$$\vec{c} = ۳\hat{i} \times (-۲\hat{i}) + ۳\hat{i} \times ۳\hat{k} + (-۴\hat{j}) \times (-۲\hat{i}) + (-۴\hat{j}) \times ۳\hat{k}$$

اکنون، هر جمله را با استفاده کردن از معادله‌ی ۳-۲۴ حساب می‌کنیم تا جهت بردار با قاعده‌ی دست راست معین شود. جمله‌ی اول در اینجا، زاویه‌ی میان دو بردار ϕ، صفر است. برای جمله‌های دیگر، ϕ برابر با ۹۰ درجه است. در نتیجه، داریم

$$\vec{c} = -۶(۰) + ۹(-\hat{j}) + ۸(-\hat{k}) - ۱۲\hat{i} \Rightarrow$$

$$\vec{c} = -۱۲\hat{i} - ۹\hat{j} - ۸\hat{k} \quad \textbf{(پاسخ)}$$

بردار $\vec{c}$ بر هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است، و این واقعیتی است که با نشان دادن $\vec{c} \cdot \vec{a} = ۰$ و $\vec{c} \cdot \vec{b} = ۰$، می‌توان بررسی کرد. نتیجه آنکه $\vec{c}$ در راستای بردارهای $\vec{a}$ یا $\vec{b}$ مؤلفه‌ای ندارد.

به طور کلی: حاصل‌ضرب برداری، یک بردار عمود به دست می‌دهد، حاصل‌ضرب نقطه‌ای دوبردار عمود بر هم صفر است و دو بردار واقع بر روی یک محور دارای حاصل‌ضرب برداری صفر هستند.

مرور و چکیده‌ی مطالب

نرده‌ای‌ها و بردارها ***نرده‌ای‌ها***، مانند دما، فقط بزرگی دارند. این کمیت‌ها با یک عدد همراه با یکا (مثلاً، $۱۰^\circ C$) مشخص می‌شوند و از قاعده‌های حساب و جبر معمولی پیروی می‌کنند. ***بردارها***، مانند جابه‌جایی، هم بزرگی و هم جهت دارند (مثلاً، ۵ متر به سوی شمال) و از قاعده‌های ویژه‌ی جبر برداری پیروی می‌کنند.

جمع کردن بردارها به روش هندسی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را با ترسیم آن‌ها با یک مقیاس و اتصال به صورت سَر به دُم می‌توان به روش هندسی با هم جمع کرد. برداری که دُم بردار اول را به سَر بردار دوم وصل می‌کند، مجموع برداری $\vec{s}$ را به دست می‌دهد. برای تفریق کردن $\vec{b}$ از $\vec{a}$، جهت $\vec{b}$ را وارون می‌کنیم تا $-\vec{b}$

به‌دست آید؛ سپس، $-\vec{b}$ را با $\vec{a}$ جمع می‌کنیم. جمع برداری جابه‌جایی پذیر است.

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \qquad (۲-۳)$$

و از قانون شرکت‌پذیری پیروی می‌کند

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \qquad (۳-۳)$$

مؤلفه‌های یک بردار برای به دست آوردن ***مؤلفه‌های (نرده‌ای)*** a_x و a_y هر بردار دو بعدی $\vec{a}$، در راستای محورهای مختصات، از انتهای بردار $\vec{a}$ خط‌هایی بر محورهای مختصات عمود می‌کنیم. مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$ عبارت‌اند از

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{و} \quad a_y = a\sin\theta \qquad (۵-۳)$$

که در آن θ زاویه‌ی میان محور x مثبت و بردار $\vec{a}$ است. علامت جبری یک مؤلفه جهت آن را در روی محور مربوط نشان می‌دهد. با در دست داشتن مؤلفه‌های بردار $\vec{a}$، می‌توان بزرگی و سمت‌گیری (جهت) آن را با استفاده کردن از رابطه‌های زیر معین کرد

$$a=\sqrt{a_x^۲+a_y^۲} \quad \text{و} \quad \tan\theta=\frac{a_y}{a_x} \qquad (۶-۳)$$

نمادگذاری بردارهای یکه بردارهای یکه‌ی $\hat{\mathrm{i}}$، $\hat{\mathrm{j}}$ و $\hat{\mathrm{k}}$ دارای بزرگی واحدند و به ترتیب، در جهت‌های مثبت محورهای x، y و z یک دستگاه مختصات راست ـ دست قرار دارند. بردار $\vec{a}$ به‌صورت بردارهای یکه چنین نوشته می‌شود

$$\vec{a}=a_x\hat{\mathrm{i}}+a_y\hat{\mathrm{j}}+a_z\hat{\mathrm{k}} \qquad (۷-۳)$$

که در آن $a_x\hat{\mathrm{i}}$، $a_y\hat{\mathrm{j}}$ و $a_z\hat{\mathrm{k}}$، **مؤلفه‌های برداری** بردار $\vec{a}$ و a_x، a_y و a_z **مؤلفه‌های نرده‌ای** آن بردارند.

جمع کردن بردارها به کمک مؤلفه‌ها برای جمع کردن بردارها به کمک مؤلفه‌ها، از رابطه‌های زیر استفاده می‌کنیم

$$r_x=a_x+b_x \text{ ،} \quad r_y=a_y+b_y \quad \text{و} \quad r_z=a_z+b_z \qquad (۱۰-۳ \text{ تا } ۱۲-۳)$$

در اینجا $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهایی هستند که باید با هم جمع شوند و $\vec{r}$ مجموع برداری است. توجه کنید که مؤلفه‌ها را محور به محور با هم جمع می‌کنیم. هم‌چنین، مجموع برداری را می‌توان به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، یا به صورت نمادگذاری بزرگی ـ زاویه، بیان کرد.

ضرب یک نرده‌ای در یک بردار حاصل ضرب نرده‌ای s در بردار $\vec{v}$، یک بردار جدید است که بزرگی‌اش sv است. جهت این بردار، اگر s مثبت باشد همسو با بردار $\vec{v}$ و اگر s منفی باشد، ناهمسو با بردار $\vec{v}$ است. (علامت منفی s، بردار را معکوس می‌کند). برای تقسیم کردن $\vec{v}$ بر s، بردار $\vec{v}$ را در $\frac{۱}{s}$ ضرب می‌کنیم.

ضرب نرده‌ای **ضرب نرده‌ای** (یا **ضرب نقطه‌ای**) دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به صورت $\vec{a}\cdot\vec{b}$ نوشته می‌شود و کمیتی ***نرده‌ای*** است، که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\phi \qquad (۲۰-۳)$$

در این رابطه ϕ زاویه‌ی میان بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. حاصل‌ضرب نرده‌ای، بسته به مقدار ϕ، ممکن است مثبت، صفر یا منفی باشد. حاصل‌ضرب نرده‌ای، از ضرب کردن بزرگی یکی از بردارها در مؤلفه‌ی بردار دیگر در راستای بردار اول به دست می‌آید. توجه کنید که $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$، یعنی، ضرب نرده ای از قانون جابه‌جایی‌پذیری پیروی می‌کند.

با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه می‌توان نوشت

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\hat{\mathrm{i}}+a_y\hat{\mathrm{j}}+a_z\hat{\mathrm{k}})\cdot(b_x\hat{\mathrm{i}}+b_y\hat{\mathrm{j}}+b_z\hat{\mathrm{k}}) \qquad (۲۲-۳)$$

این رابطه را می‌توان به کمک قانون توزیع‌پذیری بسط داد.

ضرب برداری **ضرب برداری** (یا **ضربدری**) دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به‌صورت $\vec{a}\times\vec{b}$ نوشته می‌شود و کمیتی ***برداری*** مانند $\vec{c}$ است، که بزرگی‌اش از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$c=ab\sin\phi \qquad (۲۴-۳)$$

در این رابطه ϕ زاویه‌ی کوچک‌تر میان بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ است. بردار $\vec{c}$ بر صفحه‌ی شامل بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است و مطابق شکل ۳-۱۹، با قاعده‌ی دست راست معین می‌شود. توجه کنید که $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$، یعنی، ضرب برداری از قانون جابه‌جایی پیروی نمی‌کند.

با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه، می‌توان نوشت

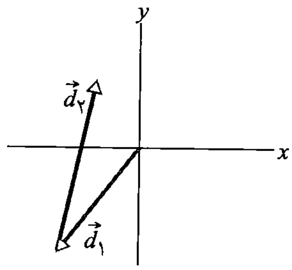
$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\hat{\mathrm{i}}+a_y\hat{\mathrm{j}}+a_z\hat{\mathrm{k}})\times(b_x\hat{\mathrm{i}}+b_y\hat{\mathrm{j}}+b_z\hat{\mathrm{k}}) \qquad (۲۶-۳)$$

این رابطه را به کمک قانون توزیع‌پذیری می‌توان بسط داد.

پرسش‌ها

۱ آیا جمع بزرگی‌های دو بردار می‌تواند با بزرگی مجموع آن دو بردار برابر باشد؟ اگر نه، چرا؟

۲ دو بردار نشان داده شده در شکل ۳-۲۱ در صفحه‌ی xy قرار دارند. علامت مؤلفه‌های x و y، به ترتیب، برای هر یک از بردارهای (الف) $\vec{d}_1+\vec{d}_2$، (ب) $\vec{d}_1-\vec{d}_2$ و (پ) $\vec{d}_2-\vec{d}_1$، چیست؟

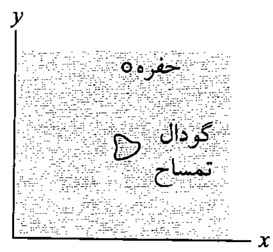


شکل ۳-۲۱ پرسش ۲.

۳ هر کس بخواهد عضو تیم گلف «تمساح» در دانشگاه فلوریدا بشود باید روی چمن زمینی بازی کند که در آن یک گودال تمساح وجود دارد. شکل ۳-۲۲، نمایی از این زمین گلف را از بالا نشان می‌دهد، که دستگاه مختصات xy نیز بر آن منطبق شده است. اعضای تیم باید بازی را از مبداء مختصات شروع کنند و توپ را به درون حفره‌ای بیندازند که مختصات x و y آن $(8\,m$ و $12\,m)$ است، اما آن‌ها می‌توانند فقط با استفاده کردن از یک یا چند جابه‌جایی زیر، یک یا چند بار، توپ گلف را به درون حفره بیندازند:

$$\vec{d}_1=(8\,m)\hat{i}+(6\,m)\hat{j}\ ،\ \vec{d}_2=(6\,m)\hat{j}\ \text{و}\ \vec{d}_3=(8\,m)\hat{i}$$

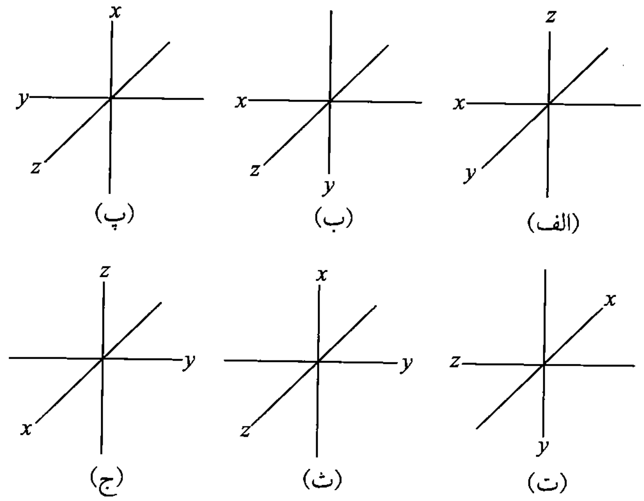
مختصات x و y گودال تمساح $(8\,m$ و $6\,m)$ است. اگر یک عضو تیم بتواند توپ را بدون افتادن در گودال یا عبور از بالای آن به حفره وارد کند خود به خود به عضویت تیم دانشگاه ایالتی فلوریدا در می‌آید. برای دوری جُستن از گودال تمساح و عضو شدن در تیم دانشگاه، بازیکن چه ترتیبی از جابه‌جایی‌ها را باید انتخاب کند؟



شکل ۳-۲۲ پرسش ۳.

۴ معادله‌ی ۳-۲ نشان می‌دهد که جمع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ جابه‌جایی‌پذیر است. آیا منظور این است که تفریق دو بردار هم جابه‌جایی‌پذیر است، به نحوی که داشته باشیم $\vec{a}-\vec{b}=\vec{b}-\vec{a}$؟

۵ در شکل ۳-۲۳، کدام یک از آرایش‌های محورها، «دستگاه مختصات راست ـ دست» را نشان می‌دهد؟ طبق معمول، حروف کنار هر محور، جهت مثبت محور را نشان می‌دهند.



شکل ۳-۲۳ پرسش ۵.

۶ دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را طوری تعریف کنید که در رابطه‌های زیر صدق کنند

(الف) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ و $a+b=c$؛

(ب) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}$؛

(پ) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ و $a^2+b^2=c^2$.

۷ اگر داشته باشیم $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+(-\vec{c})$، آیا می‌توان نتیجه گرفت که:

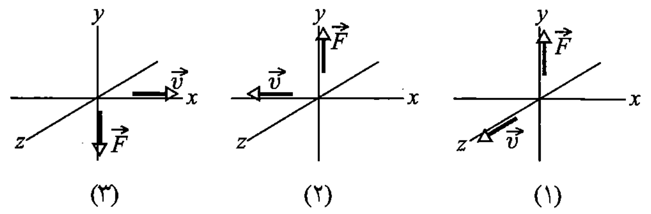
(الف) $\vec{a}+(-\vec{d})=\vec{c}+(-\vec{b})$؛

(ب) $\vec{a}=(-\vec{b})+\vec{d}+\vec{c}$؛

(پ) $\vec{c}+(-\vec{d})=\vec{a}+\vec{b}$؟

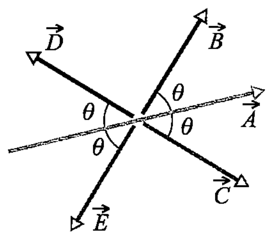
۸ اگر داشته باشیم $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$، آیا $\vec{b}$ و $\vec{c}$ باید باهم برابر باشند؟

۹ اگر داشته باشیم $\vec{F}=q(\vec{v}\times\vec{B})$ و $\vec{v}$ بر $\vec{B}$ عمود باشد، جهت $\vec{B}$ در سه وضعیت نشان داده شده در شکل ۳-۲۴ برای حالتی که q (الف) مثبت و (ب) منفی باشد، چیست؟



شکل ۳-۲۴ پرسش ۹.

۱۰ شکل ۳-۲۵، بردار $\vec{A}$ و چهار بردار دیگر را نشان می‌دهد که بزرگی یکسان اما سمت‌گیری‌های متفاوت دارند. (الف) حاصل‌ضرب نرده‌ای کدام یک از این چهار بردار در $\vec{A}$، با هم برابر است؟ (ب) حاصل‌ضرب نرده‌ای کدام بردار در $\vec{A}$، منفی است؟



شکل ۳-۲۵ پرسش ۱۰.

۱۱ در یک بازی که در درون یک پیچراه سه بعدی انجام می‌شود، شما باید مهره‌ی بازی خود را از نقطه‌ی ***شروع*** در مختصات x، y و z (۰، ۰ و ۰) تا نقطه‌ی ***پایان*** در مختصات x، y و z (−۲cm، ۴cm و −۴cm) حرکت دهید. این مهره‌ی بازی فقط می‌تواند جابه‌جایی‌های (برحسب سانتی‌متر) داده شده در زیر را انجام دهد. اگر مهره‌ی بازی در مسیر خود در مختصات (−۵cm، −۱cm و −۱cm) یا (۵cm، ۲cm و −۱cm) قرار گیرد، شما بازنده می‌شوید. این مهره کدام جابه‌جایی‌ها را و به چه ترتیبی باید انجام دهد تا به نقطه‌ی ***پایان*** برسد؟

$$\vec{r}=2\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k} \qquad \vec{p}=-7\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$$
$$\vec{s}=3\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k} \qquad \vec{q}=2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$$

۱۲ مؤلفه‌های x و y چهار بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$، $\vec{c}$ و $\vec{d}$ در زیر داده شده‌اند. ماشین حساب شما، که از آن برای پیدا کردن θ بنا به معادله‌ی ۳-۶ استفاده می‌کنید، برای کدام بردار زاویه‌ی درست θ را نشان می‌دهد؟ ابتدا پاسخ را با شکل ۳-۱۲ بیازمایید و سپس با ماشین حساب خود پاسخ‌ها را مورد بازبینی قرار دهید.

$$a_x=3 \quad a_y=3 \quad c_x=-3 \quad c_y=-3$$
$$b_x=-3 \quad b_y=3 \quad d_x=3 \quad d_y=-3$$

۱۳ کدام یک از رابطه‌های برداری زیر درست (با معنی) هستند؟ در هر رابطه‌ی نادرست، چه چیزی غلط است؟

(الف) $\vec{A}\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C})$　　(ج) $\vec{A}+(\vec{B}\times\vec{C})$

(ب) $\vec{A}\times(\vec{B}\cdot\vec{C})$　　(چ) $5+\vec{A}$

(پ) $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$　　(ح) $5+(\vec{B}\cdot\vec{C})$

(ت) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$　　(خ) $5+(\vec{B}\times\vec{C})$

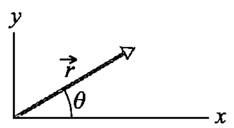
(ث) $\vec{A}+(\vec{B}\cdot\vec{C})$　　(د) $(\vec{A}\cdot\vec{B})+(\vec{B}\times\vec{C})$

مسئله‌ها

پودمان ۳-۱ بردارها و مؤلفه‌های آن‌ها

* ۱ اگر زاویه‌ی بردار $\vec{a}$ نسبت به محور x مثبت ۲۵۰ درجه به‌طور پادساعت‌گرد و بزرگی بردار ۷٫۳m باشد، (الف) مؤلفه‌ی x و (ب) مؤلفه‌ی y این بردار چیست؟

* ۲ بردار جابه‌جایی $\vec{r}$، واقع درصفحه‌ی xy، دارای بزرگی ۱۲m و در جهت زاویه‌ی $\theta=30^\circ$ در شکل ۳-۲۶ است. مطلوب است تعیین (الف) مؤلفه‌ی x و (ب) مؤلفه‌ی y این بردار.



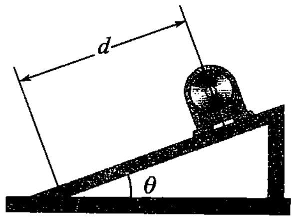
شکل ۳-۲۶ مسئله‌ی ۲.

* ۳ مؤلفه‌ی x بردار $\vec{A}$، برابر با −۲۵٫۰m و مؤلفه‌ی y آن بردار برابر با +۴۰٫۰m است. (الف) بزرگی $\vec{A}$ چقدر است؟ (ب) زاویه‌ی میان $\vec{A}$ و محور x مثبت چیست؟

* ۴ زاویه‌های زیر را برحسب رادیان بیان کنید: (الف) ۲۰/۰ درجه، (ب) ۵۰/۰ درجه، (پ) ۱۰۰ درجه. زاویه‌های زیر را به درجه تبدیل کنید: (ت) ۰/۳۳۰rad، (ث) ۲/۱۰rad و (ج) ۷/۷۰rad.

* ۵ یک کشتی به مقصد نقطه‌ای در شمال واقع در فاصله‌ی ۱۲۰km به حرکت در می‌آید. توفان نابه‌هنگامی این کشتی را به نقطه‌ای در سمت خاور واقع در فاصله‌ی ۱۰۰km از نقطه‌ی حرکتش می‌برد. این کشتی (الف) چه مسافتی را و (ب) در چه جهتی باید بپیماید تا به مقصد اصلی‌اش برسد؟

* ۶ شکل ۳-۲۷ قطعه‌ی سنگین یک دستگاه را نشان می‌دهد که به اندازه‌ی مسافت $d = ۱۲/۵\,\text{m}$ بر روی الواری با زاویه‌ی شیب $\theta = ۲۰/۰°$ نسبت به سطح افقی به سمت بالا برده می‌شود. این قطعه (الف) چقدر در راستای قائم و (ب) چقدر در راستای افقی، حرکت کرده است؟



شکل ۳-۲۷ مسئله‌ی ۶.

* ۷ دو جابه‌جایی، یکی با بزرگی ۳m و دیگری با بزرگی ۴m را در نظر بگیرید. نشان دهید که این بردارهای جابه‌جایی را چگونه می‌توان با هم ترکیب کرد تا یک جابه‌جایی برایند با بزرگی (الف) ۷m، (ب) ۱m و (پ) ۵m، به دست آید.

پودمان ۳-۲ بردارهای یکه، جمع کردن بردارها به کمک مؤلفه‌ها

* ۸ شخصی مسیر زیر را می‌پیماید: ۳/۱km به سوی شمال، سپس ۲/۴km به سوی باختر و سرانجام، ۵/۲km به سوی جنوب. (الف) نمودار برداری نمایشگر این حرکت را رسم کنید. یک پرنده از نقطه‌ی آغاز حرکت (ب) چه مسافتی را، و (پ) در چه جهتی، باید به طور مستقیم پرواز کند تا به همان نقطه‌ی پایانی برسد؟

* ۹ دو بردار زیر مفروض‌اند:

$$\vec{a} = (۴/۰\,\text{m})\hat{\text{i}} - (۳/۰\,\text{m})\hat{\text{j}} + (۱/۰\,\text{m})\hat{\text{k}}$$

و

$$\vec{b} = (-۱/۰\,\text{m})\hat{\text{i}} + (۱/۰\,\text{m})\hat{\text{j}} + (۴/۰\,\text{m})\hat{\text{k}}$$

بردارهای زیر را به صورت نمادگذاری بردارهای یکه معین کنید، (الف) $\vec{a}+\vec{b}$ (ب) $\vec{a}-\vec{b}$، و (پ) بردار سوم $\vec{c}$، به‌گونه‌ای که رابطه‌ی $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=۰$ برقرار باشد.

* ۱۰ مؤلفه‌های (الف) x، (ب) y و (پ) z، مجموع برداری $\vec{r}$ دو جابه‌جایی $\vec{c}$ و $\vec{d}$ را به ازای مؤلفه‌های $c_x = ۷/۴$، $c_y = -۳/۸$، $c_z = -۶/۱$؛ $d_x = ۴/۴$، $d_y = -۲/۰$ و $d_z = ۳/۳$، که برحسب متر داده شده‌اند، معین کنید.

* ۱۱ (الف) مجموع برداری $\vec{a}+\vec{b}$ دو بردار زیر به صورت نمادگذاری بردارهای یکه چیست؟

$$\vec{a} = (۴/۰\,\text{m})\hat{\text{i}} + (۳/۰\,\text{m})\hat{\text{j}}$$

و

$$\vec{b} = (-۱۳/۰\,\text{m})\hat{\text{i}} + (۷/۰\,\text{m})\hat{\text{j}}$$

(ب) بزرگی و (پ) زاویه‌ی بردار $\vec{a}+\vec{b}$ (نسبت به بردار یکه‌ی $\hat{\text{i}}$) چیست؟

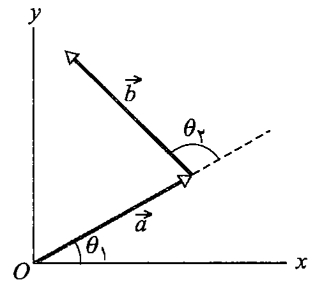
* ۱۲ خودرویی مسافت ۵۰km را به سوی خاور، سپس ۳۰km را به سوی شمال و سپس ۲۵km را در جهت ۳۰ درجه‌ی خاور محور شمالی می‌پیماید. نمودار برداری حرکت را رسم کنید و (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی جابه‌جایی کل خودرو را از نقطه‌ی آغاز حرکتش به دست آورید.

* ۱۳ شخصی می‌خواهد به نقطه‌ای برسد که ۳/۴۰km از مکان فعلی او فاصله دارد و در جهت ۳۵/۰ درجه‌ی شمال محور خاوری است. اما او باید در راستای خیابان‌هایی حرکت کند که دارای سمت‌گیری شمالی ـ جنوبی یا خاوری ـ باختری هستند. او چه مسافت کمینه‌ای را باید بپیماید تا به مقصد مورد نظرش برسد؟

* ۱۴ فرض کنید قرار است در یک دشت تخت چهار حرکت راست‌خط انجام دهید و با آغاز کردن حرکت از مبداء دستگاه مختصات xy به‌نقطه‌ای با مختصات x و y (۱۴۰m‒ و ۳۰m) بروید. مؤلفه‌ی x و مؤلفه‌ی y حرکت‌های شما، برحسب متر

به‌ترتیب، عبارت‌اند از: (۲۰ و ۶۰)، پس از آن (b_x و ۷۰−)، سپس (۲۰− و c_y) و سرانجام (۶۰− و ۷۰−). (الف) مؤلفه‌ی b_x و (ب) مؤلفه‌ی c_y چیست؟ (پ) بزرگی و (ت) زاویه‌ی جابه‌جایی کل نسبت به جهت مثبت محور x چیست؟

* **۱۵** دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در شکل ۳–۲۸ دارای بزرگی ۱۰٫۰m هستند و زاویه‌های آن‌ها عبارت‌اند از: $\theta_1 = ۳۰^\circ$ و $\theta_2 = ۱۰۵^\circ$. مطلوب است تعیین، (الف) مؤلفه‌ی x و (ب) مؤلفه‌ی y مجموع دو بردار $\vec{r}$، (پ) بزرگی و (ت) زاویه‌ی بردار $\vec{r}$، نسبت به محور x مثبت.



شکل ۳–۲۸ مسئله‌ی ۱۵.

* **۱۶** بردارهای جابه‌جایی زیر مفروض‌اند:

$$\vec{a} = (۳٫۰\,\mathrm{m})\hat{\mathrm{i}} + (۴٫۰\,\mathrm{m})\hat{\mathrm{j}}$$

و

$$\vec{b} = (۵٫۰\,\mathrm{m})\hat{\mathrm{i}} + (-۲٫۰\,\mathrm{m})\hat{\mathrm{j}}$$

مطلوب است تعیین بردار $\vec{a}+\vec{b}$، (الف) به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، و هم‌چنین، به‌صورت (ب) بزرگی و (پ) زاویه (نسبت به $\hat{\mathrm{i}}$). اکنون، بردار $\vec{b}-\vec{a}$ را هم (ت) به صورت نمادگذاری بردارهای یکه و به صورت (ث) بزرگی، و (ج) زاویه، معین کنید.

* **۱۷** سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ واقع در صفحه‌ی xy دارای بزرگی یکسان ۵۰m هستند. زاویه‌ی این بردارها نسبت به محور x مثبت، به‌ترتیب °۳۰، °۱۹۵ و °۳۱۵ است. (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی بردار $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$، (پ) بزرگی و (ت) زاویه‌ی بردار $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$، چیست؟ (ث) بزرگی و (ج) زاویه‌ی بردار چهارم $\vec{d}$، به گونه‌ای که رابطه‌ی $(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{c}+\vec{d})=۰$ برقرار باشد، چیست؟

* **۱۸** در مجموع برداری $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$، بزرگی بردار $\vec{A}$ برابر با ۱۲٫۰m و زاویه‌اش نسبت به‌محور $x+$ درجهت پادساعت‌گرد ۴۰٫۰ درجه، و بزرگی بردار $\vec{C}$ برابر با ۱۵٫۰m و زاویه‌اش نسبت به محور $x-$ در جهت پادساعت‌گرد ۲۰٫۰ درجه، است. (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی بردار $\vec{B}$ (نسبت به محور $x+$) چیست؟

* **۱۹** در یک بازی شطرنج بر روی چمن، که مهره‌ها باید در مرکزهای خانه‌های مربع شکل به ضلع ۱٫۰۰m حرکت کنند، یک اسب به صورت زیر حرکت داده می‌شود: (۱) دو خانه به پیش‌سو، یک‌خانه به راست‌سو؛ (۲) دو خانه به چپ‌سو، یک خانه به پیش‌سو؛ (۳) دو خانه به پیش‌سو، یک خانه به چپ‌سو. (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی (نسبت به «پیش‌سو») جابه‌جایی کل اسب در سه حرکت چیست؟

** **۲۰** کاوشگری در هنگام بازگشت به پایگاه خود گرفتار بارش برف می‌شود (بارش برف چنان شدید است که تمیز دادن بین زمین و آسمان میسر نیست). او باید ۵٫۶km به سمت شمال حرکت می‌کرد، اما پس از کم شدن شدت بارش برف متوجه می‌شود که به اندازه‌ی ۷٫۸km در جهت ۵۰ درجه‌ی شمال محور خاوری رفته است. او اکنون (الف) چه مسافتی و (ب) در چه جهتی، باید بپیماید تا به پایگاه خود برسد؟

** **۲۱** مورچه‌ای که از آفتاب بعدازظهر داغ تکزاس به ستوه آمده است در صفحه‌ی مختصات xy رسم شده بر روی زمین به این سو و آن سو می‌دود. مؤلفه‌های x و y چهار حرکت پی در پی مورچه، برحسب سانتی‌متر، عبارت‌اند از: (۳۰٫۰ و ۴۰٫۰)، (b_x و ۷۰٫۰−)، (۲۰٫۰− و c_y) و (۸۰٫۰− و ۷۰٫۰−). مؤلفه‌های x و y جابه‌جایی کل این چهار حرکت (۱۴۰− و ۲۰٫۰−) است. (الف) b_x و (ب) c_y چیست؟ (پ) بزرگی و (ت) زاویه‌ی جابه‌جایی کل (نسبت به جهت مثبت محور x) چیست؟

** **۲۲** (الف) مجموع چهار بردار زیر به صورت نمادگذاری بردارهای یکه چیست؟ برای این مجموع، (ب) بزرگی، (پ) زاویه برحسب درجه، و (ت) زاویه بر حسب رادیان، چیست؟

$\vec{E}$: ۶٫۰۰m , +۰٫۹۰۰rad　　$\vec{F}$: ۵٫۰۰m , −۷۵٫۰°

$\vec{G}$: ۴٫۰۰m , +۱٫۲۰rad　　$\vec{H}$: ۶٫۰۰m , −۲۱۰°

** ۲۳ اگر بردار $\vec{B}$ با بردار $\vec{C}=۳/۰\hat{i}+۴/۰\hat{j}$ جمع شود، نتیجه‌ی حاصل برداری در جهت مثبت محور y است که بزرگی‌اش برابر با بزرگی بردار $\vec{C}$ است. بزرگی بردار $\vec{B}$ چیست؟

** ۲۴ بردار $\vec{A}$ واقع در راستای محور x، با بردار $\vec{B}$ با بزرگی $۷/۰\,\mathrm{m}$ جمع می‌شود. حاصل جمع یک بردار سوم در راستای محور y است که بزرگی‌اش $۳/۰$ برابر بزرگی بردار $\vec{A}$ است. بزرگی بردار $\vec{A}$ چیست؟

** ۲۵ آبادی B به فاصله‌ی $۲۵\,\mathrm{km}$ در خاور آبادی A واقع است. شتری از آبادی A به راه می‌افتد، مسافت $۲۴\,\mathrm{km}$ را در جهت ۱۵ درجه‌ی جنوب محور خاوری می‌پیماید و سپس به اندازه‌ی $۸/۰\,\mathrm{km}$ به سمت شمال پیش می‌رود. سرانجام، این شتر به چه فاصله‌ای از آبادی B می‌رسد؟

** ۲۶ مجموع چهار بردار زیر را: (الف) به صورت نمادگذاری بردارهای یکه و به صورت (ب) بزرگی و (پ) زاویه، به دست آورید.

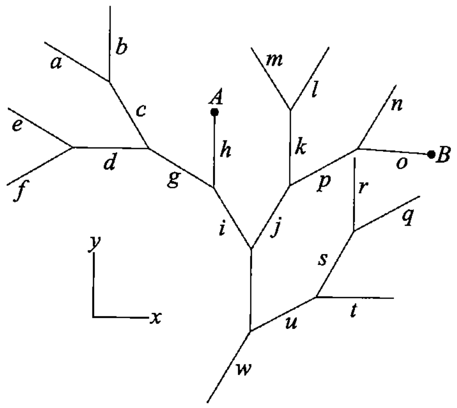
$$\vec{A}=(۲/۰۰\,\mathrm{m})\hat{i}+(۳/۰۰\,\mathrm{m})\hat{j} \qquad \vec{B}:۴/۰۰\,\mathrm{m}\ ,\ +۶۵/۰^\circ$$

$$\vec{C}=(-۴/۰۰\,\mathrm{m})\hat{i}+(-۶/۰۰\,\mathrm{m})\hat{j} \qquad \vec{D}:۵/۰۰\,\mathrm{m}\ ,\ -۲۳۵^\circ$$

** ۲۷ اگر داشته باشیم $\vec{d}_۱+\vec{d}_۲=۵\vec{d}_۳$ ،$\vec{d}_۱-\vec{d}_۲=۳\vec{d}_۳$ و $\vec{d}_۳=۲\hat{i}+۴\hat{j}$، (الف) $\vec{d}_۱$ و (ب) $\vec{d}_۲$ به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چه خواهند بود؟

** ۲۸ دو سوسک روی یک سطح صاف شنی از یک نقطه شروع به حرکت می‌کنند. سوسک ۱ به اندازه‌ی $۰/۵\,\mathrm{m}$ به سمت خاور و سپس به اندازه‌ی $۰/۸۰\,\mathrm{m}$ در جهت زاویه‌ی ۳۰ درجه‌ی شمال محور خاوری پیش می‌رود. سوسک ۲ نیز دو حرکت انجام می‌دهد، که حرکت اولش به اندازه‌ی $۱/۶\,\mathrm{m}$ در جهت زاویه‌ی ۴۰ درجه‌ی خاور محور شمالی است. (الف) بزرگی و (ب) جهت حرکت دوم این سوسک چه باید باشد تا به محل جدید سوسک ۱ برسد؟

** ۲۹ مورچه‌های توی حیاط خانه، اغلب، یک شبکه از ردهای آغشته به‌مواد شیمیایی برای هدایت در مسیر حرکتشان به‌جامی‌گذارند. این ردها با دور شدن از لانه به‌طور مرتب دنباله‌ای از شاخه‌ها (*دو شاخه‌ها*) ایجاد می‌کنند و زاویه‌ی میان شاخه‌ها ۶۰ درجه است. هرگاه مورچه‌ی سرگردانی به یکی از این شاخه‌ها برسد می‌تواند راه خود را به سوی لانه پیدا کند. اگر مورچه در حال دورشدن از لانه باشد دو راه انتخاب شامل یک چرخش کوچک در مسیر خود دارد، که یکی تحت زاویه‌ی ۳۰ درجه به چپ‌سو و دیگری تحت زاویه‌ی ۳۰ درجه به راست‌سو است. اما اگر مورچه در حال نزدیک شدن به لانه باشد فقط یک راه انتخاب دارد. شکل ۳-۲۹، نمونه‌ای از یک رد به جا مانده از مورچه را نشان می‌دهد که شامل شاخه‌های راست نام‌گذاری شده به طول $۲/۰\,\mathrm{cm}$ است و زاویه‌ی میان هر دو شاخگی به‌طور متقارن ۶۰ درجه است. مسیر v با محور y موازی است. اگر مورچه از نقطه‌ی A به این شبکه وارد شود، (الف) بزرگی و(ب) زاویه‌ی جابه‌جایی (نسبت به جهت مثبت محور x در شکل) از لانه (که می‌توانید آن‌را درشکل پیدا کنید) چیست؟ اگر مورچه از نقطه‌ی B به شبکه وارد شود، (پ) بزرگی و (ت) زاویه‌ی بردار جابه‌جایی، چیست؟



شکل ۳-۲۹ مسئله‌ی ۲۹.

** ۳۰ دو بردار زیر مفروض‌اند:

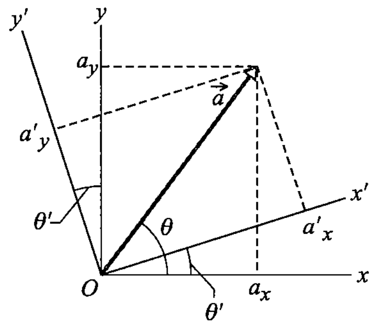
$$\vec{a}=(۴/۰\,\mathrm{m})\hat{i}-(۳/۰\,\mathrm{m})\hat{j}$$

و

$$\vec{b}=(۶/۰\,\mathrm{m})\hat{i}+(۸/۰\,\mathrm{m})\hat{j}$$

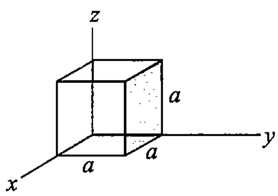
مطلوب است تعیین، (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی بردار $\vec{a}$ (نسبت به $\hat{i}$)؛ (پ) بزرگی و (ت) زاویه‌ی بردار $\vec{b}$؛ (ث) بزرگی و (ج) زاویه‌ی بردار $\vec{a}+\vec{b}$؛ (چ) بزرگی و (ح) زاویه‌ی بردار $\vec{b}-\vec{a}$؛ (خ) بزرگی و (د) زاویه‌ی بردار $\vec{a}-\vec{b}$؛ (ذ) زاویه‌ی میان بردارهای $\vec{b}-\vec{a}$ و $\vec{a}-\vec{b}$.

** **۳۱** در شکل ۳-۳۰، بردار $\vec{a}$ با بزرگی $۱۷/۰\,\text{m}$ تحت زاویه‌ی $\theta = ۵۶/۰^\circ$ به صورت پادساعت‌گرد نسبت به محور $+x$ قرار دارد. مؤلفه‌های (الف) a_x و (ب) a_y، این بردار را پیدا کنید. یک دستگاه مختصات دیگر تحت زاویه‌ی $\theta' = ۱۸/۰^\circ$ نسبت به این دستگاه مختصات قرار گرفته است. مؤلفه‌های (پ) a'_x و (ت) a'_y را در این دستگاه مختصات پریم‌دار معین کنید.



شکل ۳-۳۰ مسئله‌ی ۳۱.

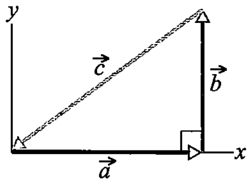
*** **۳۲** شکل ۳-۳۱ مکعبی به ضلع a را نشان می‌دهد که یک گوشه‌ی آن در مبداء دستگاه محورهای مختصات xyz قرار دارد. ***قطر اصلی*** خطی است که از یک‌گوشه‌ی مکعب با عبور از مرکز به گوشه‌ی مقابل وصل می‌شود. با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه، قطر اصلی مکعب را چنان پیدا کنید که از یکی از نقاط با مختصات x، y و z زیر آغاز شود: (الف) مختصات (۰، ۰ و ۰)، (ب) مختصات (a، ۰ و ۰)، (پ) مختصات (۰، a و ۰) و (ت) مختصات (a، a و ۰). (ث) زاویه‌ی میان قطرهای اصلی را با هر یک از ضلع‌های مجاور معین کنید. (ج) طول قطرهای اصلی را برحسب a حساب کنید.



شکل ۳-۳۱ مسئله‌ی ۳۲.

پودمان ۳-۳ ضرب کردن بردارها

* **۳۳** در بردارهای شکل ۳-۳۲، داریم $a = ۴$، $b = ۳$، و $c = ۵$. (الف) بزرگی و (ب) جهت بردار $\vec{a}\times\vec{b}$، (پ) بزرگی و (ت)



شکل ۳-۳۲ مسئله‌های ۳۳ و ۵۴.

جهت بردار $\vec{a}\times\vec{c}$ و (ث) بزرگی و (ج) جهت بردار $\vec{b}\times\vec{c}$، چیست؟ (محور z نشان داده نشده است).

* **۳۴** دو بردار به‌صورت $\vec{a} = ۳/۰\hat{\text{i}} + ۵/۰\hat{\text{j}}$ و $\vec{b} = ۲/۰\text{i} + ۴/۰\hat{\text{j}}$ داده شده‌اند. مطلوب است تعیین (الف) $\vec{a}\times\vec{b}$، (ب) $\vec{a}\cdot\vec{b}$، (پ) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$ و (ت) تصویر بردار $\vec{a}$ در راستای بردار $\vec{b}$. [*راهنمایی:* برای قسمت (ت) معادله‌ی ۳-۲۰ و شکل ۳-۱۸ را در نظر بگیرید].

* **۳۵** دو بردار $\vec{r}$ و $\vec{s}$ در صفحه‌ی xy واقع‌اند. بزرگی‌های آن‌ها، به ترتیب، ۴/۵۰ واحد و ۷/۳۰ واحد و زاویه‌های جهت‌های آن‌ها، ۳۲۰° و $۸۵/۰^\circ$ به صورت پادساعت‌گرد نسبت به محور x مثبت است. کمیت‌های (الف) $\vec{r}\cdot\vec{s}$ و (ب) $\vec{r}\times\vec{s}$، را پیدا کنید.

* **۳۶** اگرداشته باشیم $\vec{d}_۱ = ۳\hat{\text{i}} - ۲\hat{\text{j}} + ۴\hat{\text{k}}$ و $\vec{d}_۲ = -۵\hat{\text{i}} + ۲\hat{\text{j}} - \hat{\text{k}}$، حاصل عبارت $(\vec{d}_۱ + \vec{d}_۲)\cdot(\vec{d}_۱ \times ۴\vec{d}_۲)$ چیست؟

* **۳۷** سه بردار به صورت $\vec{a} = ۳/۰\hat{\text{i}} + ۳/۰\hat{\text{j}} - ۲/۰\hat{\text{k}}$، $\vec{b} = -۱/۰\hat{\text{i}} - ۴/۰\hat{\text{j}} + ۲/۰\hat{\text{k}}$ و $\vec{c} = ۲/۰\hat{\text{i}} + ۲/۰\hat{\text{j}} + ۱/۰\hat{\text{k}}$ داده شده‌اند. مطلوب است تعیین (الف) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$، (ب) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$ و (پ) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$.

** **۳۸** سه بردار زیر مفروض‌اند:

$$\vec{A} = ۲/۰۰\hat{\text{i}} + ۳/۰۰\hat{\text{j}} - ۴/۰۰\hat{\text{k}}$$
$$\vec{B} = -۳/۰۰\hat{\text{i}} + ۴/۰۰\hat{\text{j}} + ۲/۰۰\hat{\text{k}}$$
$$\vec{C} = ۷/۰۰\hat{\text{i}} - ۸/۰۰\hat{\text{j}}$$

حاصل عبارت $۳\vec{C}\cdot(۲\vec{A}\times\vec{B})$ چیست؟

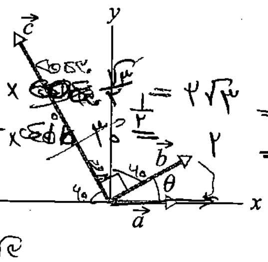
** **۳۹** بردار $\vec{A}$ دارای بزرگی ۶/۰۰ واحد، بردار $\vec{B}$ دارای بزرگی ۷/۰۰ واحد و حاصل $\vec{A}\cdot\vec{B}$ دارای مقدار ۱۴/۰ واحد است. زاویه‌ی میان بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ چیست؟

** ۴۰ جابه‌جایی $\vec{d}_1$ در صفحه‌ی yz قرار دارد و این بردار، که نسبت به جهت مثبت محور y زاویه‌ی ۶۳٫۰ درجه می‌سازد و دارای مؤلفه‌ی z مثبت است، بزرگی‌اش ۴٫۵۰m است. جابه‌جایی $\vec{d}_2$ در صفحه‌ی xz قرار دارد. این بردار که نسبت به جهت مثبت محور x زاویه‌ی ۳۰٫۰ درجه می‌سازد و دارای مؤلفه‌ی z مثبت است، بزرگی‌اش ۱٫۴m است. (الف) $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2$، (ب) $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2$ و (پ) زاویه‌ی میان $\vec{d}_1$ و $\vec{d}_2$، چیست؟

** ۴۱ با استفاده کردن از تعریف ضرب نرده‌ای $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$ و دانستن $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$، زاویه‌ی میان دو بردار $\vec{a} = ۳٫۰\hat{i} + ۳٫۰\hat{j} + ۳٫۰\hat{k}$ و $\vec{b} = ۲٫۰\hat{i} + ۱٫۰\hat{j} + ۳٫۰\hat{k}$ را حساب کنید.

** ۴۲ در یک نمایش صامت شخص ۱ جابه‌جایی $\vec{d}_1 = (۴٫۰\text{m})\hat{i} + (۵٫۰\text{m})\hat{j}$ و شخص ۲ جابه‌جایی $\vec{d}_2 = (-۳٫۰\text{m})\hat{i} + (۴٫۰\text{m})\hat{j}$ را انجام می‌دهد. حاصل عبارت‌های (الف) $\vec{d}_1 \times \vec{d}_2$، (ب) $\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2$، (پ) $(\vec{d}_1 + \vec{d}_2) \cdot \vec{d}_2$، چیست، و (ت) تصویر $\vec{d}_2$ در راستای d_1 چیست؟ (*راهنمایی*: برای محاسبه‌ی قسمت (ت)، معادله‌ی ۳–۲۰ و شکل ۳–۱۸ را ببینید).

** ۴۳ سه بردار نشان داده شده در شکل ۳–۳۳، دارای بزرگی‌های $a = ۳٫۰۰\text{m}$، $b = ۴٫۰۰\text{m}$ و $c = ۱۰٫۰\text{m}$ هستند و $\theta = ۳۰٫۰°$. مطلوب است تعیین، (الف) مؤلفه‌ی x و (ب) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{a}$؛ (پ) مؤلفه‌ی x و (ت) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{b}$؛ (ث) مؤلفه‌ی x و (ج) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{c}$. اگر رابطه‌ی $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ برقرارباشد، مقادیر (چ) p و (ح) q، را پیدا کنید.



الف ۳٫-
ب صفر
پ = ۳٫۴۶ = $۲\sqrt{۳}$
ت = ۲٫-
ث = -۵
ج = ۸٫۶۶
p = -۶٫۶۷
q = ۴٫۳۳

۱۰ × cos ۶۰ = ۵
۱۰ × sin ۶۰ = $۵\sqrt{۳}$

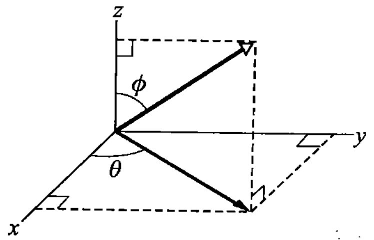
شکل ۳–۳۳ مسئله‌ی ۴۳.

c = pa + qb ⇒ -۵ = p×۳ + q×۳٫۴۶
۸٫۶۶ = p×۰ + q×۲

** ۴۴ در ضرب برداری $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$، فرض کنید $q = ۲$، $\vec{v} = ۲٫۰\hat{i} + ۴٫۰\hat{j} + ۶٫۰\hat{k}$ و $\vec{F} = ۴٫۰\hat{i} - ۲۰\hat{j} + ۱۲\hat{k}$. به ازای $B_x = B_y$، بردار $\vec{B}$ به صورت نمادگذاری بردارهای یکه چگونه است؟

مسئله‌های بیشتر

۴۵ بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ درصفحه‌ی xy دستگاه مختصات قرار دارند. $\vec{A}$ دارای بزرگی ۸٫۰۰ و زاویه‌ی ۱۳۰ درجه و $\vec{B}$ دارای مؤلفه‌های $B_x = -۷٫۷۲$ و $B_y = -۹٫۲۰$ است. (الف) حاصل $۵\vec{A} \cdot \vec{B}$ چیست؟ حاصل $۴\vec{A} \times ۳\vec{B}$ (ب) به‌صورت نمادگذاری بردارهای یکه و (پ) به صورت نمادگذاری بزرگی - زاویه در دستگاه مختصات کروی (شکل ۳–۳۴ را ببینید) چیست؟ (ت) زاویه‌ی میان بردارهای $\vec{A}$ و $۴\vec{A} \times ۳\vec{B}$ چیست؟ (*راهنمایی*: پیش از انجام دادن محاسبه، اندکی فکر کنید). حاصل $\vec{A} + ۳٫۰۰\hat{k}$ (ث) به صورت نمادگذاری بردارهای یکه و (ج) به صورت نمادگذاری بزرگی - زاویه در دستگاه مختصات کروی، چیست؟



شکل ۳–۳۴ مسئله‌ی ۴۵.

۴۶ بردار $\vec{a}$ دارای بزرگی ۵٫۰m و به سمت خاور است. بردار $\vec{b}$ دارای بزرگی ۴٫۰m و در جهت ۳۵ درجه‌ی باختر محور شمالی است. (الف) بزرگی و (ب) جهت بردار $\vec{a} + \vec{b}$ چیست؟ (پ) بزرگی و (ت) جهت بردار $\vec{b} - \vec{a}$ چیست؟ (ث) نمودار برداری مربوط به هر ترکیب را رسم کنید.

۴۷ بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ در صفحه‌ی xy یک دستگاه مختصات قرار دارند. $\vec{A}$ دارای بزرگی ۸٫۰۰ و زاویه‌ی ۱۳۰ درجه و $\vec{B}$ دارای مؤلفه‌های $B_x = -۷٫۷۲$ و $B_y = -۹٫۲۰$ است. زاویه‌های میان محور منفی y و (الف) جهت $\vec{A}$ و (ب) جهت حاصل‌ضرب $\vec{A} \times \vec{B}$ و (پ) جهت $\vec{A} \times (\vec{B} + ۳٫۰۰\hat{k})$، چیست؟

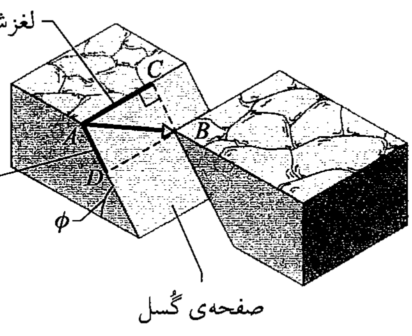
۴۸ مؤلفه‌های دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برحسب متر، عبارت‌اند از: $a_x = ۳٫۲$، $a_y = ۱٫۶$، $b_x = ۰٫۵۰$ و $b_y = ۴٫۵$. (الف) زاویه‌ی میان بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را پیدا کنید. در صفحه‌ی xy دو بردار با بزرگی ۵٫۰m وجود دارند که بر بردار $\vec{a}$ عمودند. یکی بردار $\vec{c}$، دارای مؤلفه‌ی x مثبت، و دیگری بردار $\vec{d}$،

دارای مؤلفه‌ی x منفی، است. (ب) مؤلفه‌ی x و (پ) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{c}$، و (ت) مؤلفه‌ی x و (ث) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{d}$، چیست؟

۴۹ یک قایق بادبانی قرار است در امریکا از ساحل دریاچه‌ی اِری[1] به سمت شهری در کانادا شروع به حرکت کند و به اندازه‌ی ۹۰٫۰km به سوی شمال پیش برود. اما قایق‌ران متوجه می‌شود که قایق او به اندازه‌ی ۵۰٫۰km به سوی خاور نقطه‌ی شروع حرکتش پیش رفته است. (الف) اکنون، او قایق خود را (الف) تا چه مسافتی و (ب) در چه جهتی باید براند تا به مقصد اصلی‌اش برسد؟

۵۰ بردار $\vec{d}_1$ در جهت منفی محور y و بردار $\vec{d}_2$ در جهت مثبت محور x قرار دارد. جهت بردارهای (الف) $\vec{d}_2/4$ و (ب) $\vec{d}_1/(-4)$، چیست؟ بزرگی حاصل‌ضرب‌های (پ) $\vec{d}_1\cdot\vec{d}_2$ و (ت) $\vec{d}_1\cdot(\vec{d}_2/4)$ چیست؟ جهت بردار حاصل از (ث) $\vec{d}_1\times\vec{d}_2$ و (ج) $\vec{d}_2\times\vec{d}_1$ چیست؟ بزرگی حاصل‌ضرب برداری در (چ) قسمت (ث) و (ح) در قسمت (ج) چقدر است؟ (خ) بزرگی و (د) جهت $\vec{d}_1\times(\vec{d}_2/4)$ چیست؟

۵۱ ***گسل‌های صخره‌ای*** گسیختگی‌هایی هستند که در طول آن‌ها وجه‌های مقابل صخره روی یکدیگر حرکت می‌کنند. در شکل ۳-۳۵، پیش از حرکت کردن صخره به سمت پایین و راست، نقطه‌های A و B برهم منطبق‌اند. جابه‌جایی خالص $\overrightarrow{AB}$ در صفحه‌ی گسل است. مؤلفه‌ی افقی $\overrightarrow{AB}$، ***لغزش عرضی*** AC است. مؤلفه‌ی $\overrightarrow{AB}$ در صفحه‌ی گسل و به سمت پایین، ***لغزش عمقی*** AD است. (الف) اگر لغزش عرضی ۲۲٫۰m و لغزش عمقی ۱۷٫۰m باشد، بزرگی جابه‌جایی خالص $\overrightarrow{AB}$ چقدر است؟ (ب) اگر شیب صفحه‌ی گسل نسبت به راستای افقی $\phi = ۵۲٫۰^\circ$ باشد، مؤلفه‌ی قائم $\overrightarrow{AB}$ چیست؟



شکل ۳-۳۵ مسئله‌ی ۵۱.

۵۲ سه جابه‌جایی که برحسب متر اندازه‌گیری شده‌اند، عبارت‌اند از: $\vec{d}_1 = 4.0\hat{i}+5.0\hat{j}-6.0\hat{k}$، $\vec{d}_2 = -1.0\hat{i}+2.0\hat{j}+3.0\hat{k}$ و $\vec{d}_3 = 4.0\hat{i}+3.0\hat{j}+2.0\hat{k}$. (الف) حاصل $\vec{r} = \vec{d}_1-\vec{d}_2+\vec{d}_3$ چیست؟ (ب) زاویه‌ی میان $\vec{r}$ و محور z مثبت چقدر است؟ (پ) تصویر $\vec{d}_1$ در راستای بردار $\vec{d}_2$ چیست؟ (ت) مؤلفه‌ی $\vec{d}_1$ که بر راستای $\vec{d}_2$ عمود است و در صفحه‌ی شامل $\vec{d}_1$ و $\vec{d}_2$ قرار دارد، چیست؟ [***راهنمایی:*** برای قسمت (پ)، معادله‌ی ۳-۲۰ و شکل ۳-۱۸، و برای قسمت (ت)، معادله‌ی ۳-۲۴ را در نظر بگیرید.]

۵۳ دو بردار $\vec{a}$ با بزرگی ۱۰ واحد و $\vec{b}$ با بزرگی ۶٫۰ واحد با هم زاویه‌ی ۶۰ درجه می‌سازند. (الف) حاصل‌ضرب نرده‌ای دو بردار و (ب) بزرگی بردار حاصل‌ضرب $\vec{a}\times\vec{b}$ را پیدا کنید.

۵۴ بردارهای شکل ۳-۳۲ را در نظر بگیرید و به ازای $a=4$، $b=3$ و $c=5$، (الف) $\vec{a}\cdot\vec{b}$، (ب) $\vec{a}\cdot\vec{c}$ و (پ) $\vec{b}\cdot\vec{c}$ را حساب کنید.

۵۵ ذره‌ای سه جابه‌جایی پی در پی زیر را در یک صفحه چنین انجام می‌دهد: $\vec{d}_1$ با بزرگی ۴٫۰۰m در جهت جنوب باختری؛ سپس $\vec{d}_2$ با بزرگی ۵٫۰۰m در جهت خاور؛ و سرانجام، $\vec{d}_3$ با بزرگی ۶٫۰۰m در جهت ۶۰٫۰ درجه‌ی شمال محور خاوری. یک دستگاه محورهای مختصات به گونه‌ای انتخاب کنید که محور y آن به سوی شمال و محور x آن به سوی خاور باشد (الف) مؤلفه‌ی x و (ب) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{d}_1$ چیست؟ (پ) مؤلفه‌ی x و (ت) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{d}_2$ چیست؟ (ث) مؤلفه‌ی x و (ج) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{d}_3$ چیست؟ اکنون، ***جابه‌جایی خالص*** ذره را در این سه جابه‌جایی پی در پی در نظر بگیرید. (چ) مؤلفه‌ی x و (ح) مؤلفه‌ی y، (خ) بزرگی، و (د) جهت جابه‌جایی خالص را معین کنید. اگر ذره به طور مستقیم به نقطه‌ی شروع حرکتش برگردد، (ذ) چه مسافتی را و (ر) در چه جهتی باید بپیماید؟

1. Erie

۵۶ مجموع چهار بردار زیر را: (الف) به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، و به صورت (ب) بزرگی و (پ) زاویه، نسبت به محور $+x$ به‌دست آورید.

$\vec{P}$: ۱۰٫۰m، ۲۵٫۰° (پادساعت‌گرد نسبت به محور $+x$)

$\vec{Q}$: ۱۲٫۰m، ۱۰٫۰° (پادساعت‌گرد نسبت به محور $+y$)

$\vec{R}$: ۸٫۰۰m، ۲۰٫۰° (ساعت‌گرد نسبت به محور $-y$)

$\vec{S}$: ۹٫۰۰m، ۴۰٫۰° (پادساعت‌گرد نسبت به محور $-y$)

۵۷ اگر $\vec{B}$ با $\vec{A}$ جمع شود حاصل بردار $۶٫۰\hat{i}+۱٫۰\hat{j}$ و اگر $\vec{B}$ از $\vec{A}$ کم شود حاصل بردار $-۴٫۰\hat{i}+۷٫۰\hat{j}$ خواهد بود. بزرگی بردار $\vec{A}$ چیست؟

۵۸ بردار $\vec{d}$ دارای بزرگی ۲٫۵m و به سمت شمال است. (الف) بزرگی و (ب) جهت بردار $۴٫۰\vec{d}$ چیست؟ (پ) بزرگی و (ت) جهت بردار $-۳٫۰\vec{d}$ چیست؟

۵۹ بردار $\vec{A}$ دارای بزرگی ۱۲٫۰m و زاویه‌اش در دستگاه مختصات xy نسبت به محور x مثبت ۶۰٫۰ درجه و به صورت پادساعت‌گرد است. هم‌چنین، در همان دستگاه مختصات بردار $\vec{B}=(۱۲٫۰\text{m})\hat{i}+(۸٫۰۰\text{m})\hat{j}$ نیز قرار دارد. اکنون، دستگاه مختصات را در جهت پادساعت‌گرد به اندازه‌ی ۲۰٫۰ درجه حول مبداء مختصات می‌چرخانیم تا دستگاه $x'y'$ تشکیل شود. در این دستگاه مختصات جدید بردارهای، (الف) $\vec{A}$ و (ب) $\vec{B}$، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه چگونه‌اند؟

۶۰ اگر داشته باشیم $\vec{c}=۳\hat{i}+۴\hat{j}$، $\vec{a}-\vec{b}=۲\vec{c}$ و $\vec{a}+\vec{b}=۴\vec{c}$، بردارهای (الف) $\vec{a}$ و (ب) $\vec{b}$، چگونه خواهند بود؟

۶۱ (الف) اگر داشته باشیم $\vec{a}=۵٫۰\hat{i}+۴٫۰\hat{j}-۶٫۰\hat{k}$ ، $\vec{b}=-۲٫۰\hat{i}+۲٫۰\hat{j}+۳٫۰\hat{k}$ و $\vec{c}=۴٫۰\hat{i}+۳٫۰\hat{j}+۲٫۰\hat{k}$ ، بردار $\vec{r}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ به صورت نمادگذاری بردارهای یکه چگونه خواهد بود؟ (ب) زاویه‌ی میان $\vec{r}$ و محور z مثبت را حساب کنید. (پ) تصویر $\vec{a}$ در راستای $\vec{b}$ چیست؟ (ت) تصویر $\vec{a}$ در راستای عمود بر $\vec{b}$، اما واقع در صفحه‌ی شامل $\vec{a}$ و $\vec{b}$، چیست؟ [*راهنمایی:* در قسمت (پ)، معادله‌ی ۳-۲۰ و شکل ۳-۱۸، و در قسمت (ت)، معادله‌ی ۳-۲۴ را ببینید.]

۶۲ یک بازیکن گلف برای افتادن توپ در حفره سه ضربه به توپ می‌زند. ضربه‌ی اول توپ را ۳٫۶۶m به سمت شمال، ضربه‌ی دوم توپ را ۱٫۸۳m به سمت جنوب خاوری و ضربه‌ی سوم توپ را ۰٫۹۱m به سمت جنوب باختری جابه‌جا می‌کند. (الف) بزرگی و (ب) جهت جابه‌جایی لازم برای آنکه توپ با یک ضربه در حفره بیفتد، چیست؟

۶۳ سه بردار زیر، برحسب متر، مفروض‌اند:

$$\vec{d}_1=-۳٫۰\hat{i}+۳٫۰\hat{j}+۲٫۰\hat{k}$$
$$\vec{d}_2=-۲٫۰\hat{i}-۴٫۰\hat{j}+۲٫۰\hat{k}$$
$$\vec{d}_3=۲٫۰\hat{i}+۳٫۰\hat{j}+۱٫۰\hat{k}$$

حاصل عبارت (الف) $\vec{d}_1\cdot(\vec{d}_2+\vec{d}_3)$، (ب) $\vec{d}_1\cdot(\vec{d}_2\times\vec{d}_3)$ و (پ) $\vec{d}_1\times(\vec{d}_2+\vec{d}_3)$ چیست؟

۶۴ ابعاد اتاقی ۴٫۳۰m × ۳٫۷۰m × (ارتفاع) ۳٫۰۰m است. مگسی از یک گوشه‌ی اتاق پرواز می‌کند و در راستای قطر اصلی به گوشه‌ی مقابل می‌رود. (الف) بزرگی جابه‌جایی مگس چیست؟ آیا طول مسیر حرکت مگس می‌تواند نسبت به این فاصله (ب) کمتر، (پ) بیشتر، (ت) مساوی، باشد؟ (ث) دستگاه مختصات مناسبی انتخاب و مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی را در این دستگاه به صورت بردارهای یکه به دست آورید. (ج) اگر مگس به جای پرواز کردن راه برود، طول کوتاه‌ترین مسیری که می‌تواند بپیماید، چقدر است؟ (*راهنمایی:* بدون استفاده کردن از حسابان به این پرسش می‌توان پاسخ داد. اتاق شبیه یک جعبه است. دیوارهای جعبه را بخوابانید تا به صورت یک صفحه درآید).

۶۵ یک تظاهر کننده‌ی اعتراضی با در دست داشتن تابلویی از مبداء دستگاه مختصات xyz، که صفحه‌ی xy آن افقی است، شروع به حرکت می‌کند. او ابتدا ۴۰m در جهت منفی محور x، سپس ۲۰m در مسیری عمود بر محور x به سمت چپ خود حرکت می‌کند و آنگاه، از برج یک منبع آب به ارتفاع ۲۵m بالا می‌رود. (الف) جابه‌جایی تابلو از آغاز تا پایان، به‌صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟ (ب) تابلو از بالای برج به پایین می‌افتد. بزرگی جابه‌جایی این تابلو از آغاز تا پای برج چیست؟

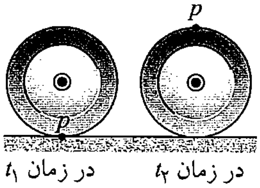
۶۶ بردار $\vec{a}$ را در جهت مثبت محور x، بردار $\vec{b}$ را در جهت مثبت محور y، و نرده‌ای d را در نظر بگیرید. جهت $\vec{b}/d$ اگر d (الف) مثبت و (ب) منفی، باشد. چیست؟ بزرگی (پ) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ و (ت) $\vec{a}\cdot\vec{b}/d$ چقدر است؟ جهت بردار، ناشی از (ث) $\vec{a}\times\vec{b}$ و (ج) $\vec{b}\times\vec{a}$، چیست؟ (چ) بزرگی حاصل‌ضرب برداری مربوط به قسمت (ث) چقدر است؟ (ح) بزرگی حاصل ضرب برداری مربوط به قسمت (ج) چقدر است؟ اگر d مثبت باشد، (د) بزرگی و (ذ) جهت $\vec{a}\times\vec{b}/d$ چیست؟

۶۷ فرض کنید $\hat{i}$ به سوی خاور، $\hat{j}$ به سوی شمال و $\hat{k}$ به سوی بالا باشد. مقدار حاصل ضرب‌های (الف) $\hat{i}\cdot\hat{k}$، (ب) $(-\hat{k})\cdot(-\hat{j})$ و $\hat{j}\cdot(-\hat{j})$ چیست؟ سوی (مانند خاور یا پایین) حاصل ضرب‌های (ت) $\hat{k}\times\hat{j}$، (ث) $(-\hat{i})\times(-\hat{j})$ و (ج) $(-\hat{k})\times(-\hat{j})$، چیست؟

۶۸ در مرکز شهر بوستون، سارقان به بانکی دستبرد می‌زنند (نقشه‌ی شکل ۳-۳۶ را ببینید). سارقان برای دور شدن از دسترس پلیس با هلیکوپتر فرار می‌کنند و سه پرواز پی‌درپی را به ترتیب زیر انجام می‌دهند: ۳۲km تحت زاویه‌ی ۴۵ درجه‌ی جنوب محور خاوری؛ ۵۳km تحت زاویه‌ی ۲۶ درجه‌ی شمال محور باختری؛ ۲۶km تحت زاویه‌ی ۱۸ درجه‌ی خاور محور جنوبی. سارقان در پایان پرواز سوم دستگیر می‌شوند. آن‌ها در کدام شهر دستگیر می‌شوند؟

شکل ۳-۳۶ مسئله‌ی ۶۸.

۶۹ چرخی به شعاع ۴۵٫۰cm در روی یک سطح افقی، (شکل ۳-۳۷) بدون لغزش می‌غلتد. در زمان t_1، خال P، واقع در لبه‌ی چرخ در نقطه‌ی تماس میان چرخ و سطح قرار دارد. در زمان بعدی t_2، چرخ به اندازه‌ی نیم دور غلتیده است. (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی جابه‌جایی P (نسبت به سطح) چیست؟



شکل ۳-۳۷ مسئله‌ی ۶۹.

۷۰ شخصی مسافت ۲۵۰m را در جهت ۳۰ درجه‌ی خاور محور شمالی، سپس ۱۷۵m در جهت خاور راه می‌رود. (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی جابه‌جایی پایانی او را از نقطه‌ی شروع حرکت پیدا کنید. (پ) مسافتی را که او می‌پیماید معین کنید. (ت) این مسافت پیموده شده بیشتر است یا بزرگی جابه‌جایی شخص؟

۷۱ بردار $\vec{d}$ دارای بزرگی ۳٫۰m و جهتش به سمت جنوب است. (الف) بزرگی و (ب) جهت بردار $5{,}0\vec{d}$ چیست؟ (پ) بزرگی و (ت) جهت بردار $-2{,}0\vec{d}$ چیست؟

۷۲ مورچه‌ای برای یافتن سُس داغ در یک محوطه‌ی پیک‌نیک، سه جابه‌جایی در روی زمین صاف انجام می‌دهد: $\vec{d}_1$ به اندازه‌ی ۰٫۴۰m به سوی جنوب باختری (یعنی، تحت زاویه‌ی ۴۵ درجه جنوب (محور باختری)، $\vec{d}_2$ به اندازه‌ی ۰٫۵m به سوی خاور، $\vec{d}_3$ به اندازه‌ی ۰٫۶۰m تحت زاویه‌ی ۶۰ درجه‌ی شمال محور خاوری. فرض کنید محور x مثبت به سوی خاور و محور y مثبت به سوی شمال است. (الف) مؤلفه‌ی x و (ب) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{d}_1$ چیست؟ سپس، (پ) مؤلفه‌ی x و (ت) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{d}_2$ چیست؟ هم‌چنین، (ث) مؤلفه‌ی x و (ج) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{d}_3$ چیست؟

(چ) مؤلفه‌ی x و (ح) مؤلفه‌ی y، (خ) بزرگی و (د) جهت جابه‌جایی خالص مورچه چیست؟ اگر مورچه بخواهد یک راست به نقطه‌ی شروع حرکتش برگردد، (ذ) چه مقدار و (ر) در چه جهتی باید حرکت کند؟

۷۳ دو بـــــــردار $\vec{a}=۳/۰\hat{i}+۵/۰\hat{j}$ و $\vec{b}=۲/۰\hat{i}+۴/۰\hat{j}$ داده شده‌اند. مطلوب است تعیین (الـف) $\vec{a}\times\vec{b}$، (ب) $\vec{a}\cdot\vec{b}$، (پ) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$ و (ت) مؤلفه‌ی $\vec{a}$ در راستای $\vec{b}$.

۷۴ بردار $\vec{a}$ در صفحه‌ی yz تحت زاویه‌ی ۶۳/۰ درجه نسبت به جهت مثبت محور y واقع است و دارای مؤلفه‌ی z مثبت با بزرگی ۳/۲۰ واحد است. بردار $\vec{b}$ در صفحه‌ی xz تحت زاویه‌ی ۴۸/۰ درجه نسبت به جهت مثبـت محـور x واقـع و دارای مؤلفه‌ی z با بزرگی ۱/۴۰ واحـد اسـت. (الـف) $\vec{a}\cdot\vec{b}$، (ب) $\vec{a}\times\vec{b}$ و (پ) زاویه‌ی میان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را پیدا کنید.

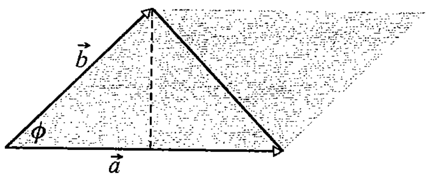
۷۵ مطلــوب اســت تعیـــین (الــف) «بــاختر × شــمال»، (ب) «جنوب ·پایین»، (پ) «بـالا × خـاور»، (ت) «بـاختر ·بـاختر» و (ت) «جنوب × جنوب». فرض کنید هر «بـردار» دارای بزرگـی واحد است.

۷۶ بردار $\vec{B}$ به بزرگی ۸/۰m را با بردار $\vec{A}$، که در راستای محور x قرار دارد، با هم جمع می‌کنیم. مجمـوع ایـن دو بـردار یـک بردار سوم است، که در راستای محور y قرار دارد و بزرگی‌اش دو برابر بزرگی بردار $\vec{A}$ است. بزرگی بردار $\vec{A}$ چیست؟

۷۷ شخصی برای پیاده‌روی از خانه خود خارج می‌شود و از مبداء مختصات دستگاه xyz شروع به حرکت می‌کند. صفحه‌ی xy افقی و محور x به سوی خاور است. او در حالی که سکه‌ای در دست دارد، ۱۳۰۰m بـه سـوی خـاور، ۲۲۰۰m بـه سـوی شمال، حرکت می‌کند و سـپس سـکه را از بـالای پرتگـاهی بـه ارتفاع ۴۱۰m رها می‌کند. (الف) جابـه‌جـایی سـکه از نقطـه‌ی شروع حرکت تا محل برخورد آن به زمین، با اسـتفاده کـردن از نمادگذاری بردارهای یکه چگونه است؟ (ب) وقتی این شخص به مبداء برمی‌گردد، بزرگـی جابـه‌جـایی‌اش در مسـیر برگشـت چقدر است؟

۷۸ اگر $a=۳/۹۰$، $b=۲/۷۰$ و زاویه‌ی میـان بردارهـای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با ۶۳/۰ درجه باشد، بزرگی $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a})$ چه خواهـد بود؟

۷۹ در شکل ۳-۳۸، بزرگی $\vec{a}$ برابر با ۴/۳، بزرگی $\vec{b}$ برابـر بـا ۵/۴ و $\phi=۴۶^\circ$ است. مساحت مثلث حاصـل از دو بـردار و خط قطری را پیدا کنید.



شکل ۳-۳۸ مسئله‌ی ۷۹.

فصل ۴

حرکت‌های دوبعدی و سه‌بعدی

۴-۱ مکان و جابه‌جایی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۴-۱ بردارهای مکان دوبعدی و سه‌بعدی یک ذره را رسم کنید و مؤلفه‌های آن‌ها را در راستای محورهای یک دستگاه مختصات نشان دهید.

۴-۲ در یک دستگاه مختصات، جهت و بزرگی بردار مکان یک ذره را به کمک مؤلفه‌های آن، و برعکس، معین کنید.

۴-۳ رابطه‌ی میان بردار جابه‌جایی یک ذره و بردارهای مکان آغازی و پایانی آن را به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

● محل یک ذره نسبت به مبداء یک دستگاه مختصات با بردار مکان $\vec{r}$ معین می‌شود، که با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه چنین است

$$\vec{r} = x\hat{\mathrm{i}} + y\hat{\mathrm{j}} + z\hat{\mathrm{k}}$$

در اینجا $x\hat{\mathrm{i}}$، $y\hat{\mathrm{j}}$ و $z\hat{\mathrm{k}}$ مؤلفه‌های برداری بردار مکان $\vec{r}$ و x، y و z مؤلفه‌های نرده‌ای آن (و نیز مختصات محل ذره) هستند.

● بردار مکان، یا با یک بزرگی و یک یا دو زاویه‌ی مربوط به سمت‌گیری، یا با مؤلفه‌های برداری یا نرده‌ای آن، توصیف می‌شود.

● هرگاه ذره‌ای به گونه‌ای حرکت کند که بردار مکانش از $\vec{r}_1$ به $\vec{r}_2$ تغییر کند، جابه‌جایی ذره $\Delta\vec{r}$، برابر است با

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

جابه‌جایی را به صورت زیر هم می‌توان نوشت

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{\mathrm{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathrm{j}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathrm{k}}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{\mathrm{i}} + \Delta y\hat{\mathrm{j}} + \Delta z\hat{\mathrm{k}}$$

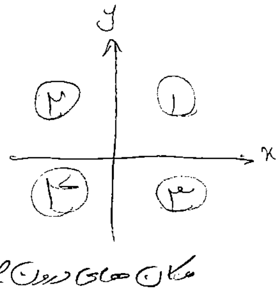
فیزیک در این باره چه می‌گوید؟

در این فصل به بررسی آن بخش از فیزیک که به تحلیل حرکت می‌پردازد ادامه می‌دهیم، اما در اینجا حرکت می‌تواند دو بعدی یا سه بعدی باشد. برای مثال، پژوهشگران پزشکی و مهندسان هوا ـ فضا ممکن است توجه خود را به فیزیک دور زدن‌های ناگهانی دو بعدی و سه بعدی

یک خلبان هواپیمای جنگنده معطوف کنند، زیرا جت‌های نوین می‌توانند با چنان سرعتی دور بزنند که خلبان جنگنده بی‌هوش می‌شود. یک متخصص ورزش ممکن است به فیزیک بسکتبال توجه کند. برای مثال، در یک ***پرتاب آزاد*** (که بازیکن توپ را از فاصله‌ی تقریبی ۴٫۳m آزادانه به سوی حلقه‌ی بسکتبال پرتاب می‌کند)، بازیکن ممکن است از ***ضربه‌ی فشاری بالای شانه*** استفاده کند، که در آن از ارتفاعی در حدود شانه توپ را به جلو می‌برد و سپس پرتاب می‌کند. یا یک بازیکن ممکن است ***ضربه‌ی حلقه‌ای پایین شانه*** را به کار ببرد، که در آن از حدود کمر توپ را بالا می‌آورد و آنگاه پرتاب می‌کند. بازیکن‌های حرفه‌ای روش اول را انتخاب می‌کنند، اما ریک باری[1] افسانه‌ای به خاطر استفاده کردن از روش ضربه‌ی پرتاب آزاد از پایین شانه بود که رکورد پرتاب آزاد خود را به جا گذاشت.

درک کردن حرکت سه بعدی آسان نیست. به‌عنوان مثال، شما ممکن است برای راندن یک خودرو در بزرگ‌راه (حرکت یک بعدی) راننده‌ی خوبی باشید، اما برای فرودآوردن یک‌هواپیما برروی باند فرودگاه (حرکت سه‌بعدی)، آن هم بدون تمرین کافی، کار دشواری در پیش داشته باشید.

مطالعه‌ی حرکت‌های دو بعدی و سه بعدی را با معرفی مکان و جابه‌جایی آغاز می‌کنیم.



مکان و جابه‌جایی

یکی از راه‌های کلی برای تعیین مکان یک ذره (یا یک شیء ذره مانند)، استفاده کردن از **بردار مکان** $\vec{r}$ است، که از یک نقطه‌ی مرجع (به طور معمول مبداء یک دستگاه مختصات) تا مکان ذره رسم می‌شود. با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه در پودمان ۳-۲ می‌توان $\vec{r}$ را به‌صورت زیر نشان داد

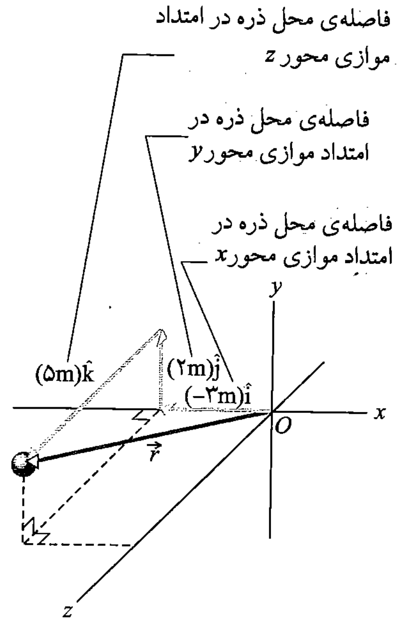
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \qquad (۴-۱)$$

که در آن $x\hat{i}$، $y\hat{j}$ و $z\hat{k}$ مؤلفه‌های برداری و ضریب‌های x، y و z مؤلفه‌های نرده‌ای بردار $\vec{r}$ هستند.

ضریب‌های x، y و z، مکان ذره را در طول محورهای مختصات نسبت به مبداء مشخص می‌کنند؛ یعنی، ذره دارای مختصات راست‌گوشه‌ای $(x$، y و $z)$ است. برای مثال، شکل ۴-۱، ذره‌ای را با بردار مکان

$$\vec{r} = (-۳\,m)\,\hat{i} + (۲\,m)\,\hat{j} + (۵\,m)\,\hat{k}$$

و مختصات راست‌گوشه‌ای $(-۳m$، $۲m$ و $۵m)$ نشان می‌دهد. ذره در طول محور x به فاصله‌ی $۳m$ از مبداء در جهت $-\hat{i}$، در طول محور y به فاصله‌ی $۲m$ از مبداء در جهت $+\hat{j}$ و در طول محور z به فاصله‌ی $۵m$ از مبداء در جهت $+\hat{k}$، قرار دارد.



شکل ۴-۱ بردار مکان $\vec{r}$ مربوط به یک ذره برابر با مجموع برداری مؤلفه‌های برداری $\vec{r}$ است.

هنگامی که ذره حرکت می‌کند بردار مکان آن به گونه‌ای تغییر می‌کند که راستای بردار

1. Rick Barry

همیشه از نقطه‌ی مرجع (مبداء) تا مکان ذره است. اگر بردار مکان، مثلاً، از $\vec{r}_۱$ تا $\vec{r}_۲$ در یک بازه‌ی زمانی معین تغییر کند، **جابه‌جایی** ذره در آن بازه‌ی زمانی، $\Delta\vec{r}$، برابر است با

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_۲ - \vec{r}_۱ \qquad (۲-۴)$$

با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه در معادله‌ی ۴-۱، این جابه‌جایی را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد

$$\Delta\vec{r} = (x_۲\hat{i} + y_۲\hat{j} + z_۲\hat{k}) - (x_۱\hat{i} + y_۱\hat{j} + z_۱\hat{k})$$

یا

$$\Delta\vec{r} = (x_۲ - x_۱)\,\hat{i} + (y_۲ - y_۱)\,\hat{j} + (z_۲ - z_۱)\,\hat{k} \qquad (۳-۴)$$

که در آن مختصات ($x_۱$، $y_۱$ و $z_۱$) مربوط به بردار مکان $\vec{r}_۱$ و مختصات ($x_۲$، $y_۲$ و $z_۲$) مربوط به بردار مکان $\vec{r}_۲$ است. با قرار دادن Δx به جای $(x_۲ - x_۱)$، Δy به جای $(y_۲ - y_۱)$ و Δz به جای $(z_۲ - z_۱)$، بردار جابه‌جایی را به صورت زیر هم می‌توان نوشت:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k} \qquad (۴-۴)$$

مسئله‌ی نمونه‌ی ۴-۱ بردار مکان دو بعدی، دویدن خرگوش

خرگوشی در محوطه‌ای که محورهای مختصات بر روی آن رسم شده‌اند، می‌دود. مختصات مکان (به متر) خرگوش برحسب زمان (به ثانیه)، از رابطه‌های زیر به دست می‌آید

$$x = -۰/۳۱t^۲ + ۷/۲t + ۲۸ \qquad (۵-۴)$$

و

$$y = ۰/۲۲t^۲ - ۹/۱t + ۳۰ \qquad (۶-۴)$$

(الف) در زمان $t = ۱۵\,\text{s}$، بردار مکان خرگوش $\vec{r}$، با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه و نمادگذاری بزرگی ـ زاویه، چیست؟

نکته‌ی کلیدی

مختصات x و y مکان خرگوش که در معادله‌های ۴-۵ و ۴-۶ داده شده‌اند، مؤلفه‌های نرده‌ای بردار مکان خرگوش $\vec{r}$، هستند. این مختصات را در زمان داده شده حساب می‌کنیم، و سپس، می‌توانیم بزرگی و سمتگیری بردار مکان را از معادله‌ی ۳-۶ معین کنیم.

محاسبات: می‌توان نوشت

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} \qquad (۷-۴)$$

[به جای $\vec{r}$، $\vec{r}(t)$ نوشته‌ایم زیرا مؤلفه‌ها، و در نتیجه $\vec{r}$، تابع t هستند.]

در زمان $t = ۱۵\,\text{s}$، مؤلفه‌های نرده‌ای عبارت‌اند از

$$x = (-۰/۳۱)(۱۵)^۲ + (۷/۲)(۱۵) + ۲۸ \Rightarrow x = ۶۶\,\text{m}$$

و

$$y = (۰/۲۲)(۱۵)^۲ - (۹/۱)(۱۵) + ۳۰ \Rightarrow y = -۵۷\,\text{m}$$

بنابراین، در زمان $t = ۱۵\,\text{s}$، داریم

$$\vec{r} = (۶۶\,\text{m})\,\hat{i} - (۵۷\,\text{m})\,\hat{j} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

این بردار در شکل ۴-۲ الف، رسم شده است. برای تعیین بزرگی و زاویه‌ی بردار $\vec{r}$، توجه کنید که مؤلفه‌ها ضلع‌های یک مثلث راست‌گوشه و r وتر آن مثلث است. بنابراین، با استفاده کردن از معادله‌ی ۳-۶ می‌توان نوشت:

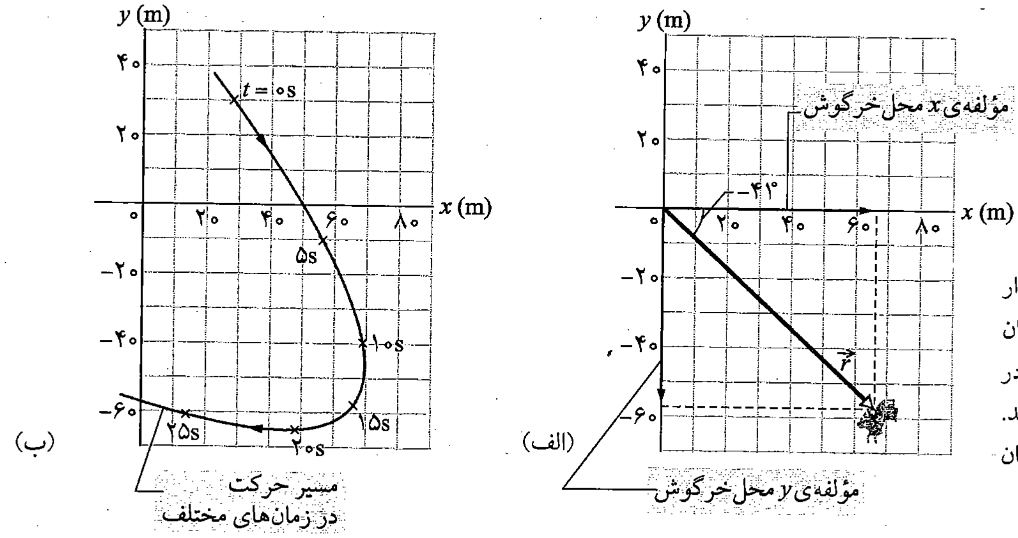
$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲} = \sqrt{(۶۶\,\text{m})^۲ + (-۵۷\,\text{m})^۲} \Rightarrow$$

$$r = ۸۷\,\text{m} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

و

$$\theta = \tan^{-۱}\frac{y}{x} = \tan^{-۱}\left(\frac{-۵۷\,\text{m}}{۶۶\,\text{m}}\right) \Rightarrow$$

$$\theta = -۴۱^\circ \qquad \textbf{(پاسخ)}$$



شکل ۴-۲ (الف) نمودار بردار مکان خرگوش $\vec{r}$، در زمان $t=15\,s$. مؤلفه‌های نرده‌ای $\vec{r}$ در راستای محورها نشان داده شده‌اند. (ب) نمودار مسیر خرگوش و مکان آن در شش مقدار t.

بازبینی: اگرچه تانژانت زاویه‌های ۱۳۹ درجه و ۴۱- درجه با هم برابرند، مؤلفه‌های بردار مکان $\vec{r}$ نشان می‌دهند که زاویه‌ی مورد نظر $-41^\circ = 139^\circ - 180^\circ$ است.

(ب) مسیر خرگوش را برای زمان‌های $t=0$ تا $t=25\,s$ رسم کنید.

ترسیم نمودار: ما مکان خرگوش در یک زمان را مشخص کردیم، اما برای دیدن مسیر حرکت خرگوش به یک نمودار نیاز داریم. بنابراین، قسمت (الف) را برای چند مقدار t تکرار و سپس نتیجه‌ها را به صورت نمودار رسم می‌کنیم. شکل ۴-۲ ب محل نقطه‌های مربوط به شش مقدار t و مسیر وصل کننده‌ی آن‌ها به یکدیگر را نشان می‌دهد.

۴-۲ سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۴-۴ تشخیص دهید که سرعت کمیتی برداری است و بنابراین، دارای بزرگی و جهت، هر دو، است و نیز مؤلفه‌هایی دارد.

۴-۵ بردارهای دوبعدی و سه‌بعدی سرعت یک ذره را رسم کنید و مؤلفه‌های آن را در راستای محورهای دستگاه مختصات نشان دهید.

۴-۶ با استفاده کردن از نمادگذاری‌های بزرگی - زاویه و بردارهای یکه، بردارهای مکان آغازی و پایانی ذره، بازه‌ی زمانی میان این مکان‌ها و بردار سرعت متوسط ذره را به یکدیگر ربط دهید.

۴-۷ با داشتن بردار مکان ذره به صورت تابعی از زمان، بردار سرعت (لحظه‌ای) آن را معین کنید.

نکته‌های کلیدی

- اگر ذره‌ای در بازه‌ی زمانی Δt جابه‌جایی $\Delta\vec{r}$ را انجام دهد، در آن بازه‌ی زمانی سرعت متوسط ذره $\vec{v}_{avg}$، برابر است با

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

- وقتی Δt به صفر میل می‌کند، $\vec{v}_{avg}$ به یک مقدار حدی به نام سرعت، یا سرعت لحظه‌ای $\vec{v}$، می‌رسد:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه می‌توان چنین نوشت

$$\vec{v} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} + v_z\,\hat{k}$$

که در آن، داریم $v_x = dx / dt$ ، $v_y = dy / dt$ و $v_z = dz / dt$.

● جهت سرعت لحظه‌ای یک ذره $\vec{v}$، همیشه در راستای مماس بر مسیر ذره در مکان ذره است.

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

در ریاضی هندسیک تقسیم بردار بر بردار مفهومی ندارد

$\frac{\vec{\Delta r}}{\vec{\Delta r}}$ ✗

$\vec{B} = m\vec{A}$ ✓

$m \neq \frac{\vec{B}}{\vec{A}}$ ✗

$\vec{F} = p\vec{A}$ ✓

$p \neq \frac{\vec{F}}{\vec{A}}$ ✗

اگر ذره‌ای از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر حرکت کند باید بدانیم که با چه سرعتی حرکت کرده است. درست مانند فصل ۲، می‌توان دو کمیت «چگونگی سریع بودن»، یعنی، **سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای** را معرفی کرد. اما در اینجا این کمیت‌ها را باید به صورت بردار در نظر بگیریم و از نمادگذاری برداری استفاده کنیم.

اگر ذره‌ای در بازه‌ی زمانی Δt جابه‌جایی $\Delta\vec{r}$ را انجام دهد، سرعت متوسط آن $\vec{v}_{avg}$، برابر است با

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{بازه‌ی زمانی}}$$

یا

$v_{avg} =$

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{۴-۸}$$

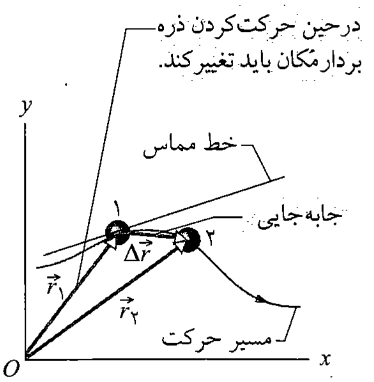
این رابطه نشان می‌دهد که $\vec{v}_{avg}$ (بردار طرف چپ معادله‌ی ۴-۸) باید با جابه‌جایی $\Delta\vec{r}$ (بردار طرف راست معادله‌ی ۴-۸) هم‌جهت باشد. با استفاده کردن از معادله‌ی ۴-۴، می‌توان معادله‌ی ۴-۸ را برحسب مؤلفه‌های برداری چنین نوشت

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k} \tag{۴-۹}$$

برای مثال، اگر ذره‌ای در مدت ۲/۰ ثانیه جابه‌جایی $(۱۲\,\text{m})\hat{i} + (۳/۰\,\text{m})\hat{k}$ را انجام دهد سرعت متوسط ذره در این حرکت برابر است با

$$\vec{v}_{avg} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(۱۲\,\text{m})\hat{i} + (۳/۰\,\text{m})\hat{k}}{۲/۰\,\text{s}} = (۶/۰\,\text{m/s})\hat{i} + (۱/۵\,\text{m/s})\hat{k}$$

یعنی، سرعت متوسط (که کمیتی برداری است) دارای مؤلفه‌ی $۶/۰\,\text{m/s}$ در راستای محور x و مؤلفه‌ی $۱/۵\,\text{m/s}$ در راستای محور z است.



شکل ۴-۳ نمودار جابه‌جایی یک ذره $\Delta\vec{r}$، دربازه‌ی زمانی Δt، از مکان ۱ با بردار مکان $\vec{r}_۱$ در زمان $t_۱$، تا مکان ۲ با بردار مکان $\vec{r}_۲$ در زمان $t_۲$. خط مماس برمسیر ذره در مکان ۱ نشان داده شده است.

دراین جا حرکت در دو بعد xoy صورت گرفته

وقتی در مورد **سرعت** یک ذره صحبت می‌کنیم، به طور معمول، منظور ما **سرعت لحظه‌ای** ذره $\vec{v}$، در یک لحظه‌ی معین است. این $\vec{v}$ همان مقدار حدی $\vec{v}_{avg}$ در لحظه‌ای است که بازه‌ی زمانی Δt در آن لحظه به صفر میل می‌کند. به زبان ریاضی، $\vec{v}$ مشتق $\vec{r}$ نسبت به زمان است، که رابطه‌ی آن چنین نوشته می‌شود

$v_{avg} = \lim \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{۴-۱۰}$$

شکل ۴-۳، مسیر ذره‌ای را نشان می‌دهد که در صفحه‌ی xy حرکت می‌کند. هنگامی که ذره در طول منحنی به سمت راست حرکت می‌کند، بردار مکان ذره به سمت راست جابه‌جا

می‌شود. در بازه‌ی زمانی Δt بردار مکان از $\vec{r}_1$ به $\vec{r}_2$ تغییر می‌کند و جابه‌جایی ذره $\Delta\vec{r}$ است.

برای پیدا کردن سرعت لحظه‌ای ذره، مثلاً در زمان t_1 (وقتی که ذره در مکان ۱ قرار دارد)، بازه‌ی زمانی Δt در حوالی t_1 را به سمت صفر میل می‌دهیم. با انجام دادن این کار، سه اتفاق می‌افتد: (۱) بردار مکان $\vec{r}_2$ در شکل ۴-۳ طوری به سمت $\vec{r}_1$ حرکت می‌کند که $\Delta\vec{r}$ به صفر میل می‌کند. (۲) راستای $\Delta\vec{r}/\Delta t$ (و در نتیجه $\vec{v}_{avg}$) به راستای خط مماس بر مسیر ذره در مکان ۱، میل می‌کند. (۳) در زمان t_1 سرعت متوسط $\vec{v}_{avg}$ به سمت سرعت لحظه‌ای $\vec{v}$ میل می‌کند.

در حالت حدی که $\Delta t \to 0$، داریم $\vec{v}_{avg} \to \vec{v}$، و مهم‌تر از آن، $\vec{v}_{avg}$ در راستای خط مماس قرار می‌گیرد. بنابراین، $\vec{v}$ نیز در همان راستا واقع می‌شود:

سرعت لحظه‌ای یک ذره $\vec{v}$، در هر مکان همیشه بر مسیر حرکت ذره در آن مکان، مماس است.

در شرایط سه بعدی هم نتیجه همین است و $\vec{v}$ همیشه بر مسیر ذره مماس است.

برای نوشتن معادله‌ی ۴-۱۰ با استفاده کردن از بردارهای یکه، $\vec{r}$ را از معادله‌ی ۴-۱ در این معادله قرار می‌دهیم. در این صورت، داریم

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

این معادله را می‌توان به صورت ساده شده‌ی زیر نوشت

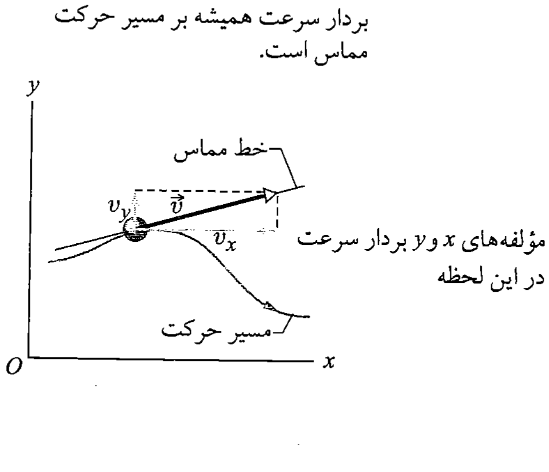
$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \qquad (۴\text{-}۱۱)$$

که در آن مؤلفه‌های نرده‌ای $\vec{v}$ عبارت‌اند از

$$v_x = \frac{dx}{dt}\ ،\ v_y = \frac{dy}{dt}\ \text{و}\ v_z = \frac{dz}{dt} \qquad (۴\text{-}۱۲)$$

برای مثال، dx/dt مؤلفه‌ی نرده‌ای $\vec{v}$ در طول محور x است. بنابراین، مؤلفه‌های نرده‌ای $\vec{v}$ را با مشتق گرفتن از مؤلفه‌های نرده‌ای $\vec{r}$ می‌توان به دست آورد.

شکل ۴-۴ نمودار بردار سرعت $\vec{v}$ و مؤلفه‌های نرده‌ای x و y آن را نشان می‌دهد. توجه کنید که در مکانی که ذره قرار دارد $\vec{v}$ بر مسیر ذره مماس است. ***هشدار:*** هنگامی که بردارهای

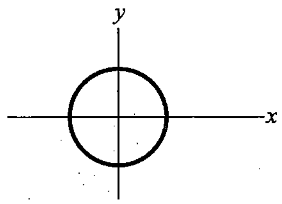


شکل ۴-۴ نمودار بردار سرعت یک ذره $\vec{v}$، و مؤلفه‌های نرده‌ای آن.

مکان در شکل‌های ۴-۱ تا ۴-۳ رسم می‌شوند، این بردارها به صورت پیکانی در یک نقطه (جایی در «اینجا») تا نقطه‌ی دیگر (جایی در «آنجا») امتداد دارند. اما وقتی یک بردار سرعت، مثلاً در شکل ۴-۴ رسم می‌شود، از یک نقطه تا نقطه‌ی دیگر ***امتداد ندارد***. بردار سرعت جهت لحظه‌ای حرکت یک ذره‌ی واقع در دُم بردار را نشان می‌دهد و طول آن بردار (بزرگی سرعت) را با هر مقیاسی می‌توان رسم کرد.

☑ خودآزمایی ۱

شکل زیر مسیر دایره‌ای یک ذره را نشان می‌دهد. اگر سرعت لحظه‌ای ذره $\vec{v} = (۲\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{i}} - (۲\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{j}}$ باشد، ذره وقتی در جهت (الف) ساعت‌گرد و (ب) پادساعت‌گرد، دایره را می‌پیماید، در کدام ربع دستگاه مختصات درحال حرکت است؟ برای هر دو حالت، بردار $\vec{v}$ را در روی شکل رسم کنید.



مسئله‌ی نمونه‌ی ۴-۲ سرعت دو بعدی، دویدن خرگوش

در مسئله‌ی نمونه‌ی پیش، سرعت خرگوش $\vec{v}$، را در زمان $t = ۱۵\,\mathrm{s}$ پیدا کنید.

نکته‌ی کلیدی

با مشتق گرفتن از مؤلفه‌های بردار مکان خرگوش می‌توان سرعت $\vec{v}$ را به دست آورد.

محاسبات: با قرار دادن بخش v_x معادله‌ی ۴-۱۲ در معادله‌ی ۴-۵، مؤلفه‌ی x بردار $\vec{v}$ به دست می‌آید

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-۰/۳۱t^۲ + ۷/۲t + ۲۸) \Rightarrow$$

$$v_x = -۰/۶۲t + ۷/۲ \qquad (۴\text{-}۱۳)$$

به ازای $t = ۱۵\,\mathrm{s}$، داریم $v_x = -۲/۱\,\mathrm{m/s}$. به همین ترتیب، با قرار دادن بخش v_y معادله‌ی ۴-۱۲ در معادله‌ی ۴-۶، داریم

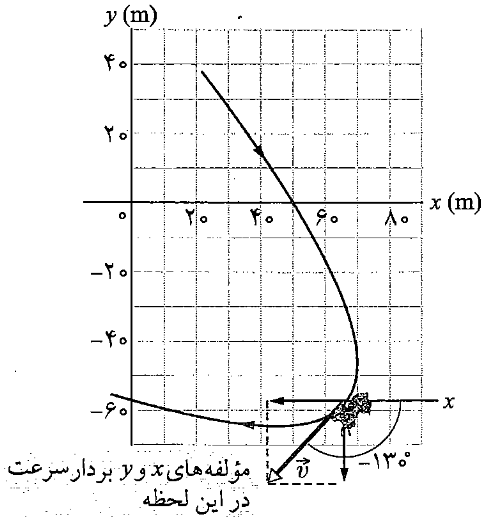
$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(۰/۲۲t^۲ - ۹/۱t + ۳۰) \Rightarrow$$

$$v_y = ۰/۴۴t - ۹/۱ \qquad (۴\text{-}۱۴)$$

به ازای $t = ۱۵\,\mathrm{s}$، داریم $v_y = -۲/۵\,\mathrm{m/s}$. در نتیجه، با استفاده کردن از معادله‌ی ۴-۱۱، سرعت $\vec{v}$ چنین به دست می‌آید

$$\vec{v} = (-۲/۱\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{i}} + (-۲/۵\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{j}} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

نمودار این بردار در شکل ۴-۵ به طور مماس بر مسیر و در جهت دویدن خرگوش در زمان $t = ۱۵\,\mathrm{s}$ رسم شده است.



شکل ۴-۵ نمودار سرعت خرگوش $\vec{v}$، در زمان $t = ۱۵\,\mathrm{s}$.

برای تعیین بزرگی و زاویه‌ی سرعت $\vec{v}$، از یک ماشین ویژه‌ی محاسبه‌های برداری، یا از معادله‌ی ۳-۶ به صورت زیر استفاده می‌کنیم

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2.1\,\mathrm{m/s})^2 + (-2.5\,\mathrm{m/s})^2} \Rightarrow$$

$$v = 3.3\,\mathrm{m/s} \quad \text{(پاسخ)}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\left(\frac{-2.5\,\mathrm{m/s}}{-2.1\,\mathrm{m/s}}\right) = \tan^{-1}1.19 \Rightarrow$$

$$\theta = -130^\circ \quad \text{(پاسخ)}$$

بازبینی: آیا زاویه ۱۳۰- درجه است یا $-130^\circ + 180^\circ = 50^\circ$؟

۴-۳ شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۴-۸ تشخیص دهید که شتاب کمیتی برداری است و بنا بر این، دارای بزرگی و جهت، هر دو، است و نیز مؤلفه‌هایی دارد.

۴-۹ بردارهای شتاب دوبعدی و سه‌بعدی یک ذره را رسم کنید و مؤلفه‌های آن‌ها را نشان دهید.

۴-۱۰ با داشتن بردارهای سرعت آغازی و پایانی ذره و بازه‌ی زمانی میان آن سرعت‌ها، بردار شتاب متوسط را با استفاده کردن از نمادگذاری بزرگی - زاویه و نمادگذاری بردارهای یکه معین کنید.

۴-۱۱ با داشتن بردار سرعت ذره به صورت تابعی از زمان، بردار شتاب (لحظه‌ای) آن را معین کنید.

۴-۱۲ برای هر بعد حرکت، معادله‌های حرکت با شتاب ثابت (فصل ۲) را برای ربط دادن شتاب، سرعت، مکان و زمان به یکدیگر، به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

- اگر سرعت یک ذره در بازه‌ی زمانی Δt از $\vec{v}_1$ تا $\vec{v}_2$ تغییر کند، شتاب متوسط آن در مدت Δt برابر است با

$$\vec{a}_{\text{avg}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

- وقتی Δt به صفر میل می‌کند، $\vec{a}_{\text{avg}}$ به یک مقدار حدی به نام شتاب، یا شتاب لحظه‌ای $\vec{a}$، می‌رسد:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه، داریم

$$\vec{a} = a_x\,\hat{\mathrm{i}} + a_y\,\hat{\mathrm{j}} + a_z\,\hat{\mathrm{k}}$$

که در آن، داریم $a_x = dv_x/dt$، $a_y = dv_y/dt$ و $a_z = dv_z/dt$.

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

وقتی سرعت یک ذره در بازه‌ی زمانی Δt از $\vec{v}_1$ تا $\vec{v}_2$ تغییر می‌کند، **شتاب متوسط** ذره $\vec{a}_{\text{avg}}$، در این مدت برابر است با

$$\text{شتاب متوسط} = \frac{\text{تغییر سرعت}}{\text{بازه‌ی زمانی}}$$

یا

$$\vec{a}_{\text{avg}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad (۱۵-۴)$$

اگر Δt در حوالی یک زمان معین به سمت صفر میل کند، $\vec{a}_{\text{avg}}$ در حد به **شتاب لحظه‌ای** (یا **شتاب**) $\vec{a}$ در آن زمان میل می‌کند؛ یعنی

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (۱۶-۴)$$

هرگاه ***بزرگی یا جهت سرعت*** (یا هر دو) تغییر کند، ذره دارای شتاب است.

اگر $\vec{v}$ را از معادله‌ی ۴-۱۱ در معادله‌ی ۴-۱۶ قرار دهیم، شتاب $\vec{a}$ برحسب بردارهای یکه چنین به دست می‌آید

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v_x\hat{\mathrm{i}} + v_y\hat{\mathrm{j}} + v_z\hat{\mathrm{k}})$$

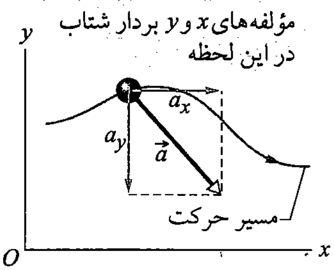
$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathrm{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathrm{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathrm{k}}$$

این معادله را به صورت زیر هم می‌توان نوشت

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}} \qquad (۱۷-۴)$$

که در آن مؤلفه‌های نرده‌ای $\vec{a}$ عبارت‌اند از

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} \text{ و } a_y = \frac{dv_y}{dt} \text{ ، } a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad (۱۸-۴)$$



شکل ۴-۶ نمودار بردار شتاب یک ذره $\vec{a}$، و مؤلفه‌های نرده‌ای آن.

بنابراین، برای به دست آوردن مؤلفه‌های نرده‌ای $\vec{a}$، از مؤلفه‌های نرده‌ای $\vec{v}$ مشتق می‌گیریم.

شکل ۴-۶ نمودار بردار شتاب $\vec{a}$ و مؤلفه‌های نرده‌ای آن را برای ذره‌ای که در یک مسیر دو بعدی حرکت می‌کند، نشان می‌دهد. ***هشدار:*** بردار شتاب $\vec{a}$، که در شکل ۴-۶ رسم شده است، از یک مکان ذره تا مکان دیگر ***امتداد ندارد***، بلکه جهت شتاب ذره را در نقطه‌ای که دُم این بردار قرار دارد، نشان می‌دهد. طول این بردار (که بزرگی شتاب را نشان می‌دهد) با هر مقیاسی می‌تواند رسم شود.

☑ خودآزمایی ۲

در اینجا برای توصیف مکان (برحسب متر) یک قرص در هنگام حرکتش در صفحه‌ی xy، چهار معادله داده شده است:

(۱) $x = -3t^2 + 4t - 2$ و $y = 6t^2 - 4t$ (۳) $\vec{r} = 2t^2\hat{\mathrm{i}} - (4t+3)\hat{\mathrm{j}}$

(۲) $x = -3t^3 - 4t$ و $y = -5t^2 + 6$ (۴) $\vec{r} = (4t^3 - 2t)\hat{\mathrm{i}} + 3\hat{\mathrm{j}}$

آیا مؤلفه‌های x و y شتاب ثابت‌اند؟ آیا شتاب $\vec{a}$ ثابت است؟

مسئله‌ی نمونه‌ی ۴-۳ شتاب دو بعدی، دویدن خرگوش

در دو مسئله‌ی نمونه‌ی پیش، شتاب خرگوش $\vec{a}$، را در زمان $t = 15\,\mathrm{s}$ پیدا کنید.

نکته‌ی کلیدی

با مشتق گرفتن از مؤلفه‌های سرعت خرگوش می‌توان شتاب $\vec{a}$ را معین کرد.

محاسبات: با قرار دادن بخش a_x معادله‌ی ۴-۱۸ در معادله‌ی ۴-۱۳، مؤلفه‌ی x شتاب $\vec{a}$ به دست می‌آید

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-0.62t + 7.2) \Rightarrow$$

$$a_x = -0.62\,\mathrm{m/s^2}$$

به همین ترتیب، با قرار دادن بخش a_y معادله‌ی ۴-۱۸ در معادله‌ی ۴-۱۴، مؤلفه‌ی y شتاب به دست می‌آید

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(0.44t - 9.1) \Rightarrow$$

$$a_y = 0.44\,\mathrm{m/s^2}$$

ملاحظه می‌شود که شتاب برحسب زمان تغییر نمی‌کند (ثابت است) زیرا متغیر زمان t، در هیچ یک از رابطه‌های مربوط به مؤلفه‌های شتاب وجود ندارد. بنابراین، با استفاده کردن از معادله‌ی ۴-۱۷، داریم

$$\vec{a} = (-0.62\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{i}} + (0.44\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{j}} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

نمودار این بردار در شکل ۴-۷ بر روی مسیر خرگوش نشان داده شده است.

برای تعیین بزرگی و زاویه‌ی شتاب $\vec{a}$، از یک ماشین ویژه‌ی محاسبه‌های برداری، یا از معادله‌ی ۳-۶ استفاده می‌کنیم. در این صورت، بزرگی شتاب برابر است با

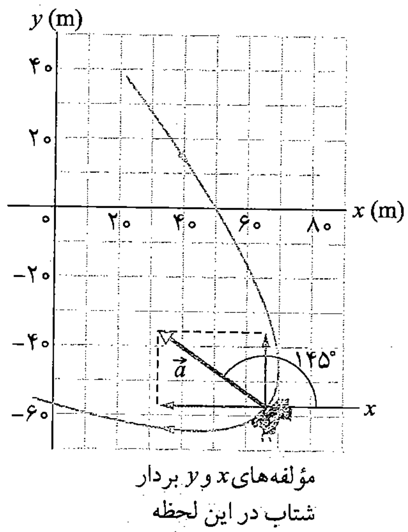
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0.62\,\mathrm{m/s^2})^2 + (0.44\,\mathrm{m/s^2})^2} \Rightarrow$$

$$a = 0.76\,\mathrm{m/s^2} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

برای زاویه‌ی بردار شتاب، داریم

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_y}{a_x} = \tan^{-1}\left(\frac{0.44\,\mathrm{m/s^2}}{-0.62\,\mathrm{m/s^2}}\right) \Rightarrow$$

$$\theta = -35^\circ$$



شکل ۴-۷ نمودار شتاب خرگوش $\vec{a}$، در زمان $t = 15\,\mathrm{s}$. خرگوش در تمام نقطه‌های مسیر حرکتش دارای همین شتاب است.

این نتیجه که در صفحه‌ی نمایش ماشین حساب ظاهر می‌شود، نشان می‌دهد که $\vec{a}$ در شکل ۴-۷ به سمت راست و به پایین‌سو است. در حالی که، با توجه به مؤلفه‌های به دست آمده می‌توان فهمید که جهت $\vec{a}$ باید به سمت چپ و به بالاسو باشد. برای پیدا کردن زاویه‌ی دیگری که همان تانژانت زاویه‌ی -35° را دارد، زاویه‌ی ۱۸۰ درجه را به آن می‌افزاییم. در نتیجه، داریم

$$-35^\circ + 180^\circ = 145^\circ \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

این پاسخ با مؤلفه‌های $\vec{a}$ ***سازگار است***. توجه کنید که بزرگی $\vec{a}$ و جهت آن در تمام مسیر حرکت خرگوش یکسان است، زیرا همان‌طور که گفته شد، شتاب ثابت است. منظور این است که هر بردار مشابهی را در هر نقطه‌ی دیگر از مسیر خرگوش می‌توان رسم کرد (کافی است بردار را جابه‌جا کنیم تا دُم آن در نقطه‌ی دیگری از مسیر قرار گیرد بی‌آنکه طول یا سمتگیری‌اش تغییر کند).

این، دومین مسئله‌ی نمونه‌ای است که در آن نیاز داشتیم مشتق یک بردار نوشته شده به صورت نمادگذاری بردارهای یکه را به دست آوریم. یک اشتباه متداول، نادیده گرفتن خود بردارهای یکه است که حاصل آن مجموعه‌ای از عددها و نمادهاست. به خاطر داشته باشید که مشتق یک بردار همیشه یک بردار دیگر است.

۴-۴ حرکت پرتابه‌ای

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۴-۱۳ روی منحنی مسیر پیموده شده در حرکت پرتابه‌ای، بزرگی‌ها و جهت‌های مؤلفه‌های سرعت و شتاب در حین پرواز را شرح دهید.

۴-۱۴ با داشتن سرعت پرتاب با استفاده کردن از نمادگذاری بزرگی - زاویه، یا نمادگذاری بردارهای یکه، مکان، جابه‌جایی و سرعت ذره را در هر لحظه‌ی معین از پرواز حساب کنید.

۴-۱۵ با داشتن داده‌های مربوط به یک لحظه از پرواز، سرعت پرتاب را حساب کنید.

نکته‌های کلیدی

● در حرکت پرتابه‌ای، ذره‌ای با تندی $v_\circ$ تحت زاویه‌ی $\theta_\circ$ (که نسبت به محور افقی x اندازه‌گیری می‌شود) به هوا پرتاب می‌شود. در حین پرواز، شتاب افقی پرتابه صفر و شتاب قائم آن $-g$ (به پایین‌سو در راستای محور y قائم) است.

● معادله‌های مربوط به حرکت ذره (ی در حال پرواز) را می‌توان چنین نوشت

$$x - x_\circ = (v_\circ \cos\theta_\circ)t$$

$$y - y_\circ = (v_\circ \sin\theta_\circ)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y = v_\circ \sin\theta_\circ - gt$$

$$v_y^2 = (v_\circ \sin\theta_\circ)^2 - 2g(y - y_\circ)$$

● در حرکت پرتابه‌ای، مسیر یک ذره به شکل سهمی است و اگر $x_\circ$ و $y_\circ$ صفر باشند، به صورت معادله‌ی زیر است

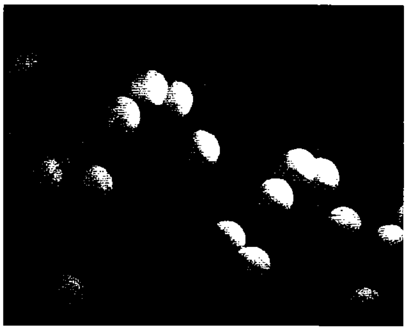
$$y = (\tan\theta_\circ)x - \frac{gx^2}{2(v_\circ \cos\theta_\circ)^2}$$

● برد افقی ذره R، یعنی مسافت افقی از نقطه‌ی پرتاب تا نقطه‌ی برگشت ذره به ارتفاع پرتاب، برابر است با

$$R = \frac{v_\circ^2}{g}\sin 2\theta_\circ$$

حرکت پرتابه‌ای

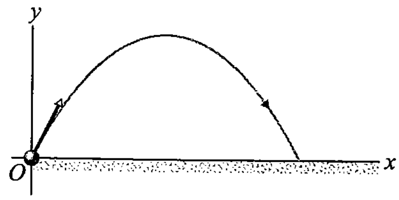
اکنون حالت ویژه‌ای از حرکت دو بعدی را مطالعه می‌کنیم. ذره‌ای با سرعت آغازی $\vec{v}_\circ$ در یک صفحه‌ی قائم حرکت می‌کند، اما شتاب آن همیشه برابر است با شتاب سقوط آزاد $\vec{g}$، که به پایین‌سو است. چنین ذره‌ای را **پرتابه** (یعنی ذره‌ی پرتاب شده) و حرکت آن را **حرکت پرتابه‌ای** می‌نامند. پرتابه ممکن است یک توپ تنیس (شکل ۴-۸)، یا یک گوی بیس بال در حال پرواز باشد، اما هواپیما یا مرغابی در حال پرواز را نمی‌توان پرتابه تلقی کرد. در بسیاری از ورزش‌ها (از گلف و فوتبال گرفته تا لاکروس[1] و راکت بال[2]، یا تنیس دیواری) با حرکت پرتابه‌ای یک توپ سر و کار داریم و بازیکن‌ها تلاش می‌کنند که حرکت توپ را برای کسب امتیاز بیشتر هر چه بهتر کنترل کنند. برای مثال، بازیکن راکت بال که در دهه‌ی ۱۹۷۰ ضربه‌ی Z را کشف کرد، در بازی‌هایش به سادگی به دلیل پرواز سردرگم کننده‌ی توپ به عقب زمین بازی همیشه برنده بود.



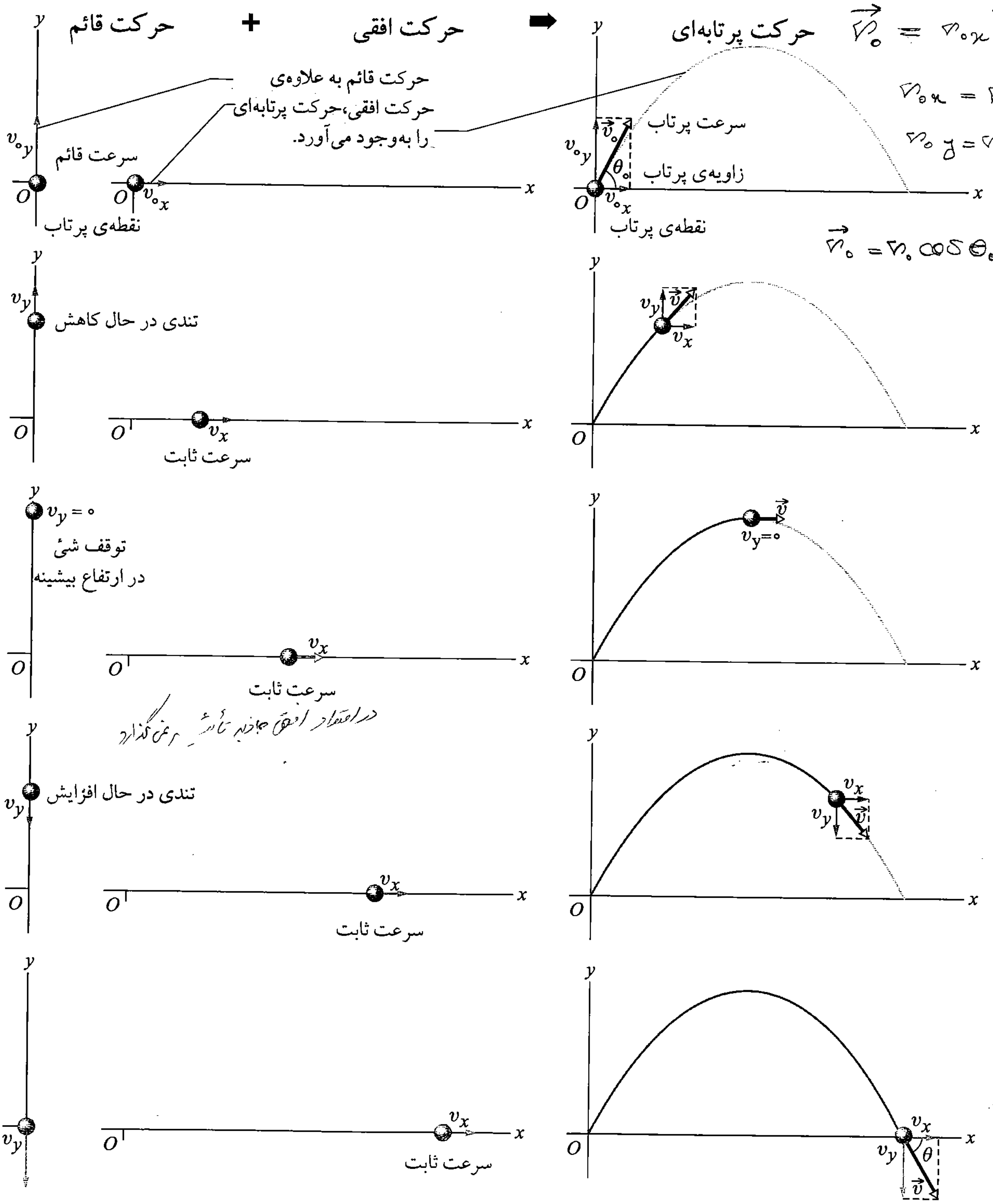
شکل ۴-۸ عکس یک توپ تنیس در حال برگشتن از یک سطح سخت، که به روش استروبوسکوپی تهیه شده است. در فاصله‌ی میان برخوردها، توپ حرکت پرتابه‌ای انجام می‌دهد.

1. lacrosse 2. racquetball

علت خمیدگی حرکات پرتابی ← جاذبه‌ی زمین ⇐ (↑ جاذبه‌ی زمین ⇐ توس ↑)



شکل ۴-۹ نمایش **حرکت پرتابه‌ای** شیئی که از مبداء یک دستگاه مختصات با سرعت آغازی $\vec{v}_0$ تحت زاویه‌ی θ_0 به هوا پرتاب شده است. این حرکت، همان‌طور که با مؤلفه‌های سرعت نشان داده شده ترکیبی از حرکت قائم (با شتاب ثابت) و حرکت افقی (با سرعت ثابت) است.



$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{i} + v_{0y}\hat{j}$

$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$

$v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$

⇓

$\vec{v}_0 = v_0\cos\theta_0\,\hat{i} + v_0\sin\theta_0\,\hat{j}$

در امتداد افق جاذبه تأثیری نمی‌گذارد

باید اصطکاک وجود نداشته باشد

هدف ما در اینجا تحلیل حرکت پرتابه‌ای با استفاده کردن از مطالب مربوط به حرکت دو بعدی در پودمان ۴-۱ تا ۴-۳ است و فرض می‌کنیم که هوا هیچ اثری روی پرتابه ندارد. شکل ۴-۹ که به زودی مورد تحلیل قرار خواهد گرفت، مسیر حرکت پرتابه را با فرض چشم‌پوشی از مقاومت هوا نشان می‌دهد. پرتابه با سرعت آغازی $\vec{v}_{\circ}$ پرتاب شده است که می‌تواند چنین نوشته شود

$$\vec{v}_{\circ} = v_{\circ x}\hat{\mathrm{i}} + v_{\circ y}\hat{\mathrm{j}} \qquad (۱۹-۴)$$

بنابراین، اگر زاویه‌ی $\theta_{\circ}$ میان $\vec{v}_{\circ}$ و محور x مثبت را بدانیم، می‌توانیم مؤلفه‌های $v_{\circ x}$ و $v_{\circ y}$ را پیدا کنیم:

$$v_{\circ y} = v_{\circ}\sin\theta_{\circ} \quad \text{و} \quad v_{\circ x} = v_{\circ}\cos\theta_{\circ} \qquad (۲۰-۴)$$

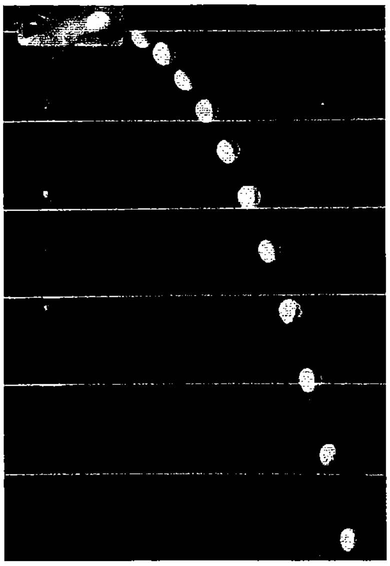
در این حرکت دو بعدی، بردارهای مکان $\vec{r}$ و سرعت پرتابه $\vec{v}$، به طور پیوسته تغییر می‌کنند، اما بردار شتاب آن $\vec{a}$، ثابت است. این شتاب **همیشه** در راستای قائم و به پایین‌سو است. در نتیجه، ***پرتابه شتاب افقی ندارد.***

حرکت پرتابه‌ای، که در شکل‌های ۴-۸ و ۴-۹ نشان داده شده است، به نظر پیچیده می‌آید، اما موضوع آن را می‌توان به شکل ساده‌ی زیر (که از تجربه حاصل شده است) بیان کرد:

مهم

در حرکت پرتابه‌ای، حرکت‌های افقی و قائم از هم مستقل‌اند، یعنی هیچ کدام بر هم اثری ندارند.

با توجه به این نکته، حرکت دو بعدی پرتابه را می‌توان به صورت دو حرکت یک بعدی مجزا، یکی برای حرکت افقی (با ***شتاب صفر***) و دیگری برای حرکت قائم (با ***شتاب ثابت پایین‌سو***)، تجزیه کرد. اکنون با تشریح دو آزمایش نشان می‌دهیم که حرکت افقی و حرکت قائم پرتابه از هم مستقل‌اند.



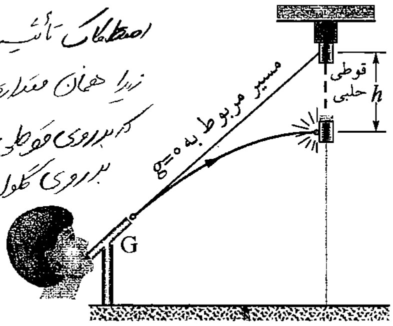
شکل ۴-۱۰ یکی از توپ‌های گلف از حال سکون و در لحظه‌ای رها شده که توپ دیگر به طور افقی به راست‌سو پرتاب شده است. حرکت‌های قائم این دو توپ مشابه‌اند.

- قوس این گلوله به خاطر جاذبه‌ی زمین است
- اگر این دو گلوله در خلاء ابتدا هم‌زمان به زمین می‌رسند

دو توپ گلف

شکل ۴-۱۰ عکسی از توپ گلف را نشان می‌دهد که به روش استروبوسکوپی گرفته شده است. یکی از توپ‌ها از حال سکون رها شده و توپ دیگر به وسیله‌ی یک فنر فشرده شده به‌طور افقی پرتاب شده است. حرکت قائم توپ‌های گلف یکسان است و هر دو توپ در بازه‌ی زمانی برابر، مسافت قائم یکسانی را می‌پیمایند. ***این واقعیت که یکی از توپ‌ها در حال سقوط کردن دارای حرکت افقی نیز هست، هیچ اثری روی حرکت قائم آن ندارد؛*** یعنی، حرکت‌های قائم و افقی از هم مستقل‌اند.

گلوله و قوطی به‌اندازه‌ی مسافت یکسان h سقوط می‌کنند.



اصطکاک تأثیری ندارد زیرا همان مقداری اثر اصطکاک که بر روی قوطی تأثیر دارد بر روی گلوله نیز تأثیر دارد

شکل ۴-۱۱ نمایشی از یک آزمایش که نشان می‌دهد گلوله همیشه به قوطی حلبی در حال سقوط برخورد می‌کند. گلوله و قوطی، هر دو، نسبت به نقطه‌ای که در صورت نبودن شتاب سقوط آزاد باید در آنجا می‌بودند، به اندازه‌ی مسافت h سقوط می‌کنند.

نمایشی حیرت‌انگیز

در شکل ۴-۱۱، گلوله‌ای به عنوان پرتابه با یک تفنگ فوت کردنی G، که یک راست به سمت قوطی حلبی آویخته شده از آهن‌ربای M نشانه‌گیری شده است، پرتاب می‌شود. اگر g

(بزرگی شتاب سقوط آزاد) صفر می‌بود، گلوله مسیر راست‌خط نشان داده شده در شکل ۴-۱۱ را می‌پیمود و قوطی پس از رها شدن در جای خود معلق می‌ماند و گلوله به یقین به آن برخورد می‌کرد. اما با آنکه g ***صفر نیست***، گلوله ***باز هم*** به قوطی برخورد می‌کند! همان طور که شکل ۴-۱۱ نشان می‌دهد، در مدت زمانی که گلوله در حال پرواز است، هم گلوله و هم قوطی نسبت به محل مربوط به «g صفر» به اندازه‌ی h سقوط می‌کنند. هر چه آزمایش کننده با شدت بیشتری در تفنگ بدمد، سرعت آغازی گلوله بیشتر، زمان پرواز کمتر، و مقدار h کمتر خواهد شد.

☑ خودآزمایی ۳

در لحظه‌ی معینی توپ پرتاب شده‌ای دارای سرعت $\vec{v} = 25\hat{i} - 4/9\hat{j}$ است (محور x افقی، محور y بالاسو و $\vec{v}$ برحسب متر بر ثانیه است). آیا توپ در این لحظه از بالاترین نقطه‌ی مسیر خود گذشته است؟

حرکت افقی

اکنون می‌توانیم حرکت پرتابه‌ای را از نظر حرکت‌های افقی و قائم مورد تحلیل قرار دهیم. ابتدا از حرکت افقی شروع می‌کنیم. چون در راستای افقی ***شتابی وجود ندارد***، چنان که شکل ۴-۱۲ نشان می‌دهد، مؤلفه‌ی افقی سرعت پرتابه v_x، در تمام مدت حرکت تغییر نمی‌کند و در همان مقدار آغازی $v_{\circ x}$ باقی می‌ماند. در هر زمان t، جابه‌جایی افقی پرتابه $x - x_\circ$، نسبت به مکان آغازی $x_\circ$ از معادله‌ی ۲-۱۵ به ازای $a = \circ$ به دست می‌آید، که برابر است با

$$x - x_\circ = v_{\circ x} t$$

چون $v_{\circ x} = v_\circ \cos\theta_\circ$، داریم

$$x - x_\circ = (v_\circ \cos\theta_\circ)\, t \qquad (۴\text{-}۲۱)$$

شکل ۴-۱۲ مؤلفه‌ی قائم سرعت اسکیت‌سوار تغییر می‌کند، اما مؤلفه‌ی افقی سرعت که با سرعت تخته‌ی اسکیت همانند است، تغییر نمی‌کند. در نتیجه، تخته‌ی اسکیت همواره زیر اسکیت‌سوار حرکت می‌کند و به وی امکان می‌دهد که روی تخته فرود آید.

حرکت قائم

حرکت قائم پرتابه همان حرکتی است که در پودمان ۲-۵ برای یک ذره‌ی در حال سقوط آزاد مورد بحث قرار گرفت. در اینجا مهم‌ترین نکته ثابت بودن شتاب است. بنابراین، معادله‌های جدول ۲-۱ را می‌توان به کار برد به شرطی که a را با $-g$ جانشین کنیم و نمادها را برای محور y بنویسیم. در نتیجه، معادله‌ی ۲-۱۵ چنین نوشته می‌شود

$$y - y_\circ = v_{\circ y} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow$$

$$y - y_\circ = (v_\circ \sin\theta_\circ)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (۴\text{-}۲۲)$$

در این معادله $v_\circ \sin\theta_\circ$ به جای مؤلفه‌ی قائم سرعت آغازی $v_{\circ y}$، قرار گرفته است. به همین ترتیب، معادله‌های ۲-۱۱ و ۲-۱۶ به صورت زیر در می‌آیند

$$v_y = v_\circ \sin\theta_\circ - gt \qquad (۴\text{-}۲۳)$$

و

$$v_y^2 = (v_0 \sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0) \qquad (۲۴-۴)$$

$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0}$

همان‌طور که شکل ۴-۹ و معادله‌ی ۴-۲۳ نشان می‌دهد، مؤلفه‌ی قائم سرعت مانند سرعت گلوله‌ای رفتار می‌کند که در راستای قائم به بالاسو پرتاب شده است. یعنی، گلوله در آغاز به بالاسو حرکت می‌کند و بزرگی سرعتش به طور پیوسته تا صفر کاهش می‌یابد، ***که در این لحظه به ارتفاع بیشینه‌ی مسیر می‌رسد.*** سپس، جهت سرعت قائم گلوله وارون می‌شود و با گذشت زمان بزرگی سرعت افزایش می‌یابد.

$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta_0 t$

$y = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta_0}\right)^2 + v_0 \sin\theta_0 \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta_0}\right)$

$y = (\tan\theta_0) x - \frac{g x^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}$

$y = ax + bx^2$ سهمی

برد : فاصله‌ی صفر تا جایی که به زمین می‌خورد .

معادله‌ی مسیر

معادله‌ی **مسیر پرتابه** با حذف کردن t در بین معادله‌های پارامتری ۴-۲۱ و ۴-۲۲، به دست می‌آید. برای این منظور، مقدار t را از معادله‌ی ۴-۲۱ حساب می‌کنیم و آن را در معادله‌ی ۴-۲۲ قرار می‌دهیم. در نتیجه، خواهیم داشت

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2} \quad \text{(مسیر پرتابه)} \qquad (۲۵-۴)$$

این معادله، معادله‌ی مسیری است که در شکل ۴-۹ نشان داده شده است. هنگام به دست آوردن این معادله، به خاطر سادگی، در معادله‌های ۴-۲۱ و ۴-۲۲، به ترتیب، از شرط‌های $x_0 = 0$ و $y_0 = 0$ استفاده شده است. چون g ، θ_0 و v_0 ثابت‌اند، معادله‌ی ۴-۲۵ دارای شکل $y = ax + bx^2$ است، که در آن a و b مقادیری ثابت‌اند. این معادله، معادله‌ی یک سهمی است، و بنابراین، ***مسیر حرکت پرتابه سهمی شکل است.***

برد افقی

برد افقی پرتابه R، مسافتی ***افقی*** است که پرتابه از نقطه‌ی پرتاب تا نقطه‌ی برگشت به سطح پرتاب آغازی می‌پیماید. برای پیدا کردن R، معادله‌ی $x - x_0 = R$ را در معادله‌ی ۴-۲۱ و معادله‌ی $y - y_0 = 0$ را در معادله‌ی ۴-۲۲ قرار می‌دهیم. در نتیجه، خواهیم داشت

$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\theta_0 t$

$0 =$

$y = 0$

$$\boxed{R = (v_0 \cos\theta_0)t}$$

و

$$0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

با حذف کردن t در بین این دو معادله، داریم

$$R = \frac{2v_0^2}{g}\sin\theta_0 \cos\theta_0$$

با استفاده کردن از رابطه‌ی $\sin 2\theta_0 = 2\sin\theta_0\cos\theta_0$ (به پیوست ث پایان کتاب رجوع کنید)، خواهیم داشت

اگر $\theta = 45^\circ$ باشد ← $max\ R$ می‌شود

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0 \qquad (۲۶-۴)$$

اگر ارتفاع نقطه‌ی برگشت پرتابه با ارتفاع نقطه‌ی پرتاب آغازی یکی نباشد، از این معادله

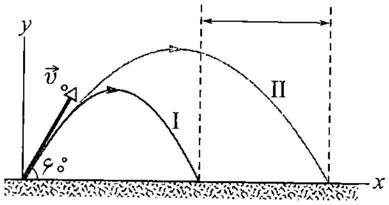
اوج کاهش یافته است.
برد نیز کاهش یافته است.

نمی‌توان برای پیدا کردن مسافت افقی پیموده شده استفاده کرد. توجه کنید که در معادله‌ی ۴-۲۶ مقدار R هنگامی بیشینه است که داشته باشیم $\sin 2\theta_0 = 1$، یعنی $2\theta_0 = 90°$ و از آنجا $\theta_0 = 45°$.

برد افقی R هنگامی بیشینه است که زاویه‌ی پرتاب ۴۵ درجه باشد.

اما هنگامی که ارتفاع‌های پرتاب و فرود متفاوت هستند، مثلاً، در بسیاری از ورزش‌های مربوط به پرتاب، به ازای زاویه‌ی ۴۵ درجه مسافت افقی پرتاب بیشینه نیست.

...و برد را کاهش می‌دهد. مقاومت هوا ارتفاع...



شکل ۴-۱۳ (I) نمودار مسیر یک گوی بیس‌بال در حال حرکت در هوا با در نظر گرفتن مقاومت هوا. (II) نمودار مسیر حرکت همان گوی در خلاء که با روش‌های مورد بحث در این فصل حساب شده است. برای مشاهده‌ی داده‌های مربوط به این حرکت‌ها به جدول ۴-۱ رجوع کنید. این موضوع از مقاله‌ی زیر گرفته شده است:
"The Trajectory of a Fly Ball," by Peter J. Brancazio, *The Physics Teacher*, January 1985.

مسیر
برای سرچ تو گوگل

اثر هوا روی پرتابه

تا اینجا فرض کردیم که هوا بر روی پرتابه‌ی در حال حرکت هیچ اثری ندارد. اما در بسیاری موارد نتیجه‌های محاسباتی با وضعیت واقعی حرکت پرتابه سازگار نیستند، زیرا هوا در مقابل حرکت مقاومت می‌کند (یا مخالفت می‌کند). به عنوان مثال، شکل ۴-۱۳ دو مسیر حرکت یک گوی بیس بال را که با تندی آغازی ۴۴٫۷m/s تحت زاویه‌ی ۶۰ درجه نسبت به سطح افقی پرتاب شده است، نشان می‌دهد. مسیر I (که مربوط به گوی پرتاب شده توسط بازیکن بیس‌بال است) مسیری است که در شرایط عادی بازی و به طور تقریبی برای گوی بیس بال در هوا حساب شده است. مسیر II (مسیر گوی پرتاب شده، که مثلاً توسط استاد فیزیک حساب شده است) مسیری است که گوی در خلاء می‌پیماید. در جدول ۴-۱ برخی مشخصات مربوط به مسیرهای I و II درج شده است.

جدول ۴-۱ مقایسه‌ی پرتاب دو گوی بیس بال*

کمیت‌های مربوط	مسیر I (هوا)	مسیر II (خلاء)
برد	۹۸٫۵m	۱۷۷m
ارتفاع بیشینه	۵۳٫۰m	۷۶٫۸m
مدت زمان پرواز	۶٫۶s	۷٫۹s

* شکل ۴-۱۳ را ببینید. زاویه‌ی پرتاب گوی‌ها ۶۰ درجه و تندی آغازی پرتاب ۴۴٫۷m/s است.

خودآزمایی ۴

یک گوی بیس بال در بخش بیرونی میدان بازی به زمین برخورد می‌کند. در حین پرواز (با چشم‌پوشی از اثر هوا)، (الف) مؤلفه‌ی افقی و (ب) مؤلفه‌ی قائم سرعت گوی چه تغییری می‌کند؟ (پ) مؤلفه‌ی افقی و (ت) مؤلفه‌ی قائم شتاب گوی هنگام بالا رفتن و پایین آمدن و نیز در بالاترین نقطه‌ی پرواز (نقطه اوج) چیست؟

مسئله‌ی نمونه‌ی ۴-۴ پرتابه‌ی رها شده از هواپیما

در شکل ۴-۱۴، یک هواپیمای ویژه‌ی عملیات نجات با تندی ۱۹۸km/h (مساوی با ۵۵٫۰m/s) در ارتفاع ثابت $h = 500\,\text{m}$، یک راست به سمت نقطه‌ای واقع در بالای شخصی که در حال غرق شدن در آب است، پرواز می‌کند تا یک بسته‌ی وسایل نجات را به او برساند.

(الف) زاویه‌ی دید خلبان ϕ، در لحظه‌ی رها شدن بسته‌ی نجات چقدر است؟

نکته‌های کلیدی

بسته‌ی نجات به محض رها شدن مانند یک پرتابه است. پس، حرکت‌های افقی و قائم آن از هم مستقل‌اند و آن‌ها را می‌توان به‌طور جداگانه در نظر گرفت (نیازی به در نظر گرفتن مسیر خمیده‌ی واقعی بسته نیست)

محاسبات: در شکل ۴-۱۴، زاویه‌ی ϕ از رابطه‌ی زیر به دست

می‌آید

$$\phi = \tan^{-1}\frac{x}{h} \qquad (۴-۲۷)$$

در این معادله x مختصه‌ی افقی محل شخص در آب در لحظه‌ی رها شدن بسته (و محل بسته هنگام برخورد به سطح آب) و $h = ۵۰۰\,\text{m}$ است. مقدار x را باید با استفاده کردن از معادله‌ی ۴-۲۱ حساب کرد:

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)t \qquad (۴-۲۸)$$

می‌دانیم که $x_0 = ۰$، زیرا مبداء مختصات در نقطه‌ی رها شدن بسته قرار دارد. چون بسته از هواپیما ***رها شده*** و پرتاب نشده است، سرعت آغازی آن $\vec{v}_0$، با سرعت هواپیما برابر است. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که بزرگی سرعت آغازی بسته $v_0 = ۵۵/۰\,\text{m/s}$ و زاویه‌ی آن (نسبت به محور x مثبت) $\theta_0 = ۰$ است. اما مدت زمان حرکت بسته، t، از هواپیما تا محل شخص را نمی‌دانیم.

اکنون، برای پیدا کردن t، ***حرکت قائم*** و به ویژه معادله‌ی ۴-۲۲ را در نظر می‌گیریم:

$$y - y_0 = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{۱}{۲}gt^2 \qquad (۴-۲۹)$$

در اینجا جابه‌جایی قائم بسته $y - y_0 = -۵۰۰\,\text{m}$ است (علامت منفی نشان می‌دهد که بسته از مبداء ***به پایین‌سو*** حرکت می‌کند). در نتیجه، داریم

$$-۵۰۰\,\text{m} = (۵۵/۰\,\text{m/s})(\sin ۰^\circ)t - \frac{۱}{۲}(۹/۸\,\text{m/s}^2)t^2 \qquad (۴-۳۰)$$

با حل کردن این معادله مقدار $t = ۱۰/۱\text{s}$ به دست می‌آید. اگر این مقدار را در معادله‌ی ۴-۲۸ قرار دهیم، داریم

$$x - ۰ = (۵۵/۰\,\text{m/s})(\cos ۰^\circ)(۱۰/۱\text{s}) \Rightarrow \qquad (۴-۳۱)$$

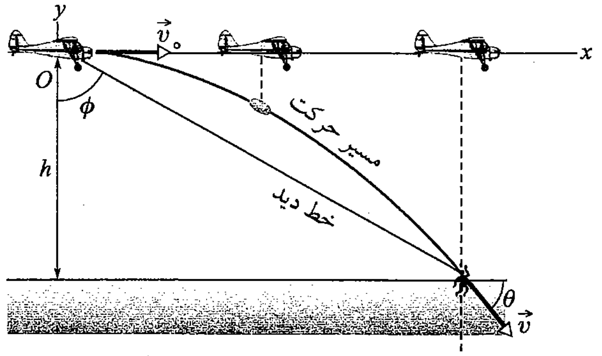
$$x = ۵۵۵/۵\,\text{m}$$

در نتیجه، با استفاده کردن از معادله‌ی ۴-۲۷، خواهیم داشت

$$\phi = \tan^{-1}\frac{۵۵۵/۵\,\text{m}}{۵۰۰\,\text{m}} \Rightarrow$$

$$\phi = ۴۸/۰^\circ \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

(ب) وقتی بسته به سطح آب می‌رسد، سرعتش $\vec{v}$، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه ونیز به‌صورت بزرگی ـ زاویه، چیست؟



شکل ۴-۱۴ هواپیما یک بسته‌ی وسایل نجات را هنگامی رها می‌کند که در حال پرواز با سرعت افقی ثابت است. بسته در هنگام سقوط کردن مؤلفه‌ی افقی سرعتش برابر با سرعت هواپیما باقی می‌ماند.

نکته‌های کلیدی

(۱) مؤلفه‌های افقی و قائم سرعت بسته مستقل از یکدیگرند. (۲) مؤلفه‌ی افقی سرعت بسته v_x، تغییر نمی‌کند و با مقدار آغازی آن $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$ برابر است، زیرا شتاب افقی وجود ندارد. (۳) مؤلفه‌ی v_y نسبت به مقدار آغازی $v_{0y} = v_0 \sin\theta_0$ تغییر می‌کند زیرا شتاب قائم وجود دارد.

محاسبات: هنگامی که بسته به آب می‌رسد، داریم

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 = (۵۵/۰\,\text{m/s})(\cos ۰^\circ) = ۵۵/۰\,\text{m/s}$$

با توجه به معادله‌ی ۴-۲۳ و زمان سقوط بسته $t = ۱۰/۱\text{s}$، مؤلفه‌ی قائم سرعت بسته هنگام برخورد به آب برابر است با

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt$$
$$v_y = (۵۵/۰\,\text{m/s})(\sin ۰^\circ) - (۹/۸\,\text{m/s}^2)(۱۰/۱\text{s}) \Rightarrow$$
$$v_y = -۹۹/۰\,\text{m/s}$$

بنابراین، بردار سرعت بسته در لحظه‌ی برخورد به آب عبارت است از

$$\vec{v} = (۵۵/۰\,\text{m/s})\,\hat{i} - (۹۹/۰\,\text{m/s})\,\hat{j} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

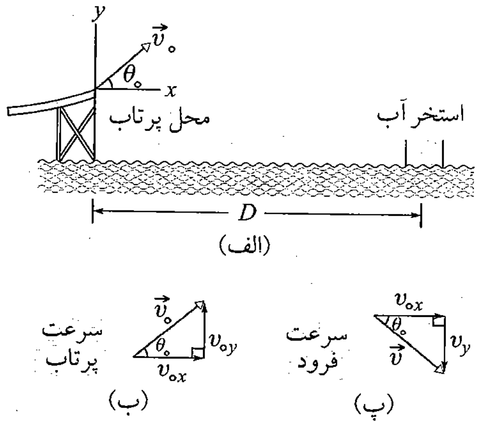
با استفاده کردن از معادله‌ی ۳-۶، درمی‌یابیم که بزرگی و زاویه‌ی بردار سرعت $\vec{v}$، چنین به دست می‌آیند

$$\theta_0 = -۶۰/۹^\circ \quad \text{و} \quad v = ۱۱۳\,\text{m/s} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

مسئله‌ی نمونه‌ی ۴-۵ پرتاب شده به هوا از روی یک سُرسُره‌ی آبی

یکی از مهیج‌ترین نمایش‌های ویدئویی (اما به طور کامل ساختگی) به فرض مردی را نشان می‌دهد که در طول سُرسُره‌ی آبی درازی می‌لغزد و سپس به هوا پرتاب می‌شود و در استخر آبی فرود می‌آید. فرض کنید برخی عددهای پذیرفتنی را به چنین پروازی نسبت می‌دهیم تا بتوانیم سرعت برخورد مرد به آب را حساب کنیم. شکل ۴-۱۵ الف محل‌های پرتاب و فرود آمدن مرد و دستگاه مختصات منطبق بر آن را نشان می‌دهد. مبدأ دستگاه در محل پرتاب واقع است.

باتوجه به نمایش ویدئویی، مسافت پرواز افقی $D = ۲۰٫۰\,m$، مدت زمان پرواز $t = ۲٫۵۰\,s$ و زاویه‌ی پرتاب $\theta_0 = ۴۰٫۰^\circ$ است. بزرگی‌های سرعت پرتاب و سرعت فرود را پیدا کنید.



شکل ۴-۱۵ (الف) نمایش پرتاب از یک سُرسُره‌ی آبی برای فرود آمدن در استخر آب. سرعت (ب) در هنگام پرتاب و (پ) در هنگام فرود به سطح آب.

نکته‌های کلیدی

(۱) در حرکت پرتابه‌ای، می‌توان معادله‌های شتاب ثابت را در راستای محورهای افقی و قائم ***به طور جداگانه*** به‌کار برد. (۲) در سرتاسر پرواز، شتاب قائم $a_y = -g = -۹٫۸\,m/s^۲$ و شتاب افقی $a_x = ۰$ است.

محاسبات: در بیشتر مسئله‌های مربوط به پرتاب، چالش آغازی چگونگی شکل دادن شروع کردن پرتاب است. اگر بخواهیم سرعت‌ها را پیدا کنیم، می‌توانیم معادله‌های گوناگونی را به کار ببریم. اما در اینجا یک راهنمایی لازم است. چون می‌خواهیم از معادله‌های شتاب ثابت برای حرکت‌های x و y به طور جداگانه استفاده کنیم، باید مؤلفه‌های افقی و قائم سرعت‌ها را در محل‌های پرتاب و فرود به آب پیدا کنیم. سپس، می‌توانیم برای هر یک از این محل‌ها مؤلفه‌های سرعت را با هم ترکیب کنیم و سرعت را به دست آوریم.

چون جابه‌جایی افقی $D = ۲۰٫۰\,m$ را می‌دانیم محاسبه را از حرکت افقی آغاز می‌کنیم. چون $a_x = ۰$، می‌دانیم که مؤلفه‌های سرعت افقی v_x در طول پرواز ثابت و در نتیجه، همیشه برابر با مؤلفه‌ی افقی v_{0x} در هنگام پرتاب است. این مؤلفه، جابه‌جایی $x - x_0$ و مدت زمان پرواز $t = ۲٫۵۰\,s$، را از طریق معادله‌ی ۲-۱۵ می‌توان به هم ربط داد:

$$x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{۲}a_x t^۲ \qquad (۴\text{-}۳۲)$$

با جانشانی $a_x = ۰$، این رابطه به معادله‌ی ۴-۲۱ تبدیل می‌شود. بنابراین، به ازای $x - x_0 = D$، داریم

$$۲۰\,m = v_{0x}\,(۲٫۵۰\,s) + \frac{1}{۲}(۰)(۲٫۵۰\,s)^۲ \Rightarrow$$

$$v_{0x} = ۸٫۰۰\,m/s$$

این، مؤلفه‌ی سرعت پرتاب است، اما باید بزرگی بردار کامل، مطابق شکل ۴-۱۵ ب، را هم پیدا کنیم. مؤلفه‌ها ضلع‌های یک مثلث راست‌گوشه و بردار کامل وتر آن مثلث را تشکیل می‌دهند. اکنون، برای پیدا کردن بزرگی سرعت کامل در هنگام پرتاب می‌توان یک تعریف مثلثاتی را به کار برد:

$$\cos\theta_0 = \frac{v_{0x}}{v_0}$$

در نتیجه، داریم

$$v_0 = \frac{v_{0x}}{\cos\theta_0} = \frac{۸٫۰۰\,m/s}{\cos ۴۰^\circ} \Rightarrow$$

$$v_0 = ۱۰٫۴۴\,m/s \approx ۱۰٫۴\,m/s \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

اکنون، بزرگی سرعت فرود به آب v، را پیدا می‌کنیم. مؤلفه‌ی افقی این سرعت را از پیش می‌دانیم، که همان مقدار آغازی $۸٫۰۰\,m/s$ است و تغییر نمی‌کند. برای پیدا کردن

شتاب چقدر است؟ $a=\frac{v^2}{r}$

$r=6400\,km$ ، $t=24\,s$ ؟ سرعت جسم روی زمین چقدر است؟ زمان تناوب $T=\frac{2\pi r}{v}$

سرعت انتقالی؟ کدام بیشتر است؟

مؤلفه‌ی قائم v_y، باتوجه به این‌که زمان سپری شده $t=۲/۵۰\,\mathrm{s}$ و شتاب قائم $a_g=-۹/۸\,\mathrm{m/s^۲}$ است، با استفاده کردن از معادله‌ی ۲-۱۱ داریم

$$v_y=v_{\circ y}+a_y t$$

در نتیجه (از معادله‌ی ۴-۱۵ ب)، خواهیم داشت:

$$v_y=v_\circ \sin\theta_\circ+a_y t \qquad (۳۳\text{-}۴)$$

با جانشانی $a_y=-g$، این رابطه به معادله‌ی ۴-۲۳ تبدیل می‌شود. بنابراین، می‌توان نوشت

$$v_y=(۱۰/۴۴\,\mathrm{m/s})\sin(۴۰/۰^\circ)-(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲})(۲/۵۰\,\mathrm{s})$$

$$v_y=-۱۷/۷۸\,\mathrm{m/s}$$

اکنون که هر دو مؤلفه‌ی سرعت فرود به آب را می‌دانیم، برای پیدا کردن بزرگی سرعت از معادله‌ی ۳-۶ استفاده می‌کنیم:

$$v=\sqrt{v_x^۲+v_y^۲}$$

$$v=\sqrt{(۸/۰۰\,\mathrm{m/s})^۲+(-۱۷/۷۸\,\mathrm{m/s})^۲}\Rightarrow$$

$$v=۱۹/۴۹\,\mathrm{m/s}\approx ۱۹/۵\,\mathrm{m/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

۵-۴ حرکت دایره‌ای یکنواخت

UCM = uniform circular motion

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۴-۱۶ مسیر حرکت دایره‌ای یکنواخت را رسم کنید وبردارهای سرعت و شتاب (بزرگی و جهت) در حین حرکت را توضیح دهید.

۴-۱۷ رابطه‌ی میان شعاع مسیر دایره‌ای، دوره‌ی تناوب، تندی ذره، و بزرگی شتاب ذره را به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

- اگر ذره‌ای با تندی ثابت v در روی یک دایره یا کمان دایره‌ای به شعاع r حرکت کند، می‌گوییم حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد و دارای شتاب $\vec{a}$ با بزرگی ثابت زیر است

$$a=\frac{v^۲}{r}$$

جهت $\vec{a}$ به سوی مرکز دایره یا کمان دایره‌ای است و $\vec{a}$ شتاب مرکزگرا نامیده می‌شود. زمانی که ذره یک دایره‌ی کامل را می‌پیماید، برابر است با

$$T=\frac{۲\pi r}{v}$$

T را دوره‌ی تناوب گردش، یا به طور ساده دوره‌ی تناوب حرکت، می‌نامند.

$a \perp v$ $\Rightarrow$ a برعکس اثر F

حرکت دایره‌ای یکنواخت

هرگاه ذره‌ای با تندی ثابت (***یکنواخت***) روی یک دایره یا کمانی دایره‌ای حرکت کند، این ذره دارای **حرکت دایره‌ای یکنواخت** است. در این حرکت اگرچه تندی تغییر نمی‌کند، ***ذره شتاب‌دار است***، زیرا جهت سرعت تغییر می‌کند.

شکل ۴-۱۶، رابطه‌ی میان بردارهای سرعت و شتاب را در مرحله‌های گوناگون حرکت دایره‌ای یکنواخت نشان می‌دهد. در حین حرکت، هر دو بردار بزرگی‌شان ثابت می‌ماند، اما جهت‌شان پیوسته تغییر می‌کند. بردار سرعت همیشه بر دایره مماس و در جهت حرکت است. ***شتاب همیشه در راستای شعاع و به سوی مرکز دایره‌ی مسیر است.*** به همین دلیل، شتاب

حرکت دایره‌ای یکنواخت را **شتاب مرکزگرا** (به معنی «مرکزجو») می‌نامند. چنان‌که نشان داده خواهد شد، بزرگی شتاب $\vec{a}$ برابر است با

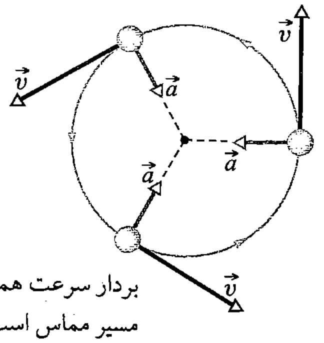
$$a = \frac{v^2}{r} \quad \text{(شتاب مرکزگرا)} \qquad (۳۴-۴)$$

که در آن r شعاع دایره و v تندی ذره است.

علاوه بر این، در حرکت دایره‌ای با شتاب و تندی ثابت، ذره محیط دایره (مسافت $2\pi r$) را در مدت زمان

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad \text{(دوره‌ی تناوب)} \qquad (۳۵-۴)$$

می‌پیماید. T را ***دوره‌ی تناوب گردش***، یا به طور ساده، ***دوره‌ی تناوب حرکت*** می‌نامند. به‌طور کلی، دوره‌ی تناوب مدت زمان لازم برای یک دور گردش کامل ذره روی یک مسیر بسته است.



شکل ۴-۱۶ نمودارهای بردارهای سرعت و شتاب مربوط به حرکت دایره‌ای یکنواخت.

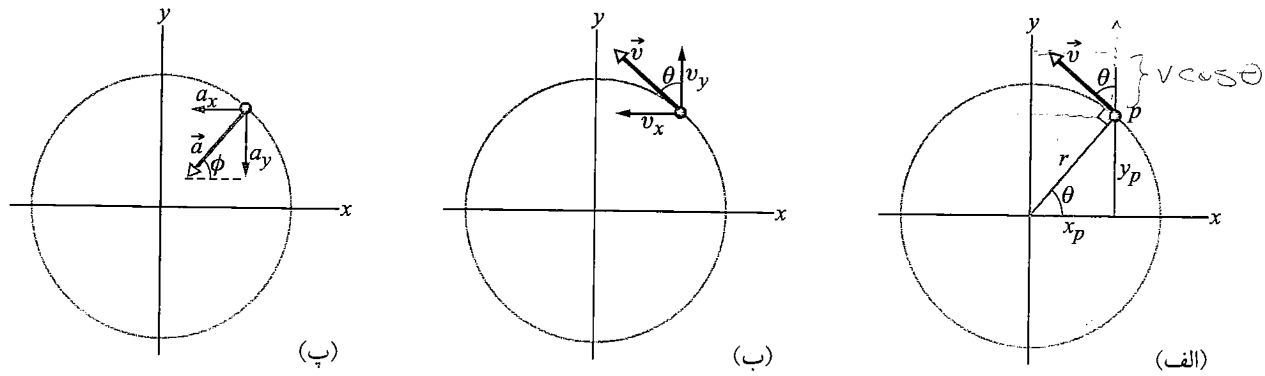
اثبات معادله‌ی ۴-۳۴

برای تعیین بزرگی و جهت شتاب حرکت دایره‌ای یکنواخت، شکل ۴-۱۷ را در نظر می‌گیریم. در شکل ۴-۱۷ الف، ذره‌ی p با تندی ثابت v در روی دایره‌ای به شعاع r حرکت می‌کند. مختصات مکان ذره‌ی p در لحظه‌ی نشان داده شده، x_p و y_p است.

با توجه به مطالب پودمان ۴-۲ می‌دانیم که سرعت یک ذره‌ی در حال حرکت $\vec{v}$، همیشه در مکان ذره بر مسیر حرکت مماس است. منظور این است که در شکل ۴-۱۷ الف، $\vec{v}$ بر شعاع r رسم شده در مکان ذره عمود است. بنابراین، θ زاویه‌ای که سرعت $\vec{v}$ با خط قائم گذرنده از p می‌سازد، همان زاویه‌ی θ است که شعاع r با محور x می‌سازد.

در شکل ۴-۱۷ ب، مؤلفه‌های نرده‌ای $\vec{v}$ نشان داده شده‌اند. با استفاده کردن از این مؤلفه‌ها بردار سرعت $\vec{v}$ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\vec{v} = v_x\hat{\mathrm{i}} + v_y\hat{\mathrm{j}} = (-v\sin\theta)\hat{\mathrm{i}} + (v\cos\theta)\hat{\mathrm{j}} \qquad (۳۶-۴)$$



شکل ۴-۱۷ ذره‌ی p به طور پادساعت‌گرد حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. (الف) نمودار مکان و سرعت ذره $\vec{v}$، در یک لحظه‌ی معین. (ب) نمودار سرعت ذره $\vec{v}$. (پ) نمودار شتاب ذره $\vec{a}$.

اکنون، با استفاده کردن از مثلث راست‌گوشه در شکل ۴-۱۷ الف، به جای $\sin\theta$ مقدار y_p/r و به‌جای $\cos\theta$ مقدار x_p/r را قرار می‌دهیم

$$\vec{v} = \left(-\frac{vy_p}{r}\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(\frac{vx_p}{r}\right)\hat{\mathrm{j}} \tag{۴-۳۷}$$

برای پیدا کردن $\vec{a}$، شتاب ذره‌ی p، از معادله‌ی بالا نسبت به زمان مشتق می‌گیریم. یادآوری می‌شود که تندی v و شعاع r برحسب زمان تغییر نمی‌کنند. پس، می‌توان نوشت

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r}\frac{dy_p}{dt}\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(\frac{v}{r}\frac{dx_p}{dt}\right)\hat{\mathrm{j}} \tag{۴-۳۸}$$

اکنون، توجه کنید که آهنگ تغییر y_p، یعنی dy_p/dt، برابر با مؤلفه‌ی سرعت v_y، است. به همین ترتیب، داریم $dx_p/dt = v_x$ و با توجه به شکل ۴-۱۷ ب نتیجه می‌گیریم که $v_x = -v\sin\theta$ و $v_y = v\cos\theta$. با جانشانی این مقادیر در معادله‌ی ۴-۳۸، داریم

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(-\frac{v^2}{r}\sin\theta\right)\hat{\mathrm{j}} \tag{۴-۳۹}$$

در شکل ۴-۱۷ پ، این بردار و مؤلفه‌های آن نشان داده شده‌اند. با توجه به معادله‌ی ۳-۶، درمی‌یابیم که بزرگی $\vec{a}$ برابر است با

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \frac{v^2}{r}\sqrt{1} = \frac{v^2}{r}$$

این، همان نتیجه‌ای است که می‌خواستیم به دست آوریم. برای تعیین جهت $\vec{a}$، زاویه‌ی ϕ نشان داده شده در شکل ۴-۱۷ پ را پیدا می‌کنیم:

$$\tan\phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-(v^2/r)\sin\theta}{-(v^2/r)\cos\theta} = \tan\theta$$

در نتیجه، داریم $\phi = \theta$، یعنی، در شکل ۴-۱۷ الف، $\vec{a}$ در راستای شعاع r قرار دارد و جهتش به سوی مرکز دایره است. این هم نتیجه‌ی دیگری است که می‌خواستیم به دست بیاوریم.

☑ خودآزمایی ۵

شیئی با تندی ثابت در طول یک مسیر دایره‌ایِ واقع در صفحه‌ی افقی xy که مبداء مختصات آن در مرکز دایره واقع است، حرکت می‌کند. وقتی شیء در $x = -2\,\mathrm{m}$ قرار دارد، سرعت آن $-(4\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{j}}$ است. (الف) سرعت و (ب) شتاب این شیء را در $y = 2\,\mathrm{m}$ پیدا کنید.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۴-۶ خلبان هواپیمای شکاری در حال دور زدن

خلبان‌های هواپیماهای شکاری هنگام دور زدن سریع دچار اضطراب می‌شوند. وقتی بدن خلبان تحت تأثیر شتاب مرکزگرا به‌گونه‌ای قرار می‌گیرد که سرش به سمت مرکز خمیدگی متمایل می‌شود، فشار خون در مغزش کاهش می‌یابد، و این، به اختلال در کار مغز منجر می‌شود.

در هواپیماها چند علامت هشداردهنده وجود دارد. وقتی شتاب مرکزگرا به $2g$ یا $3g$ می‌رسد، خلبان احساس سنگینی می‌کند. در شتاب حدود $4g$ خلبان اشیا را سیاه و سفید می‌بیند و

«دید تونلی، یا باریک‌بینی» پیدا می‌کند. اگر شتاب به همین اندازه بماند یا بیشتر شود دید مختل و خلبان پس از زمانی اندک بی‌هوش می‌شود. این حالت به $g-\text{LOC}$ [1] معروف است که به معنی «کاهش یافتن هشیاری ناشی از افزایش g» است.

بزرگی شتاب خلبان که هواپیمایش با سرعت $\vec{v}_i = (۴۰۰\hat{\text{i}} + ۵۰۰\hat{\text{j}})\text{m/s}$ به یک مسیر دایره‌ای افقی وارد می‌شود و پس از $۲۴/۰\text{s}$ با سرعت $\vec{v}_f = (-۴۰۰\hat{\text{i}} - ۵۰۰\hat{\text{j}})\text{m/s}$ از آن بیرون می‌آید، برحسب g، چیست؟

نکته‌های کلیدی

فرض می‌کنیم دور زدن با حرکت دایره‌ای یکنواخت صورت می‌گیرد. در نتیجه، شتاب خلبان مرکزگراست و بزرگی آن از معادله‌ی ۴-۳۴ $(a = v^۲/R)$ به دست می‌آید، که در آن R شعاع مسیر دایره‌ای است. هم‌چنین، مدت زمان لازم برای پیمودن یک دایره‌ی کامل، همان دوره‌ی تناوب حرکت است که از معادله‌ی ۴-۳۵ $(T = ۲\pi R/v)$ به دست می‌آید.

محاسبات: چون شعاع R را نمی‌دانیم، پس R را از معادله‌ی ۴-۳۵ به‌دست می‌آوریم و در معادله‌ی ۴-۳۴ قرار می‌دهیم. درنتیجه، داریم

$$a = \frac{۲\pi v}{T}$$

در اینجا v، بزرگی (ثابت) سرعت هواپیما درحین دو زدن است. اکنون، مؤلفه‌های سرعت آغازی را درمعادله‌ی ۳-۶ قرار می‌دهیم:

$$v = \sqrt{(۴۰۰\,\text{m/s})^۲ + (۵۰۰\,\text{m/s})^۲} = ۶۴۰/۳۱\text{m/s}$$

برای پیدا کردن دوره‌ی تناوب حرکت T، نخست به این نکته توجه می‌کنیم که سرعت پایانی عکس سرعت آغازی است. منظور این است که هواپیما از طرف مقابل نسبت به نقطه‌ی آغازی با همان تندی آغازی از مسیر بیرون می‌آید و در مدت $۲۴/۰\text{s}$ داده شده باید نصف مسیر دایره‌ای را پیموده باشد. بنابراین، زمان پیمودن دایره‌ی کامل $T = ۴۸/۰\text{s}$ است. با جانشانی این مقادیر در معادله‌ی مربوط به a، داریم

$$a = \frac{۲\pi(۶۴۰/۳۱\text{m/s})}{۴۸/۰\text{s}} \Rightarrow$$

$$a = ۸۳/۸۱\text{m/s}^۲ \simeq ۸/۶g \qquad \text{(پاسخ)}$$

سیستم لخت یک چارچوب آزمایشگاهی که به زمین وصل است

۴-۶ حرکت نسبی یک بعدی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۴-۱۸ رابطه‌ی میان مکان، سرعت، و شتاب یک ذره را که از دو چارچوب مرجع در حال حرکت با سرعت ثابت نسبت به یکدیگر در طول یک تک محور، اندازه‌گیری می‌شوند، به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

- وقتی دو چارچوب مرجع A و B با سرعت ثابت نسبت به یکدیگر حرکت می‌کنند، سرعت ذره‌ی P، که توسط ناظر ساکن در چارچوب A اندازه‌گیری می‌شود، به طور معمول، با مقدار اندازه‌گیری شده توسط ناظر ساکن در چارچوب B متفاوت است. رابطه‌ی این دو سرعت اندازه‌گیری شده با یکدیگر چنین است

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

که در آن $\vec{v}_{BA}$ سرعت چارچوب B نسبت به چارچوب A است. هر دو ناظر برای ذره شتاب یکسانی را اندازه می‌گیرند:

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$$

1. g – induced loss of consciousness (g – LOC)

حرکت نسبی یک بعدی

فرض کنید مرغابی‌ای را می‌بینید که با سرعت ۳۰km/h به سمت شمال پرواز می‌کند. از نظر مرغابی دیگری که در کنار آن مرغابی در حال پرواز کردن است، مرغابی اول ساکن به نظر می‌رسد. به عبارت دیگر، سرعت یک ذره به **چارچوب مرجع** عنصر در حال مشاهده یا در حال اندازه‌گیری سرعت ذره، بستگی دارد. برای منظوری که ما داریم، چارچوب مرجع یک شیء فیزیکی است که دستگاه مختصات را به آن متصل می‌کنیم. در زندگی روزانه این شیء زمین است. برای مثال، تندی‌های نوشته شده در برگ فهرست تندی‌های مجاز رانندگی، همیشه نسبت به زمین اندازه‌گیری می‌شوند. اما تندی نسبت به افسر پلیس، که در حال حرکت کردن با خودرو خود آن را اندازه می‌گیرد، متفاوت است.

فرض کنید امیر (واقع در مبداء چارچوب مرجع A در شکل ۴-۱۸) که خودرو خود را در کنار بزرگ‌راهی متوقف کرده است، خودرو در حال عبور P («ذره») را مشاهده می‌کند. بهروز (واقع در مبداء چارچوب مرجع B) که با تندی ثابت در بزرگ‌راه در حال رانندگی است نیز خودرو P را مشاهده می‌کند. فرض کنید، هر دو ناظر در لحظه‌ی معینی در صدد تعیین مکان خودرو P هستند. با توجه به شکل ۴-۱۸، داریم

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA} \qquad (۴-۴۰)$$

معادله‌ی ۴-۴۰ چنین خوانده می‌شود: «x_{PA}، مختصه‌ی اندازه‌گیری شده‌ی خودرو P توسط A ***برابر است با*** x_{PB}، مختصه‌ی اندازه‌گیری شده‌ی خودرو P توسط B، به علاوه‌ی x_{BA}، مختصه‌ی اندازه‌گیری شده‌ی B توسط A». به ترتیب شاخص‌های پایین در موقع خواندن جمله‌های معادله‌ی بالا توجه کنید. با مشتق گرفتن از معادله‌ی ۴-۴۰ نسبت به زمان، داریم

$$\frac{d}{dt}(x_{PA}) = \frac{d}{dt}(x_{PB}) + \frac{d}{dt}(x_{BA})$$

بنابراین، رابطه‌ی مؤلفه‌های سرعت عبارت است از

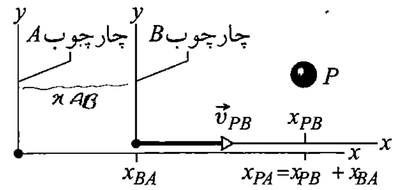
$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA} \qquad (۴-۴۱)$$

معادله‌ی ۴-۴۱ را به این صورت می‌خوانیم: «v_{PA}، سرعت اندازه‌گیری شده‌ی خودرو P توسط A ***برابر است با*** v_{PB}، سرعت اندازه‌گیری شده‌ی خودرو P توسط B، به علاوه‌ی v_{BA}، سرعت اندازه‌گیری شده‌ی B توسط A». جمله‌ی v_{BA} سرعت چارچوب B نسبت به چارچوب A است.

در اینجا فقط چارچوب‌های مرجعی را در نظر می‌گیریم که نسبت به هم با سرعت ثابت حرکت می‌کنند. در مثالی که ارائه شد، موضوع چنین است که بهروز (چارچوب B) همیشه با سرعت ثابت v_{BA} نسبت به امیر (چارچوب A) حرکت می‌کند. اما خودرو P (ذره‌ی در حال حرکت) ممکن است سرعتش زیاد یا کم شود، یا متوقف شود، یا جهتش وارون شود (به هر حال، خودرو P می‌تواند شتاب‌دار باشد).

برای تعیین رابطه‌ی شتاب خودرو P، که توسط بهروز و امیر اندازه‌گیری می‌شود، از

هنگام عبور چارچوب A از کنار چارچوب B، هر دو چارچوب P را مشاهده می‌کنند.



شکل ۴-۱۸ امیر (چارچوب A) و بهروز (چارچوب B) درحالی خودرو P رامشاهده می‌کنند که هم B و هم P با سرعت‌های متفاوت در طول محورهای x مشترک دو چارچوب حرکت می‌کنند. در لحظه‌ی نشان داده شده، x_{BA} مختصه‌ی B در چارچوب A است. هم‌چنین، P در چارچوب B در مختصه‌ی x_{PB}، و در چارچوب A در مختصه‌ی $x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}$ قرار دارد.

هرگاه سرعت ها ثابت باشد
شتاب ندارد.

معادله‌ی ۴-۴۱ نسبت به زمان مشتق می‌گیریم، داریم

$$\frac{d}{dt}(v_{PA}) = \frac{d}{dt}(v_{PB}) + \frac{d}{dt}(v_{BA})$$

چون v_{BA} ثابت است، جمله آخر سمت راست معادله صفر است. در نتیجه، داریم

$$a_{PA} = a_{PB} \qquad (۴\text{-}۴۲)$$

به عبارت دیگر:

ناظرهای واقع در چارچوب‌های مرجع مختلف (که نسبت به هم با سرعت ثابتی حرکت می‌کنند)، برای یک ذره‌ی در حال حرکت شتاب یکسانی را اندازه می‌گیرند.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۴-۷ حرکت نسبی یک بعدی، امیر و بهروز

در شکل ۴-۱۸، فرض کنید سرعت بهروز نسبت به امیر ثابت و برابر با $v_{BA} = ۵۲\,\mathrm{km/h}$ است و خودرو P در جهت منفی محور x می‌کند.

(الف) اگر سرعت خودرو P نسبت به امیر مقدار ثابت $v_{PA} = -۷۸\,\mathrm{km/h}$ باشد، سرعت خودرو P نسبت به بهروز v_{PB}، چیست؟

نکته‌های کلیدی

چارچوب مرجع A را به امیر و چارچوب مرجع B را به بهروز می‌توان وصل کرد. چون این دو چارچوب در طول یک محور نسبت به هم با سرعت ثابت حرکت می‌کنند، با استفاده کردن از معادله‌ی ۴-۴۱ $(v_{PA} = v_{PB} + v_{BA})$ می‌توان v_{PB} را به v_{PA} و v_{BA} ربط داد.

محاسبه: داریم

$$-۷۸\,\mathrm{km/h} = v_{PB} + ۵۲\,\mathrm{km/h} \Rightarrow$$
$$v_{PB} = -۱۳۰\,\mathrm{km/h} \qquad \text{(پاسخ)}$$

توضیح: اگر خودرو P به وسیله‌ی یک طناب پیچیده شده به دور قرقره به خودرو بهروز وصل می‌شد، هنگام دور شدن دو خودرو از هم طناب با تندی $۱۳۰\,\mathrm{km/h}$ از قرقره باز می‌شد.

(ب) اگر خودرو P با شتاب ثابت ترمز کند و پس از زمان $t = ۱۰\,\mathrm{s}$ نسبت به امیر (و در نتیجه، نسبت به زمین) متوقف شود، شتاب a_{PA} نسبت به امیر چقدر است؟

نکته‌های کلیدی

برای محاسبه‌ی شتاب خودرو P ***نسبت به امیر***، باید از سرعت‌های خودرو ***نسبت به امیر*** استفاده کرد. چون شتاب ثابت است برای نوشتن رابطه‌ی میان شتاب و سرعت‌های آغازی و پایانی خودرو P می‌توان معادله‌ی ۲-۱۱ $(v = v_\circ + at)$ را به‌کار برد.

محاسبه: سرعت آغازی P نسبت به امیر $v_{PA} = -۷۸\,\mathrm{km/h}$ و سرعت پایانی صفر است. بنابراین، شتاب نسبت به امیر برابر است با

$$a_{PA} = \frac{v - v_\circ}{t} = \frac{\circ - (-۷۸\,\mathrm{km/h})}{۱۰\,\mathrm{s}} \frac{۱\,\mathrm{m/s}}{۳/۶\,\mathrm{km/h}} \Rightarrow$$
$$a_{PA} = ۲/۲\,\mathrm{m/s^۲} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(پ) a_{PB}، شتاب خودرو P نسبت به بهروز، در حین ترمز کردن چیست؟

نکته‌ی کلیدی

برای محاسبه‌ی شتاب خودرو P ***نسبت به بهروز***، باید از سرعت‌های خودرو ***نسبت به بهروز*** استفاده کنیم.

محاسبه: سرعت آغازی P نسبت به بهروز با توجه به قسمت (الف) در دست است $(v_{PB} = -۱۳۰\,\mathrm{km/h})$، سرعت پایانی P نسبت به بهروز $-۵۲\,\mathrm{km/h}$ است (این مقدار، سرعت خودرو

متوقف‌شده نسبت به بهروز درحال حرکت است). بنابراین، داریم

$$a_{PB} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{-52\,km/h - (-130\,km/h)}{10\,s}\,\frac{1\,m/s}{3.6\,km/h} \Rightarrow$$

(پاسخ) $a_{PB} = 2.2\,m/s^2$

توضیح: این، همان نتیجه‌ای است که از پیش می‌دانستیم: چون امیر و بهروز دارای سرعت نسبی ثابت‌اند، برای خودرو P شتاب یکسانی را اندازه می‌گیرند.

۴-۷ حرکت نسبی دو بعدی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۴-۱۹ رابطه‌ی میان مکان، سرعت و شتاب یک ذره را، که از دو چارچوب مرجع در حال حرکت با سرعت ثابت دو بعدی نسبت به یکدیگر اندازه‌گیری می‌شوند، به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

- در هنگام حرکت کردن دو چارچوب مرجع A و B با سرعت ثابت نسبت به یکدیگر سرعت ذره‌ی P، که توسط ناظر ساکن در چارچوب A اندازه‌گیری می‌شود، به طور معمول، با مقدار اندازه‌گیری شده توسط ناظر ساکن در چارچوب B متفاوت است. رابطه‌ی این دو سرعت اندازه‌گیری شده با یکدیگر چنین است

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

که در آن $\vec{v}_{BA}$ سرعت چارچوب B نسبت به چارچوب A است. هر دو ناظر برای ذره شتاب یکسانی را اندازه می‌گیرند:

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$$

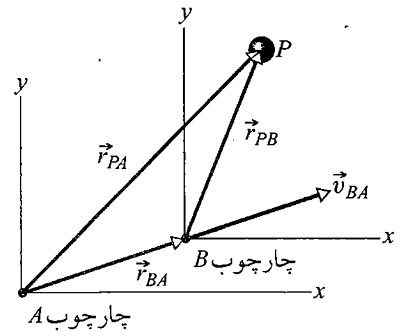
حرکت نسبی دو بعدی

دو ناظر مورد نظر ما باز هم خودرو P را از مبداء چارچوب‌های مرجع A و B در حالی که B با سرعت ثابت $\vec{v}_{AB}$ نسبت به A حرکت می‌کند (محورهای متناظر این دو چارچوب موازی‌اند)، مشاهده می‌کنند و شکل ۴-۱۹ لحظه‌ی معینی از حرکت را نشان می‌دهد. در آن لحظه، بردار مکان مبداء B نسبت به مبداء A، به صورت $\vec{r}_{BA}$ است. هم‌چنین، بردارهای مکان ذره‌ی P عبارت‌اند از $\vec{r}_{PA}$ نسبت به مبداء A و $\vec{r}_{PB}$ نسبت به مبداء B. با توجه به وضعیت سَرها و دُم‌های این سه بردار مکان در شکل، می‌توان نوشت

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA} \qquad (۴-۴۳)$$

با مشتق گرفتن از این معادله نسبت به زمان می‌توان رابطه‌ی میان سرعت‌های $\vec{v}_{PA}$ و $\vec{v}_{PB}$ ذره‌ی P نسبت به ناظرهای A و B را به دست آورد:

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA} \qquad (۴-۴۴)$$



شکل ۴-۱۹ چارچوب B نسبت به چارچوب A دارای سرعت نسبی دو بعدی $\vec{v}_{BA}$ است. $\vec{r}_{BA}$ بردار مکان B نسبت به A، $\vec{r}_{PA}$ بردار مکان ذره‌ی P نسبت به A و $\vec{r}_{PB}$ بردار مکان P نسبت به B است.

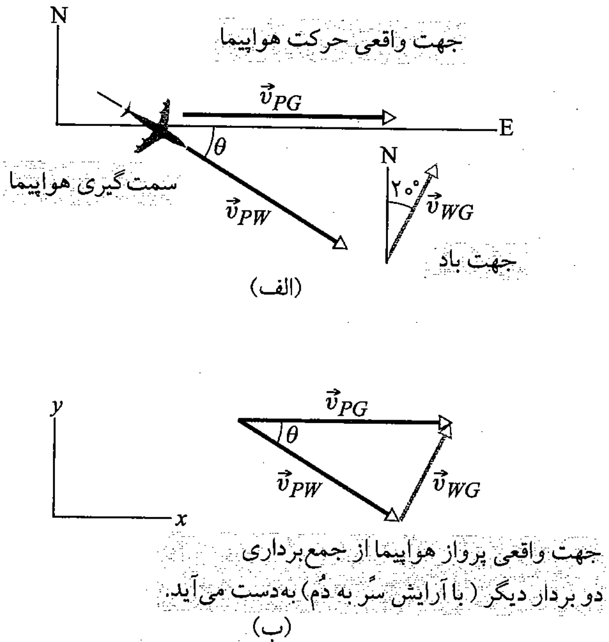
اگر از این رابطه نسبت به زمان مشتق بگیریم، شتاب‌های $\vec{a}_{PA}$ و $\vec{a}_{PB}$ ذره‌ی P نسبت به ناظرها به دست می‌آیند. اما توجه کنید که چون $\vec{v}_{BA}$ ثابت است، مشتق آن نسبت به زمان صفر است. بنابراین، داریم

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} \qquad (۴-۴۵)$$

در اینجا نیز مانند حرکت یک بعدی این قاعده استنتاج می‌شود: ناظرهای واقع در چارچوب‌های مرجع مختلف که نسبت به هم با سرعت ثابتی حرکت می‌کنند، برای ذره‌ی در حال حرکت یک شتاب ***یکسان*** را اندازه می‌گیرند.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۲-۸ حرکت نسبی دو بعدی، هواپیماها

شکل ۴-۲۰ الف نشان می‌دهد که هواپیمایی قرار است به سمت خاور پرواز کند. اما چون بادی به سمت شمال و متمایل به خاور می‌وزد، خلبان مجبور است که هواپیما را نسبت به محور خاوری اندکی به سمت جنوب هدایت کند. سرعت هواپیما نسبت به باد $\vec{v}_{PW}$، بزرگی آن $۲۱۵\,\text{km/h}$ و زاویه‌ی آن نسبت به محور خاوری و متمایل به جنوب θ است. سرعت باد نسبت به زمین $\vec{v}_{WG}$، بزرگی آن $۶۵/۰\,\text{km/h}$ و زاویه‌ی آن نسبت به محور شمالی و متمایل به خاور ۲۰/۰ درجه است. زاویه‌ی θ و بزرگی سرعت هواپیما نسبت به زمین، $\vec{v}_{PG}$، چیست؟



شکل ۴-۲۰ نمایش پرواز هواپیما در جریان باد.

نکته‌های کلیدی

در این مسئله وضعیت مانند شکل ۴-۱۹ است. در اینجا ذره‌ی متحرک P هواپیماست، چارچوب مرجع A متصل به زمین (به نام G) و چارچوب مرجع B متصل به باد (به نام W) است. ما باید نموداری برداری مانند شکل ۴-۱۹ رسم کنیم، اما این بار از سه بردار سرعت استفاده می‌کنیم.

محاسبات: نخست رابطه‌ی زیر را برای سه بردار نشان داده شده در شکل ۴-۲۰ ب می‌نویسیم:

$$\begin{pmatrix}\text{سرعت هواپیما}\\ \text{نسبت به زمین}\,(PG)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{سرعت هواپیما}\\ \text{نسبت به باد}\,(PW)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{سرعت باد}\\ \text{نسبت به زمین}\,(WG)\end{pmatrix}$$

این رابطه را می‌توان به صورت برداری زیر نوشت

$$\vec{v}_{PG} = \vec{v}_{PW} + \vec{v}_{WG} \qquad (۴-۴۶)$$

بهتر آن است که بردارها را به مؤلفه‌های آن‌ها در دستگاه مختصات شکل ۴-۲۰ ب تجزیه و سپس معادله‌ی ۴-۴۶ را برای هر یک از محورها حل کنیم. برای مؤلفه‌های y، داریم

$$v_{PG,y} = v_{PW,y} + v_{WG,y}$$

یا

$$۰ = -(۲۱۵\,\text{km/h})\sin\theta + (۶۵/۰\,\text{km/h})(\cos ۲۰/۰°)$$

پس از حل کردن این معادله نسبت به θ، داریم

$$\theta = \sin^{-1}\frac{(۶۵/۰\,\text{km/h})(\cos ۲۰/۰°)}{۲۱۵\,\text{km/h}} \Rightarrow$$

(پاسخ) $\theta = ۱۶/۵^\circ$

به همین ترتیب، برای مؤلفه‌های x، داریم

$$v_{PG,x} = v_{PW,x} + v_{WG,x}$$

در اینجا چون $\vec{v}_{PG}$ با محور x موازی است، مؤلفه‌ی $v_{PG,x}$ با بزرگی v_{PG} برابر است. با جانشانی این مقدار و به ازای $\theta = ۱۶/۵^\circ$، داریم

$$v_{PG} = (۲۱۵\,\mathrm{km/h})(\cos ۱۶/۵^\circ) + (۶۵/۰\,\mathrm{km/h})(\sin ۲۰/۰^\circ) \Rightarrow$$

(پاسخ) $v_{PG} = ۲۲۸\,\mathrm{km/h}$

مرور و چکیده‌ی مطالب

بردار مکان محل یک ذره نسبت به مبداء یک دستگاه مختصات با بردار مکان $\vec{r}$ مشخص می‌شود، که با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\vec{r} = x\hat{\mathrm{i}} + y\hat{\mathrm{j}} + z\hat{\mathrm{k}} \qquad (۱-۴)$$

در این معادله $x\hat{\mathrm{i}}$، $y\hat{\mathrm{j}}$ و $z\hat{\mathrm{k}}$ ***مؤلفه‌های برداری*** بردار مکان $\vec{r}$ و x، y و z ***مؤلفه‌های نرده‌ای*** آن (یا مختصات مکان ذره) هستند. بردار مکان با بزرگی و با یک یا دو زاویه‌ی مربوط به سمت‌گیری، یا با مؤلفه‌های برداری یا نرده‌ای آن بردار توصیف می‌شود.

جابه‌جایی اگر ذره‌ای طوری حرکت کند که بردار مکان آن از $\vec{r}_۱$ به $\vec{r}_۲$ تغییر کند، ***جابه‌جایی ذره***، $\Delta\vec{r}$، برابر است با

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_۲ - \vec{r}_۱ \qquad (۲-۴)$$

جابه‌جایی را به صورت زیر هم می‌توان نوشت

$$\Delta\vec{r} = (x_۲ - x_۱)\hat{\mathrm{i}} + (y_۲ - y_۱)\hat{\mathrm{j}} + (z_۲ - z_۱)\hat{\mathrm{k}} \qquad (۳-۴)$$

یا

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{\mathrm{i}} + \Delta y\hat{\mathrm{j}} + \Delta z\hat{\mathrm{k}} \qquad (۴-۴)$$

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای اگر ذره‌ای در مدت زمان Δt به اندازه‌ی $\Delta\vec{r}$ جابه‌جا شود، ***سرعت متوسط*** آن $\vec{v}_{\mathrm{avg}}$، در این بازه‌ی زمانی برابر است با

$$\vec{v}_{\mathrm{avg}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (۸-۴)$$

در معادله‌ی ۴-۸ وقتی Δt به سمت صفر میل می‌کند، $\vec{v}_{\mathrm{avg}}$ به سمت یک مقدار حدّی به نام ***سرعت*** یا ***سرعت لحظه‌ای*** $\vec{v}$ میل می‌کند:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (۱۰-۴)$$

این بردار را با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه می‌توان چنین نوشت

$$\vec{v} = v_x\hat{\mathrm{i}} + v_y\hat{\mathrm{j}} + v_z\hat{\mathrm{k}} \qquad (۱۱-۴)$$

که در آن $v_x = dx/dt$، $v_y = dy/dt$ و $v_z = dz/dt$. سرعت لحظه‌ای یک ذره $\vec{v}$، همیشه در راستای مماس بر مسیر در مکان ذره قرار دارد.

شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای اگر سرعت یک ذره در بازه‌ی زمانی Δt از $\vec{v}_۱$ به $\vec{v}_۲$ تغییر کند، ***شتاب متوسط*** آن در این مدت برابر است با

$$\vec{a}_{\mathrm{avg}} = \frac{\vec{v}_۲ - \vec{v}_۱}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (۱۵-۴)$$

در معادله‌ی ۴-۱۵ وقتی Δt به سمت صفر میل می‌کند، $\vec{a}_{\mathrm{avg}}$ به یک مقدار حدّی به نام ***شتاب*** یا ***شتاب لحظه‌ای*** $\vec{a}$، میل می‌کند:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (۱۶-۴)$$

با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه می‌توان نوشت

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}} \qquad (۱۷-۴)$$

که در آن $a_x = dv_x/dt$، $a_y = dv_y/dt$ و $a_z = dv_z/dt$.

حرکت پرتابه‌ای ***حرکت پرتابه‌ای*** حرکت ذره‌ای است که با سرعت آغازی $\vec{v}_۰$ پرتاب می‌شود. در طول پرواز، شتاب افقی ذره صفر است و شتاب قائم ذره همان شتاب سقوط آزاد، $-g$، است (جهت حرکت به بالاسو را مثبت می‌گیریم). اگر $\vec{v}_۰$ برحسب بزرگی (تندی $v_۰$) و زاویه‌ی $\theta_۰$ (نسبت به راستای افقی) بیان شود، معادله‌های حرکت ذره در راستای محورهای افقی x و قائم y عبارت‌اند از

$$x - x_۰ = (v_۰\cos\theta_۰)t \qquad (۲۱-۴)$$

$$y - y_۰ = (v_۰\sin\theta_۰)t - \frac{۱}{۲}gt^۲ \qquad (۲۲-۴)$$

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt \qquad (۴\text{-}۲۳)$$

$$v_y^2 = (v_0 \sin\theta_0)^2 - 2g(y - y_0) \qquad (۴\text{-}۲۴)$$

مسیر یک ذره در حرکت پرتابه‌ای به شکل سهمی است و با معادله‌ی زیر معرفی می‌شود

$$y = (\tan\theta_0)\,x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos\theta_0)^2} \qquad (۴\text{-}۲۵)$$

این معادله به‌شرطی درست است که مقادیر x_0 و y_0 در معادله‌های ۴-۲۱ تا ۴-۲۴ صفر باشند. **برد افقی** ذره R، که مسافت افقی پیموده شده از نقطه‌ی پرتاب تا نقطه‌ی برگشت ذره به سطح پرتاب آغازی است، برابر است با

$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta_0 \qquad (۴\text{-}۲۶)$$

حرکت دایره‌ای یکنواخت اگر ذره‌ای با تندی ثابت v در طول یک دایره یا کمانی دایره‌ای به شعاع r حرکت کند، ***حرکت دایره‌ای یکنواخت*** انجام می‌دهد. بزرگی شتاب $\vec{a}$ در این حرکت برابر است با

$$a = \frac{v^2}{r} \qquad (۴\text{-}۳۴)$$

جهت $\vec{a}$ به سوی مرکز دایره یا کمان دایره‌ای است و گفته می‌شود که شتاب $\vec{a}$ مرکزگرا است. ذره یک مسیر دایره‌ای کامل را در مدت

$$T = \frac{2\pi r}{v} \qquad (۴\text{-}۳۵)$$

می‌پیماید. T را ***دوره‌ی تناوب گردش***، یا ***دوره‌ی تناوب حرکت***، می‌نامند.

حرکت نسبی وقتی دو چارچوب مرجع A و B نسبت به هم با سرعت ثابت حرکت می‌کنند، سرعت یک ذره‌ی P که توسط ناظر واقع در چارچوب A اندازه‌گیری می‌شود با سرعت اندازه‌گیری شده توسط ناظر واقع در چارچوب B، به طور معمول، متفاوت است. رابطه‌ی میان این دو سرعت چنین است

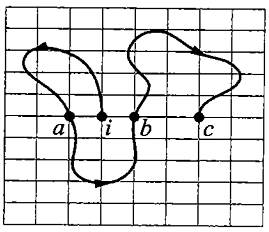
$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA} \qquad (۴\text{-}۴۴)$$

که در آن $\vec{v}_{BA}$ سرعت B نسبت به A است. در این حالت هر دو ناظر برای ذره شتاب یکسانی اندازه می‌گیرند:

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB} \qquad (۴\text{-}۴۵)$$

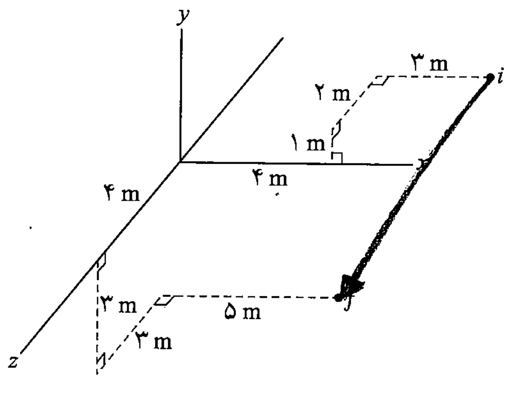
پرسش‌ها

۱ شکل ۴-۲۱، مسیر حرکت یک راسوی گندناک را نشان می‌دهد که در پی یافتن غذا از نقطه‌ی i شروع به حرکت می‌کند. این راسو در زمان‌های یکسان T از یک نقطه‌ی حرف‌گذاری شده به نقطه‌ی بعدی می‌رود. نقطه‌های a، b و c را باتوجه به بزرگی سرعت متوسط راسو برای شروع کردن از نقطه‌ی i و رسیدن به هر یک از آن نقطه‌ها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۴-۲۱ پرسش ۱.

۲ شکل ۴-۲۲، مکان آغازی i و مکان پایانی f یک ذره را نشان می‌دهد. (الف) بردار مکان آغازی $\vec{r}_i$، و (ب) بردار مکان پایانی $\vec{r}_f$ را با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه به دست آورید. (پ) مؤلفه‌ی x جابه‌جایی ذره $\Delta\vec{r}$، چیست؟



شکل ۴-۲۲ پرسش ۲.

۳ وقتی شهر پاریس از فاصله‌ی ۱۰۰ کیلومتری با توپ‌های دوربرد WWI «برتای بزرگ»[1] بمباران می‌شد گلوله‌های توپ با

1. Big Bertha

زاویه‌ی بیش از ۴۵ درجه شلیک می‌شدند تا بردشان زیاد شود، و شاید هم دو برابر برد مربوط به ۴۵ درجه شود. آیا این نتیجه به این معنی است که چگالی هوا در ارتفاعات بالا برحسب ارتفاع افزایش می‌یابد یا کاهش؟

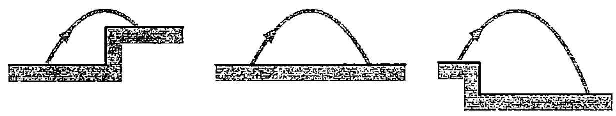
۴ فرض کنید موشکی از روی زمین با یکی از سرعت‌های آغازی زیر شلیک می‌شود:

(۱) $\vec{v}_0 = 20\hat{i} + 70\hat{j}$ (۲) $\vec{v}_0 = -20\hat{i} + 70\hat{j}$

(۳) $\vec{v}_0 = 20\hat{i} - 70\hat{j}$ (۴) $\vec{v}_0 = -20\hat{i} - 70\hat{j}$

در دستگاه مختصات انتخابی، محور x در سطح افقی زمین و محور y بالاسو است. (الف) این بردارها را با توجه به تندی پرتابه، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. (ب) این بردارها را با توجه به زمان پرواز پرتابه، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

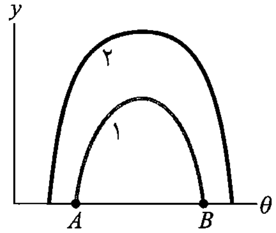
۵ شکل ۴-۲۳، سه وضعیت را نشان می‌دهد که در آن‌ها پرتابه‌های مشابه با تندی‌های آغازی و زاویه‌های پرتاب مشابه از زمین (از سطح تراز یکسان) پرتاب شده‌اند. اما این پرتابه‌ها در زمین‌های هم ارتفاع فرود نمی‌آیند. این سه وضعیت را با توجه به تندی‌های پایانی پرتابه‌ها درست پیش از رسیدن به زمین، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



(الف) (ب) (پ)

شکل ۴-۲۳ پرسش ۵.

۶ تنها استفاده‌ی خوب یک کیک میوه‌ای کاربرد آن در عمل پرتاب‌کردن است. در شکل ۴-۲۴ منحنی ۱، y، ارتفاع یک کیک میوه‌ای پرتاب شده را برحسب θ، زاویه‌ی میان بردار سرعت کیک و بردار شتاب آن در حین پرواز نشان می‌دهد. (الف) کدام یک از نقطه‌های مشخص شده با حروف بر روی این منحنی مربوط به محل برخورد کیک با زمین است. (ب) منحنی ۲ نمودار مشابهی با همان تندی پرتاب آغازی اما تحت زاویه‌ی پرتاب متفاوت است. آیا اکنون کیک نسبت به نقطه‌ی پرتاب، در نقطه‌ای دورتر به زمین می‌رسد یا نزدیک‌تر؟

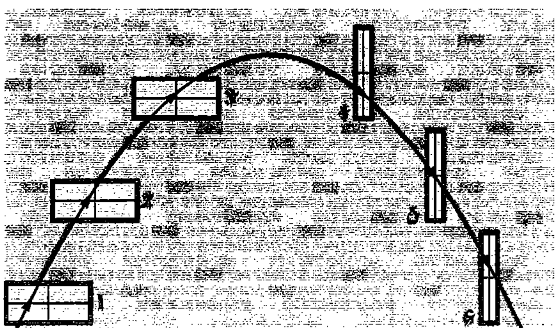


شکل ۴-۲۴ پرسش ۶.

۷ هواپیمایی در حال پرواز افقی بر بالای سطح زمین با تندی $350\,\text{km/h}$، یک بسته‌ی غذا رها می‌کند. از اثر مقاومت هوا روی بسته چشم‌پوشی می‌شود. (الف) مؤلفه‌ی قائم و (ب) مؤلفه‌ی افقی سرعت آغازی بسته چقدر است؟ (پ) مؤلفه‌ی افقی سرعت بسته درست پیش از برخورد به زمین چقدر است؟ (ت) اگر تندی هواپیما $450\,\text{km/h}$ می‌بود مدت زمان سقوط بسته نسبت به حالت قبل بیشتر، کمتر یا مساوی می‌شد؟

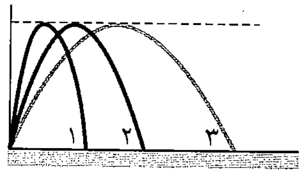
۸ در شکل ۴-۲۵، یک نارنگی پرتاب شده، از مقابل پنجره‌های ۱، ۲ و ۳، که هم اندازه و دارای فاصله‌ی قائم یکسان از هم هستند، عبور می‌کند. این سه پنجره را با توجه به (الف) مدت زمان عبور نارنگی از مقابل هر پنجره و (ب) تندی متوسط نارنگی در حین عبور از مقابل هر پنجره، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

این نارنگی هنگام برگشت، از مقابل پنجره‌های ۴، ۵ و ۶ که هم اندازه و دارای فاصله‌های افقی متفاوت هستند، عبور می‌کند. این سه پنجره را با توجه به (پ) مدت زمان عبور نارنگی از مقابل هر پنجره و (ت) تندی متوسط نارنگی در حین عبور کردن از مقابل هر پنجره، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



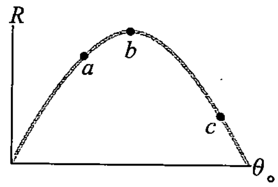
شکل ۴-۲۵ پرسش ۸.

۹ شکل ۴-۲۶، سه مسیر یک توپ فوتبال شوت کرده شده از سطح زمین را، نشان می‌دهد. از اثر مقاومت هوا بر روی حرکت توپ چشم‌پوشی کنید. این سه مسیر را با توجه به (الف) مدت زمان پرواز، (ب) مؤلفه‌ی قائم سرعت آغازی، (پ) مؤلفه‌ی افقی سرعت آغازی و (ت) تندی آغازی، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



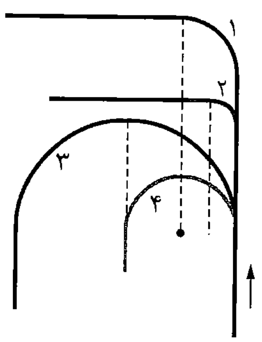
شکل ۴-۲۶ پرسش ۹.

۱۰ توپی را از سطح تراز زمین با تندی آغازی معین شوت می‌کنند. شکل ۴-۲۷، نمودار برد این توپ R، را برحسب زاویه‌ی پرتاب $\theta_\circ$ نشان می‌دهد. سه نقطه‌ی مشخص شده با حروف بر روی نمودار را با توجه به (الف) زمان پرواز کل توپ و (ب) تندی توپ در ارتفاع بیشینه، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



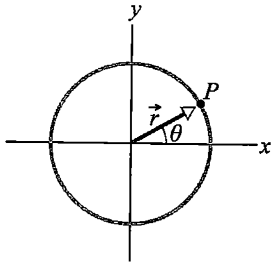
شکل ۴-۲۷ پرسش ۱۰.

۱۱ شکل ۴-۲۸ چهار مسیر (به صورت نیم یا ربع دایره) را نشان می‌دهد که توسط یک قطار با تندی ثابت پیموده می‌شوند. این مسیرها را با توجه به بزرگی شتاب قطار در قسمت خمیده‌ی مسیر، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۴-۲۸ پرسش ۱۱.

۱۲ در شکل ۴-۲۹، ذره‌ی P حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. مرکز دایره در مبداء یک دستگاه مختصات xy قرار دارد. (الف) به ازای کدام مقادیر θ بزرگی مؤلفه‌ی قائم بردار مکان r_y، بیشترین است؟ (ب) به ازای کدام مقادیر θ، بزرگی مؤلفه‌ی قائم سرعت ذره v_y، بیشترین است؟ (پ) به ازای کدام مقادیر θ، بزرگی مؤلفه‌ی قائم شتاب ذره a_y، بیشترین است؟



شکل ۴-۲۹ پرسش ۱۲.

۱۳ (الف) آیا در حرکت با تندی ثابت ممکن است شتاب وجود داشته باشد؟ آیا یک پیچ جاده را می‌توان، (ب) با شتاب صفر و (پ) با شتابی به بزرگی ثابت، دور زد؟

۱۴ هنگام سوار بودن در یک خودرو در حال حرکت تخم مرغی را یک راست به بالاسو بیندازید. در حالت‌های زیر، آیا تخم مرغ در پشت سر شما یا در جلو شما فرود می‌آید، یا به دست شما برمی‌گردد (الف) خودرو با تندی ثابت حرکت می‌کند، (ب) تندی خودرو در حال افزایش یافتن است و (پ) تندی خودرو در حال کاهش یافتن است؟

۱۵ یک گلوله‌ی برفی (توسط شخصی) از سطح زمین با تندی آغازی $v_\circ$ تحت زاویه‌ی ۴۵ درجه نسبت به سطح (افقی) زمین پرتاب می‌شود و گلوله به همان سطح برمی‌گردد. اگر زاویه‌ی پرتاب افزایش یابد، آیا (الف) برد و (ب) مدت زمان پرواز افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

۱۶ فرض کنید درست در پشت یک کامیون کفی، و با همان تندی کامیون، رانندگی می‌کنید. صندوقی از کف کامیون به روی جاده می‌افتد. (الف) اگر شما ترمز نکنید و گاز هم ندهید، آیا صندوق پیش از برخورد به جاده، به خودرو شما برخورد می‌کند؟ (ب) صندوق در حین افتادن، آیا تندی افقی‌اش از تندی کامیون بیشتر است، کمتر است یا برابر با آن است؟

۱۷ در کدام نقطه از مسیر یک پرتابه تندی کمینه است؟

۱۸ در پرتاب وزنه، وزنه از بالای شانه‌ی ورزشکار پرتاب می‌شود. آیا زاویه‌ی پرتاب مربوط به بیشترین برد، مساوی با ۴۵، کمتر از ۴۵، یا بیشتر از ۴۵ درجه است؟

مسئله‌ها

پودمان ۴-۱ مکان و جابه‌جایی

* ۱ بردار مکان یک الکترون به صورت زیر است

$$\vec{r} = (۵٫۰\,\mathrm{m})\hat{i} - (۳٫۰\,\mathrm{m})\hat{j} + (۲٫۰\,\mathrm{m})\hat{k}$$

(الف) بزرگی $\vec{r}$ را پیدا کنید. (ب) این بردار را در یک دستگاه مختصات راست ـ دست رسم کنید.

* ۲ مختصات مکان یک تخم هندوانه عبارت است از: $x = -۵٫۰\,\mathrm{m}$، $y = ۸٫۰\,\mathrm{m}$ و $z = ۰\,\mathrm{m}$. بردار مکان آن را (الف) با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه، و به صورت (ب) بزرگی و (پ) زاویه نسبت به محور x مثبت، پیدا کنید. (ت) این بردار را در یک دستگاه مختصات راست ـ دست رسم کنید. اگر تخم به مکان با مختصات x، y و z ($۳٫۰۰\,\mathrm{m}$، $۰\,\mathrm{m}$ و $۰\,\mathrm{m}$) برود، جابه‌جایی‌اش را، (ث) با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه و به صورت (ج) بزرگی و (چ) زاویه نسبت به محور x مثبت، پیدا کنید.

* ۳ یک پوزیترون جابه‌جایی $\Delta\vec{r} = ۲٫۰\hat{i} - ۳٫۰\hat{j} + ۶٫۰\hat{k}$ را انجام می‌دهد و بردار مکان پایانی‌اش برحسب متر به صورت $\vec{r} = ۳٫۰\hat{j} - ۴٫۰\hat{k}$ است. بردار مکان آغازی این پوزیترون چیست؟

** ۴ طول عقربه‌ی دقیقه‌شمار یک ساعت دیواری، از نوک تا محوری که به گرد آن می‌چرخد، $۱۰\,\mathrm{cm}$ است. می‌خواهیم بزرگی و زاویه‌ی بردار جابه‌جایی نوک این عقربه را برای سه بازه‌ی زمانی معین کنیم. (الف) بزرگی و (ب) زاویه، از یک ربع تا نیم‌ساعت بعد، (پ) بزرگی و (ت) زاویه برای نیم‌ساعت بعدی، و (ث) بزرگی و (ج) زاویه برای یک‌ساعت پس از آن، چیست؟

پودمان ۴-۲ سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای

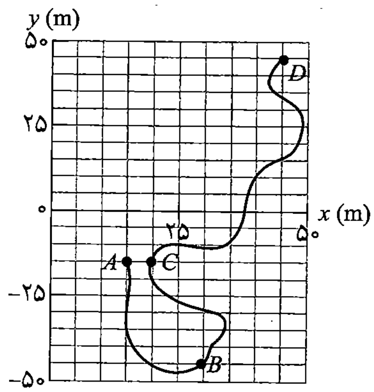
* ۵ قطاری به مدت ۴۰٫۰ دقیقه با تندی ثابت $۶۰٫۰\,\mathrm{km/h}$ به سمت خاور، سپس به مدت ۲۰٫۰ دقیقه در جهت ۵۰٫۰ درجه‌ی خاور محور شمالی و سرانجام، به مدت ۵۰٫۰ دقیقه به سمت باختر می‌رود. سرعت متوسط قطار در این سفر چیست؟

* ۶ مکان الکترونی با بردار $\vec{r} = ۳٫۰۰t\hat{i} - ۴٫۰۰t^{۲}\hat{j} + ۲٫۰۰\hat{k}$ معین می‌شود، که در آن t برحسب ثانیه و $\vec{r}$ برحسب متر است. (الف) سرعت الکترون $\vec{v}(t)$، با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه چیست؟ به ازای $t = ۲٫۰۰\,\mathrm{s}$، بردار سرعت $\vec{v}$، (ب) به صورت نمادگذاری بردارهای یکه و به صورت (پ) بزرگی و (ت) زاویه، نسبت به محور x مثبت، چیست؟

* ۷ بردار مکان یک یون به صورت $\vec{r} = ۵٫۰\hat{i} - ۶٫۰\hat{j} + ۲٫۰\hat{k}$ و ۱۰ ثانیه بعد به صورت $\vec{r} = -۲٫۰\hat{i} + ۸٫۰\hat{j} - ۲٫۰\hat{k}$، برحسب متر، است. سرعت متوسط یون $\vec{v}_{avg}$، در مدت این ۱۰ ثانیه با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟

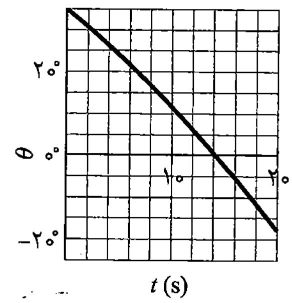
** ۸ هواپیمایی از شهر A به سمت خاور پرواز می‌کند و پس از پیمودن مسافت $۴۸۳\,\mathrm{km}$ در مدت ۴۵٫۰ دقیقه به شهر B می‌رسد و سپس از شهر B به سمت جنوب پرواز می‌کند و پس از پیمودن مسافت $۹۶۶\,\mathrm{km}$ در مدت $۱٫۵۰\,\mathrm{h}$ به شهر C وارد می‌شود. در کل مسافرت، (الف) بزرگی و (ب) جهت جابه‌جایی هواپیما، (پ) بزرگی و (ت) جهت سرعت متوسط هواپیما و (ث) تندی متوسط هواپیما، چیست؟

** ۹ شکل ۴-۳۰ مسیر حرکت سنجابی را نشان می‌دهد که روی زمین تراز از نقطه‌ی A (در زمان $t = ۰$) به سمت نقطه‌ی B (در زمان $t = ۵٫۰۰\,\mathrm{min}$)، سپس به نقطه‌ی C (در زمان $t = ۱۰٫۰\,\mathrm{min}$)، و سرانجام، به نقطه‌ی D (در زمان $t = ۱۵٫۰\,\mathrm{min}$) می‌رود. سرعت‌های متوسط سنجاب را از نقطه‌ی A تا هر یک از سه نقطه‌ی دیگر در نظر می‌گیریم. با استفاده کردن از این سرعت‌ها (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی مربوط به سرعت با کمترین بزرگی و (پ) بزرگی و (ت) زاویه‌ی مربوط به سرعت با بیشترین بزرگی را مشخص کنید.



شکل ۴-۳۰ مسئله‌ی ۹.

*** ۱۰ بردار مکان $\vec{r} = ۵٫۰۰t\,\hat{\mathrm{i}} + (et + ft^۲)\hat{\mathrm{j}}$ محل یک ذره را به صورت تابعی از زمان t مشخص می‌کند. بزرگی بردار $\vec{r}$ برحسب متر و t برحسب ثانیه است و ضریب‌های e و f ثابت‌اند. شکل ۴-۳۱ نمودار تغییرات θ، زاویه‌ی جهت حرکت ذره را به‌صورت تابعی از t نشان می‌دهد (θ نسبت به محور x مثبت اندازه‌گیری شده است). مقادیر (الف) e و (ب) f را همراه با یکاهای‌شان معین کنید.



شکل ۴-۳۱ مسئله‌ی ۱۰.

پودمان ۴-۳ شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

* ۱۱ معادله‌ی مکان یک‌ذره $\vec{r}$، که درصفحه‌ی xy حرکت می‌کند، به‌صورت $\vec{r} = (۲٫۰۰t^۳ - ۵٫۰۰t)\hat{\mathrm{i}} + (۶٫۰۰ - ۷٫۰t^۴)\hat{\mathrm{j}}$، است که در آن بزرگی $\vec{r}$ برحسب متر و t برحسب ثانیه است. بردارهای (الف) $\vec{r}$، (ب) $\vec{v}$ و (پ) $\vec{a}$ را به ازای $t = ۲٫۰۰\,\mathrm{s}$ با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه حساب کنید. (ت) زاویه‌ی بین محور مثبت x و خط مماس بر مسیر ذره در زمان $t = ۲٫۰۰\,\mathrm{s}$ چیست؟

* ۱۲ دوچرخه‌سواری در زمانی که به نقطه‌ای که در فاصله‌ی ۳۰٫۰ متری خاور میله‌ی یک پرچم در بوستانی می‌رسد، با تندی $۱۰٫۰\,\mathrm{m/s}$ به‌سمت جنوب درحال حرکت است. دوچرخه‌سوار $۳۰٫۰\,\mathrm{s}$ بعد در نقطه‌ای به فاصله‌ی $۴۰٫۰\,\mathrm{m}$ در شمال میله‌ی پرچم می‌رسد که با تندی $۱۰٫۰\,\mathrm{m/s}$ به سوی خاور حرکت می‌کند. در این بازه‌ی زمانی $۳۰٫۰\,\mathrm{s}$، (الف) بزرگی و (ب) جهت جابه‌جایی دوچرخه‌سوار، (پ) بزرگی و (ت) جهت سرعت متوسط دوچرخه‌سوار و (ث) بزرگی و (ج) جهت شتاب متوسط دوچرخه‌سوار، چیست؟

* ۱۳ ذره‌ای طوری حرکت می‌کند که معادله‌ی مکان آن (برحسب متر) به صورت تابعی از زمان (برحسب ثانیه) به صورت $\vec{r} = \hat{\mathrm{i}} + ۴t^۲\hat{\mathrm{j}} + t\,\hat{\mathrm{k}}$ است. معادله‌های (الف) سرعت و (ب) شتاب ذره را، برحسب زمان، به دست آورید.

* ۱۴ پروتونی در آغاز دارای سرعت $\vec{v} = ۴٫۰\hat{\mathrm{i}} - ۲٫۰\hat{\mathrm{j}} + ۳٫۰\hat{\mathrm{k}}$ و ۴٫۰ ثانیه بعد دارای سرعت $\vec{v} = -۲٫۰\hat{\mathrm{i}} - ۲٫۰\hat{\mathrm{j}} + ۵٫۰\hat{\mathrm{k}}$ (بر حسب متر بر ثانیه) است. در مدت این ۴٫۰ ثانیه، (الف) شتاب متوسط پروتون $\vec{a}_{\mathrm{avg}}$، با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه، (ب) بزرگی $\vec{a}_{\mathrm{avg}}$ و (پ) زاویه‌ی میان $\vec{a}_{\mathrm{avg}}$ و محور مثبت x، را به دست آورید.

** ۱۵ ذره‌ای با سرعت آغازی $\vec{v} = (۳٫۰۰\hat{\mathrm{i}})\mathrm{m/s}$ و شتاب ثابت $\vec{a} = (-۱٫۰۰\hat{\mathrm{i}} - ۰٫۵۰۰\hat{\mathrm{j}})\,\mathrm{m/s^۲}$ از مبداء مختصات شروع به حرکت می‌کند. ذره وقتی به مختصه‌ی x بیشینه می‌رسد، (الف) بردار سرعت و (ب) بردار مکان آن چیست؟

** ۱۶ بردار سرعت ذره‌ای که در صفحه‌ی xy حرکت می‌کند، به‌صورت $\vec{v} = (۶٫۰t - ۴٫۰t^۲)\hat{\mathrm{i}} + ۸٫۰\hat{\mathrm{j}}$ است، که در آن بزرگی $\vec{v}$ برحسب متر بر ثانیه و t (بزرگ‌تر از صفر) برحسب ثانیه است. (الف) شتاب ذره در زمان $t = ۳٫۰\,\mathrm{s}$ چیست؟ (ب) در چه زمانی (در صورت امکان) شتاب ذره صفر است؟ (پ) در چه زمانی (در صورت امکان) سرعت ذره صفر است؟ (ت) در چه زمانی (در صورت امکان) تندی ذره برابر با $۱۰\,\mathrm{m/s}$ است؟

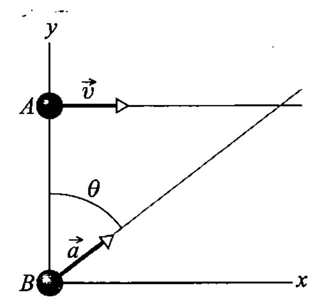
** ۱۷ ارابه‌ای بر روی صفحه‌ی xy با شتابی با مؤلفه‌های $a_x = ۴٫۰\,\mathrm{m/s^۲}$ و $a_y = -۲٫۰\,\mathrm{m/s^۲}$ به پیش رانده می‌شود. مؤلفه‌های سرعت آغازی ارابه $v_{۰x} = ۸٫۰\,\mathrm{m/s}$ و

$v_{\circ y} = ۱۲\,\mathrm{m/s}$ هستند. سرعت ارابه درهنگام رسیدن به‌بیشترین مختصه‌ی y با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه چیست؟

** ۱۸ باد معتدلی بر روی صفحه‌ی افقی xy به سنگ‌ریزه‌ای شتاب $\vec{a} = (۵٫۰۰\,\mathrm{m/s^۲})\hat{i} + (۷٫۰۰\,\mathrm{m/s^۲})\hat{j}$ می‌دهد. در زمان $t = ۰$ سرعت سنگ‌ریزه $(۴٫۰۰\,\mathrm{m/s})\hat{i}$ است. هنگامی که سنگ‌ریزه به اندازه‌ی $۱۲٫۰\,\mathrm{m}$ به موازات محور x جابه‌جا می‌شود، (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی سرعت آن چیست؟

*** ۱۹ ذره‌ای که فقط در صفحه‌ی افقی xy حرکت می‌کند، دارای شتاب $\vec{a} = ۳t\hat{i} + ۴t\hat{j}$ است، که در آن بزرگی $\vec{a}$ برحسب متر بر مجذور ثانیه و t برحسب ثانیه است. در زمان $t = ۰$، بردار مکان $\vec{r} = (۲۰٫۰\,\mathrm{m})\hat{i} + (۴۰٫۰\,\mathrm{m})\hat{j}$ محل ذره را معین می‌کند و بردار سرعت ذره $\vec{v} = (۵٫۰۰\,\mathrm{m/s})\hat{i} + (۲٫۰۰\,\mathrm{m/s})\hat{j}$ است. در زمان $t = ۴٫۰۰\,\mathrm{s}$، (الف) بردار مکان ذره با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه و (ب) زاویه‌ی میان راستای حرکت ذره و محور x مثبت، چیست؟

*** ۲۰ در شکل ۴-۳۲، ذره‌ی A با سرعت ثابت $\vec{v}$ به بزرگی $۳٫۰\,\mathrm{m/s}$ به موازات محور x و در راستای خط $y = ۳۰\,\mathrm{m}$ حرکت می‌کند. درلحظه‌ای که ذره‌ی A از محور y عبور می‌کند ذره‌ی B از مبداء مختصات با تندی آغازی صفر و با شتاب ثابت $\vec{a}$ به بزرگی $۰٫۴۰\,\mathrm{m/s^۲}$ به حرکت در می‌آید. در هنگام برخورد دو ذره، θ زاویه‌ی میان $\vec{a}$ و محور مثبت y چیست؟



شکل ۴-۳۲ مسئله‌ی ۲۰.

پودمان ۴-۴ حرکت پرتابه‌ای

* ۲۱ یک نیزک[1] با تندی آغازی $۱۰\,\mathrm{m/s}$ به طور افقی به سوی نقطه‌ی P، مرکز دایره‌ی هدف واقع بر روی تخته‌ی نیزک، پرتاب می‌شود. نیزک پس از ۰٫۱۹ ثانیه، به نقطه‌ی Q واقع بر محیط دایره‌ی هدف و درست در زیر نقطه‌ی P برخورد می‌کند. (الف) فاصله‌ی PQ چیست؟ (ب) تخته در چه فاصله‌ای از نقطه‌ی رها شدن نیزک قرار دارد؟

* ۲۲ گلوله‌ی کوچکی که بر روی یک میز افقی به ارتفاع $۱٫۲۰\,\mathrm{m}$ می‌غلتد، از لبه‌ی میز پایین می‌افتد و در فاصله‌ی افقی $۱٫۵۲\,\mathrm{m}$ از لبه به زمین برخورد می‌کند. (الف) گلوله چه مدت در هوا می‌ماند؟ (ب) تندی گلوله در لحظه‌ی جدا شدن از لبه‌ی میز چقدر است؟

* ۲۳ گلوله‌ای از تفنگی که $۴۵٫۰\,\mathrm{m}$ بالاتر از زمین قرار دارد، با تندی آغازی $۲۵۰\,\mathrm{m/s}$ به طور افقی شلیک می‌شود. این گلوله (الف) چه مدت در هوا می‌ماند؟ (ب) در چه فاصله‌ی افقی از نقطه‌ی شلیک شدن به زمین برخورد می‌کند؟ (پ) بزرگی و مؤلفه‌ی قائم سرعت گلوله در هنگام برخورد به زمین چیست؟

* ۲۴ در مسابقات قهرمانی دو و میدانی سال ۱۹۹۱/۱۳۷۰ در توکیو، مایک پاول[1] در پرش طول $۸٫۹۵\,\mathrm{m}$ پرید و رکورد ۲۳ ساله‌ی پرش طول متعلق به باب بیمون[2] را به اندازه‌ی ۵ سانتی‌متر بهبود بخشید. فرض کنید تندی پاول در لحظه‌ی بلند شدن از زمین $۹٫۵\,\mathrm{m/s}$ (در حدود سرعت قهرمانان دو سرعت) بوده است و در توکیو، داریم $g = ۹٫۸۰\,\mathrm{m/s^۲}$. برد افقی پاول نسبت به برد افقی بیشینه‌ی ذره‌ای که با همان تندی پرتاب می‌شود، چقدر کمتر بوده است؟

* ۲۵ رکورد جهانی فعلی پرش با موتور سیکلت $۷۷٫۰\,\mathrm{m}$ و متعلق به جیسون رنی[3] است. فرض کنید او شیب راهه‌ی خیزش را با زاویه‌ی ۱۲٫۰ درجه نسبت به راستای افقی ترک می‌کند و ارتفاع‌های خیزش و فرود یکسان‌اند. با چشم‌پوشی از نیروی پَسار هوا تندی خیزش رنی را پیدا کنید.

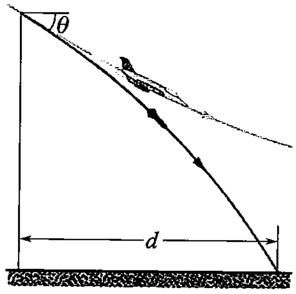
* ۲۶ سنگی در مبداء زمان $t = ۰\,\mathrm{s}$ با سرعت آغازی $۲۰٫۰\,\mathrm{m/s}$ تحت زاویه‌ی ۴۰٫۰ درجه نسبت به راستای افقی پرتاب می‌شود. در زمان $t = ۱٫۱۰\,\mathrm{s}$، (الف) بزرگی مؤلفه‌ی افقی و (ب) بزرگی مؤلفه‌ی قائم جابه‌جایی سنگ چیست؟ همین

1. dart

1. Mike Powell 2. Bob Beamon 3. Jason Renie

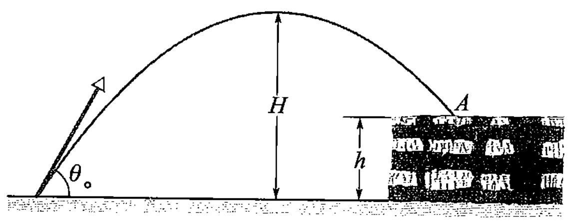
محاسبه‌ها را به ازای $t = ۱/۸۰s$، برای (پ) مؤلفه‌ی افقی و (ت) مؤلفه‌ی قائم جابه‌جایی، و به ازای $t = ۵/۰۰s$، برای (ث) مؤلفه‌ی افقی، و (چ) مؤلفه‌ی قائم جابه‌جایی سنگ، انجام دهید.

** ۲۷ هواپیمایی با تندی $۲۹۰/۰ km/h$ تحت زاویه‌ی $\theta = ۳۰/۰^\circ$ زیر راستای افقی شیرجه می‌رود و در همین حال خلبان یک تله‌ی راداری رها می‌کند (شکل ۴-۳۳). فاصله‌ی افقی میان نقطه‌ی رها شدن تله و محل برخورد آن به زمین $d = ۷۰۰ m$ است. این تله، (الف) چه مدت در هوا بوده است؟ (ب) از چه ارتفاعی رها شده است؟



شکل ۴-۳۳ مسئله‌ی ۲۷.

** ۲۸ در شکل ۴-۳۴، سنگی به سوی صخره‌ای به ارتفاع h با تندی آغازی $۴۲/۰ m/s$ تحت زاویه‌ی $\theta_0 = ۶۰/۰^\circ$ نسبت به راستای افقی پرتاب شده است. این سنگ $۵/۵۰s$ پس از پرتاب به نقطه‌ی A برخورد می‌کند. مطلوب است تعیین (الف) ارتفاع صخره h، (ب) تندی سنگ درست پیش از برخورد به نقطه‌ی A و (پ) ارتفاع بیشینه‌ی بالای زمین H، که سنگ به آن رسیده است.



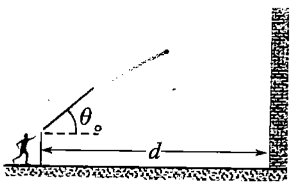
شکل ۴-۳۴ مسئله‌ی ۲۸.

** ۲۹ تندی پرتاب پرتابه‌ای پنج برابر تندی آن در ارتفاع بیشینه است. زاویه‌ی پرتاب θ را پیدا کنید.

** ۳۰ یک بازیکن فوتبال از زمین با تندی آغازی $۱۹/۵ m/s$ تحت زاویه‌ی ۴۵ درجه به توپی ضربه می‌زند. در همان لحظه بازیکن دیگری از فاصله‌ی ۵۵ متری به سوی محل زدن توپ شروع به دویدن می‌کند تا به توپ برسد. تندی متوسط این بازیکن چقدر باید باشد تا بتواند درست پیش از برخورد توپ به زمین به آن برسد؟

** ۳۱ یک بازیکن والیبال در حین زدن آبشار پرشی، توپ را از بالای سر به کف زمین مقابل می‌کوبد. کنترل زاویه‌ی آبشار مشکل است. فرض کنید توپی از ارتفاع $۲/۳۰m$ با تندی آغازی $۲۰/۰ m/s$ تحت زاویه‌ی $۱۸/۰۰$ درجه زیر راستای افقی زده می‌شود. اگر زاویه‌ی زیر راستای افقی $۸/۰۰$ درجه می‌بود، این توپ چقدر دورتر در زمین مقابل به زمین برخورد می‌کرد؟

** ۳۲ توپی را با تندی $۲۵/۰ m/s$ تحت زاویه‌ی $\theta_0 = ۴۰/۰^\circ$ نسبت به راستای افقی به سوی دیواری پرتاب می‌کنیم (شکل ۴-۳۵). فاصله‌ی دیوار تا نقطه‌ی رها شدن توپ $d = ۲۲/۰ m$ است. (الف) توپ در چه فاصله‌ای بالاتر از نقطه‌ی پرتاب به دیوار برخورد می‌کند؟ (ب) مؤلفه‌ی افقی و (پ) مؤلفه‌ی قائم سرعت توپ در لحظه‌ی برخورد به دیوار چقدر است؟ (ت) آیا توپ هنگام برخورد به دیوار از بالاترین نقطه‌ی مسیر خود عبور کرده است؟



شکل ۴-۳۵ مسئله‌ی ۳۲.

** ۳۳ هواپیمایی که با تندی ثابت تحت زاویه‌ی $۵۳/۰$ درجه نسبت به خط قائم در حال شیرجه رفتن به پایین است، پرتابه‌ای را از ارتفاع ۷۳۰ متری رها می‌کند. پرتابه $۵/۰۰$ ثانیه پس از رها شدن به زمین می‌خورد. (الف) تندی هواپیما چقدر بوده است؟ (ب) در این مدت پرتابه در راستای افقی چه مسافتی پیموده است؟ (پ) مؤلفه‌ی افقی و (ت) مؤلفه‌ی قائم سرعت پرتابه درست پیش از برخورد به زمین، چقدر است؟

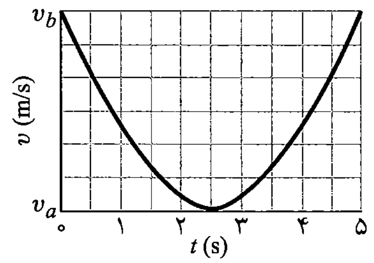
** ۳۴ منجنیق ماشین پرتاب کننده‌ای بود که برای حمله به دیوارهای یک دژ محاصره شده ساخته شده بود. این ماشین می‌توانست یک سنگ بزرگ به طرف دیواری پرتاب و بخشی از آن را ویران کند. منجنیق را در کنار دیوار قرار نمی‌دادند زیرا در آن صورت تیرهای پرتاب شده از دیوار دژ می‌توانستند به آن برخورد کنند. اما آن را طوری قرار می‌دادند که سنگ در نیمه‌ی دوم مسیر پروازش به دیوار دژ برخورد کند. فرض کنید سنگی با تندی $v_0 =$ ۲۸٫۰ m/s تحت زاویه‌ی $\theta_0 =$ ۴۰٫۰° پرتاب می‌شود. تندی برخورد این سنگ به دیوار (الف) درست در لحظه‌ی رسیدن به بالاترین ارتفاع مسیر سهمی شکلش و (ب) در لحظه‌ای که تا نصف این ارتفاع پایین آمده، چقدر است؟ (پ) تندی سنگ در قسمت (ب) نسبت به قسمت (الف) چند درصد بیشتر است؟

** ۳۵ تفنگی گلوله‌ای را با تندی ۴۶۰ m/s به سوی هدفی واقع در فاصله‌ی ۴۵٫۷ متری نشانه‌گیری می‌کند. اگر مرکز هدف هم‌تراز با تفنگ باشد نوک لوله‌ی تفنگ با چه ارتفاعی نسبت به مرکز هدف باید نشانه‌گیری شود تا گلوله درست به مرکز هدف برخورد کند؟

** ۳۶ تنیس بازی با راکت یک ضربه‌ی افقی در ارتفاع ۲٫۳۷ متری سطح زمین بازی به‌مرکزتوپ تنیس می‌زند و سرعت افقی ۲۳٫۶ m/s را به توپ می‌دهد. تور در فاصله‌ی ۱۲ متری توپ قرار دارد و ارتفاع آن ۰٫۹۰ m است. توپ هنگام رسیدن به تور، (الف) آیا از بالای آن عبور می‌کند؟ (ب) فاصله‌ی مرکز توپ تا لبه‌ی بالای تور چقدر است؟ اکنون، فرض کنیدضربه مانند پیش، اما تحت زاویه‌ی ۵٫۰۰ درجه زیر راستای افقی به توپ زده می‌شود. توپ هنگام رسیدن به تور، (پ) آیا از بالای آن عبور می‌کند؟ (ت) فاصله‌ی مرکز توپ تا لبه‌ی بالای تورچقدر است؟

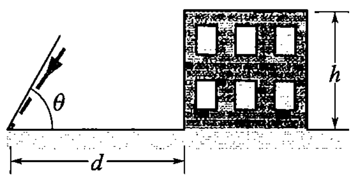
** ۳۷ شیرجه‌رویی از لبه‌ی سکوی شیرجه به ارتفاع ۱۰٫۰ m از سطح آب با تندی افقی ۲٫۰۰ m/s به پایین می‌پرد. (الف) شیرجه‌رو ۰٫۸۰۰ ثانیه پس از پرش، در چه فاصله‌ی افقی از لبه‌ی سکوی شیرجه قرار دارد؟ (ب) در این لحظه فاصله‌ی قائم شیرجه‌رو از سطح آب چقدر است؟ (پ) شیرجه‌رو در چه فاصله‌ی افقی از لبه‌ی سکوی شیرجه به سطح آب برخورد می‌کند؟

** ۳۸ توپ گلفی را در نظر بگیرید که از سطح زمین زده می‌شود. نمودار تندی توپ به صورت تابعی از زمان در شکل ۴-۳۶ نشان داده شده، که در آن $t =$ ۰ زمان ضربه زدن به توپ است. مقیاس محور قائم شکل با مقدار $v_a =$ ۱۹ m/s و $v_b =$ ۳۱ m/s مشخص شده است. (الف) توپ گلف پیش از برگشت به‌سطح زمین چه مسافتی را در راستای افقی می‌پیماید؟ (ب) ارتفاع بیشینه‌ای که توپ به آن می‌رسد چقدر است؟



شکل ۴-۳۶ مسئله‌ی ۳۸.

** ۳۹ در شکل ۴-۳۷، از لبه‌ی چپ پشت بام ساختمانی به ارتفاع h از سطح زمین، توپی به چپ‌سو پرتاب شده است. این توپ پس از ۱٫۵۰ s در فاصله‌ی $d =$ ۲۵٫۰ m از ساختمان و تحت زاویه‌ی $\theta =$ ۶۰٫۰° نسبت به راستای افقی به زمین برخورد می‌کند. (الف) ارتفاع h را پیدا کنید. (***راهنمایی:*** یک راه برای معکوس کردن حرکت، استفاده کردن از یک دستگاه ویدئو است). (ب) بزرگی و (پ) زاویه‌ی سرعت پرتاب توپ نسبت به راستای افقی چقدر است؟ (ت) آیا این زاویه در بالای راستای افقی است یا در پایین راستای افقی؟

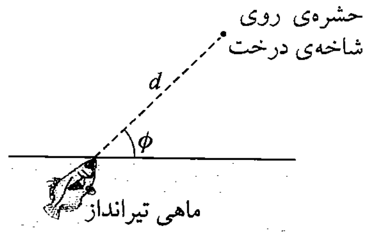


شکل ۴-۳۷ مسئله‌ی ۳۹.

** ۴۰ در بازی گلف فرض کنید بازیکنی می‌تواند ضربه‌ای را در رده‌ی جهانی تندی $v_0 =$ ۱۵٫۰۰ m/s و در ارتفاع ۲٫۱۶۰ m به توپ بزند. مسافتی که توپ در راستای افقی می‌پیماید به ازای زاویه‌ی پرتاب θ_0، برابر با (الف) ۴۵٫۰۰درجه و (ب) ۴۲٫۰۰

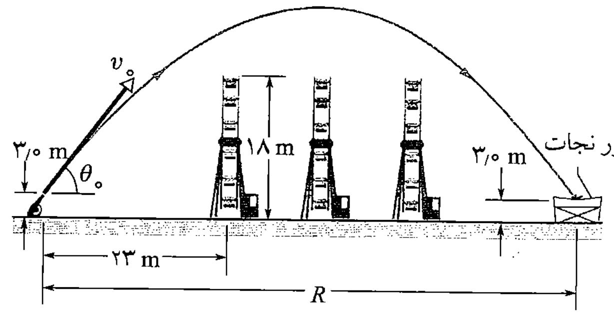
درجه، چیست؟ این پاسخ‌ها نشان می‌دهند که در حرکت پرتابه‌ای در هنگام متفاوت بودن ارتفاع‌های پرتاب و فرود به‌ازای زاویه‌ی ۴۵ درجه برد بیشینه حاصل نمی‌شود.

** ۴۱ هنگامی که ماهی تیرانداز حشره‌ای را بر روی شاخه‌ی درخت آویخته شده‌ی در بالای آب می‌بیند، قطره‌های آب را به سویش پرتاب می‌کند تا حشره به درون آب بیفتد (شکل ۴-۳۸). اگرچه ماهی حشره را در امتداد یک خط راست تحت زاویه‌ی ϕ و فاصله‌ی d می‌بیند، باید قطره‌ی آب را تحت زاویه‌ی متفاوت $\theta_\circ$ پرتاب کند تا مسیر سهمی شکل آن از مکان حشره‌ی واقع در روی شاخه بگذرد. به ازای $\phi = ۳۶٫۰^\circ$ و $d = ۰٫۹۰۰\,\mathrm{m}$، زاویه‌ی پرتاب $\theta_\circ$ چقدر باید باشد تا قطره‌ی آب در بالاترین نقطه‌ی مسیر سهمی شکل به حشره برسد؟



شکل ۴-۳۸ مسئله‌ی ۴۱.

** ۴۲ در سال ۱۹۳۹ یا سال ۱۹۴۰، امانوئل زاکینی[1] به صورت یک گلوله‌ی توپ انسانی عمل کرد: او پس از شلیک شدن از یک توپ از فراز سه چرخ فلک عبور کرد و روی یک تور نجات افتاد (شکل ۴-۳۹). فرض کنید او با تندی $۲۶٫۵\,\mathrm{m/s}$ و تحت زاویه‌ی $۵۳٫۰$ درجه پرتاب شده باشد. (الف) با درنظر گرفتن زاکینی به‌صورت یک ذره، ارتفاع عبور کردن او از بالای چرخ فلک اول را حساب کنید. (ب) اگر او در بالای چرخ فلک میانی به ارتفاع بیشینه رسیده باشد، با چه فاصله‌ای از بالای آن عبور کرده است؟ (پ) مرکز تور نجات در چه فاصله‌ای از توپ قرار داشته است (از نیروی پَسار هوا چشم‌پوشی می‌شود)؟



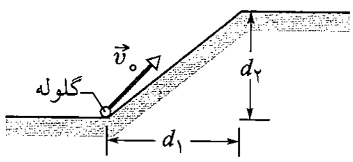
شکل ۴-۳۹ مسئله‌ی ۴۲.

1. Emanuel Zacchini

** ۴۳ توپی از زمین به هوا پرتاب شده است. سرعت آن در ارتفاع ۹٫۱ متری، برابر است با $\vec{v} = (۷٫۶\hat{i} + ۶٫۱\hat{j})\,\mathrm{m/s}$ ($\hat{i}$ در راستای افقی و $\hat{j}$ در راستای قائم و به بالاسو است). (الف) توپ تا چه ارتفاع بیشینه‌ای بالا می‌رود؟ (ب) مسافت کل افقی پیموده شده توسط توپ چیست؟ (پ) بزرگی و (ت) زاویه‌ی (زیر راستای افقی) سرعت توپ درست پیش از برخورد به زمین چیست؟

** ۴۴ یک گوی بیس بال با تندی افقی $۱۶۱\,\mathrm{km/h}$ از دست گوی‌انداز رها می‌شود. فاصله‌ی گوی‌انداز تا گوی زن $۱۸٫۳\,\mathrm{m}$ است. این گوی (الف) نیمه‌ی اول فاصله را در چه مدت می‌پیماید؟ (ب) نیمه‌ی بعدی فاصله را در چه مدت می‌پیماید؟ (پ) گوی در طی نیمه‌ی اول فاصله چقدر به طور آزاد سقوط می‌کند؟ (ت) گوی پس از پیمودن نیمه‌ی بعدی فاصله چقدر پایین می‌آید؟ (ث) چرا کمیت‌های به دست آمده در قسمت‌های (پ) و (ت) با هم برابر نیستند؟

** ۴۵ در شکل ۴-۴۰، گلوله‌ای با تندی $۱۰٫۰\,\mathrm{m/s}$ تحت زاویه‌ی ۵۰٫۰ درجه نسبت به راستای افقی پرتاب شده است. نقطه‌ی پرتاب در ابتدای یک شیب راهه به طول افقی $d_1 = ۶٫۰۰\,\mathrm{m}$ و ارتفاع $d_2 = ۳٫۶۰\,\mathrm{m}$ واقع است. در بالای شیب راهه یک سکو نیز وجود دارد. (الف) آیا گلوله بر روی شیب راهه فرود می‌آید یا بر روی سکو؟ هنگام فرود آمدن گلوله، (ب) بزرگی و (پ) زاویه‌ی جابه‌جایی آن نسبت به نقطه‌ی پرتاب چیست؟



شکل ۴-۴۰ مسئله‌ی ۴۵.

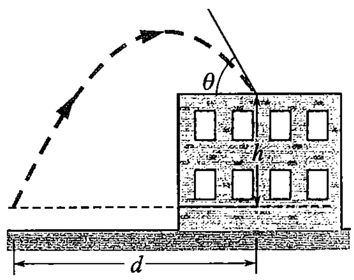
** ۴۶ در بازی بسکتبال، ***هنگ***[1] (*معلق ماندن*) در هوا یک توهم

1. hang

است که در آن به نظر می‌رسد بازیکنی که به هوا پریده شتاب گرانشی را کاهش داده است. این توهم تا حد زیادی به توانایی یک بازیکن ماهر برای دست به دست کردن توپ در حال پرش در هوا بستگی دارد، اما ممکن است به این هم بستگی داشته باشد که فاصله‌ی افقی‌ای که بازیکن در قسمت بالاتر پرش می‌پیماید از فاصله‌ی متناظر در قسمت پایین‌تر پرش بیشتر باشد. اگر بازیکنی با تندی آغازی v_0 = ۷/۰۰m/s تحت زاویه‌ی θ_0 = °۳۵/۰ به هوا بپرد، چه درصدی از برد پرش را در نیمه‌ی بالاتر پرواز (در بین ارتفاع بیشینه و نصف ارتفاع بیشینه) می‌پیماید؟

** ۴۷ در بازی بیس بال گوی زنی در حالی که مرکز گوی به اندازه‌ی ۱/۲۲m بالاتر از سطح زمین قرار دارد به آن ضربه می‌زند. زاویه‌ی پرتاب گوی ۴۵ درجه و برد افقی آن (پس از برگشتن به ***تراز پرتاب***) ۱۰۷m است. (الف) اگر گوی به حصاری به ارتفاع ۷/۳۲m، که در فاصله‌ی افقی ۹۷/۵ متری محل پرتاب قرار دارد، برسد آیا از روی حصار عبور خواهد کرد؟ (ب) فاصله‌ی میان لبه‌ی بالای حصار و مرکز گوی را به هنگام رسیدن به حصار پیدا کنید.

** ۴۸ در شکل ۴-۴۱، توپی که به پشت بام ساختمانی پرتاب شده است ۴/۰۰s بعد در نقطه‌ای به ارتفاع h = ۲۰/۰m بالاتر از سطح پرتاب فرود می‌آید. زاویه‌ی مسیر توپ درست پیش از برخورد به پشت بام θ = °۶۰/۰ است. (الف) مسافت افقی d را که این توپ می‌پیماید پیدا کنید. (به راهنمایی مسئله‌ی ۳۹ رجوع کنید). (ب) بزرگی و (پ) زاویه‌ی سرعت آغازی توپ (نسبت به راستای افقی) چیست؟

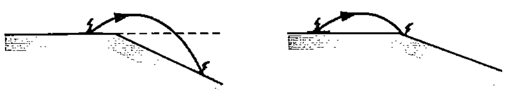


شکل ۴-۴۱ مسئله‌ی ۴۸.

*** ۴۹ در فوتبال آمریکایی بازیکنی می‌تواند با یک ضربه تندی آغازی ۲۵m/s را به توپ بدهد. اگر ارتفاع تیر افقی دروازه نسبت به زمین ۳/۴۴m باشد و بازیکن بخواهد از فاصله‌ی ۵۰ متری مقابل دروازه توپ را از بالای تیر عبور بدهد، (الف) کوچک‌ترین و (ب) بزرگ‌ترین زاویه‌ای که تحت آن می‌تواند به توپ ضربه بزند، چقدر است؟

*** ۵۰ پرتابه‌ای پس از دو ثانیه پرتاب از سطح زمین، در راستای افقی به اندازه‌ی ۴۰m و در راستای قائم به اندازه‌ی ۵۳m نسبت به نقطه‌ی پرتاب جابه‌جا می‌شود. مؤلفه‌های (الف) افقی و (ب) قائم سرعت آغازی پرتابه چیست؟ (پ) پرتابه در لحظه‌ای که به ارتفاع بیشینه‌ی خود در بالای سطح زمین می‌رسد، نسبت به نقطه‌ی پرتاب در راستای افقی چقدر جابه‌جا شده است؟

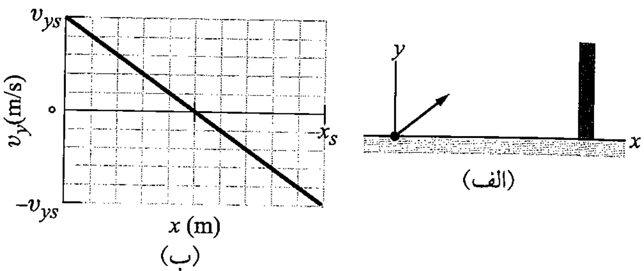
*** ۵۱ اسکی‌باز ماهر می‌داند که پیش از رسیدن به شیب پایین‌سو در پیست اسکی باید به بالاسو بپرد. پرشی را در نظر بگیرید که در آن تندی آغازی v_0 = ۱۰m/s. و زاویه‌ی پرتاب θ_0 = °۱۱/۳ است. مسیر حرکت آغازی، به تقریب، تخت و زاویه‌ی شیب پایین‌سو °۹/۰ درجه است. شکل ۴-۴۲ الف، یک ***پیش پرش*** را نشان می‌دهد که اجازه می‌دهد اسکی‌باز در بالاترین نقطه‌ی سرازیری فرود آید. شکل ۴-۴۲ ب، یک پرش از لبه‌ی سرازیری را نشان می‌دهد. در شکل ۴-۴۲ الف، اسکی‌باز، به تقریب، در همان تراز شروع پرش فرود می‌آید. (الف) در هنگام فرود آمدن زاویه‌ی میان مسیر اسکی‌باز ϕ، و سطح شیب‌دار پیست چقدر است؟ در شکل ۴-۴۲ ب، (ب) اسکی‌باز چقدر پایین‌تر از سطح آغازی پرش فرود می‌آید و (پ) زاویه‌ی ϕ چقدر است؟ (هر چه ارتفاع سقوط و ϕ بیشتر باشد اسکی‌باز در هنگام فرود آمدن کمتر می‌تواند خود را کنترل کند).



(ب) (الف)

شکل ۴-۴۲ مسئله‌ی ۵۱.

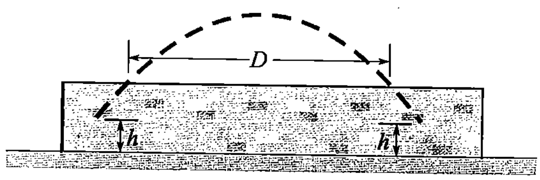
*** ۵۲ می‌خواهیم توپی را از سطح زمین به سوی دیواری واقع در فاصله‌ی x پرتاب کنیم (شکل ۴-۴۳ الف). شکل ۴-۴۳ ب،



شکل ۴-۴۳ مسئله‌ی ۵۲.

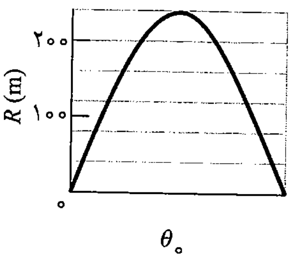
مؤلفه‌ی v_y سرعت توپ را درست در لحظه‌ی رسیدن به دیوار به صورت تابعی از مسافت x نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم شکل با مقدار $v_{ys} = ۵/۰ \, m/s$ و $x_s = ۲۰ \, m$ مشخص شده است. زاویه‌ی پرتاب چقدر است؟

*** **۵۳** در شکل ۴-۴۴، به یک گوی بیس بال واقع در ارتفاع $h = ۱/۰۰ \, m$ ضربه زده شده و سپس گوی در همان ارتفاع گرفته شده است. این گوی که به موازات دیواری حرکت می‌کند، ۱/۰۰s پس از دریافت ضربه از لبه‌ی بالای دیوار عبور می‌کند و ارتفاع مسیرش از ارتفاع دیوار بیشتر می‌شود. سپس، گوی با گذشت ۴/۰۰s دیگر و پیمودن فاصله‌ی افقی $D = ۵۰/۰ \, m$، از لبه‌ی دیوار به پایین عبور می‌کند. (الف) گوی از لحظه‌ی ضربه خوردن تا گرفته شدن چه فاصله‌ی افقی‌ای را می‌پیماید؟ (ب) بزرگی و (پ) زاویه‌ی سرعت گوی (نسبت به راستای افقی) درست در لحظه‌ی دریافت ضربه چقدر است؟ (ت) ارتفاع دیوار چقدر است؟



شکل ۴-۴۴ مسئله‌ی ۵۳.

*** **۵۴** می‌خواهیم توپی را با تندی معینی از سطح زمین شوت کنیم. شکل ۴-۴۵، تغییرات برد توپ R، را برحسب زاویه‌ی پرتاب θ_0 نشان می‌دهد. مقدار θ_0 مدت زمان پرواز توپ را مشخص می‌کند؛ فرض کنید t_{max} نمایشگر زمان پرواز بیشینه است. اگر θ_0 به گونه‌ای انتخاب شود که مدت زمان پرواز توپ



شکل ۴-۴۵ مسئله‌ی ۵۴.

$۰/۵۰۰ t_{max}$ باشد، کمترین تندی‌ای که توپ می‌تواند در طول پرواز داشته باشد چیست؟

*** **۵۵** توپی از بالای پلکانی با سرعت افقی ۱/۵۲m/s به پایین می‌غلتد. ارتفاع و هم‌چنین، پهنای هر پله ۲۰/۳cm است. توپ ابتدا با کدام پله برخورد می‌کند؟

پودمان ۴-۵ حرکت دایره‌ای یکنواخت

* **۵۶** یک ماهواره‌ی زمینی در ارتفاع ۶۴۰ کیلومتری سطح زمین بر روی مداری دایره‌ای با دوره‌ی تناوب ۹۸/۰ دقیقه حرکت می‌کند. (الف) تندی و (ب) بزرگی شتاب مرکزگرای ماهواره چقدر است؟

* **۵۷** یک چرخ و فلک افقی شهر بازی با آهنگی ثابت به دور محوری قائم می‌چرخد. شخصی که روی لبه‌ی چرخ و فلک ایستاده است دارای تندی ثابت ۳/۶۶m/s و شتاب مرکزگرای $\vec{a}$ به بزرگی ۱/۸۳m/s² است. بردار مکان $\vec{r}$ محل این شخص را نسبت به محور دَوران مشخص می‌کند. (الف) بزرگی $\vec{r}$ چیست؟ جهت $\vec{r}$ را در حالتی معین کنید که جهت $\vec{a}$ (ب) به سوی خاور و (پ) به سوی جنوب، باشد.

* **۵۸** یک بادبزن برقی در هر دقیقه ۱۲۰۰ دور کامل می‌زند. شعاع حرکت نوک پره‌ها را ۰/۱۵m در نظر بگیرید. (الف) نوک پره در هر دور چه مسافتی می‌پیماید؟ (ب) تندی نوک پره و (پ) بزرگی شتاب آن چقدر است؟ (ت) دوره‌ی تناوب حرکت چقدر است؟

* **۵۹** زنی سوار یک چرخ و فلک قائم شهر بازی با شعاع ۱۵m می‌شود. این چرخ و فلک در هر دقیقه پنج دور کامل به دور محور افقی‌اش می‌زند. (الف) دوره‌ی تناوب حرکت، (ب)

بزرگی و (پ) جهت شتاب مرکزگرای زن در بالاترین نقطه، و (ت) بزرگی و (ث) جهت شتاب مرکزگرای او در پایین‌ترین نقطه چیست؟

✻ ۶۰ شخصی که به شتاب مرکزگرا عادت دارد، سوار وسیله‌ای با حرکت دایره‌ای یکنواخت با شعاع چرخش $r = ۳٫۰۰\,\text{m}$ می‌شود. در زمان t_1 شتاب شخص $\vec{a} = (۶٫۰۰\,\text{m/s}^۲)\hat{i} + (-۴٫۰۰\,\text{m/s}^۲)\hat{j}$ است. در آن زمان، مقدار عبارت (الف) $\vec{v}\cdot\vec{a}$ و (ب) $\vec{r}\times\vec{a}$، چیست؟

✻ ۶۱ وقتی یک ستاره‌ی بزرگ یک ***ابرنواختر*** می‌شود، هسته‌ی مرکزی‌اش چنان فشرده می‌شود که به یک ***ستاره‌ی نوترونی*** با شعاعی در حدود $۲۰\,\text{km}$ (کره‌ای با مساحت تقریباً ۸ برابر مساحت شهر تهران) تبدیل می‌شود. اگر ستاره‌ی نوترونی در هر ثانیه یک دور بچرخد، (الف) تندی یک ذره‌ی واقع بر استوای ستاره و (ب) بزرگی شتاب مرکزگرای ذره، چقدر است؟ (پ) اگر ستاره‌ی نوترونی تندتر بچرخد، آیا پاسخ قسمت‌های (الف) و (ب) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

✻ ۶۲ بزرگی شتاب دونده‌ای که با تندی $۱۰\,\text{m/s}$ پیچی به شعاع $۲۵\,\text{m}$ را دور می‌زند، چیست؟

✻✻ ۶۳ در زمان $t_1 = ۲٫۰۰\,\text{m}$، شتاب یک ذره در حرکت دایره‌ای پادساعت‌گرد $(۶٫۰۰\,\text{m/s}^۲)\hat{i} + (۴٫۰۰\,\text{m/s}^۲)\hat{j}$ است. این ذره با تندی ثابت می‌چرخد. در زمان $t_2 = ۵٫۰۰\,\text{s}$، شتاب ذره $(۴٫۰۰\,\text{m/s}^۲)\hat{i} + (-۶٫۰۰\,\text{m/s}^۲)\hat{j}$ است. اگر $t_2 - t_1$ از زمان یک دوره‌ی تناوب کمتر باشد، شعاع مسیر ذره چقدر است؟

✻✻ ۶۴ ذره‌ای بر روی صفحه‌ی افقی xy حرکت دایره‌ای یکنواخت افقی انجام می‌دهد. در یک لحظه این ذره از نقطه‌ای با مختصات x و y ($۴٫۰۰\,\text{m}$ و $۴٫۰۰\,\text{m}$) با سرعت $-۵٫۰۰\hat{i}$ و شتاب $+۱۲٫۵\hat{j}\,\text{m/s}^۲$ عبور می‌کند. مختصه‌ی (الف) x و (ب) y، مرکز مسیر دایره‌ای چیست؟

✻✻ ۶۵ در کف یک چرخ و فلک افقی در حال دوران یک کیف زنانه در شعاع $۲٫۰۰\,\text{m}$ و یک کیف پول در شعاع $۳٫۰۰\,\text{m}$ حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهند. کیف‌ها در راستای یک خط شعاعی قرار دارند. در یک لحظه، شتاب کیف زنانه $(۲٫۰۰\,\text{m/s}^۲)\hat{i} + (۴٫۰۰\,\text{m/s}^۲)\hat{j}$ است. در آن لحظه و با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه، شتاب کیف پول چیست؟

✻✻ ۶۶ ذره‌ای با تندی ثابت در یک مسیر دایره‌ای روی دستگاه مختصات افقی xy حرکت می‌کند. در زمان $t_1 = ۴٫۰۰\,\text{s}$، این ذره با سرعت $(۳٫۰۰\,\text{m/s})\hat{j}$ و با شتاب در جهت مثبت محور x از نقطه‌ی با مختصات x و y ($۵٫۰۰\,\text{m}$ و $۶٫۰۰\,\text{m}$) عبور می‌کند. در زمان $t_2 = ۱۰٫۰\,\text{s}$، سرعت ذره $(-۳٫۰۰\,\text{m/s})\hat{i}$ و شتاب آن در جهت مثبت محور y است. اگر $t_2 - t_1$ از زمان یک دوره‌ی تناوب کمتر باشد، مختصه‌ی (الف) x و (ب) y مرکز مسیر دایره‌ای چیست؟

✻✻✻ ۶۷ پسر بچه‌ای سنگی را، که به ریسمانی به شعاع $۱٫۵\,\text{m}$ بسته شده است، بر روی دایره‌ای افقی در ارتفاع ۲٫۰ متری زمین می‌چرخاند. در اثر پاره شدن ریسمان سنگ به طور افقی پرتاب می‌شود و پس از پیمودن مسافت افقی $۱۰\,\text{m}$ به زمین می‌خورد. شتاب مرکزگرای سنگ در حین حرکت دایره‌ای چقدر است؟

✻✻✻ ۶۸ گربه‌ای سوار بر روی صفحه‌ی چرخانی حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. در زمان $t_1 = ۲٫۰۰\,\text{s}$ سرعت گربه، که در یک دستگاه مختصات افقی xy اندازه‌گیری شده است، $\vec{v}_1 = (۳٫۰۰\,\text{m/s})\hat{i} + (۴٫۰۰\,\text{m/s})\hat{j}$ است. درزمان $t_2 = ۵٫۰۰\,\text{s}$ سرعت گربه $\vec{v}_2 = (-۳٫۰۰\,\text{m/s})\hat{i} + (-۴٫۰۰\,\text{m/s})\hat{j}$ است. (الف) بزرگی و شتاب مرکزگرای گربه و (ب) شتاب متوسط گربه در بازه‌ی زمان $t_2 - t_1$، کمتر از یک دوره‌ی تناوب، چیست؟

پودمان ۴-۶ حرکت نسبی یک بعدی

✻ ۶۹ فیلم‌برداری در حالی که بر روی خودرو روبازی سوار است با تندی $۲۰\,\text{km/h}$ به سمت باختر حرکت می‌کند و از یک یوزپلنگ فیلم برمی‌دارد. یوزپلنگ با تندی $۳۰\,\text{km/h}$ به سمت باختر می‌دود. یکی از اعضای گروه فیلم‌برداری که در کنار مسیر حرکت یوزپلنگ ایستاده است متوجه می‌شود که یوزپلنگ ناگهان می‌ایستد، برمی‌گردد و با تندی $۴۵\,\text{km/h}$ به سمت خاور می‌دود. تغییر کردن سرعت این حیوان ۲٫۰ ثانیه طول

می‌کشد. (الف) بزرگی و (ب) جهت شتاب حیوان نسبت به فیلم‌بردار و (پ) بزرگی و (ت) جهت شتاب حیوان نسبت به عضو گروه چیست؟

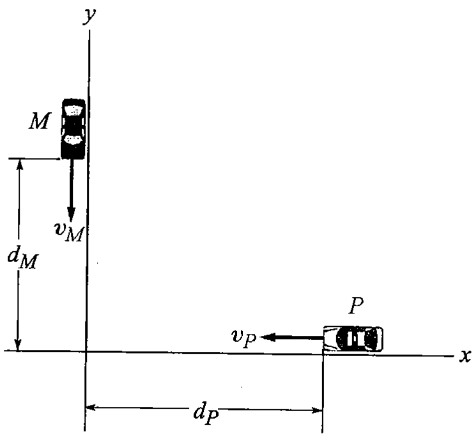
* ۷۰ قایقی با تندی $14 \mathrm{km/h}$ نسبت به آب رودخانه به سمت بالا رود و در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. آب با تندی $9{,}0 \mathrm{km/h}$ نسبت به زمین جریان دارد. (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت قایق نسبت به زمین چیست؟ کودکی در قایق با تندی $6{,}0 \mathrm{km/h}$ نسبت به قایق از قسمت جلو به سمت عقب راه می‌رود. (پ) بزرگی و (ت) جهت سرعت کودک نسبت به زمین چیست؟

** ۷۱ شخص به ظاهر مشکوکی با حداکثر تندی‌ای که می‌تواند سرتاسر یک پیاده‌رو متحرک را در مدت $2{,}50 \mathrm{s}$ می‌دود. ناگهان مأمورین نگهبانی سر می‌رسند. او برمی‌گردد و سرتاسر پیاده‌رو متحرک را با همان سرعت و در مدت $10{,}0 \mathrm{s}$ می‌دود تا به نقطه‌ی آغاز حرکتش می‌رسد. نسبت تندی دویدن شخص به تندی پیاده‌رو متحرک چیست؟

پودمان ۴-۷ حرکت نسبی دو بعدی

* ۷۲ یک بازیکن راگبی همراه با توپ یک راست به سمت دروازه‌ی مقابل در جهت مثبت محور x می‌دود. او بنا به مقررات می‌تواند توپ را به هم تیمی‌اش پاس بدهد به شرطی که سرعت توپ نسبت به زمین بازی مؤلفه‌ی x مثبت نداشته باشد. فرض کنید این بازیکن با تندی $4{,}0 \mathrm{m/s}$ نسبت به زمین بازی می‌دود و توپ را با سرعت $\vec{v}_{BP}$ نسبت به خود پاس می‌دهد. اگر بزرگی $\vec{v}_{BP}$ برابر با $6{,}0 \mathrm{m/s}$ باشد، کمترین زاویه‌ی پاس او بنا به مقررات چقدر می‌تواند باشد؟

** ۷۳ دو بزرگ‌راه، مطابق شکل ۴-۴۶، یکدیگر را قطع می‌کنند. در لحظه‌ی نشان داده شده در شکل خودرو پلیس P، در فاصله‌ی $d_P = 800 \mathrm{m}$ از محل تقاطع با تندی $v_P = 80 \mathrm{km/h}$ در حال حرکت است. در همین زمان خودرو M در فاصله‌ی $d_M = 600 \mathrm{m}$ از محل تقاطع با تندی $v_M = 60 \mathrm{km/h}$ حرکت می‌کند. (الف) سرعت خودرو M نسبت به خودرو پلیس P، با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟ (ب) در لحظه‌ی نشان داده شده در شکل ۴-۴۶، جهت سرعت



شکل ۴-۴۶ مسئله‌ی ۷۳.

پیدا شده در قسمت (الف) نسبت به خط دید وصل کننده‌ی دو خودرو چیست؟ (پ) اگر خودروها سرعت خود را حفظ کنند، در حین نزدیک شدن آن‌ها به محل تقاطع آیا پاسخ‌های قسمت‌های (الف) و (ب) تغییر می‌کنند؟

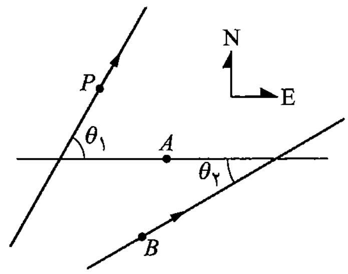
** ۷۴ خلبان یک هواپیما پس از ۱۵ دقیقه پرواز در بادی که با تندی $42 \mathrm{km/h}$ تحت زاویه‌ی ۲۰ درجه نسبت به جنوب محور خاوری می‌وزد، به بالای شهری واقع در فاصله‌ی ۵۵ کیلومتری شمال نقطه‌ی شروع پروازش می‌رسد. تندی هواپیما نسبت به هوا چیست؟

** ۷۵ قطاری با تندی $30 \mathrm{m/s}$ (نسبت به زمین) به سوی جنوب حرکت می‌کند و قطره‌های باران به دلیل وزش باد متمایل به سوی جنوب فرو می‌ریزند. از دید ناظری که روی زمین ایستاده است، مسیر قطره‌های باران با راستای قائم زاویه‌ی ۷۰ درجه می‌سازند، اما از دید ناظری که در قطار نشسته است قطره‌های باران کاملاً به طور قائم می‌بارند. تندی قطره‌های باران را نسبت به زمین معین کنید.

** ۷۶ یک هواپیمای سبک با تندی $500 \mathrm{km/h}$ نسبت به هوا در حال پرواز کردن است. خلبان به قصد مکانی که در فاصله‌ی ۸۰۰ کیلومتری قرار دارد پرواز می‌کند، اما متوجه می‌شود که برای پرواز مستقیم به آن مکان باید هواپیما را تحت زاویه‌ی ۲۰٫۰ درجه‌ی خاور محور شمالی هدایت کند. این هواپیما پس از $2{,}00 \mathrm{h}$ به آن مکان می‌رسد. (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت باد چیست؟

** ۷۷ دانه‌های برف در راستای قائم و با تندی ثابت ۸٫۰m/s می‌بارند. از دید راننده‌ای که در یک جاده‌ی افقی و مستقیم با تندی ۵۰km/h حرکت می‌کند، دانه‌های برف تحت چه زاویه‌ای نسبت به راستای قائم سقوط می‌کنند؟

** ۷۸ شکل ۴-۴۷ دو خودرو جیپ P و B را نشان می‌دهد که در طول خط‌های راست در زمینی تخت با هم مسابقه گذاشته‌اند و از کنار پست مرزبانی A می‌گذرند. خودرو B نسبت به مرزبانی با تندی ثابت ۲۰٫۰m/s تحت زاویه‌ی θ_2 = ۳۰٫۰° حرکت می‌کند. خودرو P نسبت به مرزبانی با شتاب ثابت ۰٫۴۰۰m/s² از حال سکون و تحت زاویه‌ی θ_1 = ۶۰٫۰° به حرکت درمی‌آید. تندی خودرو P در زمان معینی از شتاب گرفتن ۴۰٫۰m/s است. در آن زمان، (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت خودرو P نسبت به خودرو B، و (پ) بزرگی و (ت) جهت شتاب خودرو P نسبت به خودرو B، چیست؟



شکل ۴-۴۷ مسئله‌ی ۷۸.

** ۷۹ دو کشتی A و B به طور هم‌زمان بندری را ترک می‌کنند. کشتی A با تندی ۲۴ گره به سمت شمال باختری و کشتی B با تندی ۲۸ گره در جهت ۴۰ درجه‌ی باختر محور جنوبی حرکت می‌کند (یک گره برابر با یک مایل دریایی بر ساعت است، پیوست ت پایان کتاب را ببینید). (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت کشتی A نسبت به کشتی B چیست؟ (پ) پس از چه مدت فاصله‌ی دو کشتی ۱۶۰ مایل دریایی خواهد بود (هر مایل دریایی ۱۸۵۳m است). (ت) در این لحظه کشتی B نسبت به کشتی A در چه جهتی (جهت مکان کشتی B) دیده می‌شود؟

** ۸۰ رودخانه‌ای به پهنای ۲۰۰m با تندی یکنواخت ۲٫۰m/s از میان جنگل به سمت خاور جاری است. قایقی با تندی ۸٫۰m/s نسبت به آب رودخانه از ساحل جنوبی در جهت ۳۰ درجه‌ی باختر محور شمالی به راه می‌افتد. (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت قایق نسبت به زمین چیست؟ (پ) چه مدت طول می‌کشد تا قایق پهنای رودخانه را بپیماید؟

*** ۸۱ کشتی A به فاصله‌ی ۴٫۰km در سمت شمال و به فاصله‌ی ۲٫۵km در سمت خاور کشتی B قرار دارد. سرعت کشتی A با بزرگی ۲۲km/h به سمت جنوب و سرعت کشتی B با بزرگی ۴۰km/h در جهت ۳۷ درجه‌ی شمال محور خاوری است. (الف) سرعت A نسبت به B با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه، که در آن $\hat{i}$ به سوی خاور است، چیست؟ (ب) رابطه‌ی مربوط به بردار مکان A نسبت به B را (برحسب $\hat{i}$ و $\hat{j}$) به صورت تابعی از t بنویسید. به ازای t = ۰ کشتی‌ها در مکان‌های ذکر شده قرار دارند. (پ) در چه زمانی کشتی‌ها با هم کم‌ترین فاصله را دارند؟ (ت) مقدار این کم‌ترین فاصله چیست؟

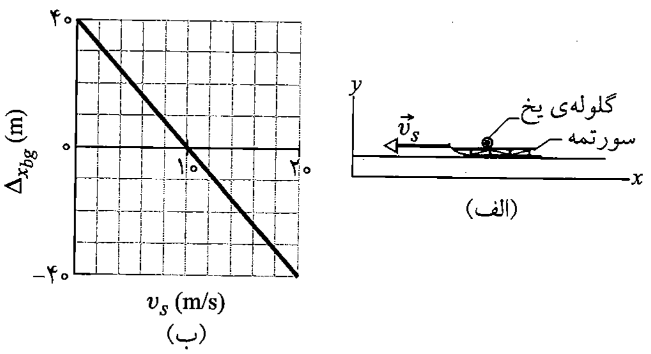
*** ۸۲ در رودخانه‌ای به پهنای ۲۰۰m، که از میان جنگلی به سمت خاور عبور می‌کند، آب با تندی یکنواخت ۱٫۱m/s جریان دارد. کاوشگری می‌خواهد از یک جای بی‌درخت واقع در ساحل جنوبی رودخانه با قایقی تندرو با تندی ۴٫۰m/s نسبت به جریان آب، از رودخانه عبور کند. نقطه‌ی مورد نظر کاوشگر در آن سوی رودخانه نسبت به نقطه‌ی مقابل شروع حرکتش در ساحل جنوبی، به فاصله‌ی ۸۲m در بالادست جریان آب قرار دارد. (الف) کاوشگر قایق را در چه جهتی باید هدایت کند تا بتواند به خط راست از نقطه‌ی شروع حرکت به نقطه‌ی مورد نظر در ساحل شمالی برسد؟ (ب) چه مدت طول می‌کشد تا قایق از رودخانه بگذرد؟

مسئله‌های بیشتر

۸۳ شخصی می‌تواند یک قایق پارویی را در آب ساکن با تندی ۶٫۴km/h براند. او می‌خواهد از رودخانه‌ای مستقیم به پهنای ۶٫۴km، که در آن تندی جریان آب ۳٫۲km/h است، بگذرد. فرض کنید $\hat{i}$ در جهت پهنای رودخانه و $\hat{j}$ در جهت پایین رود باشد. اگر شخص بخواهد در یک خط راست به

سوی نقطه‌ای درست در مقابل نقطه‌ی شروع حرکتش پارو بزند، (الف) قایق را باید تحت چه زاویه‌ای نسبت به $\hat{i}$ برانند و (ب) چه مدت طول می‌کشد تا پهنای رودخانه را بپیمایند؟ (پ) اگر شخص ۳/۲km ***در جهت پایین رود*** پارو بزند و سپس به نقطه‌ی شروع حرکتش برگردد، چه مدت طول می‌کشد؟ (ت) اگر او ۳/۲km ***در جهت بالا رود*** پارو بزند و سپس به نقطه‌ی شروع حرکتش برگردد، چه مدت طول می‌کشد؟ (ث) اگر شخص بخواهد در کوتاه‌ترین زمان ممکن پهنای رودخانه را بپیماید، قایق را باید تحت چه زاویه‌ای نسبت به $\hat{i}$ برانند؟ (ج) این کوتاه‌ترین زمان چقدر است؟

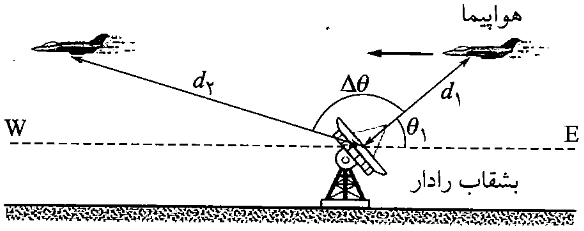
۸۴ در شکل ۴-۴۸ الف، از سورتمه‌ای که با تندی ثابت v_s در جهت منفی محور x حرکت می‌کند، یک گلوله‌ی یخ با سرعت $\vec{v}_\circ = v_{\circ x}\hat{i} + v_{\circ y}\hat{j}$ نسبت به سورتمه پرتاب می‌شود. وقتی گلوله فرود می‌آید جابه‌جایی افقی‌اش Δx_{bg}، نسبت به زمین (یعنی از مکان پرتاب تا مکان فرود آمدن به زمین) اندازه‌گیری می‌شود. شکل ۴-۴۸ ب نمودار تغییرات Δx_{bg} را به صورت تابعی از v_s نشان می‌دهد. فرض کنید گلوله‌ی یخ تقریباً در همان ارتفاعی که از آن پرتاب شده است، فرود می‌آید. مقادیر (الف) $v_{\circ x}$ و (ب) $v_{\circ y}$ را معین کنید. جابه‌جایی گلوله Δx_{bs}، نسبت به سورتمه را نیز می‌توان اندازه‌گیری کرد. فرض کنید سرعت سورتمه در لحظه‌ی پرتاب کردن گلوله تغییر نمی‌کند. مقدار Δx_{bs} به ازای مقادیر v_s برابر با (الف) ۵/۰m/s و (ب) ۱۵m/s، چیست؟



شکل ۴-۴۸ مسئله‌ی ۸۴.

۸۵ عده‌ای از دانشجویان رشته‌ی علوم سیاسی (که از دست شما عصبانی شده‌اند، زیرا گفته‌اید علوم سیاسی یک علم واقعی به‌شمار نمی‌آید) شما را می‌ربایند. اگرچه آن‌ها چشمان شما را بسته‌اند شما می‌توانید، تندی خودروی آن‌ها را (از صدای موتور)، مدت زمان حرکت را (با شمردن ذهنی ثانیه‌ها) و جهت حرکت را (با گردش به چپ و راست خودرو در دستگاه مختصات راست‌گوشه‌ی خیابان‌ها)، حدس بزنید. بر پایه‌ی این سرنخ‌ها، شما تندی، مدت و مسیر حرکت را چنین برآورد می‌کنید: ۵۰km/h به مدت ۲/۰min، گردش ۹۰ درجه به سمت راست، ۲۰km/h به مدت ۴/۰min، گردش ۹۰ درجه به سمت راست، ۲۰km/h به مدت ۶۰s، گردش ۹۰ درجه به سمت چپ، ۵۰km/h به مدت ۶۰s، گردش ۹۰ درجه به سمت راست، ۲۰km/h به مدت ۲/۰min، گردش ۹۰ درجه به سمت چپ، ۵۰km/h به مدت ۳۰s. در آن نقطه، (الف) در چه فاصله‌ای از نقطه‌ی شروع حرکت قرار دارید و (ب) در چه جهتی نسبت به جهت آغازی حرکت واقع شده‌اید؟

۸۶ در شکل ۴-۴۹، یک ایستگاه رادار متوجه می‌شود که هواپیمایی درست از جانب خاور در حال نزدیک شدن به ایستگاه است. در مشاهده‌ی اول هواپیما در فاصله‌ی $d_1 = ۳۶۰\,\text{m}$ و در جهت زاویه‌ی $\theta_1 = ۴۰^\circ$ بالای افق قرار دارد. آنگاه، هواپیما در صفحه‌ی قائم خاوری - باختری ردگیری و در فاصله‌ی $d_2 = ۷۹۰\,\text{m}$ تحت زاویه‌ی $\Delta\theta = ۱۲۳^\circ$ مشاهده می‌شود. (الف) بزرگی و (ب) جهت جابه‌جایی هواپیما را در مدت این مشاهدات پیدا کنید.



شکل ۴-۴۹ مسئله‌ی ۸۶.

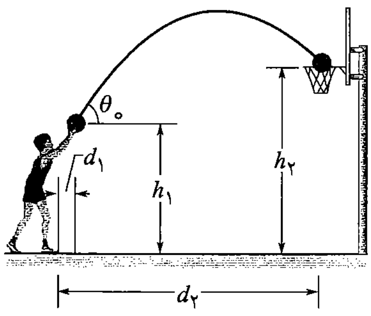
۸۷ گوی بیس بالی در اثر ضربه زدن از سطح زمین پرتاب می‌شود و ۳/۰s پس از دریافت ضربه به ارتفاع بیشینه‌ی خود در بالای زمین می‌رسد. گوی ۲/۵s پس از رسیدن به ارتفاع بیشینه با فاصله‌ی اندکی از روی نرده‌ای که ۹۷/۵m تا نقطه‌ی ضربه خوردن فاصله دارد، عبور می‌کند. فرض کنید زمین تراز است.

(الف) ارتفاع بیشینه‌ای که گوی به آن می‌رسد چقدر است؟ (ب) ارتفاع نرده چقدر است؟ (پ) گوی در چه فاصله‌ای از نرده به زمین برخورد می‌کند؟

۸۸ هواپیماها در پروازهای طولانی در عرض‌های جغرافیایی میانی در نیمکره‌ی شمالی با جریانی از هوا مواجه می‌شوند که به سمت خاور می‌وزد و می‌تواند روی تندی هواپیما نسبت به سطح زمین اثر بگذارد. اگر خلبان تندی هواپیما نسبت به هوا (***تندی هوایی*** هواپیما) را ثابت نگه دارد تندی هواپیما نسبت به سطح زمین (***تندی زمینی*** هواپیما) در حالتی که پرواز در جهت جریان هوا باشد بیشتر از حالتی است که هواپیما در خلاف جهت جریان هوا پرواز می‌کند. یک پرواز رفت و برگشت میان دو شهر به فاصله‌ی ۴۰۰۰km از یکدیگر را در نظر بگیرید، که در آن پرواز رفت در جهت جریان هوا و پرواز برگشت در خلاف جهت جریان هوا صورت می‌گیرد. رایانه‌ی شرکت هوایی برای این پرواز تندی هوایی ۱۰۰۰km/h را پیشنهاد می‌کند، که در این صورت اختلاف زمان رفت و برگشت ۷۰/۰min خواهد بود. این رایانه برای تندی جریان هوا چه مقداری را در نظر گرفته است؟

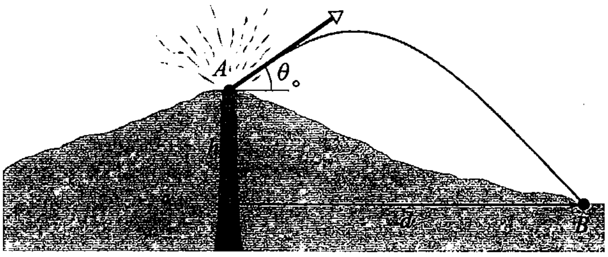
۸۹ ذره‌ای در زمان $t = ۰$ با سرعت $۸/۰\hat{\mathrm{j}}\,\mathrm{m/s}$ از مبداء مختصات به‌راه می‌افتد و با شتاب ثابت $(۴/۰\hat{\mathrm{i}}+۲/۰\hat{\mathrm{j}})\,\mathrm{m/s^۲}$ در صفحه‌ی xy حرکت می‌کند. وقتی مختصه‌ی x ذره، ۲۹m است، (الف) مختصه‌ی y و (ب) تندی ذره چیست؟

۹۰ در شکل ۴-۵۰، بازیکن بسکتبال توپ را با چه تندی آغازی‌ای تحت زاویه‌ی $\theta_۰ = ۵۵^\circ$ بالای افق پرتاب کند تا یک پرتاب موفق صورت گیرد؟ فاصله‌های افقی $d_۱ = ۱/۰\,\mathrm{ft}$ و $d_۲ = ۱۴\,\mathrm{ft}$، و ارتفاع‌ها $h_۱ = ۷/۰\,\mathrm{ft}$ و $h_۲ = ۱۰\,\mathrm{ft}$، هستند.



شکل ۴-۵۰ مسئله‌ی ۹۰.

۹۱ در طی فوران‌های آتش‌فشانی، تکه‌های بزرگ سنگ‌های جامد می‌توانند از کوه به بیرون پرتاب شوند؛ این پرتابه‌ها را ***بمب‌های آتش‌فشانی*** می‌نامند. شکل ۴-۵۱، مقطع کوه فوجی[1] را در ژاپن نشان می‌دهد. (الف) یک بمب با چه تندی آغازی‌ای تحت زاویه‌ی $\theta_۰ = ۳۵^\circ$ نسبت به راستای افقی باید پرتاب شود تا در نقطه‌ی B، واقع در بالای کوه، به فاصله‌ی قائم $h = ۳/۳۰\,\mathrm{km}$ و فاصله‌ی افقی $d = ۹/۴۰\,\mathrm{km}$ نسبت به نقطه‌ی درروِ A، فرود آید؟ در اینجا از اثرهای هوا بر روی حرکت بمب چشم‌پوشی می‌شود. (ب) مدت‌زمان پرواز بمب چقدر است؟ (پ) آیا وجود اثرهای هوا پاسخ قسمت (الف) را افزایش می‌دهد یا کاهش؟



شکل ۴-۵۱ مسئله‌ی ۹۱.

۹۲ فضانوردی در درون یک دستگاه آزمایش شتاب مرکزگریز افقی به شعاع ۵/۰m چرخانده می‌شود. (الف) اگر شتاب مرکزگرای فضانورد $۷/۰g$ باشد، تندی او چقدر است؟ (ب) این دستگاه در هر دقیقه چند دور باید بچرخد تا بتواند چنین شتابی را تولید کند؟ (پ) دوره‌ی تناوب حرکت چیست؟

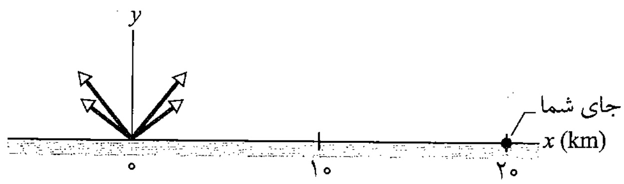
۹۳ آبادی A به فاصله‌ی ۹۰km در باختر آبادی B قرار دارد. یک شتر بیابانی از آبادی A به راه می‌افتد و در مدت ۵۰h مسافت ۷۵km را در جهت ۳۷ درجه‌ی شمال محور خاوری می‌پیماید. سپس، شتر مسافت ۶۵km را در مدت ۳۵h به سمت جنوب می‌پیماید و پس از آن ۵/۰h استراحت می‌کند. (الف) بزرگی و (ب) جهت جابه‌جایی شتر در نقطه‌ی استراحت نسبت به آبادی A چیست؟ از لحظه‌ی ترک کردن آبادی A تا پایان استراحت، (پ) بزرگی و (ت) جهت سرعت متوسط و (ث) تندی متوسط شتر چیست؟ آخرین محل آب خوردن شتر در آبادی A بوده است، و حداکثر باید پس از ۱۲۰h به آبادی

1. Fuji

B برسد تا دوباره آب بخورد. اگر شتر درست پس از این مدت به آبادی B برسد، (ج) بزرگی و (چ) جهت سرعت متوسط شتر پس از استراحت، چیست؟

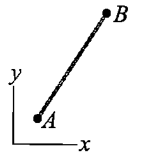
۹۴ ***پوشش مرگ‌بار.*** سیارک فلزی بزرگی به زمین برخورد می‌کند و بی‌درنگ با حفر شدن گودالی در ماده‌ی صخره‌ای زیر سطح زمین سنگ‌ها به بیرون پرتاب می‌شوند و پوششی از گرد و خاک در بالای زمین به وجود می‌آید. جدول زیر پنج دسته تندی آغازی و زاویه‌ی پرتاب (نسبت به راستای افقی) را برای این نوع سنگ‌ها و بر مبنای مدل تشکیل شدن دهانه‌ی گودال‌ها، نشان می‌دهد. (سنگ‌های دیگری هم با تندی‌ها و زاویه‌های بین این مقادیر پرتاب می‌شوند). فرض کنید که در زمان $t=۰$ سیارک در مکان $x=۰$ به زمین برخورد می‌کند (شکل ۴-۵۲) و شما در فاصله‌ی $x=۲۰\,\text{km}$ از آن محل قرار گرفته‌اید. (الف) در زمان $t=۲۰\,\text{s}$، مختصات x و y سنگ‌هایی را که با مشخصات پرتابی الف تا ث به طرف شما می‌آیند، معین کنید. (ب) نقطه‌های با این مختصات را روی دستگاه مختصات نشان‌گذاری کنید و سپس یک منحنی از این نقطه‌ها عبور دهید تا سنگ‌های با تندی‌ها و زاویه‌های پرتاب بین مقادیر را نیز شامل بشود. این منحنی می‌تواند به شما نشان دهد که وقتی به سنگ‌های در حال نزدیک شدن نگاه می‌کنید چه می‌بینید و نتیجه بگیرید که دایناسورها در گذشته‌های بسیار دور در حین برخورد سیارک‌ها به زمین چه دیده‌اند.

پرتاب	تندی (m/s)	زاویه‌ی پرتاب (درجه)
الف	۵۲۰	۱۴٫۰
ب	۶۳۰	۱۶٫۰
پ	۷۵۰	۱۸٫۰
ت	۸۷۰	۲۰٫۰
ث	۱۰۰۰	۲۲٫۰



شکل ۴-۵۲ مسئله‌ی ۹۴.

۹۵ شکل ۴-۵۳، مسیر راست یک ذره را در دستگاه مختصات xy نشان می‌دهد. این ذره در بازه‌ی زمانی Δt_1 از حال سکون با شتابی ثابت به حرکت در آمده است. مختصات x و y مربوط به نقطه‌ی A به‌صورت (۴٫۰۰m و ۶٫۰۰m) و برای نقطه‌ی B به صورت (۱۲٫۰m و ۱۸٫۰m) است. (الف) نسبت مؤلفه‌های شتاب $\frac{a_y}{a_x}$، چیست؟ (ب) اگر حرکت ذره برای یک بازه‌ی زمانی دیگر Δt_1 ادامه پیدا کند، مختصات ذره کدام‌اند؟



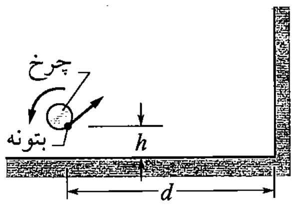
شکل ۴-۵۳ مسئله‌ی ۹۵.

۹۶ در بازی والیبال بانوان ارتفاع لبه‌ی بالای تور تا سطح زمین ۲٫۲۴m و ابعاد زمین در هر طرف تور ۹٫۰m×۹٫۰m است. بازیکنی با استفاده کردن از سرویس پرشی، در ارتفاع ۳٫۰ متری بالای زمین و به فاصله‌ی افقی ۸٫۰ متر از تور، به توپ ضربه می‌زند. اگر سرعت آغازی توپ افقی باشد، (الف) کمینه‌ی بزرگی سرعت چقدر باید باشد تا توپ از بالای تور عبور کند و (ب) بیشینه‌ی بزرگی سرعت چقدر باید باشد تا توپ در طرف دیگر تور بر روی خط عرضی انتهای زمین فرود آید؟

۹۷ تفنگی به طور افقی یک هدف واقع در فاصله‌ی ۳۰ متری را نشانه می‌گیرد. گلوله‌ی تفنگ به فاصله‌ی ۱٫۹cm پایین‌تر از نقطه‌ی نشانه‌گیری شده برخورد می‌کند. (الف) مدت زمان پرواز گلوله و (ب) تندی خروج گلوله از لوله‌ی تفنگ، چقدر است؟

۹۸ ذره‌ای که به دور مبداء مختصات xy حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد، با دوره‌ی تناوب ۷٫۰۰s در جهت ساعت‌گرد می‌چرخد. در یک لحظه، بردار مکان ذره (که نسبت به مبداء اندازه‌گیری می‌شود)، $\vec{r}=(۲٫۰۰\,\text{m})\hat{\mathrm{i}}-(۳٫۰۰\,\text{m})\hat{\mathrm{j}}$ است. در آن لحظه، سرعت ذره با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه چیست؟

۹۹ شکل ۴-۵۴ تکه‌ای بتونه‌ی خیس را نشان می‌دهد که روی لبه‌ی چرخی به شعاع ۲۰٫۰cm حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام

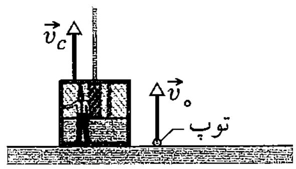


شکل ۴-۵۴ مسئله‌ی ۹۹.

می‌دهد و چرخ در جهت پادساعت‌گرد با دوره‌ی تناوب ۵٫۰۰ ms می‌چرخد. بتونه وقتی به مکانی متناظر با ساعت ۵ (عدد ۵ روی صفحه‌ی یک ساعت) می‌رسد، از لبه‌ی چرخ به بیرون پرتاب می‌شود. جدا شدن بتونه از لبه‌ی چرخ در ارتفاع $h = ۱٫۲۰\,m$ نسبت به سطح زمین و به فاصله‌ی $d = ۲٫۵۰\,m$ از یک دیوار صورت می‌گیرد. بتونه در چه ارتفاعی به دیوار برخورد می‌کند؟

۱۰۰ یک قایق بادبانی یخ پیما با شتاب ثابت حاصل از وزیدن باد در روی سطح دریاچه‌ی یخ بسته‌ای حرکت می‌کند. در لحظه‌ی معینی سرعت قایق $(۶٫۳۰\hat{i} - ۸٫۴۲\hat{j})\,m/s$ است. ۳٫۰۰ ثانیه بعد، قایق به خاطر تغییر کردن جهت باد به طور لحظه‌ای به حال سکون در می‌آید. شتاب متوسط قایق در این بازه‌ی زمانی ۳٫۰۰ ثانیه، چقدر است؟

۱۰۱ در شکل ۴-۵۵، توپی با تندی آغازی $v_۰ = ۷٫۰۰\,m/s$ یک راست از زمین به بالاسو پرتاب می‌شود. در همین زمان، یک اتاقک بالابر ساختمانی با تندی ثابت $v_C = ۳٫۰۰\,m/s$ از زمین به بالاسو شروع به حرکت می‌کند. این توپ به چه ارتفاع بیشینه‌ای نسبت به (الف) زمین و (ب) کف اتاقک، می‌رسد؟ تندی توپ نسبت به (پ) زمین و (ت) کف اتاقک، با چه آهنگی تغییر می‌کند؟



شکل ۴-۵۵ مسئله‌ی ۱۰۱.

۱۰۲ میدان مغناطیسی می‌تواند یک ذره‌ی باردار را وادار به حرکت در یک مسیر دایره‌ای بکند. فرض کنید به الکترونی، که در میدان مغناطیسی معینی در یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند، شتابی به بزرگی $۳٫۰ \times ۱۰^{۱۴}\,m/s^۲$ داده شود. (الف) اگر شعاع مسیر دایره‌ای ۱۵ cm باشد تندی الکترون چقدر است؟ (ب) دوره‌ی تناوب حرکت الکترون چیست؟

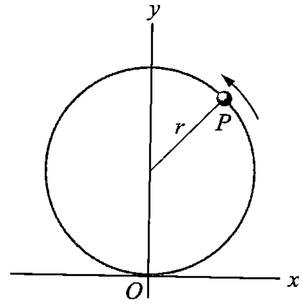
۱۰۳ بالونی در مدت ۳٫۵۰ h پس از بلند شدن از سطح زمین به اندازه‌ی ۲۱٫۵ km به سمت شمال، ۹٫۷۰ km به سمت خاور و ۲٫۸۸ km به سمت بالا حرکت می‌کند. مطلوب است تعیین (الف) بزرگی سرعت متوسط و (ب) زاویه‌ی سرعت متوسط بالون نسبت به راستای افقی.

۱۰۴ گلوله‌ای از ارتفاع ۲۰ متری به طور افقی پرتاب می‌شود و با تندی‌ای سه برابر تندی آغازی به زمین برخورد می‌کند. تندی آغازی گلوله چیست؟

۱۰۵ پرتابه‌ای با تندی آغازی ۳۰ m/s تحت زاویه‌ی ۶۰ درجه‌ی بالای افق پرتاب می‌شود. (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی سرعت پرتابه ۲٫۰ s پس از پرتاب چیست، و (پ) این زاویه بالای افق است یا زیر افق؟ (ت) بزرگی و (ث) زاویه‌ی سرعت پرتابه ۵٫۰ s پس از پرتاب چقدر است، و (ج) این زاویه بالای افق است یا زیر افق؟

۱۰۶ بردار مکان یک پروتون در آغاز $\vec{r} = ۵٫۰\hat{i} - ۶٫۰\hat{j} + ۲٫۰\hat{k}$ و پس از مدتی $\vec{r} = -۲٫۰\hat{i} + ۶٫۰\hat{j} + ۲٫۰\hat{k}$، برحسب متر، است. (الف) بردار جابه‌جایی پروتون چیست و (ب) این بردار با کدام صفحه‌ی دستگاه مختصات موازی است؟

۱۰۷ ذره‌ی P با تندی ثابت بر روی دایره‌ای به شعاع $r = ۳٫۰۰\,m$ می‌چرخد (شکل ۴-۵۶) و در مدت ۲۰٫۰ ثانیه یک دور کامل می‌زند. ذره در زمان $t = ۰$ از نقطه‌ی O می‌گذرد. بردارهای خواسته شده‌ی زیر را به صورت نمادگذاری بزرگی ـ زاویه (نسبت به محور x مثبت) بیان کنید. بردار مکان ذره را در زمان‌های (الف) ۵٫۰۰ s، (ب) ۷٫۵۰ s و (پ) ۱۰٫۰ s، نسبت به نقطه‌ی O پیدا کنید. (ت) جابه‌جایی ذره را در بازه‌ی زمانی ۵٫۰۰ s، از پایان ثانیه پنجم تا پایان ثانیه‌ی دهم، معین کنید. (ث) سرعت‌متوسط ذره را در همان بازه‌ی زمانی پیدا کنید. سرعت ذره را (ج) در آغاز، و (چ) در پایان همان بازه‌ی زمانی ۵٫۰۰ s بیابید. سپس، شتاب ذره را (ح) در آغاز، و (خ) درپایان همان بازه‌ی‌زمانی به‌دست آورید.



شکل ۴-۵۶ مسئله‌ی ۱۰۷.

۱۰۸ قطار تندرو فرانسوی به نام TGV [1] (ترن با سرعت بالا) دارای تندی از پیش معین شده‌ی ۲۱۶km/h است. (الف) اگر قطار با این تندی مسیر خمیده‌ای را دور بزند و بخواهیم بزرگی شتاب وارد شده به مسافر به ۰٫۰۵۰g محدود شود، کم‌ترین شعاع خمیدگی قابل تحمل ریل‌ها چقدر می‌تواند باشد؟ (ب) این قطار یک مسیر خمیده‌ی با شعاع ۱٫۰۰km را با چه تندی‌ای باید دور بزند تا به حد مجاز شتاب برسد؟

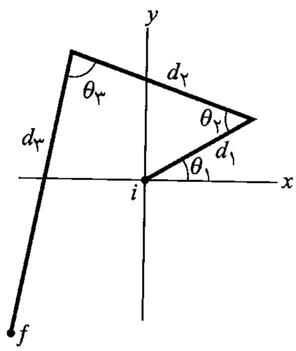
۱۰۹ (الف) اگر الکترونی با تندی $۳٫۰\times ۱۰^{۶}$m/s به طور افقی پرتاب شود، در هنگام پیمودن مسافت افقی ۱٫۰m چه مقدار سقوط خواهد کرد؟ (ب) اگر تندی آغازی الکترون افزایش یابد، پاسخ به دست آمده افزایش می‌یابد یا کاهش؟

۱۱۰ شخصی در مدت ۹۰s از یک پلکان برقی ساکن به طول ۱۵m بالا می‌رود. اگر شخص روی پلکان در حال حرکت بایستد، در مدت ۶۰s به بالا می‌رسد. چه مدت طول می‌کشد تا شخص روی پلکان در حال حرکت راه برود و به بالا برسد؟ آیا پاسخ به طول پلکان بستگی دارد؟

۱۱۱ (الف) بزرگی شتاب مرکزگرای یک جسم واقع بر روی استوای زمین، که ازچرخش زمین ناشی می‌شود، چقدر است؟ (ب) برای اجسام واقع بر روی استوا با شتاب مرکزگرای به بزرگی $۹٫۸ m/s^{۲}$ دوره‌ی تناوب چرخش زمین چیست؟

۱۱۲ بُرد یک پرتابه نه تنها به v_0 و θ_0، بلکه به مقدار g، شتاب سقوط آزاد نیز، که از جایی به جای دیگر تغییر می‌کند، بستگی دارد. در سال ۱۹۳۶/۱۳۱۵، در جریان بازی‌های المپیک برلین (که در آنجا $g = ۹٫۸۱۲۸ m/s^{۲}$)، جس اوونس [2] رکورد جهانی پرش طول به مقدار ۸٫۰۹m را به جا گذاشت. با این فرض که مقادیر v_0 و θ_0 تغییر نکنند، اگر او در بازی‌های المپیک ۱۹۵۶ ملبورن [1] (که در آنجا $g = ۹٫۷۹۹۹ m/s^{۲}$) مسابقه می‌داد، چه تغییری در رکوردش به وجود می‌آمد؟

۱۱۳ شکل ۴-۵۷، مسیر حرکت فرد گیجی را نشان می‌دهد که در یک زمین تراز از نقطه‌ی آغازی i به نقطه‌ی پایانی f می‌رود. زاویه‌ها و فاصله‌ها در شکل عبارت‌اند از: $\theta_1 = ۳۰٫۰^\circ$، $\theta_2 = ۵۰٫۰^\circ$ و $\theta_3 = ۸۰٫۰^\circ$؛ $d_1 = ۵٫۰۰ m$، $d_2 = ۸٫۰۰ m$ و $d_3 = ۱۲٫۰ m$. (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی جابه‌جایی این فرد از i تا f چیست؟



شکل ۴-۵۷ مسئله‌ی ۱۱۳.

۱۱۴ بردار مکان ذره‌ای که در صفحه‌ی xy حرکت می‌کند، $\vec{r} = ۲t\hat{i} + ۲\sin\left[(\frac{\pi}{۴}\text{rad/s})t\right]\hat{j}$ است، که در آن بزرگی $\vec{r}$ برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) مؤلفه‌های x و y مکان ذره را در زمان‌های $t = ۰, ۱٫۰, ۲٫۰, ۳٫۰, ۴٫۰ s$ حساب کنید و نمودار مسیر حرکت ذره را در صفحه‌ی xy برای بازه‌ی زمانی $۰ \le t \le ۴٫۰ s$ رسم کنید. (ب) مؤلفه‌های سرعت ذره را در زمان‌های $t = ۱٫۰, ۲٫۰, ۳٫۰ s$ حساب کنید. نشان دهید که بردار سرعت بر مسیر حرکت ذره مماس است و جهتش در هر لحظه هم‌سو با حرکت ذره است، که از ترسیم بردارهای سرعت بر روی نمودار مسیر حرکت در قسمت (الف) مشخص می‌شود. (پ) مؤلفه‌های شتاب ذره را در زمان‌های $t = ۱٫۰, ۲٫۰, ۳٫۰ s$ حساب کنید.

1. Train à Grande Vitesse 2. Jesse Owens

1. Melburne

۱۱۵ الکترونی با سرعت آغازی افقی به بزرگی $۱/۰۰ \times ۱۰^{۹}\,\mathrm{cm/s}$ به ناحیه‌ای واقع در میان دو صفحه‌ی فلزی افقی دارای بار الکتریکی وارد می‌شود. در آن ناحیه الکترون با شتاب ثابت پایین‌سو و به بزرگی $۱/۰۰ \times ۱۰^{۱۷}\,\mathrm{cm/s^2}$، که از میدان الکتریکی صفحه‌های باردار ناشی می‌شود، مسافت افقی $۲/۰۰\,\mathrm{cm}$ را می‌پیماید. (الف) مدت زمانی که الکترون مسافت افقی $۲/۰۰\,\mathrm{cm}$ را می‌پیماید، (ب) مسافت قائمی که الکترون در این مدت می‌پیماید، و بزرگی مؤلفه‌های (پ) افقی و (ت) قائم سرعت خروج الکترون از میان صفحه‌ها، را پیدا کنید.

۱۱۶ آسانسور روبازی با تندی ثابت $۱۰\,\mathrm{m/s}$ بالا می‌رود. وقتی آسانسور به ارتفاع $۳۰\,\mathrm{m}$ بالای زمین می‌رسد، پسر بچه‌ای از درون آسانسور توپی را از ارتفاع $۲/۰$ متری کف آسانسور یک راست به بالاسو پرتاب می‌کند. تندی آغازی توپ نسبت به آسانسور $۲۰\,\mathrm{m/s}$ است. (الف) این توپ به چه ارتفاع بیشینه‌ای نسبت به زمین می‌رسد؟ (ب) چه مدت طول می‌کشد تا توپ به کف آسانسور برگردد؟

۱۱۷ یک بازیکن فوتبال توپی را چنان شوت می‌کند که به مدت $۴/۵$ ثانیه در هوا حرکت می‌کند و در فاصله‌ی ۴۶ متری به زمین می‌خورد. اگر توپ در ارتفاع ۱۵۰ سانتی‌متری سطح زمین از پای بازیکن جدا شود، (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی سرعت آغازی توپ (نسبت به راستای افقی) چیست؟

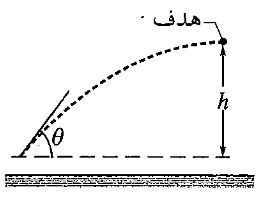
۱۱۸ پایانه‌ی یک فرودگاه دارای پیاده‌رو متحرکی است که تندی حرکت مسافران را در یک راهرو دراز افزایش می‌دهد. شخص L از این پیاده‌رو متحرک استفاده نمی‌کند و سرتاسر راهرو را در مدت $۱۵۰\,\mathrm{s}$ پیاده می‌رود. شخص C، که روی پیاده‌رو متحرک ایستاده است، همان مسافت را در مدت $۷۰\,\mathrm{s}$ می‌پیماید. شخص M که روی پیاده‌رو متحرک سوار شده است بر روی آن راه می‌رود. چه مدت طول می‌کشد تا M سرتاسر راهرو را بپیماید؟ فرض کنید تندی راه رفتن L و M یکسان است.

۱۱۹ یک واگن باری با دیوارهای چوبی بر روی خط آهن مستقیمی با تندی v_1 حرکت می‌کند. تیراندازی با یک تفنگ پرقدرت گلوله‌ای را (با تندی آغازی v_2) به سمت واگن شلیک می‌کند. گلوله دو دیواره‌ی واگن را سوراخ می‌کند و وقتی از درون واگن نگاه می‌کنیم سوراخ‌های ورود و خروج گلوله را درست در مقابل هم می‌بینیم. این گلوله در چه راستایی نسبت به خط آهن شلیک شده است؟ فرض کنید گلوله در موقع ورود به واگن منحرف نمی‌شود، اما تندی آن به اندازه‌ی ۲۰ درصد کاهش می‌یابد. $v_1 = ۸۵\,\mathrm{km/h}$ و $v_2 = ۶۵۰\,\mathrm{m/s}$. (چرا نیازی به دانستن پهنای واگن نیست؟)

۱۲۰ دونده‌ای بر روی مسیری دایره‌ای با سرعت ثابت به بزرگی $۹/۲۰\,\mathrm{m/s}$ و شتاب مرکزگرای به بزرگی $۳/۸۰\,\mathrm{m/s^2}$، می‌رود. (الف) شعاع مسیر و (ب) دوره‌ی تناوب حرکت دایره‌ای دونده چیست؟

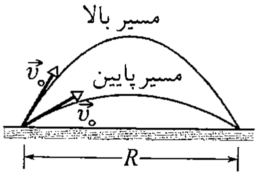
۱۲۱ فرض کنید یک کاوند فضایی می‌تواند تنش‌های مربوط به شتاب $۲۰\,\mathrm{g}$ را تحمل کند. (الف) شعاع چرخش کاوند در حال حرکت کردن با تندی یک دهم تندی نور، چیست؟ (ب) چه مدت طول می‌کشد تا کاوند با این تندی یک چرخش ۹۰ درجه‌ای انجام دهد؟

۱۲۲ گلوله‌ای را با تندی $۱۲\,\mathrm{m/s}$ به سوی هدفی پرتاب می‌کنید که در ارتفاع $h = ۵/۰۰\,\mathrm{m}$ بالاتر از تراز رها شدن آن قرار دارد (شکل ۴-۵۸). می‌خواهید سرعت گلوله در لحظه‌ی رسیدن به هدف افقی باشد. (الف) گلوله را تحت چه زاویه‌ی θ بالاتر از افق باید پرتاب کنید؟ (ب) فاصله‌ی افقی نقطه‌ی پرتاب گلوله تا هدف چیست؟ (پ) تندی گلوله درست در هنگام رسیدن به هدف چقدر است؟



شکل ۴-۵۸ مسئله‌ی ۱۲۲.

۱۲۳ پرتابه‌ای با تندی آغازی $v_0 = ۳۰/۰\,\mathrm{m/s}$ از سطح زمین به سوی یک هدف واقع در روی زمین و به فاصله‌ی $R = ۲۰/۰\,\mathrm{m}$، مطابق شکل ۴-۵۹، پرتاب می‌شود. (الف) کمترین و (ب) بیشترین، زاویه‌های پرتابی که اجازه می‌دهند پرتابه به هدف برخورد کند، چیست؟



شکل ۴-۵۹ مسئله‌ی ۱۲۳.

۱۲۴ ***ترسیم شگفتی.*** در زمان $t = ۰$ یک بوریتو* از سطح زمین با تندی آغازی ۱۶٫۰m/s و با زاویه‌ی پرتاب θ_0، پرتاب می‌شود. بردار مکان $\vec{r}$ را در نظر بگیرید که در حین پرواز بورتیو به طور پیوسته در راستای نقطه‌ی پرتاب تا محل بوریتو قرار دارد. بزرگی مکان r را برای زاویه‌های (الف) $\theta_0 = ۴۰٫۰°$ و (ب) $۸۰٫۰°$ رسم کنید. به ازای $\theta_0 = ۴۰٫۰°$، (پ) چه وقت r به مقدار بیشینه‌ی خود می‌رسد، (ت) این مقدار بیشینه و فاصله‌ی (ث) افقی و (ج) قائم بوریتو از نقطه‌ی پرتاب، چقدر است؟ به ازای $\theta_0 = ۸۰٫۰°$، (چ) چه وقت r به مقدار بیشینه‌ی خود می‌رسد، (ح) این مقدار بیشینه و (خ) فاصله‌ی (د) افقی و (ذ) قائم بوریتو از نقطه‌ی پرتاب، چقدر است.

۱۲۵ یک توپ واقع در کنار دریا گلوله‌ای با تندی آغازی ۸۲m/s تحت زاویه‌ی ۴۵ درجه شلیک می‌کند. گلوله پس از پیمودن مسافت افقی ۶۸۶m در آب دریا فرود می‌آید. اگر توپ در ارتفاعی ۳۰m بالاتر قرار می‌داشت مسافت افقی پیموده شده چقدر بیشتر می‌شد؟

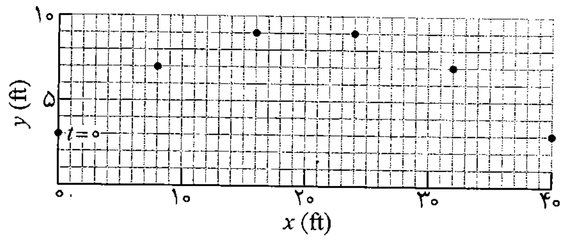
۱۲۶ پرتابه‌ای در هنگام قرار داشتن در ارتفاع بیشینه‌ی پرواز دارای بزرگی سرعت ۱۰٫۰m/s است. (الف) بزرگی سرعت پرتابه ۱٫۰۰s پیش از رسیدن به ارتفاع بیشینه چیست؟ (ب) بزرگی سرعت پرتابه ۱٫۰۰s پس از رسیدن به ارتفاع بیشینه چیست؟ اگر ارتفاع بیشینه‌ی پرتابه را در نقطه‌ی $x = ۰$ و $y = ۰$ اختیار کنیم و x مثبت در جهت سرعت پرتابه در این نقطه باشد، (پ) مختصه‌ی x و (ت) مختصه‌ی y پرتابه ۱٫۰۰s پیش از رسیدن به ارتفاع بیشینه، و (ث) مختصه‌ی x و (ج) مختصه‌ی y پرتابه ۱٫۰۰s پس از رسیدن به ارتفاع بیشینه، چیست؟

* بوریتو (burrito) نوعی غذای مکزیکی متشکل از گوشت، پنیر و لوبیای پخته است که در لای نان پیچیده شده است. ـ م.

۱۲۷ خرگوشی هراسان بر روی زمین یخ بسته‌ی وسیعی با اصطکاک قابل چشم‌پوشی با تندی ۶٫۰۰m/s به سمت خاور می‌رود. در حین لغزیدن خرگوش بر روی زمین نیروی باد به آن یک شتاب ثابت ۱٫۴۰m/s² به سمت شمال می‌دهد. دستگاه مختصاتی را انتخاب کنید که مبدأ آن مکان آغازی خرگوش روی یخ و محور x مثبت به سوی خاور باشد. با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه (الف) سرعت و (ب) مکان، در زمانی که خرگوش به مدت ۳٫۰۰s لغزیده است، چیست؟

۱۲۸ خلبان یک هواپیما نسبت به زمین به سمت خاور پرواز می‌کند، در حالی که باد با تندی ۲۰٫۰km/h به سوی جنوب می‌وزد. اگر هواپیما در نبود باد تندی‌اش ۷۰٫۰km/h باشد، تندی آن نسبت به زمین چقدر است؟

۱۲۹ در بازی سافت بال بازیکنی گوی را از نقطه‌ای به فاصله‌ی ۳٫۰ft بالاتر از سطح زمین رها می‌کند. نمودار استروبوسکوپی مکان گوی در شکل ۴-۶۰ نشان داده شده است. گوی در زمان $t = ۰$ رها شده و بازه‌ی زمانی میان دو مشاهده‌ی آن ۰٫۲۵s است. (الف) تندی آغازی گوی چیست؟ (ب) تندی گوی در لحظه‌ی رسیدن به ارتفاع بیشینه نسبت به زمین چقدر است؟ (پ) ارتفاع بیشینه چقدر است؟



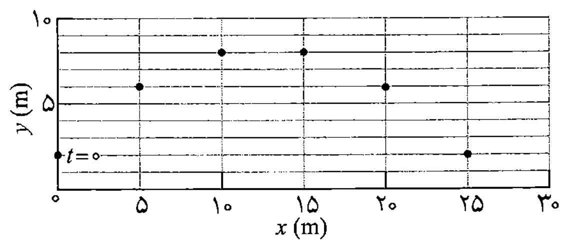
شکل ۴-۶۰ مسئله‌ی ۱۲۹.

۱۳۰ برخی سازمان‌های انتظامی ایالتی برای نظارت بر محدودیت تندی در بزرگ‌راه‌ها از هواپیما استفاده می‌کنند. فرض کنید یکی از هواپیماها در هوای آرام دارای تندی ۱۳۵mi/h است. این هواپیما یک راست به سمت شمال پرواز می‌کند به گونه‌ای که همیشه مستقیماً در بالای بزرگ‌راه شمالی ـ جنوبی قرار می‌گیرد. یک ناظر زمینی با رادیو به خلبان می‌گوید که باد با تندی ۷۰٫۰mi/h می‌وزد اما فراموش می‌کند جهت باد را به او خبر

دهد. خلبان مشاهده می‌کند که با وجود وزیدن باد هواپیما می‌تواند در مدت یک ساعت مسافت ۱۳۵ mi را در طول بزرگ‌راه طی کند. به عبارت دیگر، تندی زمینی هواپیما همان تندی در نبود باد است. (الف) باد در چه جهتی می‌وزد؟ (ب) هواپیما در چه جهتی پرواز می‌کند؛ یعنی سَر هواپیما به کدام سمت است؟

۱۳۱ یک بازیکن گلف از بالای یک بلندی به توپ ضربه می‌زند و به آن سرعت آغازی ۴۳٫۰ m/s تحت زاویه‌ی ۳۰٫۰ درجه بالای افق را می‌دهد. توپ مسافت افقی ۱۸۰ m را تا سوراخ می‌پیماید. فرض کنید چمن گلف تراز است. (الف) ارتفاع بلندی نسبت به زمین چمن چیست؟ (ب) تندی توپ در هنگام برخورد به زمین چمن چقدر است؟

۱۳۲ یک مسابقه‌ی پرتاب وزنه در سیاره‌ای دوردست از منظومه‌ی شمسی انجام می‌شود. پرتاب کننده‌ای وزنه را از نقطه‌ای به ارتفاع ۲m بالاتر از سطح سیاره پرتاب می‌کند. نمودار استروبوسکوپی مکان وزنه در شکل ۴-۶۱ نشان داده شده است. وزنه در زمان $t = ۰$ رها شده و بازه‌ی زمانی میان دو مشاهده‌ی آن ۰٫۵۰ s است. (الف) سرعت آغازی وزنه با استفاده کردن از نمادگذاری بردار یکه چیست؟ (ب) بزرگی شتاب سقوط آزاد در روی آن سیاره چیست؟ (پ) وزنه چه مدت پس از رها شدن به سطح سیاره برخورد می‌کند؟ (ت) اگر همین پرتاب در روی سطح زمین صورت گیرد، وزنه چه مدت پس از رها شدن، به سطح زمین می‌رسد؟



شکل ۴-۶۱ مسئله‌ی ۱۳۲.

۱۳۳ هلیکوپتری در ارتفاع ثابت ۹٫۵۰ m در بالای مزرعه‌ای تراز با تندی ثابت ۶٫۲۰ m/s پرواز می‌کند. یک بسته با سرعت آغازی ۱۲٫۰ m/s نسبت به هلیکوپتر و در خلاف جهت حرکت آن، به طور افقی پرتاب می‌شود. (الف) تندی آغازی بسته را نسبت به زمین پیدا کنید. (ب) فاصله‌ی افقی میان هلیکوپتر و بسته در لحظه‌ی برخورد بسته به زمین، چقدر است؟ (پ) زاویه‌ی بردار سرعت بسته نسبت به زمین که از زمین دیده می‌شود، در لحظه‌ی پیش از برخورد به زمین چیست؟

۱۳۴ خودرویی با تندی ثابت ۱۲٫۰ m/s در مسیری دایره‌ای تخت بر روی زمین حرکت می‌کند. در لحظه‌ی معینی شتاب خودرو ۳٫۰۰ m/s^{۲} و حرکتش به سوی خاور است. در آن لحظه فاصله تا مرکز دایره‌ی مسیر و جهت حرکت خودرو در حالت‌های زیر چیست: (الف) خودرو دایره را در جهت ساعت‌گرد و (ب) خودرو دایره را در جهت پادساعت‌گرد، می‌پیماید؟

۱۳۵ گلوله‌ای را با سرعت آغازی ۱۵٫۰ m/s، و تحت زاویه‌ی ۲۰٫۰ درجه زیر افق، از پرتگاهی پرتاب می‌کنیم. (الف) جابه‌جایی افقی گلوله و (ب) جابه‌جایی قائم آن را پس از ۲٫۳۰ s پیدا کنید.

۱۳۶ گوی بیس بالی در پارک فنوی[1] بوستون با سرعت آغازی ۳۳٫۵۳ m/s تحت زاویه‌ی ۵۵٫۰ درجه بالای افق به نقطه‌ای در ارتفاع ۰٫۷۶۲ m بالای گوشه‌ی گوی زن زده می‌شود. مشاهده می‌شود که ۵٫۰۰ s پس از وارد شدن ضربه، گوی از بالای دیواری به ارتفاع ۱۱٫۲۸ m واقع در طرف چپ میدان بازی (به نام «هیولای سبز») در نقطه‌ای درست در درون خط پیرامونی طرف چپ زمین بازی، عبور می‌کند. (الف) فاصله‌ی افقی زیر خط پیرامونی طرف چپ زمین بازی از گوشه‌ی گوی زن تا دیوار، (ب) فاصله‌ی قائم عبور گوی تا بالای دیوار، (پ) جابه‌جایی‌های افقی و قائم گوی نسبت به گوشه‌ی گوی زن را ۰٫۵۰۰ s پس از عبور گوی از بالای دیوار پیدا کنید.

۱۳۷ یک پرواز میان قاره‌ای به طول ۴۳۵۰ km، به سمت باختر ۵۰ min بیشتر از پرواز به سمت خاور طول می‌کشد. تندی هوایی هواپیما ۹۶۶ km/h است و بنا به فرض جریان هوایی که هواپیما در آن پرواز می‌کند، به سوی خاور است. تندی مفروض جریان هوا چیست؟

1. Fenway Park

۱۳۸ شخصی می‌تواند با پارو زدن قایقی را با تندی $۶/۴۰ \, km/h$ در آب ساکن براند. (الف) اگر او بخواهد پهنای رودخانه‌ای را بپیماید که در آن تندی جریان آب $۳/۲۰ \, km/h$ است، قایق را در چه جهتی باید براند تا بتواند در طرف دیگر رودخانه به نقطه‌ی مقابل شروع حرکتش برسد؟ (ب) اگر پهنای رودخانه $۶/۴۰ \, km$ باشد، چه مدت طول می‌کشد تا او از رودخانه بگذرد؟ (پ) فرض کنید او به جای پیمودن پهنای رودخانه، $۳/۲۰ \, km$ ***در جهت پایین رود*** پارو بزند و سپس به نقطه‌ی شروع حرکت برگردد. این کار او چه مدت طول می‌کشد؟ (ت) اگر او $۳/۲۰ \, km$ ***در جهت بالا رود*** پارو بزند و سپس به نقطه‌ی شروع حرکت برگردد، چه مدت طول می‌کشد؟ (ث) اگر او بخواهد در کوتاه‌ترین زمان ممکن پهنای رودخانه را بپیماید قایق را در چه جهتی باید براند و این کوتاه‌ترین زمان چیست؟

فصل ۵

نیرو و حرکت ـ ۱

۵-۱ قانون‌های اول و دوم نیوتون

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۵-۱ تشخیص دهید که نیرو کمیتی برداری است و در نتیجه، بزرگی و جهت، هر دو، را دارد و نیز دارای مؤلفه‌هایی است.

۵-۲ با داشتن دو یا چند نیروی وارد شده به یک ذره، نیروها را مانند بردارها با هم جمع کنید و یک نیروی برایند به دست آورید.

۵-۳ قانون‌های اول ودوم نیوتون درباره‌ی حرکت را تشخیص دهید.

۵-۴ چارچوب‌های مرجع لخت را بشناسید.

۵-۵ نمودار جسم ـ آزاد مربوط به یک شیء را رسم کنید و شیء را به مانند یک ذره نشان دهید. نیروهای وارد شده به شیء را به‌صورت بردارهایی رسم کنید که دُم‌های آن‌ها بر روی ذره قرار داشته باشند.

۵-۶ رابطه‌ی (قانون دوم نیوتون) میان نیروی برایند وارد شده به شیء، جرم شیء و شتاب تولید شده توسط نیروی برایند را به‌کار ببرید.

۵-۷ تشخیص دهید که تنها ***نیروهای خارجی*** وارد شده به یک شیء می‌توانند به شیء شتاب بدهند.

نکته‌های کلیدی

● سرعت یک شیء هنگامی می‌تواند تغییر کند (شیء می‌تواند شتاب‌دار شود) که شیء تحت تأثیر یک یا چند نیروی وارد شده از سوی اشیای دیگر قرار گیرد (هُل داده شود یا کشیده شود). مکانیک نیوتونی شتاب‌ها و نیروها را به هم ربط می‌دهد.

● نیروها کمیت‌هایی برداری‌اند. بزرگی‌های‌شان برحسب شتابی که به کیلوگرم استاندارد می‌دهند، تعریف می‌شود. نیرویی که به یک جسم استاندارد شتاب دقیق $1\,m/s^2$ را می‌دهد، دارای بزرگی $1\,N$ است. جهت یک نیرو همان جهت شتابی است که آن نیرو به وجود می‌آورد. نیروها بنا به قاعده‌های جبر برداری با هم ترکیب می‌شوند. نیروی برایند وارد شده به یک جسم برابر با مجموع برداری همه‌ی نیروهای وارد شده به آن جسم است.

● اگر نیروی برایندی به یک جسم وارد شود، آن جسم اگر در آغاز ساکن باشد ساکن می‌ماند، یا اگر در حال حرکت باشد با تندی ثابت در یک خط راست حرکت می‌کند.

● چارچوب‌های مرجعی را که در آن‌ها مکانیک نیوتونی صدق می‌کند، چارچوب‌های مرجع لخت، یا چارچوب‌های لَخت، می‌نامند. چارچوب‌های مرجعی که در آن‌ها مکانیک نیوتونی صدق نمی‌کند، چارچوب‌های مرجع نالَخت، یا چارچوب‌های نالَخت،

نامیده می‌شوند.

● جرم یک جسم مشخصه‌ای از آن جسم است که شتاب جسم را به نیروی برایند به وجود آورنده‌ی شتاب ربط می‌دهد. جرم‌ها کمیت‌هایی نرده‌ای‌اند.

● نیروی برایند $\vec{F}_{\text{net}}$، وارد شده به جسمی به جرم m، بنا به رابطه‌ی زیر به شتاب جسم $\vec{a}$، ربط دارد:

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$$

این رابطه می‌تواند به صورت مؤلفه‌ای زیر نوشته شود:

$$\vec{F}_{\text{net},x} = ma_x \text{ ، } \vec{F}_{\text{net},y} = ma_y \text{ و } \vec{F}_{\text{net},z} = ma_z$$

قانون دوم نیوتون نشان می‌دهد که برحسب یکاهای SI، داریم

$$1\text{N} = 1\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$$

● نمودار جسم ـ آزاد، نمودار ساده‌ای است که در آن تنها یک جسم در نظر گرفته می‌شود. آن جسم را با یک طرح یا یک خال نمایش می‌دهند. نیروهای خارجی وارد شده به جسم را رسم می‌کنند و یک دستگاه مختصات را به گونه‌ای منطبق و سمت‌گیری می‌کنند که حل کردن مسئله را آسان کند.

فیزیک در این باره چه می‌گوید؟

دیدیم که بخشی از دانش فیزیک مطالعه‌ی حرکت است و حرکت شتاب را، که تغییر سرعت است، شامل می‌شود. در ضمن، دانش فیزیک به مطالعه‌ی ***دلیل*** شتاب گرفتن اشیا می‌پردازد. این دلیل شتاب گرفتن اشیا **نیرو** است، که به بیانی ساده همان عامل هُل دادن یا کشیدن شیء است. وقتی می‌گوییم به یک شیء ***نیرو وارد شده است***، که سرعت شیء تغییر کرده باشد. برای مثال، وقتی یک خودرو مسابقه شتاب می‌گیرد، جاده به چرخ‌های عقب خودرو نیرو وارد می‌کند تا به آن شتاب بدهد. وقتی به توپی ضربه می‌زنیم، به توپ نیرویی وارد می‌کنیم که به آن شتاب بدهد. وقتی خودرویی با یک تیر خط انتقال برق برخورد می‌کند، تیر به خودرو نیرویی وارد می‌کند که آن را از حرکت بازمی‌دارد. مجله‌های علمی، مهندسی، حقوقی و پزشکی سرشار از مقاله‌هایی درباره‌ی نیروهای وارد شده به اشیا و مردم هستند.

هشیار باش. بسیاری از دانشجویان این فصل کتاب را چالش برانگیزتر از فصل‌های پیش می‌دانند. یکی از دلیل‌های چنین برداشتی این است که برای ترتیب دادن معادله‌ها باید بردارها را به کار برد و نمی‌توان فقط برخی نرده‌ای‌ها را با هم جمع کرد. از این رو، به قاعده‌های بردارها در فصل ۳ نیازمندیم. دلیل دیگر آن است که با عده‌ای از آرایش‌های گوناگون مواجه هستیم: اشیا بر روی کف‌ها، سقف‌ها، دیوارها و شیب‌راهه‌ها حرکت می‌کنند. آن‌ها از طریق طناب‌های حلقه شده به دور قرقره‌ها برای بالا رفتن، یا با نشستن در درون آسانسورهای بالارونده و یا پایین‌رونده، حرکت می‌کنند. گاهی اشیا حتی به یکدیگر متصل هم می‌شوند.

اما برخلاف تنوع آرایش‌ها، ما برای حل کردن بیشتر مسئله‌ها تنها به یک تک نکته‌ی کلیدی (قانون دوم نیوتون) نیازمندیم. هدف ما در این فصل کتاب این است که روشن کنیم چگونه می‌توانیم برای هر آرایش ترتیب داده شده از آن تک نکته‌ی کلیدی استفاده کنیم. برای کاربرد این نکته‌ی کلیدی به تجربه نیاز داریم ـ ما باید مسئله‌های زیادی را حل کنیم، نه آنکه فقط صورت مسئله‌ها را بخوانیم. بنابراین، ابتدا موضوع را تا حدی شرح می‌دهیم و آنگاه، به حل کردن مسئله‌های نمونه می‌پردازیم.

مکانیک نیوتونی

رابطه‌ی میان نیرو و شتاب حاصل از آن نخستین بار توسط **ایزاک نیوتون**[1] (۱۶۴۲-۱۷۲۷)، دانشمند و ریاضی‌دان بریتانیایی، مورد توجه قرار گرفت، که موضوع مطالعه‌ی این فصل کتاب است. مطالعه‌ی این رابطه به گونه‌ای که توسط نیوتون ارائه شده است، ***مکانیک نیوتونی*** نام دارد. در اینجا به مطالعه‌ی سه قانون بنیادی نیوتون درباره‌ی حرکت می‌پردازیم.

سرعت نور 3×10^8 m/s

300000 km/s

مکانیک نیوتونی در همه‌ی حالت‌ها به کار نمی‌رود. اگر تندی اجسام برهم کنش کننده خیلی زیاد ـ در حدود کسر بزرگی از تندی نور ـ باشد، به جای مکانیک نیوتونی باید از نظریه‌ی نسبیت خاص **آلبرت اینشتین**[2] (۱۸۷۹-۱۹۵۵)، فیزیک‌دان امریکایی (متولد آلمان)، استفاده کرد، که درباره‌ی هر تندی‌ای، از جمله تندی‌های نزدیک به تندی نور، صادق است. اگر اجسام برهم کنش کننده در حد مقیاس ساختار اتمی (مثلاً الکترون‌های درون اتم) باشند، باید مکانیک نیوتونی را با مکانیک کوانتومی جانشین کرد. امروزه، فیزیک‌دان‌ها به مکانیک نیوتونی به صورت حالت خاصی از این دو نظریه‌ی جامع‌تر نگاه می‌کنند. مکانیک نیوتونی هنوز هم یک مبحث ویژه و بسیار مهم است، زیرا در مورد حرکت گستره‌ی وسیعی از اجسام، از اندازه‌های بسیار کوچک (تقریباً در مقیاس ساختار اتمی) تا اندازه‌های نجومی (اشیایی مانند کهکشان‌ها و خوشه‌های کهکشانی) به کار می‌رود.

حداکثر سرعت موشک‌ها = ?

سرعت یک هواپیما چقدر باشد تا بتواند از گرانش زمین فرار کند ?

مکانیک نیوتونی ← هرگاه سرعت کمتر از سرعت نور باشد. $\vec{F} \propto \vec{a}$

قانون اول نیوتون ← عدم وجود نیرو

پیش از فرمول‌بندی **مکانیک** توسط نیوتون، تصور می‌شد که اثری به نام «نیرو» لازم است تا یک جسم با سرعت ثابت حرکت کند. در ضمن، تصور می‌شد که وقتی جسمی ساکن است، در «حالت طبیعی» خود قرار دارد و برای حرکت دادن آن با سرعت ثابت، به ظاهر باید به‌گونه‌ای، مثلاً با هُل دادن یا کشیدن، به پیش برده شود. اگر چنین نباشد جسم «به طور طبیعی» از حرکت باز می‌ماند.

مکانیک نسبیت = $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ غیر نیوتونی

با توجه به این فرمول جرم اجرام ↑ می‌شود

این تصورات معقول بودند. اگر یک قرص هاکی را روی یک کف‌پوش چوبی بلغزانیم، در عمل سرعتش کم و سپس متوقف می‌شود. اگر بخواهیم آن را با سرعت ثابت به حرکت در آوریم، باید به طور پیوسته آن را بکشیم یا هُل بدهیم.

در دو مورد مکانیک نیوتونی نقض می‌شود!
۱- به سرعت نور نزدیک می‌شویم
۲- اجرام خیلی ریزی داشته باشیم.

حال اگر همین قرص را روی سطح یخ بسته‌ی میدان بازی اسکیت به حرکت در آوریم، مسافت بیشتری می‌پیماید. اکنون می‌توانیم سطح‌های لغزنده‌تر و طولانی‌تر را در نظر بگیریم که قرص بتواند تا مسافت بیشتری روی آن‌ها بلغزد. در نهایت، سطح بسیار لغزنده و درازی (که **سطح بی‌اصطکاک** نامیده می‌شود) می‌توان تصور کرد که سرعت قرص روی آن به سختی کاهش پیدا کند. (برای نزدیک شدن به چنین شرایطی در آزمایشگاه، می‌توان قرص را روی یک تخت هوای افقی که در آن قرص بر روی لایه‌ی نازکی از هوا حرکت می‌کند، لغزاند).

تعادل دینامیکی:

$\sum F = 0$

هنگامی که برآیند نیروهای وارد بر جسم صفر باشد جسم اگر در حالت سکون باشد همان سکون را حفظ می‌کند و اگر با سرعت ثابت حرکت کند با همان سرعت خود ادامه می‌دهد.

1. Isaac Newton   2. Albert Einstein

از این مشاهدات می‌توان نتیجه گرفت که یک جسم به شرطی با سرعت ثابت حرکت می‌کند که هیچ نیرویی به آن وارد نشود. این نتیجه ما را به قانون اول از سه قانون نیوتون درباره‌ی حرکت رهنمون می‌شود:

قانون اول نیوتون: هرگاه به جسمی هیچ نیرویی وارد نشود، سرعت جسم نمی‌تواند تغییر کند؛ یعنی، جسم نمی‌تواند شتاب داشته باشد. $\Sigma \vec{F} = 0$

به عبارت دیگر، اگر جسم در حال سکون باشد، به حال سکون باقی می‌ماند و اگر در حال حرکت باشد، با همان سرعتی که دارد (از لحاظ بزرگی و جهت) به حرکت ادامه می‌دهد.

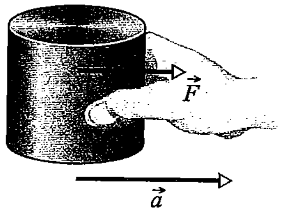
Supper a position princes : اصل برهم نهش

نیرو

پیش از شروع کردن کار روی مسئله‌های مربوط به نیروها، لازم است چندین ویژگی نیروها را، مانند یکای نیرو، ماهیت برداری نیروها، ترکیب کردن نیروها و چگونگی اندازه‌گیری نیروها (بدون آنکه فریب نیروهای ساختگی را بخوریم)، مورد بحث قرار دهیم.

یکا. یکای نیرو را می‌توان برحسب شتابی که یک نیرو به کیلوگرم استاندارد (شکل ۱-۳)، یعنی جرمی، به طور دقیق، برابر با ۱kg وارد می‌کند، تعریف کنیم. فرض کنید این جسم را روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک قرار می‌دهیم و آن را به طور افقی طوری می‌کشیم (شکل ۵-۱) که شتاب جسم $1\,m/s^2$ بشود. اکنون، می‌توان گفت که بزرگی نیروی وارد شده یک **نیوتون** (با نماد N) است. اگر این جسم را با نیروی ۲N می‌کشیدیم، شتاب آن $2\,m/s^2$ می‌شد. بنابراین، ***شتاب با نیرو متناسب است***. اگر جسم استاندارد ۱kg دارای شتابی به بزرگی a (برحسب متر بر ثانیه) باشد، در این صورت، نیرویی که (برحسب نیوتون) این شتاب را به‌وجود می‌آورد دارای بزرگی‌ای برابر با a خواهد بود. اکنون، برای یکای نیرو یک تعریف قابل به کار بردن داریم.

بردارها. نیرو کمیتی برداری است و در نتیجه، نه تنها بزرگی، بلکه جهت هم دارد. بنابراین، اگر دو یا چند نیرو به جسمی وارد شوند، با جمع کردن آن‌ها به صورت برداری و با استفاده کردن از قاعده‌های فصل ۳، **نیروی خالص** (یا **نیروی برایند**) به دست می‌آید. تک نیرویی که همان بزرگی و همان جهت نیروی برایند حساب شده را دارد، همان اثر همه‌ی نیروهای فردی را خواهد داشت. این واقعیت، که آن را **اصل برهم نهی نیروها** می‌نامند، نیروهای عادی را پذیرفتنی و قابل پیشگویی می‌کند. دنیا هنگامی عجیب و غیرقابل پیشگویی می‌شود که، مثلاً شما و یک دوست شما هر کدام نیروی ۱N را به جسم استاندارد وارد کنید و هر جوری شده با نیروی کشش برایند ۱۴N به جسم شتاب برایند $14\,m/s^2$ را بدهید.



شکل ۵-۱ نیروی $\vec{F}$ وارد شده به کیلوگرم استاندارد به آن جسم شتاب $\vec{a}$ می‌دهد.

در این کتاب، نیروها را، اغلب، با یک نماد برداری مانند $\vec{F}$، و نیروی برایند را با نماد برداری $\vec{F}_{net}$ نمایش می‌دهیم. نیرو، یا نیروی برایند، هم مانند بردارهای دیگر می‌تواند دارای

مؤلفه‌هایی در راستای محورهای مختصات باشد. هرگاه نیرویی فقط در راستای یک محور اثر کند، آن نیرو تک مؤلفه‌ای است. در این صورت، پیکان روی نماد نیرو را می‌توان حذف و فقط برای نشان دادن جهت نیرو در طول آن محور از علامت استفاده کرد.

قانون اول. به جای آنچه که پیش‌تر گفته شد، قانون اول نیوتون به نحوی مناسب‌تر و برحسب ***نیروی خالص*** چنین بیان می‌شود:

قانون اول نیوتون: هرگاه به جسمی هیچ *نیروی خالصی* وارد نشود ($\vec{F}_{\text{net}} = 0$)، سرعت جسم نمی‌تواند تغییر کند؛ یعنی، جسم نمی‌تواند شتاب داشته باشد.

یک جسم ممکن است تحت اثر چند نیرو قرار گیرد، اما اگر نیروی خالص (نیروی برایند) آن‌ها صفر باشد جسم شتاب ندارد. بنابراین، اگر به طور تصادفی دریابیم که سرعت جسمی ثابت است، بی‌درنگ می‌توان گفت که نیروی وارد شده به آن صفر است.

چارچوب‌های مرجع لَخت

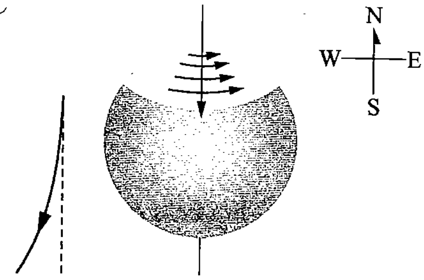
قانون اول نیوتون در تمام چارچوب‌های مرجع معتبر نیست، اما همیشه چارچوب‌های مرجعی می‌توان یافت که در آن‌ها (و در همه‌ی مکانیک نیوتونی) این قانون صادق باشد. این چارچوب‌ها را **چارچوب‌های مرجع لَخت**، یا به بیان ساده، **چارچوب‌های لَخت** می‌نامند.

چارچوب مرجع لخت چارچوبی است که در آن ~~قانون‌های~~ نیوتون صدق می‌کنند.
قانون اول نیوتن

برای مثال، زمین را می‌توان به عنوان یک چارچوب لخت در نظر گرفت، به شرط آنکه بتوان از حرکت‌های نجومی واقعی زمین (مانند چرخش آن) چشم‌پوشی کرد.

این فرض هنگامی به کار می‌آید که مثلاً یک قرص هاکی را در ***مسافت کوتاهی*** بر روی یخ بی‌اصطکاک بلغزانیم ـ در نتیجه، درمی‌یابیم که حرکت قرص از قانون‌های مکانیک نیوتونی پیروی می‌کند. اما اکنون فرض می‌کنیم که قرص هاکی را در ***مسافت درازی*** بر روی یک نوار یخی با شروع کردن از قطب شمال بلغزانیم (شکل ۵-۲ الف). اگر از یک چارچوب مرجع ساکن در فضا به این قرص نگاه کنیم، مشاهده می‌کنیم که در طول یک خط راست به سمت جنوب حرکت می‌کند زیرا چرخش زمین در پیرامون قطب شمال باعث می‌شود یخ زیر قرص بلغزد. اما اگر قرص هاکی را از یک نقطه‌ی واقع در روی زمین که ما هم با زمین می‌چرخیم، تماشا کنیم، مسیر قرص یک خط راست نخواهد بود. چون هر چه قرص بیشتر به سمت جنوب بلغزد تندی رو به خاور زمین در زیر قرص بیشتر می‌شود. بنابراین، از دید ما، که روی زمین قرار دادیم، به نظر می‌رسد که قرص به سمت باختر منحرف می‌شود (شکل ۵-۲ ب). اما این انحراف ظاهری، از نیروی سازگار با قانون‌های نیوتون به وجود نمی‌آید، بلکه به این علت ظاهر می‌شود که ما قرص را از یک چارچوب در حال چرخش می‌بینیم. در این

نیروی کوریولیست؛ نیرویی که در چارچوب چرخان



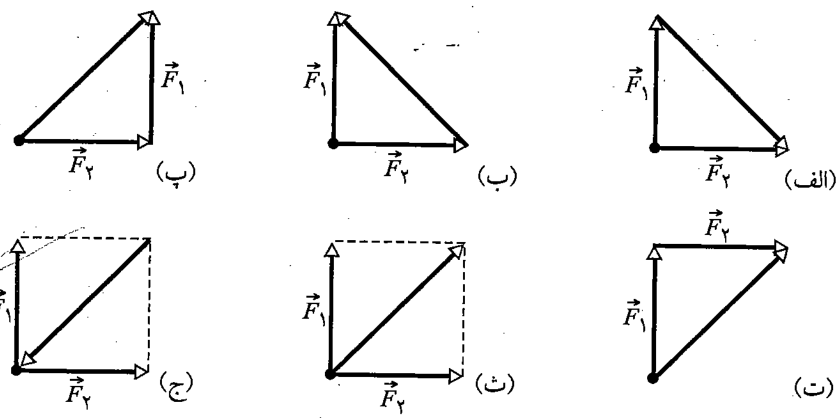
شکل ۵-۲ (الف) نمایش مسیر یک قرص هاکی لغزنده از قطب شمال، که از یک نقطه‌ی ساکن در فضا مشاهده می‌شود. زمین به سمت خاور می‌چرخد. (ب) مسیر قرص هاکی به گونه‌ای که از زمین مشاهده می‌شود.

حالت، زمین یک **چارچوب نالَخت** است، و می‌کوشیم این انحراف را برحسب نیرویی توضیح دهیم که ما را به یک نیروی ساختگی رهنمون می‌شود. یک مثال خیلی متداول در مورد کشف چنین نیروی ناموجودی را می‌توان در خودرویی پیدا کرد که تندی‌اش به سرعت افزایش می‌یابد.

در این کتاب، به طور معمول، فرض می‌کنیم که زمین یک چارچوب مرجع لخت است و اندازه‌گیری نیروها و شتاب‌ها را نسبت به این چارچوب انجام می‌دهیم. اگر اندازه‌گیری، مثلاً، در درون آسانسوری انجام شود که نسبت به زمین شتاب دارد، اندازه‌گیری در یک چارچوب نالخت صورت گرفته است و نتیجه‌های حاصل می‌توانند شگفت‌انگیز باشند.

خودآزمایی ۱

کدام یک از شش آرایش زیر به درستی نشان می‌دهد که از جمع برداری نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ نیروی سومی حاصل می‌شود که نمایشگر بردار برایند آن‌ها $\vec{F}_{net}$، است؟



جرم

تجربه‌های روزانه نشان می‌دهند که یک نیروی معین به اجسام گوناگون (مثلاً، یک گوی بیس‌بال،

یا یک توپ بولینگ) شتاب‌های متفاوت می‌دهد. توضیح درست موضوع این است که: شیء با جرم بیشتر، شتاب کمتری پیدا می‌کند. اما موضوع را دقیق‌تر از این هم می‌توان توضیح داد. شتاب، در واقع، با عکس جرم (به جای آنکه بگوییم با عکس مربع جرم) متناسب است.

اکنون، این رابطه‌ی معکوس را تحقیق می‌کنیم. مانند پیش فرض کنید جسم استاندارد را (که بنا به تعریف دارای جرم دقیق 1kg است) با نیرویی به بزرگی 1N هُل می‌دهیم. این جسم دارای شتابی به بزرگی $1\,\mathrm{m/s^2}$ می‌شود. سپس، جسم X را با همان نیرو هُل می‌دهیم و متوجه می‌شویم که بزرگی شتاب حاصل $0{,}25\,\mathrm{m/s^2}$ است. اکنون (به درستی) فرض می‌کنیم که برای نیروی یکسان، داریم

$$\frac{m_X}{m_0} = \frac{a_0}{a_X}$$

و از آنجا، خواهیم داشت

$$m_X = m_0 \frac{a_0}{a_X} = (1{,}0\,\mathrm{kg}) \frac{1{,}0\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}25\,\mathrm{m/s^2}} = 4{,}0\,\mathrm{kg}$$

تعریف کردن جرم X به این صورت، تنها هنگامی مفید است که این روش مناسب باشد. فرض کنید نیروی $8{,}0\,\mathrm{N}$ را ابتدا به جسم استاندارد وارد کنیم (که به آن شتاب $8{,}0\,\mathrm{m/s^2}$ را می‌دهد) و سپس همان نیرو را به جسم X وارد کنیم (که به آن شتاب $2{,}0\,\mathrm{m/s^2}$ را می‌دهد). در نتیجه، جرم جسم X چنین حساب می‌شود

$$m_X = m_0 \frac{a_0}{a_X} = (1{,}0\,\mathrm{kg}) \frac{8{,}0\,\mathrm{m/s^2}}{2{,}0\,\mathrm{m/s^2}} = 4{,}0\,\mathrm{kg}$$

سرعت جسم خیلی کمتر از سرعت نور باشد

که نشان می‌دهد روش انتخابی ما مناسب و در نتیجه، قابل استفاده است.

در مکانیک نیوتنی

در مکانیک

در ضمن، این نتیجه‌ها نشان می‌دهند که ***جرم مشخصه‌ای ذاتی از جسم است*** ـ یعنی، مشخصه‌ای است که خود به خود از موجودیت جسم ناشی می‌شود. هم‌چنین، معلوم می‌شود که ***جرم کمیتی نرده‌ای است***. اما این پرسش هم‌چنان باقی است که: جرم، به واقع، چیست؟

جرم اندازه‌ی لختی

با توجه به کاربرد فراوان واژه‌ی **جرم**، ما باید یک درک شهودی از آن داشته باشیم، یعنی بتوانیم آن را به طور فیزیکی حس کنیم. آیا جرم معرف اندازه، وزن یا چگالی جسم است؟ پاسخ منفی است، هر چند این مشخصه‌ها هم گاهی با جرم اشتباه می‌شوند. تنها می‌توان گفت که ***جرم جسم مشخصه‌ای است که نیروی وارد شده به جسم را به شتاب حاصل از نیرو ربط می‌دهد***. جرم تعریفی روشن‌تر از این ندارد؛ فقط وقتی که می‌خواهیم به جسمی شتاب بدهیم، مثلاً هنگام ضربه زدن به گوی بیس‌بال یا توپ بولینگ، می‌توانیم جرم را به طور فیزیکی حس کنیم.

قانون دوم نیوتون

تمام تعریف‌ها، آزمایش‌ها و مشاهداتی را که تاکنون بررسی کرده‌ایم، در گزاره‌ی زیر می‌توان

خلاصه کرد:

قانون دوم نیوتون: نیروی برایند وارد شده به یک جسم برابر با حاصل ضرب جرم جسم در شتاب آن است.

این گزاره را از لحاظ فرمولی می‌توان به شکل زیر ارائه داد

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a} \quad \text{(قانون دوم نیوتون)} \qquad (۵-۱)$$

جسم را معین کنید. این معادله‌ی ساده، نکته‌ی تقریباً تمام مسئله‌های این فصل کتاب است، اما باید با احتیاط از آن استفاده کرد. نخست، باید بدانیم که آن را درباره‌ی چه جسمی به کار می‌بریم. سپس، $\vec{F}_{\text{net}}$ باید مجموع برداری ***تمام*** نیروهای وارد شده به ***آن*** جسم باشد. فقط نیروهایی را که به آن جسم اثر می‌کنند، در مجموع برداری در نظر بگیریم، نه نیروهایی که در حالت معینی باید به اجسام دیگر وارد شوند. برای مثال، در بازی راگبی، نیروی برایند وارد شده به ***بازیکن*** برابر با مجموع برداری تمام هُل دادن‌ها و کشیدن‌هایی است که به ***بدن بازیکن*** اثر می‌کنند. این نیروی برایند شامل هُل دادن‌ها و کشیدن‌های مؤثر بر بازیکن دیگر نیست. هر وقت مسئله‌ی مربوط به نیرو را حل می‌کنید، نخستین گام این است که حالت جسم مورد کاربرد قانون نیوتون را مشخص کنید.

وزن حالت ، net mag

محورها را جدا کنید. همان‌طور که درمورد معادله‌های برداری دیگر دیدیم، معادله‌ی ۵-۱ با سه معادله‌ی مؤلفه‌ای زیر هم‌ارز است، که هر کدام برای یکی از محورهای دستگاه مختصات xyz نوشته می‌شوند:

$$F_{\text{net},z} = ma_z \;\text{ و }\; F_{\text{net},y} = ma_y \;،\; F_{\text{net},x} = ma_x \qquad (۵-۲)$$

هر یک از این معادله‌ها مؤلفه‌ی نیروی برایند در روی یک محور مختصات را به شتاب در راستای آن محور ربط می‌دهد. برای مثال، معادله‌ی اول نشان می‌دهد که مجموع تمام مؤلفه‌های نیرو در راستای محور x، مؤلفه‌ی a_x شتاب جسم را ایجاد می‌کند، اما هیچ شتابی در راستای محورهای y و z به وجود نمی‌آورد. به عبارت دیگر، مؤلفه‌ی a_x شتاب فقط توسط مجموع مؤلفه‌های نیروی مربوط به راستای محور x ایجاد می‌شود. به طور کلی می‌توان گفت که:

مؤلفه‌ی شتاب در راستای یک محور معین فقط توسط مجموع مؤلفه‌های نیرو در راستای همان محور تولید می‌شود و مؤلفه‌های نیرو در راستای محورهای دیگر بر این شتاب اثری ندارند.

تعادل نیروها. معادله‌ی ۵-۱ نشان می‌دهد که اگر نیروی برایند وارد شده به جسمی صفر باشد، شتاب جسم صفر است. در این صورت، جسم اگر در حال سکون باشد، به حال سکون

جدول ۵-۱ یکاهای مورد استفاده در قانون دوم نیوتون (معادله‌های ۵-۱ و ۵-۲)

دستگاه یکا	نیرو	جرم	شتاب
SI	نیوتون (N)	کیلوگرم (kg)	m/s^2
CGS[1]	دین din	گرم (g)	cm/s^2
بریتانیایی[2]	پوند (lb)	اسلاگ slug	ft/s^2

۱. $1\,\text{dyne} = 1\,g \cdot cm/s^2$

۲. $1\,lb = 1\,\text{slug} \cdot ft/s^2$

Ipomber

B The Brith british new بریتیش BTU

می‌ماند و اگر در حال حرکت باشد با سرعت ثابت به حرکتش ادامه می‌دهد. در چنین حالت‌هایی، نیروهای وارد شده به جسم با یکدیگر ***متوازن می‌شوند***، و می‌توان گفت که نیروها و جسم ***در حال تعادل‌اند***. در این حالت، به طور معمول، گفته می‌شود که نیروها اثر یکدیگر را ***حذف می‌کنند***. در اینجا واژه‌ی «حذف» به این معنی نیست که نیروهای موجود از میان می‌روند (حذف کردن نیروها مانند حذف کردن برنامه‌ی مسافرت نیست)، بلکه این نیروها باز هم به جسم وارد می‌شوند.

یکاها. با استفاده کردن از معادله‌ی ۵-۱ برای یکاهای SI می‌توان نوشت

$$1\,N = (1\,kg)(1\,m/s^2) = 1\,kg \cdot m/s^2 \qquad (۳-۵)$$

در جدول ۵-۱ و در پیوست ت کتاب برخی یکاهای نیرو در دستگاه‌های یکاهای دیگر درج شده‌اند.

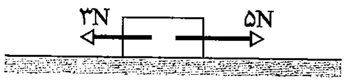
نمودارها. برای حل کردن مسئله‌ها با به کار بردن قانون دوم نیوتون، اغلب مناسب‌تر است که یک **نمودار جسم ـ آزاد** رسم کنیم و تنها جسمی را نشان دهیم که می‌خواهیم برایند نیروهای وارد شده به آن را در نظر بگیریم. در چنین نموداری، بعضی‌ها ترجیح می‌دهند که خود جسم را هم رسم کنند، اما در این کتاب جسم را، به طور معمول، با یک خال معرفی می‌کنیم. هم‌چنین، هر نیروی وارد شده به جسم را با پیکانی که دُم آن در محل جسم قرار دارد، نمایش می‌دهیم. در نمودار معمولاً از دستگاه مختصات هم استفاده می‌کنیم و شتاب جسم را گاهی با یک پیکان (که معرف شتاب است) نشان می‌دهیم.

فقط نیروهای خارجی. یک **دستگاه** شامل یک یا چند جسم است و هر نیرو که از سوی اجسام خارج دستگاه به اجسام درون دستگاه وارد شود، **نیروی خارجی** نام دارد. اگر اجسام به سختی به هم متصل شده باشند، دستگاه را به صورت یک جسم مرکب هم می‌توان در نظر گرفت و نیروی برایند F_{net} که به آن داده می‌شود، مجموع برداری تمام نیروهای خارجی است. (در اینجا **نیروهای درونی**، یعنی نیروهای میان دو جزء در درون دستگاه دخالتی ندارند). برای مثال، لوکوموتیو و واگن‌های متصل به آن یک دستگاه تشکیل می‌دهند. اگر، مثلاً، یک یدک‌کش لوکوموتیو را بکشد، نیروی حاصل از آن به تمام دستگاه لوکوموتیو ـ واگن‌ها وارد می‌شود. همان‌طور که در مورد یک جسم تنها عمل می‌کردیم، در اینجا نیز می‌توانیم

نیروی خارجی برایند وارد شده به یک دستگاه را از طریق قانون دوم نیوتون، $\vec{F}_{\rm net} = m\vec{a}$، به شتاب آن دستگاه ربط دهیم، که در آن m جرم کل دستگاه است.

خودآزمایی ۲

شکل زیر دو نیروی افقی را نشان می‌دهد که به یک جسم واقع بر روی سطح بی‌اصطکاکی وارد می‌شوند. اگر نیروی افقی سوم $\vec{F}_3$ نیز به این جسم وارد شود، بزرگی و جهت $\vec{F}_3$ چه باید باشد تا جسم، (الف) ساکن بماند و (ب) با تندی ثابت ۵m/s به سمت چپ حرکت کند؟



مسئله‌ی نمونه‌ی ۵-۱ نیروهای یک بعدی و دو بعدی، قرص هاکی

در اینجا با ذکر مثال‌هایی چگونگی کاربرد قانون دوم نیوتون را برای یک جسم نشان می‌دهیم.

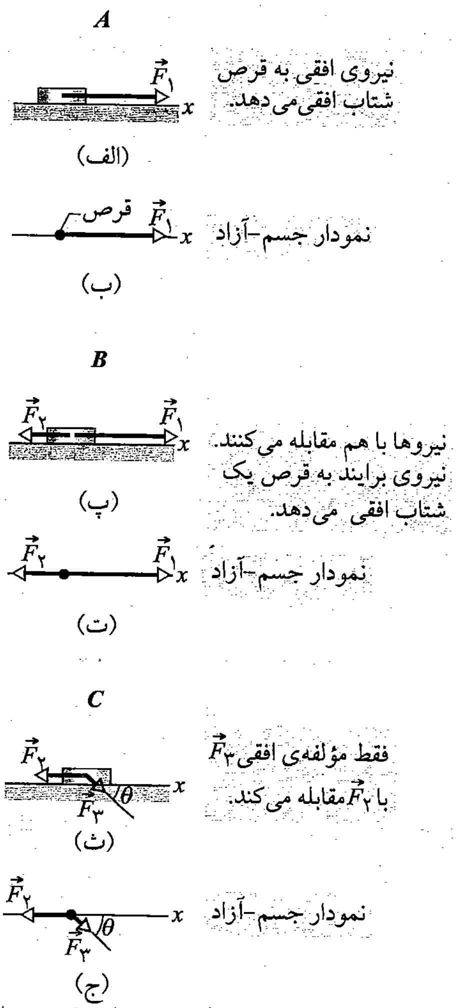
بخش‌های A، B و C در شکل ۵-۳، سه وضعیت را نشان می‌دهند که در آن‌ها یک یا دو نیرو به یک قرص در حال حرکت در راستای محور x واقع بر روی یک سطح یخ بسته‌ی بی‌اصطکاک وارد می‌شود. جرم قرص $m = ۰/۲۰\,\text{kg}$ است. نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ در راستای محور x وارد می‌شوند و بزرگی آن‌ها $F_1 = ۴/۰\,\text{N}$ و $F_2 = ۲/۰\,\text{N}$ است. نیروی $\vec{F}_3$ تحت زاویه‌ی $\theta = ۳۰^\circ$ اثر می‌کند و بزرگی‌اش $F_3 = ۱/۰\,\text{N}$ است. شتاب قرص در هر وضعیت چیست؟

نکته‌ی کلیدی

در هر وضعیت با استفاده کردن از قانون دوم نیوتون، $\vec{F}_{\rm net} = m\vec{a}$، می‌توان شتاب $\vec{a}$ را به نیروی برایند $\vec{F}_{\rm net}$ وارد شده به قرص ربط داد. اما چون حرکت فقط در راستای محور x انجام می‌شود، با نوشتن قانون دوم برای مؤلفه‌های x می‌توان محاسبه‌ها را ساده کرد:

$$F_{{\rm net},x} = ma_x \qquad (۵-۴)$$

در شکل ۵-۳، نمودارهای جسم ـ آزاد مربوط به سه وضعیت داده شده رسم شده‌اند. در این نمودارها قرص به صورت یک خال نمایش داده شده است.



شکل ۵-۳ در سه وضعیت شکل، نیروها به قرصی وارد می‌شوند که در راستای محور x حرکت می‌کند. در این شکل نمودارهای جسم ـ آزاد مربوط به این سه وضعیت نیز نشان داده شده‌اند.

وضعیت A: در شکل ۵-۳ ب، که فقط یک نیروی افقی اثر می‌کند، با استفاده کردن از معادله‌ی ۵-۴، داریم

$$F_1 = ma_x$$

که با جانشانی داده‌ها خواهیم داشت

$$a_x = \frac{F_1}{m} = \frac{۴/۰\,\mathrm{N}}{۰/۲۰\,\mathrm{kg}} \Rightarrow$$

(پاسخ) $$a_x = ۲۰\,\mathrm{m/s^2}$$

پاسخ مثبت نشان می‌دهد که شتاب درجهت مثبت محور x است.

وضعیت B: در شکل ۵-۳ ت، دو نیروی افقی به قرص اثر می‌کنند، که $\vec{F}_1$ در جهت مثبت و $\vec{F}_2$ در جهت منفی محور x است. بنابراین، با استفاده کردن از معادله‌ی ۵-۴، داریم

$$F_1 - F_2 = ma_x$$

که با جانشانی داده‌ها خواهیم داشت

$$a_x = \frac{F_1 - F_2}{m} = \frac{۴/۰\,\mathrm{N} - ۲/۰\,\mathrm{N}}{۰/۲۰\,\mathrm{kg}} \Rightarrow$$

(پاسخ) $$a_x = ۱۰\,\mathrm{m/s^2}$$

در نتیجه، نیروی برایند قرص را در جهت مثبت محور x شتاب می‌دهد.

وضعیت C: در شکل ۵-۳ ج، نیروی $\vec{F}_3$ در راستای شتاب قرص اثر نمی‌کند و تنها مؤلفه‌ی x آن، یعنی $F_{3,x}$، در راستای محور x وارد می‌شود (نیروی $\vec{F}_3$ دو بعدی اما حرکت یک بعدی است). بنابراین، معادله‌ی ۵-۴ چنین نوشته می‌شود

$$F_{3,x} - F_2 = ma_x \qquad (۵\text{-}۵)$$

با توجه به‌شکل، معلوم می‌شود که $F_{3,x} = F_3 \cos\theta$. با حل‌کردن معادله‌ی بالا نسبت به شتاب a_x و جانشانی مقدار $F_{3,x}$، داریم

$$a_x = \frac{F_{3,x} - F_2}{m} = \frac{F_3 \cos\theta - F_2}{m}$$

$$a_x = \frac{(۱/۰\,\mathrm{N})(\cos ۳۰^\circ) - ۲/۰\,\mathrm{N}}{۰/۲۰\,\mathrm{kg}} \Rightarrow$$

(پاسخ) $$a_x = -۵/۷\,\mathrm{m/s^2}$$

بنابراین، نیروی برایند قرص را در جهت منفی محور x شتاب می‌دهد.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۵-۲ نیروهای دو بعدی، قوطی آب‌نبات

در اینجا با استفاده کردن از شتاب نیروی نامعلوم را به دست می‌آوریم.

شکل ۵-۴ الف نمای یک قوطی آب‌نبات ۲/۰ کیلوگرمی را، با دید از بالا، نشان می‌دهد، که روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک با شتاب $\vec{a}$ به بزرگی $۳/۰\,\mathrm{m/s^2}$ در جهت نشان داده شده در شکل حرکت می‌کند. این شتاب توسط سه‌نیروی واقع درصفحه‌ی افقی ایجاد می‌شود که دوتای آن‌ها نشان داده شده‌اند: $\vec{F}_1$ دارای بزرگی ۱۰N و $\vec{F}_2$ دارای بزرگی ۲۰N است. نیروی سوم $\vec{F}_3$ با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه و به‌صورت بزرگی - زاویه، چیست؟

نکته‌ی کلیدی

نیروی برایند وارد شده به قوطی $\vec{F}_{\text{net}}$، برابر با مجموع برداری سه نیرو است و رابطه‌ی آن با شتاب $\vec{a}$ بر پایه‌ی قانون دوم نیوتون $(\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a})$ است. پس، می‌توان نوشت

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = m\vec{a} \qquad (۵\text{-}۶)$$

و از آنجا، داریم

$$\vec{F}_3 = m\vec{a} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2 \qquad (۵\text{-}۷)$$

محاسبات: چون این مسئله یک مسئله‌ی دو بعدی است، فقط با قراردادن بزرگی کمیت‌های برداری طرف راست معادله‌ی ۵-۷، ***نمی‌توان*** $\vec{F}_3$ را پیدا کرد. بلکه، باید $m\vec{a}$، $-\vec{F}_1$ (ناهمسو با $\vec{F}_1$) و $-\vec{F}_2$ (ناهمسو با $\vec{F}_2$) در شکل ۵-۴ ب را به‌طور برداری باهم جمع کرد. این عمل جمع را با استفاده کردن از ماشین ویژه‌ی محاسبه‌های برداری نیز می‌توان انجام داد، زیرا بزرگی و زاویه‌ی هرسه بردار در دست است. اکنون، طرف راست معادله‌ی ۵-۷ را برحسب مؤلفه‌ها، نخست در راستای محور x و سپس در راستای محور y، حساب می‌کنیم. ***هشدار:*** در یک زمان فقط از یک محور استفاده کنید.

مؤلفه‌های x: برای مؤلفه‌های محور x، داریم

$$F_{۳,x} = ma_x - F_{۱,x} - F_{۲,x}$$

$$F_{۳,x} = m(a\cos ۵۰^\circ) - F_۱\cos(-۱۵۰^\circ) - F_۲\cos ۹۰^\circ$$

پس از جانشانی داده‌های معلوم، داریم

$$F_{۳,x} = (۲/۰\,\mathrm{kg})(۳/۰\,\mathrm{m/s^۲})\cos ۵۰^\circ - (۱۰\,\mathrm{N})\cos(-۱۵۰^\circ) - (۲۰\,\mathrm{N})\cos ۹۰^\circ \Rightarrow$$

$$F_{۳,x} = ۱۲/۵\,\mathrm{N}$$

مؤلفه‌های y: به همین ترتیب، در راستای محور y، داریم

$$F_{۳,y} = ma_y - F_{۱,y} - F_{۲,y}$$

$$F_{۳,y} = m(a\sin ۵۰^\circ) - F_۱\sin(-۱۵۰^\circ) - F_۲\sin ۹۰^\circ$$

$$F_{۳,y} = (۲/۰\,\mathrm{kg})(۳/۰\,\mathrm{m/s^۲})\sin ۵۰^\circ - (۱۰\,\mathrm{N})\sin(-۱۵۰^\circ) - (۲۰\,\mathrm{N})\sin ۹۰^\circ \Rightarrow$$

$$F_{۳,y} = -۱۰/۴\,\mathrm{N}$$

بردار: با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه، داریم

$$\vec{F}_۳ = F_{۳,x}\hat{\mathbf{i}} + \vec{F}_{۳,y}\hat{\mathbf{j}} = (۱۲/۵\,\mathrm{N})\hat{\mathbf{i}} - (۱۰/۴\,\mathrm{N})\hat{\mathbf{j}} \Rightarrow$$

$$\vec{F}_۳ \approx (۱۳\,\mathrm{N})\hat{\mathbf{i}} - (۱۰\,\mathrm{N})\hat{\mathbf{j}}$$ **(پاسخ)**

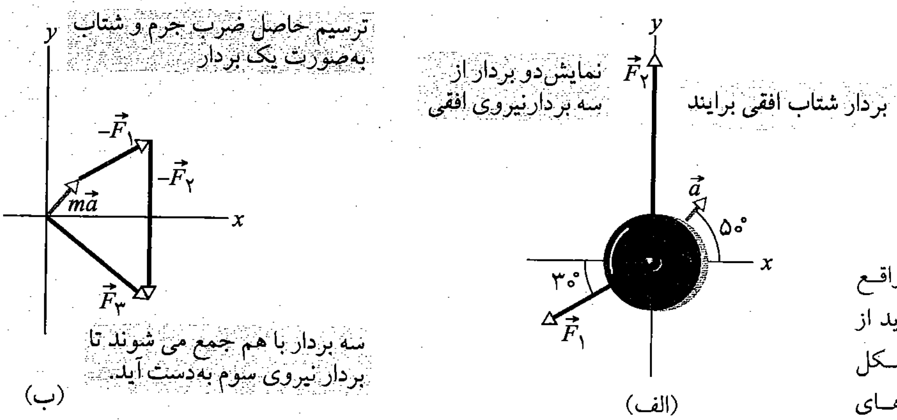
اکنون، با استفاده کردن از ماشین ویژه‌ی محاسبه‌های برداری می‌توان بزرگی و زاویه‌ی بردار $\vec{F}_۳$ را معین کرد. هم‌چنین، با استفاده کردن از معادله‌ی ۳-۶ برای به دست آوردن بزرگی و زاویه (نسبت به محور x مثبت)، داریم

$$F_۳ = \sqrt{F_{۳,x}^۲ + F_{۳,y}^۲} = ۱۶\,\mathrm{N}$$

و

$$\theta = \tan^{-۱}\frac{F_{۳,y}}{F_{۳,x}} = \frac{-۱۰/۴}{۱۲/۵} \Rightarrow$$

$$\theta = -۴۰^\circ$$ **(پاسخ)**



شکل ۵-۴ (الف) نمایش دو نیرو از سه نیروی واقع در صفحه‌ی افقی وارد شده به قوطی آب‌نبات با دید از بالا، که شتاب $\vec{a}$ را به جسم می‌دهند. در این شکل $F_۳$ نشان داده نشده است. (ب) نمودار بردارهای $m\vec{a}$، $-\vec{F}_۱$ و $-\vec{F}_۲$ برای پیدا کردن نیروی $\vec{F}_۳$.

۵-۲ معرفی برخی نیروهای خاص

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۵-۸ بزرگی و جهت نیروی گرانشی وارد شده به یک جسم با جرم داده شده را در محلی با شتاب سقوط آزاد معین، پیدا کنید.

۵-۹ مشخص کنید که وزن یک جسم برابر با بزرگی نیروی برایند لازم برای جلوگیری کردن جسم از سقوط آزاد اندازه‌گیری شده از چارچوب مرجع زمین است.

۵-۱۰ مشخص کنید که یک ترازو وزن یک شیء را هنگامی اندازه می‌گیرد که در یک چارچوب لَخت قرار داشته باشد، نه در یک چارچوب شتاب‌دار، که در این صورت وزن ظاهری شیء را به دست می‌دهد.

۵-۱۱ بزرگی و جهت نیروی عمودی وارد شده به یک شیء را در حین فشرده شدن به یک سطح، یا کشیده شدن بر روی یک سطح، معین کنید.

۱۲-۵ مشخص کنید که نیروی موازی با سطح یک نیروی اصطکاک است، که وقتی شیء می‌لغزد، یا می‌خواهد بر روی سطح بلغزد، ظاهر می‌شود.

۱۳-۵ مشخص کنید که وقتی نیرویی یک ریسمان (یا یک شیء ریسمان مانند) را از دو طرف می‌کشد و به حال کشیده نگه می‌دارد، آن نیرو نیروی کشش نامیده می‌شود.

نکته‌های کلیدی

● نیروی گرانشی وارد شده به یک جسم $\vec{F}_g$، یک نیروی کشش وارد شده از سوی جسم دیگر است. بیشتر حالت‌ها در این کتاب، جسم دیگر زمین یا یک جسم نجومی دیگر است. در مورد زمین، این نیرو به سمت پایین و به سوی زمین است، که یک چارچوب لخت فرض می‌شود. با این فرض، بزرگی $\vec{F}_g$ برابر است با

$$F_g = mg$$

که در آن m جرم جسم و g بزرگی شتاب سقوط آزاد است.

● وزن یک جسم W، برابر با بزرگی نیروی بالاسوی لازم برای متوازن شدن با نیروی گرانشی وارد شده به جسم است. وزن یک جسم با جرم جسم رابطه دارد:

$$W = mg$$

● نیروی عمودی $\vec{F}_N$، نیروی وارد شده به یک جسم از سوی سطحی است که جسم آن سطح را می‌فشارد. نیروی عمودی همیشه بر سطح عمود است.

● نیروی اصطکاک $\vec{f}$، نیروی وارد شده به یک جسم است در هنگامی که جسم می‌لغزد یا می‌خواهد بر روی سطح بلغزد. این نیرو همیشه با سطح موازی است و در جهتی است که با لغزیدن مخالفت می‌کند. در یک سطح بی‌اصطکاک، نیروی اصطکاک قابل چشم‌پوشی است.

● وقتی ریسمانی تحت کشش قرار دارد، هر سر ریسمان جسم را می‌کشد. این نیروی کشش در راستای ریسمان و در جهت دور شدن از نقطه‌ی اتصال به جسم است. در یک ریسمان بی‌جرم (ریسمانی با جرم قابل چشم‌پوشی)، بزرگی نیروی کشش وارد شده به دو سر ریسمان T، یکسان است، حتی در هنگامی که ریسمان از روی یک قرقره‌ی بی‌جرم و بی‌اصطکاک عبور کرده باشد (قرقره‌ای با جرم قابل چشم‌پوشی، و اصطکاک قابل چشم‌پوشی در روی محور آن که با چرخش مخالفت می‌کند).

معرفی برخی نیروهای خاص

نیروی گرانشی

نیروی گرانشی $\vec{F}_g$، وارد شده به یک جسم نیروی جاذبه‌ای است که جهتش به سوی جسم دیگر است. در فصل‌های آغازین کتاب درباره‌ی ماهیت این نیرو بحثی به میان نمی‌آید و، به‌طور معمول، حالت‌هایی در نظر گرفته می‌شوند که جسم دیگر زمین است. بنابراین، وقتی که از نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد شده به یک جسم صحبت می‌کنیم، منظور نیرویی است که جسم را به طور مستقیم به سوی مرکز زمین ــ یعنی، به سمت پایین به سوی زمین، می‌کشد. فرض می‌کنیم که زمین یک چارچوب مرجع لخت است.

سقوط آزاد. جسمی به جرم m را که با شتاب g به طور آزاد سقوط می‌کند، در نظر می‌گیریم. پس، اگر از اثرهای هوا چشم‌پوشی کنیم تنها نیروی وارد شده به جسم همان نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ است. این نیروی پایین‌سو را می‌توان از طریق قانون دوم نیوتون $(\vec{F} = m\vec{a})$ به شتاب پایین‌سو ربط داد. در اینجا محور قائم y را در راستای مسیر حرکت جسم و جهت

مثبت محور را به بالاسو انتخاب می‌کنیم. برای این محور قانون دوم نیوتون را می‌توان به صورت $F_{\text{net},y} = ma_y$ نوشت، که در وضعیت مورد نظر به صورت زیر است

$$-F_g = m(-g)$$

یا

$$F_g = mg \qquad (۸-۵)$$

یعنی، بزرگی نیروی گرانشی برابر با حاصل‌ضرب mg است.

حالت سکون. نیروی گرانشی با همین بزرگی به هر جسمی که، حتی اگر در حال سقوط آزاد هم نباشد، مثلاً، روی یک میز ساکن باشد یا بر روی آن حرکت کند، نیز وارد می‌شود. (برای ناپدید شدن نیروی گرانشی باید زمین ناپدید شود!).

قانون دوم نیوتون مربوط به نیروی گرانشی را می‌توان به صورت برداری چنین نوشت

$$\vec{F}_g = -F_g\hat{\mathrm{j}} = -mg\hat{\mathrm{j}} = m\vec{g} \qquad (۹-۵)$$

که در آن $\hat{\mathrm{j}}$ بردار یکه در راستای محور y و بالاسو است، که از زمین دور می‌شود و $\vec{g}$ شتاب سقوط آزاد (که به صورت بردار نوشته شده است) و پایین‌سو است.

وزن

وزن یک جسم W، بزرگی نیروی برایند لازم برای جلوگیری از سقوط آزاد جسم، از دید ناظر زمینی است. برای مثال، هنگام ایستادن روی زمین برای آنکه گلوله‌ای را در دست به حال سکون نگه داریم باید یک نیروی بالاسو به آن وارد کنیم تا با نیروی گرانشی وارد شده به گلوله از سوی زمین متوازن شود. فرض می‌کنیم بزرگی نیروی گرانشی برابر با ۲٫۰N باشد. در این صورت، بزرگی نیروی بالاسوی وارد شده ۲٫۰N و در نتیجه ***وزن گلوله*** W، برابر با ۲٫۰N است. هم‌چنین، می‌گوییم که گلوله ۲٫۰N ***وزن دارد*** و از ***وزن داشتن*** گلوله به مقدار ۲٫۰N سخن می‌گوییم.

برای ساکن نگهداشتن گلوله‌ای به وزن ۳٫۰N به نیرویی بیشتر ـ یعنی ۳٫۰N، نیاز است. دلیل این موضوع آن است که با نیروی گرانشی بیشتر، یعنی با نیروی ۳٫۰N باید توازن برقرار شود. در اینجا گفته می‌شود که گلوله‌ی دوم ***سنگین‌تر*** از گلوله‌ی اول است.

اکنون، می‌خواهیم مطلب را تعمیم دهیم. جسمی را در نظر می‌گیریم که شتاب آن $\vec{a}$، نسبت به زمین صفر است. زمین را چارچوب مرجع لخت فرض می‌کنیم. دو نیرو به این جسم اثر می‌کنند: یکی نیروی گرانشی پایین‌سوی $\vec{F}_g$ و دیگری نیروی بالاسوی متوازن شونده با بزرگی W. قانون دوم نیوتون را برای محور قائم y که جهت مثبت آن بالاسو است، چنین می‌نویسیم

$$F_{\text{net},y} = ma_y$$

در حالت مورد نظر، خواهیم داشت

$$W - F_g = m(0) \qquad (۵-۱۰)$$

یا

$$W = F_g \quad \text{(وزن، با انتخاب زمین به عنوان چارچوب لخت)} \qquad (۵-۱۱)$$

این معادله (با فرض آنکه زمین یک چارچوب مرجع لخت است) نشان می‌دهد که:

وزن یک جسم W، برابر با بزرگی نیروی گرانشی F_g، وارد شده به جسم است.

با قرار دادن mg به جای F_g از معادله‌ی ۵-۸، داریم

$$W = mg \quad \text{(وزن)} \qquad (۵-۱۲)$$

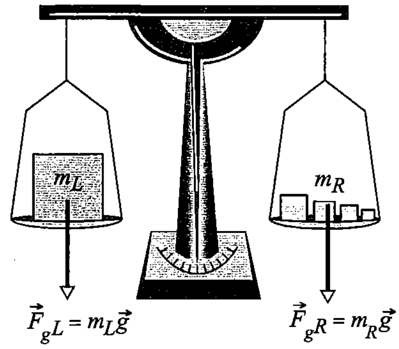
این معادله وزن جسم را به جرم جسم ربط می‌دهد.

توزین. وزن کردن یک جسم به معنی اندازه‌گیری وزن آن است. یکی از راه‌های انجام دادن این کار، قرار دادن جسم روی یکی از کفه‌های ترازوی همسان ـ بازو (شکل ۵-۵) و سپس افزودن اجسام مرجع (با جرم‌های معلوم) به کفه‌ی دیگر تا رسیدن دو کفه به حال توازن (یعنی همساز شدن نیروهای گرانشی دو طرف) است. در این صورت، جرم‌های روی کفه‌ها با هم مساوی‌اند و m جرم جسم معین می‌شود. اگر مقدار g در محل استفاده کردن از ترازو معلوم باشد وزن جسم را با به کار بردن معادله‌ی ۵-۱۲ می‌توان به دست آورد.

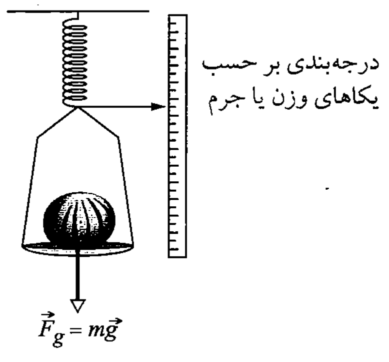
وزن یک جسم را با ترازوی فنری (شکل ۵-۶) هم می‌توان معین کرد. جسم به خاطر وزن خود فنر را می‌کشد و عقربه‌ای را که در مقابل یک خط‌کش درجه‌بندی شده برحسب یکاهای جرم یا وزن قرار دارد، حرکت می‌دهد. (بسیاری از ترازوهای مربوط به تعیین وزن بدن در منزل به همین روش و برحسب کیلوگرم، یا پوند درجه‌بندی شده‌اند). اگر ترازو برحسب یکاهای جرم درجه‌بندی شده باشد وزن را به شرطی درست نشان می‌دهد که مقدار g همان مقدار مربوط به محل درجه‌بندی کردن ترازو باشد.

وزن یک جسم هنگامی باید اندازه‌گیری شود که جسم نسبت به زمین شتاب قائم نداشته باشد. برای مثال، ما می‌توانیم وزن خود را با ترازو در منزل، یا در یک قطار تندرو، اندازه بگیریم. اما اگر این اندازه‌گیری را با یک ترازو در آسانسور شتاب‌دار تکرار کنیم، به خاطر وجود شتاب، ترازو وزن متفاوتی را نشان خواهد داد. وزن نشان داده شده در این حالت را ***وزن ظاهری*** می‌نامیم.

هشدار: وزن یک جسم، جرم جسم نیست. وزن بزرگی یک نیرو است که بنا به معادله‌ی ۵-۱۲ با جرم ارتباط دارد. اگر جسم را به جایی ببریم که در آنجا مقدار g متفاوت باشد، جرم جسم (خاصیت ذاتی جسم) تغییر نمی‌کند اما وزن آن تغییر می‌کند. برای مثال، وزن یک توپ بولینگ با جرم $۷/۲\,\text{kg}$ در روی زمین $۷۱\,\text{N}$ و در روی ماه $۱۲\,\text{N}$ است. جرم اجسام در روی زمین و ماه یکسان است، اما شتاب سقوط آزاد در روی ماه فقط $۱/۶\,\text{m/s}^2$ است.



شکل ۵-۵ نمایش طرحی از یک ترازوی همسان ـ بازو. وقتی ترازو در حال توازن است نیروی گرانشی $\vec{F}_{gL}$ وارد شده به جسمی که می‌خواهیم وزن آن را معین کنیم (روی کفه‌ی سمت چپ) با نیروی گرانشی کل $\vec{F}_{gR}$ وارد شده به اجسام مرجع (روی کفه‌ی سمت راست) برابر است. در نتیجه، جرم جسم مورد نظر مساوی با جرم کل اجسام مرجع است.



شکل ۵-۶ نمایش طرحی از یک ترازوی فنری. عددی که خوانده می‌شود، با ***وزن*** جسم روی کفه متناسب است. اگر درجه‌بندی برحسب یکاهای وزن باشد ترازو وزن جسم را نشان می‌دهد. اما اگر درجه‌بندی برحسب یکاهای جرم باشد، مقدار خوانده شده به شرطی وزن جسم است که شتاب سقوط آزاد g در محل همان مقدار شتاب در هنگام درجه‌بندی کردن ترازو باشد.

نیروی عمودی

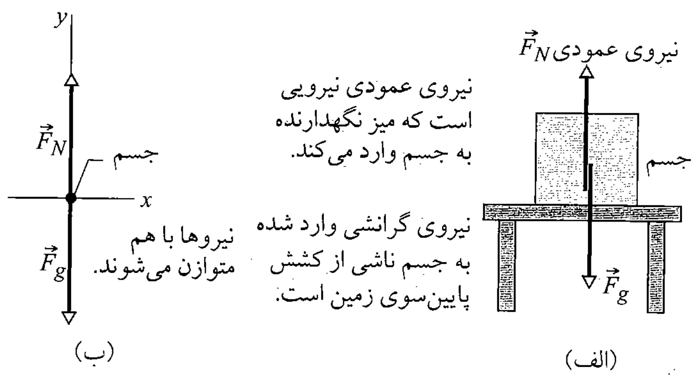
اگر روی تشکی بایستید، با آنکه زمین شما را به پایین‌سو می‌کشد شما ساکن می‌مانید. دلیلش این است که تشک بر اثر وزن شما به سمت پایین تغییر شکل می‌یابد، اما شما را به سمت بالا هُل می‌دهد. به همین ترتیب، اگر روی کف اتاق بایستید، کف اتاق تغییر شکل پیدا می‌کند (اندکی فشرده یا خم می‌شود، یا تاب بر می‌دارد) و شما را به بالا هُل می‌دهد. حتی موزاییک سیمانی به ظاهر سخت هم همین حالت را دارد (اگر موزاییک کف اتاق لَق باشد، راه رفتن زیاد روی آن ممکن است منجر به شکستن آن شود).

نیرویی را که تشک یا کف اتاق به شما وارد می‌کند **نیروی عمودی** می‌نامند و به طور معمول، آن را با $\vec{F}_N$ نشان می‌دهند. این نام از اصطلاح ریاضی ***قائم*** گرفته شده که به معنی عمود است: نیروی وارد شده به اجسام، مثلاً از طرف کف اتاق، بر کف اتاق عمود است.

هرگاه جسمی به سطحی فشار داده شود، سطح تغییر شکل پیدا می‌کند (حتی اگر به ظاهر صُلب باشد) و با نیروی عمودی $\vec{F}_N$ که بر آن عمود است، جسم را به بالا فشار می‌دهد.

شکل ۵-۷ الف مثالی را در این مورد نشان می‌دهد. جسمی به جرم m روی سطح افقی یک میز قرار دارد. بر اثر نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد شده به جسم سطح میز به پایین فشار داده می‌شود و میز اندکی تغییر شکل پیدا می‌کند. سطح میز نیز با نیروی عمودی $\vec{F}_N$ جسم را به بالا فشار می‌دهد. در شکل ۵-۷ ب، نمودار جسم ـ آزاد مربوط به جسم رسم شده است. نیروهای $\vec{F}_g$ و $\vec{F}_N$ تنها نیروهای وارد شده به جسم هستند، که در راستای قائم‌اند. بنابراین، در مورد جسم قانون دوم نیوتون در راستای محور y، که جهت مثبت آن به بالاسو است ($F_{\text{net},y} = ma_y$) می‌تواند چنین نوشته شود

$$F_N - F_g = ma_y$$



شکل ۵-۷ (الف) جسمی که روی میز قرار دارد، تحت اثر نیروی عمودی $\vec{F}_N$ به طور عمود بر سطح میز قرار می‌گیرد. (ب) نمودار جسم ـ آزاد مربوط به جسم.

با استفاده کردن از معادله‌ی ۵-۸ و قرار دادن mg به جای F_g، داریم

$$F_N - mg = ma_y$$

بنابراین، بزرگی نیروی عمودی برابر است با

$$F_N = mg + ma_y = m(g + a_y) \qquad (۱۳-۵)$$

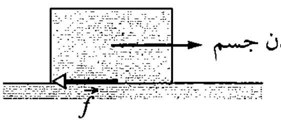
این معادله مربوط به هر شتاب قائم a_y میز و جسم است (میز و جسم ممکن است در یک آسانسور شتاب‌دار قرار داشته باشند). اگر میز و جسم نسبت به زمین شتاب نداشته باشند، داریم $a_y = ۰$، و معادله‌ی ۵-۱۳ به صورت زیر در می‌آید

$$F_N = mg \qquad (۱۴-۵)$$

خودآزمایی ۳

در شکل ۵-۷، اگر میز و جسم درون آسانسوری قرار داشته باشند که به سمت بالا، (الف) با تندی ثابت و (ب) با تندی در حال افزایش، حرکت می‌کند، آیا بزرگی نیروی عمودی $\vec{F}_N$ نسبت به mg بزرگ‌تر، کوچک‌تر، یا مساوی است؟

اصطکاک



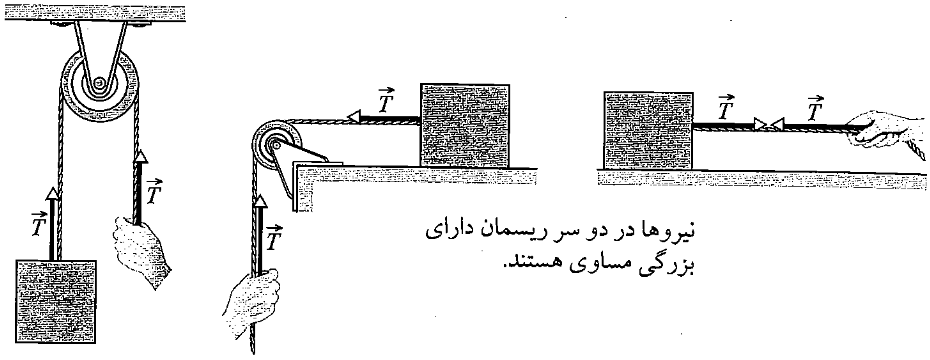
شکل ۵-۸ نیروی اصطکاک $\vec{f}$ با نیرویی که می‌خواهد جسم را روی سطح بلغزاند، مخالفت می‌کند.

اگر جسمی را روی سطحی بلغزانیم یا بخواهیم بلغزانیم به خاطر وجود قید میان جسم و سطح، در مقابل حرکت یک مقاومت بروز می‌کند. (درباره‌ی این قید در فصل بعد بیشتر بحث خواهد شد). این مقاومت به صورت تک نیروی $\vec{f}$ به نام **نیروی اصطکاک**، یا به طور ساده **اصطکاک**، در نظر گرفته می‌شود. این نیرو در راستای سطح و ناهمسو با حرکت جسم (شکل ۵-۸) اثر می‌کند. گاهی برای ساده کردن شرایط، از اصطکاک چشم‌پوشی می‌شود (سطح ***بی‌اصطکاک*** فرض می‌شود)

نیروی کشش

وقتی یک ریسمان (یا طناب، کابل، یا چیزی مشابه) را به جسمی می‌بندیم و آن را می‌کشیم ریسمان جسم را با نیروی $\vec{T}$، که جهتش به برون‌سوی جسم و در راستای ریسمان است، می‌کشد (شکل ۵-۹ الف). این نیرو را ***نیروی کشش*** می‌نامند، زیرا گفته می‌شود که ریسمان ***در حال کشش*** (یا ***تحت کشش***) قرار دارد و به این معنی است که ریسمان محکم کشیده می‌شود. ***کشش ریسمان*** همان بزرگی T، نیروی وارد شده به جسم است. برای مثال، اگر بزرگی نیروی وارد شده به جسم $T = ۵۰\mathrm{N}$ باشد، کشش ریسمان $۵۰\mathrm{N}$ است.

در هنگام حل کردن مسئله‌ها، اغلب، ریسمان را ***بی‌جرم*** (جرم قابل چشم‌پوشی در مقابل جرم جسم) و ***کشش‌ناپذیر*** در نظر می‌گیریم. بنابراین، ریسمان فقط به عنوان یک رابط میان دو جسم عمل می‌کند. اگر اجسام و ریسمان دارای شتاب هم باشند و حتی اگر ریسمان از روی



شکل ۵-۹ (الف) نمودار ریسمانی که محکم کشیده شده است و تحت اثر نیروی کشش قرار دارد. ریسمان هرگاه دارای جرم قابل چشم‌پوشی باشد، حتی اگر از روی قرقره‌ای بی‌جرم و بی‌اصطکاک هم، مطابق شکل‌های (ب) و (پ) بگذرد، جسم و دست را با نیروی T می‌کشد.

یک قرقره‌ی با جرم ناچیز و بی‌اصطکاک هم بگذرد ریسمان با نیروی یکسان T از دو طرف توسط اجسام کشیده می‌شود (شکل‌های ۵-۹ ب و ۵-۹ پ). جرم قرقره در مقایسه با جرم اجسام و اصطکاک محور آن در مخالفت با چرخش قابل چشم‌پوشی است. اگر ریسمان، مطابق شکل ۵-۹ پ، روی نصف محیط قرقره بپیچد بزرگی نیروی برایند وارد شده به قرقره از سوی ریسمان $2T$ است.

☑ خودآزمایی ۴

در شکل ۵-۹ پ، جسم آویخته شده از ریسمان دارای وزن ۷۵ N است. وقتی جسم (الف) با تندی ثابت، (ب) با تندی در حال افزایش، و (پ) با تندی در حال کاهش، به بالاسو حرکت می‌کند، آیا T مساوی با، بزرگ‌تر از، یا کوچک‌تر از ۷۵ N است؟

۵-۳ کاربرد قانون‌های نیوتون

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۵-۱۴ قانون سوم نیوتون درباره‌ی حرکت و زوج نیروی قانون سوم را بشناسید.

۵-۱۵ قانون دوم نیوتون را در مورد نمودار جسم ـ آزاد یک شیء، که به طور قائم، یا به طور افقی، یا روی یک سطح شیب‌دار، حرکت می‌کند، به کار ببرید.

۵-۱۶ برای آرایشی که چندین شیء به طور صُلب با هم حرکت می‌کنند، یک نمودار جسم ـ آزاد رسم کنید و قانون دوم نیوتون را برای هر یک از اشیا به طور جداگانه و نیز برای دستگاه اشیا به عنوان یک شیء مرکب، به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

● نیروی برایند $\vec{F}_{\rm net}$ وارد شده به جسمی به جرم m، با شتاب جسم $\vec{a}$، به صورت زیر رابطه دارد:

$$\vec{F}_{\rm net} = m\vec{a}$$

این رابطه را می‌توان به صورت مؤلفه‌ای نوشت

$F_{{\rm net},x} = ma_x$ ، $F_{{\rm net},y} = ma_y$ و $F_{{\rm net},z} = ma_z$

● اگر نیروی $\vec{F}_{BC}$ از سوی جسم C به جسم B وارد شود، در آن صورت یک نیروی $\vec{F}_{CB}$ هم وجود دارد که از سوی جسم B به جسم C وارد می‌شود:

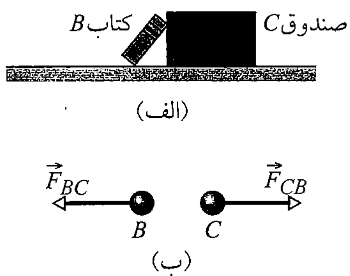
$$\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{CB}$$

این نیروها از نظر بزرگی یکسان، اما ازنظر جهت مخالف یکدیگرند.

قانون سوم نیوتون

وقتی دو جسم یکدیگر را می‌کشند یا هُل می‌دهند، یعنی وقتی یک‌جسم نیرویی به جسم دیگر وارد می‌کند، گفته می‌شود که ***دو جسم برهم کنش دارند***. برای مثال، فرض کنید کتاب B را به صندوق C تکیه می‌دهیم (شکل ۵-۱۰ الف). در این صورت، کتاب و صندوق برهم کنش دارند؛ یعنی در اینجا یک نیروی افقی $\vec{F}_{BC}$ وارد شده به کتاب ازسوی صندوق (یا ناشی از صندوق) و یک نیروی افقی $\vec{F}_{CB}$ وارد شده به صندوق از سوی کتاب (یا ناشی ازکتاب) وجود دارد. این زوج نیرو در شکل ۵-۱۰ ب، نشان داده شده است. در اینجا قانون سوم نیوتون چنین بیان می‌شود

قانون سوم نیوتون: هرگاه دو جسم برهم کنش داشته باشند نیروهای وارد شده به هر یک از آن دو از سوی جسم دیگر همیشه از لحاظ بزرگی مساوی و از لحاظ جهت مخالف یکدیگرند.



بزرگی نیروی وارد شده به B ازسوی C با نیروی وارد شده به C ازسوی B برابراست.

شکل ۵-۱۰ (الف) کتاب B به صندوق C تکیه داده است. (ب) نیروهای $\vec{F}_{BC}$ (نیروی وارد شده به کتاب از سوی صندوق) و $\vec{F}_{CB}$ (نیروی وارد شده به صندوق از سوی کتاب) دارای بزرگی‌های برابر و جهت‌های مخالف‌اند.

برای کتاب و صندوق بیان فرمولی این قانون می‌تواند با رابطه‌ی نرده‌ای زیر

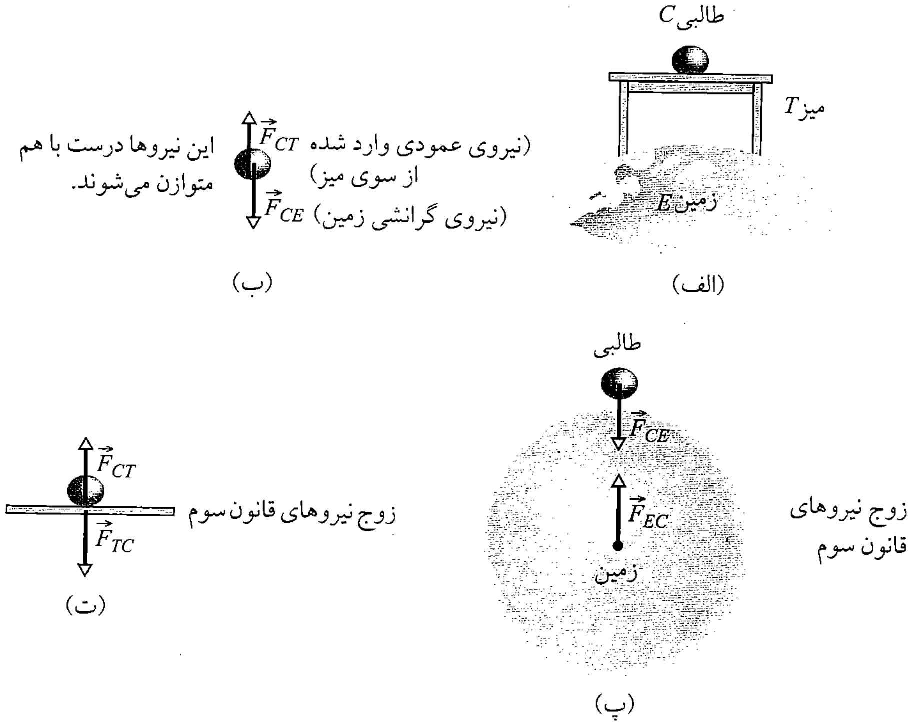
$$F_{BC} = F_{CB} \quad \text{(بزرگی‌های مساوی)}$$

یا با رابطه‌ی برداری زیر، نوشته شود

$$\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{CB} \quad \text{(بزرگی‌های مساوی و جهت‌های مخالف)} \qquad (۵-۱۵)$$

در اینجا علامت منفی نشان می‌دهد که این دو نیرو از لحاظ جهت مخالف یکدیگرند. نیروهای میان دوجسم برهم کنش‌کننده را می‌توان **زوج نیروهای قانون سوم** نامید. وقتی دوجسم به هر حالتی برهم‌کنش داشته باشند یک زوج نیروی قانون سوم به‌وجود می‌آید. درشکل ۵-۱۰ الف، کتاب و صندوق ساکن‌اند، اما اگر آن‌ها حرکت کنند یا حتی دارای حرکت شتاب‌دار باشند، قانون سوم باز هم درباره‌ی آن‌ها صادق است.

به عنوان مثالی دیگر، زوج نیروهای قانون سوم مربوط به میوه‌ی طالبی واقع بر روی میز در شکل ۵-۱۱ الف، و میز ایستاده بر روی زمین را بررسی می‌کنیم. طالبی با میز و با زمین برهم‌کنش دارد (در اینجا سه جسم وجود دارند که باید برهم کنش‌های آن‌ها را مشخص کرد).



شکل ۵-۱۱ (الف) میوه‌ی طالبی روی یک میز واقع بر روی زمین قرار دارد. (ب) نیروهایی که به طالبی وارد می‌شوند، $\vec{F}_{CT}$ و $\vec{F}_{CE}$ هستند. (پ) نمودار زوج نیروهای قانون سوم مربوط به برهم کنش طالبی ـ زمین. (ت) نمودار زوج نیروهای قانون سوم مربوط به برهم کنش طالبی ـ میز.

ابتدا فقط نیروهای وارد شده به طالبی (شکل ۵-۱۱ ب) را در نظر می‌گیریم. $\vec{F}_{CT}$ نیروی عمودی وارد شده به طالبی از سوی میز و $\vec{F}_{CE}$ نیروی گرانشی وارد شده به طالبی از سوی زمین است. آیا این دو نیرو زوج نیروهای قانون سوم هستند؟ نه، چون این نیروها به یک جسم، یعنی به طالبی، وارد می‌شوند نه به دو جسم برهم کنش کننده.

برای پیدا کردن یک زوج نیروی قانون سوم نباید فقط طالبی را در نظر بگیریم، بلکه باید به برهم‌کنش میان طالبی و یکی از دوجسم دیگر توجه کنیم. نخست، در برهم‌کنش طالبی ـ زمین (شکل ۵-۱۱ پ)، زمین طالبی را با نیروی گرانشی $\vec{F}_{CE}$ و طالبی زمین را با نیروی گرانشی $\vec{F}_{EC}$، می‌کشد. آیا این نیروها یک زوج نیروی قانون سوم هستند؟ بله، چون آن‌ها به دو جسم برهم کنش کننده وارد می‌شوند و هر جسم به دیگری نیرو وارد می‌کند. پس، بنا به قانون سوم نیوتون، داریم

$$\vec{F}_{CE} = -\vec{F}_{EC} \quad \text{(برهم کنش طالبی ـ زمین)}$$

در برهم کنش طالبی ـ میز، نیروی وارد شده به طالبی از سوی میز $\vec{F}_{CT}$ و نیروی وارد شده به میز از سوی طالبی $\vec{F}_{TC}$ است (شکل ۵-۱۱ ت). این نیروها نیز زوج نیروهای قانون سوم هستند و می‌توان نوشت

$$\vec{F}_{CT} = -\vec{F}_{TC} \quad \text{(برهم کنش طالبی ـ میز)}$$

خودآزمایی ۵

فرض کنید طالبی و میز شکل ۵-۱۱، درون آسانسوری هستند که به بالاسو شتاب پیدا می‌کند. (الف) آیا بزرگی نیروهای $\vec{F}_{TC}$ و $\vec{F}_{CT}$ افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟ (ب) آیا باز هم این نیروها از لحاظ بزرگی مساوی و از لحاظ جهت مخالف یکدیگرند؟ (پ) آیا بزرگی نیروهای $\vec{F}_{CE}$ و $\vec{F}_{EC}$ افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟ (ت) آیا باز هم این نیروها از لحاظ بزرگی مساوی و از لحاظ جهت مخالف یکدیگرند؟

کاربرد قانون‌های نیوتون

آنچه از این فصل باقی مانده شامل چند مسئله‌ی نمونه است. روی این مسئله‌ها باید با دقت مطالعه کرد و روش‌های حل کردن یک مسئله را آموخت. در اینجا موضوع مهم برگرداندن یک شکل طرح‌وار فیزیکی به نمودار جسم ـ آزاد با محورهای مناسب است تا بتوان از قانون‌های نیوتون استفاده کرد.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۵-۳ جسم روی میز، جسم آویخته

شکل ۵-۱۲ جسم S (***جسم لغزنده***) به جرم $M = ۳٫۳\,\text{kg}$ را نشان می‌دهد. این جسم می‌تواند بر روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک، آزادانه حرکت کند و به‌وسیله‌ی ریسمانی‌که از روی قرقره‌ی بی‌اصطکاکی عبور کرده، به جسم H (***جسم آویخته***) به جرم $m = ۲٫۱\,\text{kg}$ وصل شده‌است. ریسمان و قرقره در مقایسه با جرم اجسام دارای جرم‌ناچیز (یعنی، «بی‌جرم») هستند. هنگامی‌که جسم آویخته‌ی H سقوط می‌کند، جسم‌لغزنده‌ی S به‌سمت راست شتاب پیدامی‌کند. مطلوب‌است تعیین،(الف) شتاب‌جسم لغزنده‌ی S، (ب) شتاب‌جسم آویخته‌ی H و(پ) نیروی کشش ریسمان.

پرسش ***این مسئله به طور کلی درباره‌ی چیست؟***

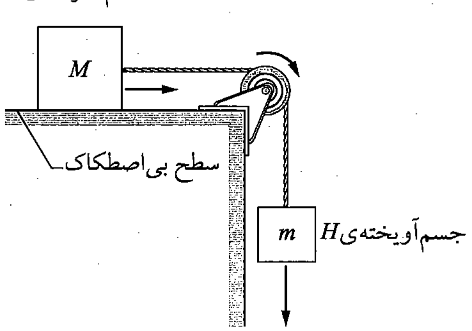
دو جسم، یعنی جسم لغزنده و جسم آویخته، در دست‌اند، و ***زمین هم*** هر دو جسم را جذب می‌کند. (در اینجا بدون وجود زمین هیچ اتفاقی نمی‌افتد). همان‌طور که شکل ۵-۱۳ نشان می‌دهد، در مجموع پنج نیرو به اجسام اثر می‌کنند:

۱. ریسمان جسم لغزنده را با نیرویی به بزرگی T به سمت راست می‌کشد.

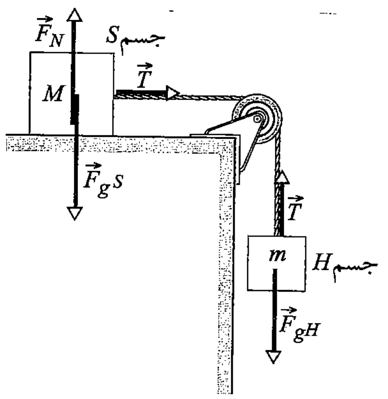
۲. ریسمان جسم آویخته‌ی H را با همان نیروی T به بالاسو می‌کشد. این نیروی بالاسو مانع سقوط آزاد جسم می‌شود.

۳. زمین جسم لغزنده‌ی S را با نیروی گرانشی $\vec{F}_{gS}$ به بزرگی Mg به سمت پایین می‌کشد.

۴. زمین جسم آویخته‌ی H را با نیروی گرانشی $\vec{F}_{gH}$ به بزرگی mg به سمت پایین می‌کشد.



شکل ۵-۱۲ جسم S به جرم M به وسیله‌ی ریسمانی که از روی قرقره‌ای عبور کرده، به جسم H به جرم m وصل شده است.



شکل ۵-۱۳ نمودار نیروهایی که به دو جسم شکل ۵-۱۲ وارد می‌شوند.

۵. میز، جسم لغزنده‌ی S را با نیروی عمودی $\vec{F}_N$ به سمت بالا هُل می‌دهد.

در اینجا نکته‌ی دیگری وجود دارد که باید آن را بدانیم. فرض می‌کنیم که ریسمان کش نمی‌آید، در نتیجه، اگر جسم H در یک مدت معین به اندازه‌ی یک میلی‌متر سقوط کند، جسم S در همان مدت به اندازه‌ی یک میلی‌متر به سمت راست حرکت می‌کند. در نتیجه، اجسام با هم حرکت می‌کنند و شتاب آن‌ها دارای بزرگی یکسان a است.

پرسش ***این مسئله چگونه رده‌بندی می‌شود؟ آیا مسئله قانون خاصی از فیزیک را یادآوری می‌کند؟***

بله. نیروها، جرم‌ها و شتاب‌ها در مسئله دخالت دارند و باید از قانون دوم نیوتون درباره‌ی حرکت، $\vec{F}_{net}=m\vec{a}$، استفاده کرد. این موضوع یک **نکته‌ی کلیدی** برای آغاز کردن است؟

پرسش ***اگر در این مسئله قانون دوم نیوتون به کار برده شود، این کاربرد مربوط به کدام جسم است؟***

در این مسئله به دوجسم توجه می‌کنیم، جسم لغزنده و جسم آویخته، اگرچه هر دو جسم ***اشیایی گسترده‌اند*** (آن‌ها نقطه‌ای نیستند)، باز هم هر کدام آن‌ها را می‌توان به صورت یک ذره در نظر گرفت. زیرا همه‌ی اجزاء آن‌ها درست با هم حرکت می‌کنند. **نکته‌ی کلیدی دوم** مربوط به کاربرد قانون دوم نیوتون برای هر جسم به طور فردی است.

پرسش ***در مورد قرقره چه باید کرد؟***

قرقره را نمی‌توان به عنوان یک ذره در نظر گرفت زیرا بخش‌های مختلف آن به طور متفاوت حرکت می‌کنند. وقتی از دوران صحبت می‌کنیم با اجزاء قرقره سروکار داریم. در حال حاضر، قرقره را نادیده می‌گیریم زیرا فرض می‌کنیم جرم آن در مقایسه با جرم دو جسم قابل چشم‌پوشی است. بنابراین، کار قرقره فقط تغییر دادن سمت‌گیری ریسمان است.

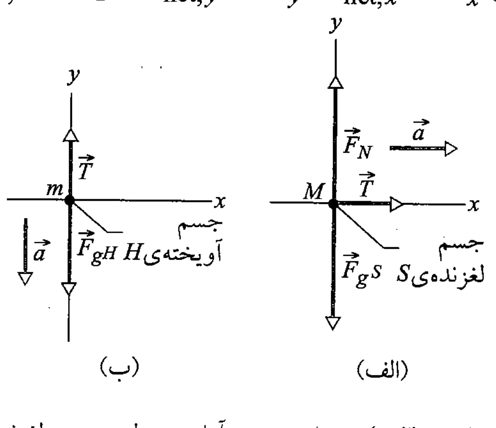
پرسش ***بسیار خوب، اکنون چگونه می‌توان معادله‌ی $\vec{F}_{net}=m\vec{a}$ را درمورد جسم لغزنده به‌کار برد؟***

ابتدا جسم S را به‌صورت ذره‌ای به جرم M نمایش می‌دهیم و ***تمام نیروهای وارد شده به آن را***، مطابق شکل ۵-۱۴ الف، رسم می‌کنیم. آنچه به دست می‌آید نمودار جسم ـ آزاد مربوط به جسم است. سپس، دستگاه محورهای مختصات را رسم می‌کنیم. در اینجا بهتر است محور x را به موازات سطح میز و در جهت حرکت جسم لغزنده انتخاب کنیم.

پرسش ***سپاسگزارم، اما هنوز نگفتید که رابطه‌ی $\vec{F}_{net}=m\vec{a}$ درمورد جسم لغزنده چگونه به‌کار می‌رود. شما فقط طرز ترسیم نمودارجسم ـ آزاد را شرح دادید.***

حق با شماست و این هم **نکته‌ی کلیدی سوم**: رابطه‌ی $\vec{F}_{net}=M\vec{a}$ یک معادله‌ی برداری است، پس، می‌توان آن را به‌صورت سه معادله‌ی مؤلفه‌ایِ زیر نوشت:

$F_{net,x}=Ma_x$ ، $F_{net,y}=Ma_y$ و $F_{net,z}=Ma_z$ (۵-۱۶)



شکل ۵-۱۴ (الف) نمودار جسم ـ آزاد مربوط به جسم لغزنده‌ی S در شکل ۵-۱۲. (ب) نمودار جسم ـ آزاد مربوط به‌جسم آویخته‌ی H در شکل ۵-۱۲.

که در آن $F_{net,x}$، $F_{net,y}$ و $F_{net,z}$ مؤلفه‌های نیروی برایند در راستای سه محورند. اکنون می‌توانیم هر معادله‌ی مؤلفه‌ای را برای راستای مربوط بنویسیم. چون جسم S در راستای قائم شتاب ندارد معادله‌ی $F_{net,y} = Ma_y$ چنین نوشته می‌شود

$$F_N - F_{gS} = 0 \Rightarrow F_N = F_{gS} \qquad (۵-۱۷)$$

بنابراین، در راستای محور y، بزرگی نیروی عمودی با بزرگی نیروی گرانشی برابر است.

در راستای محور z که بر صفحه‌ی کتاب عمود است، هیچ نیرویی اثر نمی‌کند.

در راستای محور x فقط یک مؤلفه‌ی نیرو وجود دارد که همان T است. پس، معادله‌ی $F_{net,x} = Ma_x$ را می‌توان چنین نوشت

$$T = Ma \qquad (۵-۱۸)$$

این معادله شامل دو کمیت نامعلوم T و a است و نمی‌توان آن را حل کرد. در ضمن، یادآوری می‌شود که در مورد جسم آویخته هنوز چیزی گفته نشده است.

پرسش ***موافقم. رابطه‌ی $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$ در مورد جسم آویخته چگونه به کار می‌رود؟***

کاربرد آن درست همان است که درباره‌ی جسم S انجام شد: نمودار جسم ـ آزاد مربوط به‌جسم H را، مطابق شکل ۵-۱۴ ب، رسم می‌کنیم و سپس، معادله‌ی $\vec{F}_{net} = m\vec{a}$ را به صورت مؤلفه‌ای به کار می‌بریم. در اینجا چون شتاب در راستای محور y است، از معادله‌ی دوم ۵-۱۶ $(F_{net,y} = ma_y)$ استفاده می‌کنیم و چنین می‌نویسیم

$$T - F_{gH} = ma_y \qquad (۵-۱۹)$$

اکنون می‌توان mg را به جای F_{gH} و $-a$ را به جای a_y (علامت منفی به خاطر حرکت کردن جسم H در جهت منفی محور y است) قرار داد. در نتیجه، داریم

$$T - mg = -ma \qquad (۵-۲۰)$$

توجه کنید که معادله‌های ۵-۱۸ و ۵-۲۰ هر دو دارای کمیت‌های نامعلوم T و a هستند. اگر این معادله‌ها را از هم کم کنیم تا T حذف شود و سپس معادله‌ی حاصل را نسبت به a حل کنیم، داریم

$$a = \frac{m}{M+m}g \qquad (۵-۲۱)$$

با جانشانی این نتیجه در معادله‌ی ۵-۱۸، داریم

$$T = \frac{Mm}{M+m}g \qquad (۵-۲۲)$$

با قرار دادن مقادیرعددی معلوم در معادله‌های بالا، خواهیم داشت

$$a = \frac{m}{M+m}g = \frac{۲/۱\,\mathrm{kg}}{۳/۳\,\mathrm{kg} + ۲/۱\,\mathrm{kg}}(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲}) \Rightarrow$$

$$a = ۳/۸\,\mathrm{m/s^۲} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

و

$$T = \frac{Mm}{M+m}g = \frac{(۳/۳\,\mathrm{kg})(۲/۱\,\mathrm{kg})}{۳/۳\,\mathrm{kg} + ۲/۱\,\mathrm{kg}}(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲}) \Rightarrow$$

$$T = ۱۳\,\mathrm{N} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

پرسش ***حالا مسئله درست حل شده است؟***

پرسش خوبی است، اما تا وقتی که نتیجه‌های حاصل امتحان نشده‌اند و معقول بودن آن‌ها محقق نشده است حل کردن مسئله، به‌واقع، تمام نشده است (شما که این محاسبه‌ها را انجام داده‌اید پیش از رها کردن مسئله نمی‌خواهید ببینید آیا عملیات به طور معقول انجام شده‌اند؟)

نخست، معادله‌ی ۵-۲۱ را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که این معادله از نظر ابعادی درست است و شتاب a باید همیشه کمتر از g باشد. (زیرا جسم آویخته به خاطر ریسمان در حال سقوط آزاد نیست).

اکنون، به معادله‌ی ۵-۲۲ توجه می‌کنیم و آن را دو باره چنین می‌نویسیم

$$T = \frac{M}{M+m}mg \qquad (۵-۲۳)$$

از این شکل معادله، آسان‌تر می‌توان فهمید که این معادله هم از نظر ابعادی درست است. زیرا T و mg هر دو دارای ابعاد نیرو هستند. معادله‌ی ۵-۲۳ نیز نشان می‌دهد که نیروی کشش ریسمان همیشه از mg، و در نتیجه همیشه از نیروی گرانشی واردشده به جسم آویخته، کمتراست. فهمیدن این موضوع ساده‌است زیرا اگر T از mg **بیشتر** باشد، جسم آویخته باید به بالاسو حرکت کند.

نتیجه‌های حاصل را با استفاده کردن از حالت‌های ویژه‌ای که با آن‌ها پاسخ‌ها می‌توانند بر پایه‌ی حدس و گمان به دست آیند، نیز می‌توان امتحان کرد. یک مثال ساده فرض $g = 0$ است، یعنی،

فرض کنیم که آزمایش در فضای میان ستاره‌ای انجام شده است. می‌دانیم که در این حالت، اجسام از حال سکون به حرکت درنمی‌آیند. در نتیجه، هیچ نیرویی به سرهای ریسمان وارد نمی‌شود و هیچ نیروی کششی در ریسمان وجود نخواهد داشت.

آیا فرمول‌ها این نتیجه‌ها را پیشگویی می‌کنند؟ بله، پیشگویی می‌کنند. در معادله‌های ۵-۲۱ و ۵-۲۲ به ازای $g=0$، داریم $a=0$ و $T=0$. دو حالت ویژه‌ی دیگری که می‌توانید امتحان کنید، $M=0$ و $m\to\infty$ است.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۵-۴ ریسمان جعبه‌ای را در بالا رفتن از یک شیب‌راهه شتاب می‌دهد

بسیاری از دانشجویان مسئله‌های مربوط به شیب‌راهه‌ها (سطح‌های شیب‌دار) را مشکل تصور می‌کنند. این مشکل بودن، به احتمال، موضوعی دیداری است زیرا ما با (الف) یک دستگاه مختصات یکوری شده و (ب) مؤلفه‌های نیروی گرانشی، و نه نیروی گرانشی کامل، سروکار داریم. در اینجا یک مثال نوعی با همه‌ی یکوری شدن‌ها و زاویه‌های مشخص شده مطرح می‌کنیم. برخلاف یکوری شدن دستگاه، نکته‌ی کلیدی آن است که قانون دوم نیوتون را در مورد محور مربوط به راستای حرکت به کار ببریم.

در شکل ۵-۱۵ الف، ریسمانی جعبه‌ای را بر روی یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta=30°$ به سمت بالا می‌کشد. جرم جعبه $m=5{,}00\,kg$ و بزرگی نیروی کشش ریسمان $T=25{,}0\,N$ است. مؤلفه‌ی شتاب جعبه، a، در راستای سطح شیب‌دار چیست؟

نکته‌ی کلیدی

شتاب در راستای سطح از مؤلفه‌های نیرو در آن راستا (و نه از مؤلفه‌های عمود بر آن سطح)، با استفاده کردن از قانون دوم نیوتون (معادله‌ی ۵-۱) به دست می‌آید.

محاسبات: ما باید معادله‌ی مربوط به قانون دوم نیوتون درباره‌ی حرکت را در راستای یک محور بنویسیم. چون جعبه در طول سطح شیب‌دار حرکت می‌کند، قرار دادن محور x در راستای سطح شیب‌دار موضوعی معقول به‌نظر می‌رسد (شکل ۵-۱۵ ب). (هیچ اشکالی برای استفاده کردن از دستگاه مختصات معمولی وجود ندارد، اما به خاطر هم‌راستا نبودن محور x با راستای حرکت در رابطه‌های مربوط به مؤلفه‌ها قدری سردرگمی پیش خواهد آمد).

پس از انتخاب کردن دستگاه مختصات یک نمودار جسم ـ آزاد که در آن جعبه به صورت یک خال نشان داده شده است (شکل ۵-۱۵ ب) رسم می‌کنیم. سپس همه‌ی بردارهای مربوط به نیروهای وارد شده به جعبه را به گونه‌ای رسم می‌کنیم که دُم بردارها در روی آن خال باشد. (رسم کردن پراکنده‌ی بردارها در روی نمودار می‌تواند به آسانی سبب بروز اشتباه شود، بنابراین همیشه، به ویژه در سر امتحان، دُم بردارها را از یک جا رسم کنید).

نیروی کشش ریسمان T، جهتش به سمت بالای سطح شیب‌دار و بزرگی‌اش $T=25{,}0\,N$ است. نیروی گرانشی $\vec{F}_g$، جهتش به سمت پایین سطح شیب‌دار (البته) و بزرگی‌اش $mg=(5{,}00\,kg)(9{,}80\,m/s^2)=49{,}0\,N$ است. این جهت نشان می‌دهد که در راستای سطح شیب‌دار تنها یک مؤلفه‌ی نیرو قرار دارد، که آن مؤلفه (و نه نیروی کامل) روی شتاب جعبه در راستای سطح مؤثر است. بنابراین، پیش از نوشتن قانون دوم نیوتون درباره‌ی حرکت در راستای محور x، باید برای آن مؤلفه‌ی مهم نیرو رابطه‌ای به دست آوریم.

شکل‌های ۵-۱۵ پ تا ح، مرحله‌های رسیدن به رابطه‌ی مورد نظر را نشان می‌دهند. ابتدا از زاویه‌ی معلوم سطح شیب‌دار شروع می‌کنیم و مثلث راست‌گوشه‌ای با مؤلفه‌های نیرو می‌سازیم (مؤلفه‌ها دو ضلع و نیروی کامل وتر مثلث را تشکیل می‌دهند). شکل ۵-۱۵ پ نشان می‌دهد که زاویه‌ی میان سطح شیب‌دار و $\vec{F}_g$، برابر با $90°-\theta$ است. (آیا در آنجا مثلث راست‌گوشه‌ای می‌بینید؟). اکنون، شکل‌های ۵-۱۵ ت تا ج، نیروی $\vec{F}_g$ و مؤلفه‌هایش را نشان می‌دهند: یک مؤلفه با سطح شیب‌دار موازی

است (یعنی مؤلفه‌ی مورد نظر ما) و مؤلفه‌ی دیگر بر سطح شیب‌دار عمود است.

چون مؤلفه‌ی عمودی **_عمود است_**، زاویه‌ی میان آن و $\vec{F}_g$ باید برابر با θ باشد (شکل ۵-۱۵ ت). مؤلفه‌ی مورد نظر دیگر ضلع دور مثلث راست‌گوشه است. بزرگی وتر مثلث mg (بزرگی نیروی گرانشی) است. بنابراین، بزرگی مؤلفه‌ای که می‌خواهیم پیدا کنیم $mg\sin\theta$ است (شکل ۵-۱۵ چ).

ما باید یک نیروی دیگر، یعنی نیروی $\vec{F}_N$ نشان داده شده در شکل ۵-۱۵ ب، را هم پیدا کنیم. اما این نیرو بر سطح شیب‌دار عمود است و از این رو، نمی‌تواند بر روی حرکت در راستای سطح اثری داشته باشد. (این نیرو در راستای سطح شیب‌دار مؤلفه‌ای ندارد تا به جعبه شتاب بدهد).

اکنون، می‌توان معادله‌ی مربوط به قانون دوم نیوتون درباره‌ی حرکت را در راستای محور یکوری شده‌ی x نوشت:

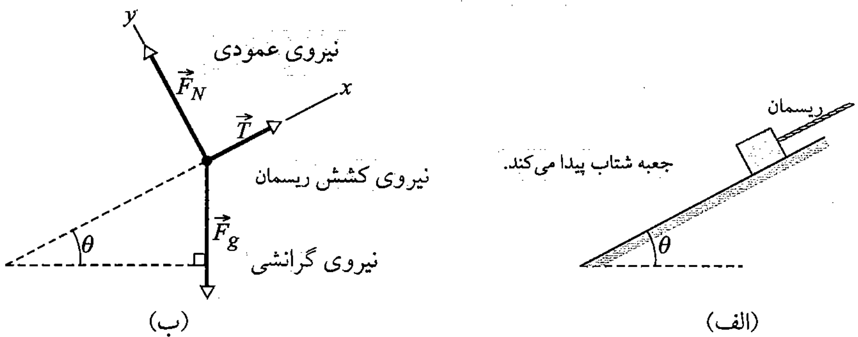
$$F_{\text{net},x} = ma_x$$

مؤلفه‌ی a_x تنها مؤلفه‌ی شتاب است (جعبه از روی سطح شیب‌دار بلند نمی‌شود که عجیب است، یا جعبه در توی سطح پایین می‌رود، که آن هم حتی عجیب‌تر است). بنابراین، به آسانی می‌توان a را برای شتاب جعبه در راستای سطح شیب‌دار در نظر گرفت. چون $\vec{T}$ در جهت مثبت محور x و مؤلفه‌ی $mg\sin\theta$ در جهت منفی محور x اثر می‌کند، می‌توان نوشت

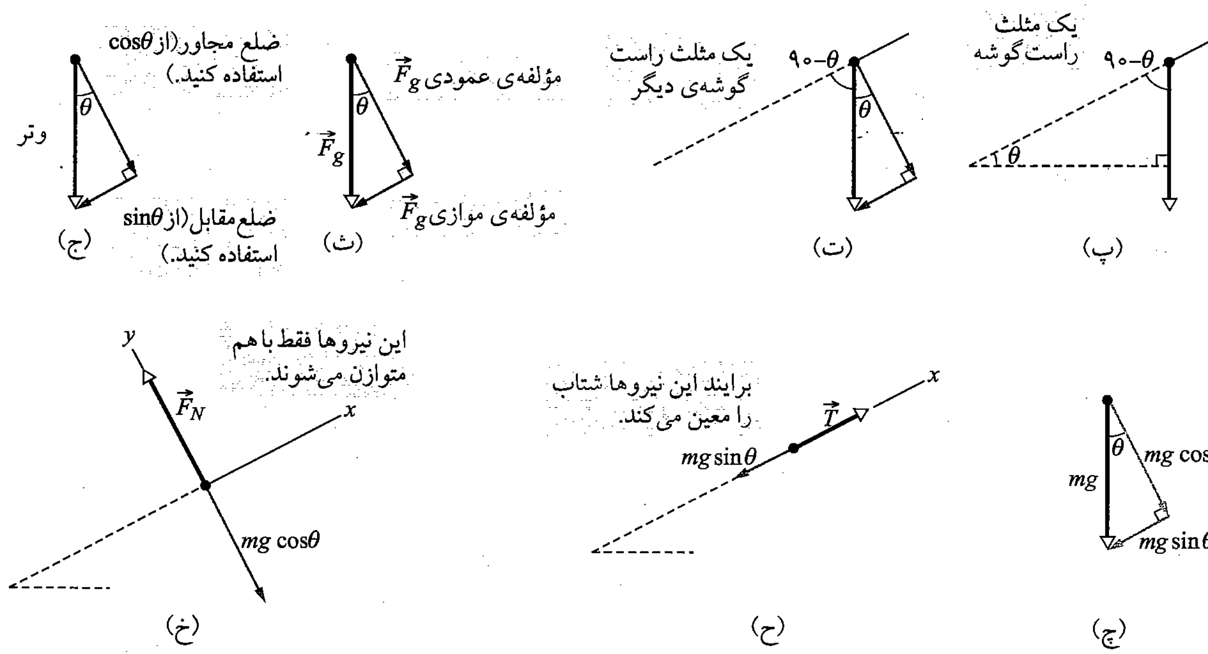
$$T - mg\sin\theta = ma \qquad (۵\text{-}۲۴)$$

با جانشانی داده‌ها و حل‌کردن معادله‌ی حاصل نسبت به a، داریم

(پاسخ) $a = ۰/۱۰۰\,\text{m/s}^۲$



شکل ۵-۱۵ (الف) جعبه‌ای به وسیله‌ی ریسمانی به سمت بالای یک سطح شیب‌دار کشیده می‌شود. (ب) سه نیروی وارد شده به جعبه عبارت‌اند از: نیروی کشش ریسمان $\vec{T}$، نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ و نیروی عمودی $\vec{F}_N$. (پ) تا (خ) پیدا کردن مؤلفه‌های نیرو در راستای سطح شیب‌دار و در راستای عمود بر آن.



این نتیجه مثبت است و نشان می‌دهد که جعبه به سمت بالای سطح شیب‌دار، یعنی در جهت مثبت محور x یکوری شده شتاب پیدا می‌کند. اگر بزرگی $\vec{T}$ را به قدر کافی کم کنیم تا $a = ۰$ شود، جعبه با تندی ثابت به سمت بالای سطح شیب‌دار حرکت خواهد کرد. اگر بزرگی $\vec{T}$ را باز هم کمتر بکنیم، با وجود کشیده شدن ریسمان، شتاب منفی خواهد بود.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۵-۵ خواندن یک نمودار نیرو

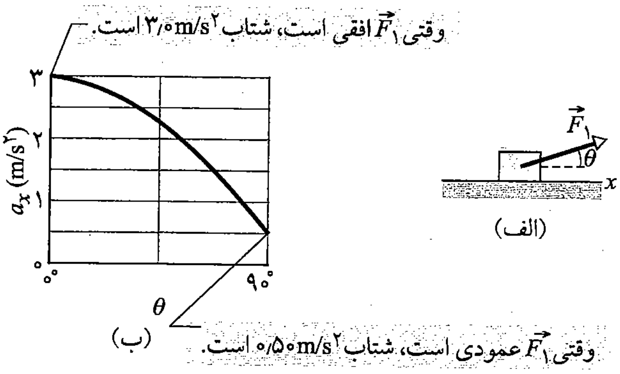
در اینجا مثالی ارائه می‌شود که در آن باید اطلاعات را از روی نمودار به دست آوریم، نه اینکه فقط یک عدد را بخوانیم. شکل ۵-۱۶ الف آرایش کلی دو نیرو را که به جسمی ۴/۰۰ کیلوگرمی واقع برروی یک‌سطح افقی بی‌اصطکاک وارد می‌شوند، نشان می‌دهد، اما در اینجا فقط نیروی $\vec{F_1}$ نشان داده شده است. این نیرو بزرگی ثابت دارد، اما می‌توان آن را تحت زاویه‌ی تنظیم‌پذیر θ نسبت به محور x مثبت، وارد کرد. نیروی $\vec{F_2}$ افقی است و ازلحاظ بزرگی و زاویه ثابت است. شکل ۵-۱۶ ب، نمودار شتاب افقی جسم a_x، را به ازای هر مقدار θ از صفر تا ۹۰ درجه نشان می‌دهد. به ازای $\theta = ۱۸۰^\circ$، مقدار a_x چقدر است؟

نکته‌های کلیدی

(۱) با توجه به قانون دوم نیوتون، شتاب افقی a_x به نیروی افقی برایند $F_{net,x}$ بستگی دارد. (۲) نیروی افقی برایند برابر با مجموع مؤلفه‌های افقی نیروهای $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ است.

محاسبات: مؤلفه‌ی x نیروی $\vec{F_2}$ برابر با F_2 است زیرا این بردار افقی است. مؤلفه‌ی x نیروی $\vec{F_1}$ برابر با $F_1 \cos\theta$ است. با استفاده کردن از این رابطه‌ها و جرم $m = ۴/۰۰\,\text{kg}$، قانون دوم نیوتون $(\vec{F}_{net} = m\vec{a})$ درباره‌ی حرکت در راستای محور x به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$F_1 \cos\theta + F_2 = ۴/۰۰\, a_x \qquad (۲۵\text{-}۵)$$



شکل ۵-۱۶ (الف) یکی از دو نیروی وارد شده به جسم نشان داده شده است. زاویه‌ی این نیرو θ، می‌تواند تغییر کند. (ب) نمودار مؤلفه‌ی شتاب a_x جسم برحسب θ.

این معادله نشان می‌دهد که به ازای $\theta = ۹۰^\circ$، مقدار $F_1 \cos\theta$ برابر با صفر است و داریم $F_2 = ۴/۰۰ a_x$. با توجه به نمودار نتیجه می‌گیریم که شتاب متناظر برابر با $۰/۵۰\,\text{m/s}^2$ است. بنابراین، $F_2 = ۲/۰۰\,\text{N}$ و $\vec{F_2}$ باید درجهت مثبت محور x باشد.

با استفاده کردن از معادله‌ی ۵-۲۵ به ازای $\theta = ۰^\circ$ داریم

$$F_1 \cos ۰^\circ + ۲/۰۰ = ۴/۰۰\, a_x \qquad (۲۶\text{-}۵)$$

نمودار نشان می‌دهد که شتاب متناظر برابر با $۳/۰\,\text{m/s}^2$ است. در نتیجه، از معادله‌ی ۵-۲۶ در می‌یابیم که $F_1 = ۱۰\,\text{N}$.

با جانشانی $F_1 = ۱۰\,\text{N}$، $F_2 = ۲/۰۰\,\text{N}$ و $\theta = ۱۸۰^\circ$ در معادله‌ی ۵-۲۵، داریم

$$a_x = -۲/۰۰\,\text{m/s}^2 \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

مسئله‌ی نمونه‌ی ۵-۶ نیروها در درون اتاقک یک آسانسور

فرض کنید هنگامی که در درون آسانسور تنها هستید و آسانسور در حال حرکت است، وزن خود را اندازه می‌گیرید. آیا وزن شما در درون آسانسور از وزن شما در روی یک ترازوی ساکن بیشتر است، کمتر است، یا با آن برابر است؟

در شکل ۵-۱۷ الف، شخصی به جرم $m = ۷۲/۲\,\text{kg}$ روی سکوی یک ترازوی فنری واقع در درون آسانسوری ایستاده است. ما می‌توانیم مقادیری را که ترازو در حین ساکن بودن یا به‌سمت بالا یا پایین حرکت کردن آسانسور نشان می‌دهد، بخوانیم.
(الف) رابطه‌ی کلی مربوط به‌مقادیری راکه ترازو در موقع حرکت کردن آسانسور در راستای قائم نشان می‌دهد، به دست آورید.

نکته‌های کلیدی

(۱) مقدار نشان داده شده با ترازو برابر با بزرگی نیروی عمودی $\vec{F}_N$ است که ترازو به شخص وارد می‌کند. نیروی دیگری که به شخص وارد می‌شود نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ است، که در نمودار جسم ـ آزاد مربوط به شخص در شکل ۵-۱۷ ب، نشان داده شده است. (۲) نیروهای وارد شده به شخص را از طریق قانون دوم نیوتون ($\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$) می‌توان به شتاب حرکت a، ربط داد. اما یادآوری می‌شود که از این قانون فقط در چارچوب مرجع لخت می‌توان استفاده کرد. آسانسور اگر شتاب داشته باشد، دیگر چارچوب مرجع لخت ***نیست***. بنابراین، زمین را به عنوان چارچوب مرجع لخت انتخاب می‌کنیم و شتاب شخص را نسبت به آن اندازه می‌گیریم.

محاسبات: چون دو نیروی وارد شده به شخص و شتاب او در راستای قائم و محور y شکل ۵-۱۷ ب اثر می‌کنند، قانون دوم نیوتون برای مؤلفه‌های y $(F_{\text{net},y} = ma_y)$ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$F_N - F_g = ma$$

و از آنجا

$$F_N = F_g + ma \qquad (۵-۲۷)$$

این رابطه نشان می‌دهد که مقدار وزن خوانده شده (مساوی با F_N) به شتاب قائم آسانسور a، بستگی دارد. با قرار دادن mg به جای F_g، داریم

$$F_N = m(g + a) \qquad \textbf{(پاسخ)}\ (۵-۲۸)$$

این رابطه به ازای هر مقدار a معتبر است. اگر شتاب بالاسو باشد a مثبت، و اگر پایین‌سو باشد a منفی است.

(ب) اگر آسانسور ساکن باشد یا با تندی ثابت $۰/۵۰\,\text{m/s}$ به بالاسو حرکت کند، ترازو چه مقداری را نشان خواهد داد؟

(ب) (الف)

شکل ۵-۱۷ (الف) شخصی روی سکوی یک‌ترازوی فنری، که وزن، یا وزن ظاهری، او را نشان می‌دهد، ایستاده است. (ب) نمودار جسم ـ آزاد مربوط به شخص، که نشان دهنده‌ی نیروی‌عمودی $\vec{F}_N$، وارد شده از سوی ترازو و نیروی گرانشی $\vec{F}_g$، وارد شده از سوی زمین، به شخص است.

نکته‌ی کلیدی

برای سرعت ثابت (صفر یا هر مقدار دیگر). شتاب شخص a، صفر است.

محاسبه: با توجه به این موضوع و با جانشانی مقادیر معلوم در معادله‌ی ۵-۲۸، خواهیم داشت

$$F_N = (۷۲/۲\,\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^۲ + ۰) \Rightarrow$$
$$F_N = ۷۰۸\,\text{N} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

این مقدار وزن شخص را نشان می‌دهد و برابر با F_g، بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به اوست.

(پ) اگر آسانسور با شتابی به بزرگی $۳/۲۰\,\text{m/s}^۲$ به بالاسو یا به پایین‌سو حرکت کند، ترازو چه مقداری را نشان خواهد داد؟

محاسبات: با استفاده کردن از معادله‌ی ۵-۲۸ به‌ازای $a = ۳/۲۰\,\text{m/s}^۲$، داریم

$$F_N = (۷۲/۲\,\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^۲ + ۳/۲۰\,\text{m/s}^۲) \Rightarrow$$
$$F_N = ۹۳۹\,\text{N} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

و به ازای $a = -۳/۲۰\,\text{m/s}^۲$، داریم

$$F_N = (۷۲/۲\,\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^۲ - ۳/۲۰\,\text{m/s}^۲) \Rightarrow$$
$$F_N = ۴۷۷\,\text{N} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

برای شتاب بالاسو (حالتی که تندی بالاسوی آسانسور در حال

افزایش یا تندی پایین‌سوی آن در حال کاهش است) آنچه ترازو نشان می‌دهد بیش از وزن شخص است. این مقدار وزن ظاهری شخص است، زیرا در یک چارچوب مرجع نالخت اندازه‌گیری شده است. به همین ترتیب، برای شتاب پایین‌سو (حالتی که تندی بالاسوی آسانسور در حال کاهش یا تندی پایین‌سوی آن در حال افزایش است) آنچه ترازو نشان می‌دهد کمتر از وزن شخص است.

(ت) در قسمت (پ) که آسانسور دارای شتاب بالاسو است بزرگی نیروی برایند F_{net}، وارد شده به شخص و بزرگی شتاب شخص در چارچوب آسانسور $a_{p,c}$، چقدر است؟ آیا رابطه‌ی $\vec{F}_{net} = m\vec{a}_{p,c}$ برقرار است؟

محاسبه: بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به شخص F_g، به حرکت شخص یا آسانسور بستگی ندارد. در نتیجه، با توجه به قسمت (ب)، F_g برابر با ۷۰۸N است. اما با توجه به قسمت (پ)، هنگام حرکت کردن آسانسور با شتاب بالاسو، ترازو بزرگی F_N، نیروی عمودی وارد شده به شخص را ۹۳۹N نشان می‌دهد. بنابراین، نیروی برایند وارد شده به شخص در هنگام حرکت کردن آسانسور با شتاب بالاسو برابر است با

$$F_{net} = F_N - F_g = ۹۳۹\,\text{N} - ۷۰۸\,\text{N} \Rightarrow$$

$$F_{net} = ۲۳۱\text{N} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

اما شتاب شخص نسبت به چارچوب آسانسور شتاب‌دار $a_{p,c}$، صفر است. بنابراین، در چارچوب مرجع نالخت آسانسور شتاب‌دار، F_{net} با $ma_{p,c}$ مساوی نیست و قانون دوم نیوتون در آنجا صدق نمی‌کند.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۵-۷ شتاب جسم هُل دهنده‌ی جسم دیگر

برخی مسئله‌ها مربوط به اشیایی هستند که با هم حرکت می‌کنند، زیرا یکدیگر را هُل می‌دهند یا به هم وصل شده‌اند. در اینجا مثالی ارائه می‌شود، که در آن قانون دوم نیوتون برای ترکیب دو جسم و سپس برای تک تک اجسام به کار رفته است.

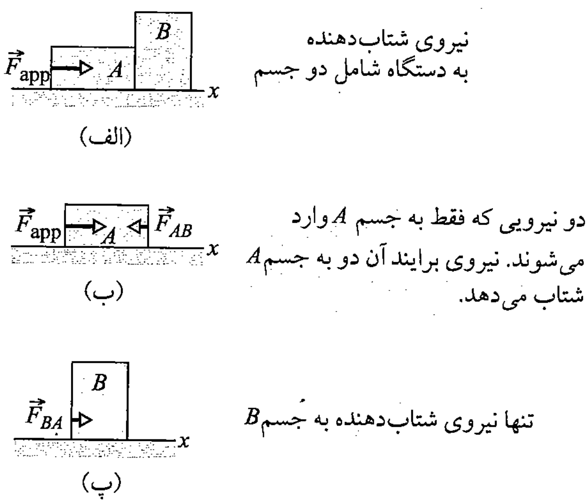
در شکل ۵-۱۸ الف، نیروی افقی ثابت $\vec{F}_{app}$ به بزرگی ۲۰N به جسم A به جرم $m_A = ۴/۰\text{kg}$ وارد می‌شود و جسم A، جسم B به جرم $m_B = ۶/۰\text{kg}$ را هُل می‌دهد. دو جسم بر روی یک سطح بی‌اصطکاک در راستای محور x می‌لغزند.

(الف) شتاب هر جسم چقدر است؟

خطای جدی: چون نیروی $\vec{F}_{app}$ به طور مستقیم به جسم A وارد می‌شود، این نیرو را با استفاده کردن از قانون دوم نیوتون به a، شتاب جسم A، ربط می‌دهیم. در ضمن، چون حرکت در راستای محور x انجام می‌شود قانون دوم نیوتون را برای مؤلفه‌ی x $(F_{net,x} = ma_x)$ به کار می‌بریم و چنین می‌نویسیم

$$F_{app} = m_A a$$

اما این راه حل کاملاً خطاست، زیرا $\vec{F}_{app}$ تنها نیروی افقی وارد شده به جسم A نیست، بلکه نیروی $\vec{F}_{AB}$ هم از سوی جسم B (چنان‌که شکل ۵-۱۸ ب نشان می‌دهد) به جسم A اثر می‌کند.



شکل ۵-۱۸ (الف) نیروی افقی ثابت $\vec{F}_{app}$ به‌جسم A وارد می‌شود و جسم A نیز جسم B را هُل می‌دهد. (ب) دو نیروی افقی به جسم A وارد می‌شوند. (پ) فقط یک نیروی افقی به‌جسم B وارد می‌شود.

راه حل بی‌نتیجه: اکنون نیروی $\vec{F}_{AB}$ را با نوشتن رابطه‌ی زیر برای محور x در محاسبه دخالت می‌دهیم

$$F_{app} - F_{AB} = m_A a$$

(به خاطر مخالف بودن جهت $\vec{F}_{AB}$ از علامت منفی استفاده شده است). اما F_{AB} مقداری نامعلوم است و با این معادله شتاب a

را نمی‌توان به دست آورد.

راه حل موفقیت‌آمیز: با توجه به جهتی که نیروی $\vec{F}_{app}$ دارد، دو جسم یک دستگاه صُلب متصل به هم را تشکیل می‌دهند. با استفاده کردن از قانون دوم نیوتون، این ***نیروی برایند وارد شده به دستگاه*** را می‌توان به ***شتاب دستگاه*** ربط داد. اکنون، باز هم قانون دوم را برای محور x می‌نویسیم

$$F_{app} = (m_A + m_B)a$$

این رابطه نشان می‌دهد که نیروی $\vec{F}_{app}$ به دستگاهی به جرم کل $m_A + m_B$ وارد می‌شود. با جانشانی مقادیر معلوم و حل کردن معادله نسبت به a، داریم

$$a = \frac{F_{app}}{m_A + m_B} = \frac{۲۰\,\mathrm{N}}{۴/۰\,\mathrm{kg} + ۶/۰\,\mathrm{kg}} \Rightarrow$$

$$a = ۲/۰\,\mathrm{m/s^۲}$$ **(پاسخ)**

بنابراین، شتاب دستگاه و شتاب هر یک از دو جسم در جهت مثبت محور x با بزرگی $۲/۰\,\mathrm{m/s^۲}$ است.

(ب) نیروی افقی $\vec{F}_{BA}$ وارد شده به جسم B از سوی جسم A (شکل ۵-۱۸ پ) چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

نیروی برایند وارد شده به جسم B را از طریق قانون دوم نیوتون می‌توان به شتاب جسم B ربط داد.

محاسبه: در اینجا می‌توان قانون نیوتون را برای مؤلفه‌های مربوط به محور x چنین نوشت

$$F_{BA} = m_B a$$

که با توجه به مقادیر معلوم، خواهیم داشت

$$F_{BA} = (۶/۰\,\mathrm{kg})(۲/۰\,\mathrm{m/s^۲}) \Rightarrow$$

$$F_{BA} = ۱۲\,\mathrm{N}$$ **(پاسخ)**

بنابراین، نیروی $\vec{F}_{BA}$ در جهت مثبت محور x با بزرگی ۱۲N اثر می‌کند.

مرور و چکیده‌ی مطالب

مکانیک نیوتونی هرگاه یک شیء تحت اثر یک یا چند **نیرو** (به صورت هُل دادن یا کشیدن) از سوی اشیای دیگرقرارگیرد، سرعت آن می‌تواند تغییر کند (شیء می‌تواند شتاب‌دار شود). ***مکانیک نیوتونی*** شتاب‌ها و نیروها را به‌یکدیگر ربط می‌دهد.

نیرو نیروها کمیت‌هایی برداری‌اند. بزرگی نیرو برحسب شتابی که به کیلوگرم استاندارد می‌دهد، تعریف می‌شود. نیرویی که به جسم استاندارد شتاب $۱\,\mathrm{m/s^۲}$ می‌دهد، بنا به تعریف، دارای بزرگی ۱N است. جهت نیرو همان جهت شتابی است که آن نیرو ایجاد می‌کند. نیروها طبق قاعده‌های جبر برداری با هم ترکیب می‌شوند. **نیروی خالص (نیروی برایند)** وارد شده به یک جسم برابر با مجموع برداری تمام نیروهای وارد شده به آن جسم است.

قانون اول نیوتون هرگاه هیچ نیروی خالصی به یک جسم وارد نشود، جسم اگر ساکن باشد ساکن می‌ماند و اگر در حال حرکت باشد با حرکت راست‌خط و با تندی ثابت به حرکت ادامه می‌دهد.

چارچوب‌های مرجع لَخت چارچوب‌های مرجعی را که مکانیک نیوتونی در آن‌ها معتبر است، ***چارچوب‌های مرجع لَخت***، یا به طور ساده، ***چارچوب‌های لَخت*** می‌نامند. چارچوب‌های مرجعی را که مکانیک نیوتونی در آن‌ها معتبر نیست، ***چارچوب‌های مرجع نالخت***، یا ***چارچوب‌های نالخت*** می‌نامند.

جرم **جرم** یک جسم، مشخصه‌ای از جسم است که شتاب آن را به نیروی خالص به وجود آورنده‌ی شتاب ربط می‌دهد. جرم کمیتی نرده‌ای است.

قانون دوم نیوتون نیروی برایند $\vec{F}_{net}$، وارد شده به جسمی به جرم m بنا به رابطه‌ی زیر با شتاب جسم $\vec{a}$، رابطه دارد

$$\vec{F}_{net} = m\vec{a} \qquad (۵\text{-}۱)$$

این رابطه را به صورت رابطه‌های مؤلفه‌ای نیز می‌توان نوشت

$$F_{net,x} = ma_x \text{ ،} \quad F_{net,y} = ma_y \quad \text{و} \quad F_{net,z} = ma_z \qquad (۵\text{-}۲)$$

قانون دوم نیوتون نشان می‌دهد که در دستگاه یکاهای SI، داریم

$$1\mathrm{N} = 1\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}^2 \qquad (۳-۵)$$

نمودار جسم ـ آزاد یک نمودار ساده شده است که در آن تنها **یک جسم** در نظر گرفته می‌شود. این جسم را به صورت یک شکل طرح‌وار، یا به صورت یک خال، نشان می‌دهند. در این نمودار نیروهای خارجی وارد شده به جسم رسم می‌شوند و یک دستگاه مختصات با سمت‌گیری مناسب چنان رسم می‌شود که حل کردن مسئله آسان شود.

معرفی برخی نیروهای خاص **نیروی گرانشی** وارد شده به یک جسم F_g، نیروی جاذبه‌ای است که از سوی جسم دیگر به آن وارد می‌شود. در این کتاب، در بیشتر حالت‌ها جسم دیگر را زمین، یا یک جسم اخترشناختی دیگر، در نظر می‌گیریم. در مورد زمین نیروی گرانشی به سمت پایین و به سوی زمین است و زمین یک چارچوب مرجع لخت فرض می‌شود. با این فرض، بزرگی نیروی $\vec{F}_g$ برابر است با

$$F_g = mg \qquad (۸-۵)$$

که در آن m جرم جسم و g بزرگی شتاب حرکت در سقوط آزاد است.

وزن یک جسم W، برابر با بزرگی نیروی بالاسوی لازم برای متوازن شدن با نیروی گرانشی مؤثر بر جسم است. رابطه‌ی وزن و جرم جسم چنین است

$$W = mg \qquad (۱۲-۵)$$

نیروی عمودی $\vec{F}_N$ نیرویی است که از سوی سطح در قبال نیرویی که جسم را به سطح می‌فشارد به جسم وارد می‌شود. نیروی عمودی همیشه بر سطح عمود است.

نیروی اصطکاک $\vec{f}$ نیرویی است که وقتی جسمی بر روی یک سطح می‌لغزد، یا می‌خواهد بلغزد، به آن جسم وارد می‌شود. این نیرو همیشه با سطح موازی است و در خلاف جهت لغزیدن است. بر روی یک ***سطح بی‌اصطکاک***، نیروی اصطکاک قابل چشم‌پوشی است.

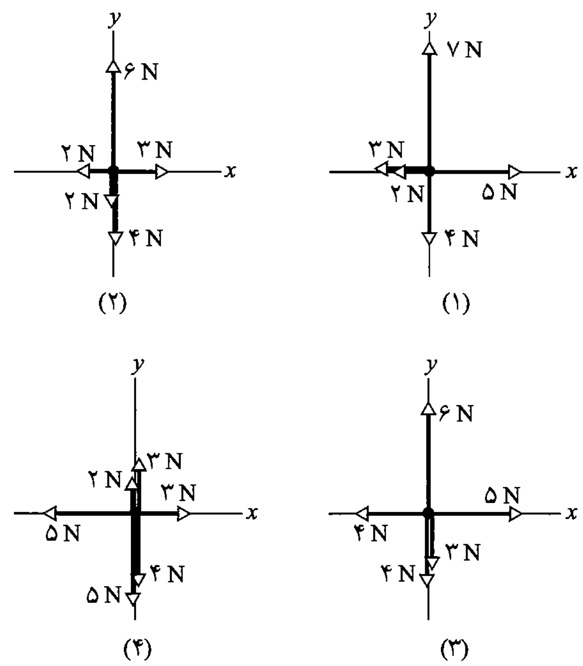
وقتی ریسمانی تحت **کشش** قرار می‌گیرد، از هر دو سر جسم را می‌کشد. این نیروی کشش در راستای ریسمان و جهتش از نقطه‌ی اتصال به جسم به برون‌سو است. برای یک ریسمان ***بی‌جرم*** (ریسمان با جرم قابل چشم‌پوشی) بزرگی نیروی کشش در دو سر ریسمان، حتی اگر ریسمان از روی یک قرقره‌ی بی‌جرم و بی‌اصطکاک (قرقره‌ای با جرم قابل چشم‌پوشی و با اصطکاک ناچیز محور در مقابل چرخش قرقره) گذشته باشد، یکسان و برابر با T است.

قانون سوم نیوتون هرگاه جسم C نیروی $\vec{F}_{BC}$ را به‌جسم B وارد کند، جسم B هم نیروی $\vec{F}_{CB}$ را به جسم C وارد می‌کند:

$$\vec{F}_{BC} = -\vec{F}_{CB}$$

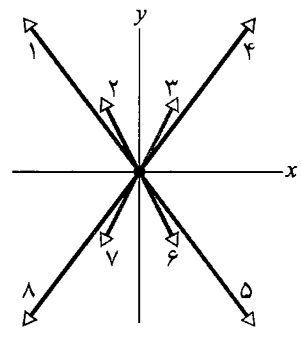
پرسش‌ها

۱ شکل ۵-۱۹ نمودار جسم ـ آزاد مربوط به چهار حالت، با دید از بالا، را نشان می‌دهد که شیئی توسط چند نیرو بر روی یک سطح بی‌اصطکاک کشیده می‌شود. در کدام حالت شتاب شیء $\vec{a}$، دارای (الف) مؤلفه‌ی x و (ب) مؤلفه‌ی y است؟ (پ) در هر حالت، جهت $\vec{a}$ را با ذکر نام ربع دستگاه مختصات یا جهت محور مربوط، مشخص کنید. (این کار را با محاسبه‌های ذهنی هم می‌توان انجام داد).



شکل ۵-۱۹ پرسش ۱.

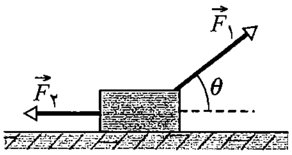
۲ دو نیروی افقی $\vec{F}_1 = (3N)\hat{i} - (4N)\hat{j}$ و $\vec{F}_2 = -(1N)\hat{i} - (2N)\hat{j}$ یک ظرف دِسِر موز را روی یک میز غذای بی‌اصطکاک می‌کشند. بدون استفاده کردن از ماشین حساب معین کنید کدام



شکل ۵-۲۰ پرسش ۲.

یک از بردارهای رسم شده در نمودار جسم ـ آزاد شکل ۵-۲۰، (الف) $\vec{F}_1$ و (ب) $\vec{F}_2$، را از همه بهتر نشان می‌دهند. مؤلفه‌ی نیروی برایند در راستای (پ) محور x و (ت) محور y، چیست؟ (ث) بردار نیروی برایند و (ج) بردار شتاب ظرف دِسِر در کدام ربع دستگاه مختصات قرار دارد؟

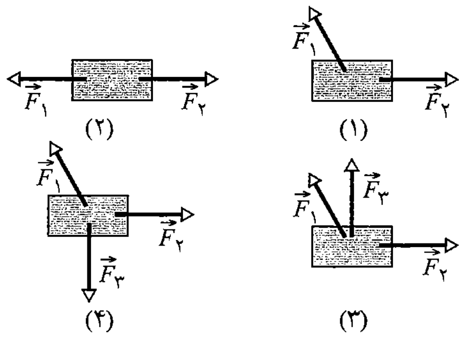
۳ در شکل ۵-۲۱، دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ به یک جعبه‌ی غذا، که با سرعت ثابت بر روی یک سطح بی‌اصطکاک می‌لغزد، وارد می‌شوند. می‌خواهیم بدون تغییر دادن بزرگی $\vec{F}_1$، زاویه‌ی این نیرو، θ، را کاهش دهیم. برای ثابت ماندن سرعت، آیا بزرگی $\vec{F}_2$ را باید افزایش داد، کاهش داد یا ثابت نگه داشت؟



شکل ۵-۲۱ پرسش ۳.

۴ در زمان $t = 0$ نیروی ثابت $\vec{F}$ به قطعه سنگی که در اعماق فضا در راستای محور $+x$ حرکت می‌کند، وارد می‌شود. (الف) در زمان‌های $t > 0$، کدام یک از تابع‌های $x(t)$ زیر، مکان سنگ را مشخص می‌کند؟ (۱) $x = 4t - 3$، (۲) $x = -4t^2 + 6t - 3$ و (۳) $x = 4t^2 + 6t - 3$. (ب) برای کدام تابع، نیروی $\vec{F}$ در خلاف جهت حرکت آغازی سنگ است؟

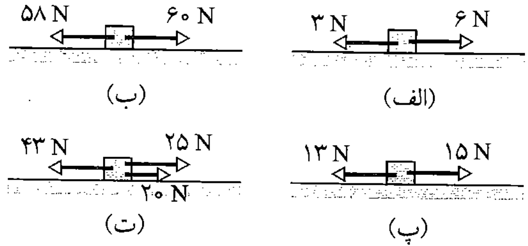
۵ شکل ۵-۲۲ تصویر چهار حالت را، با دید از بالا، نشان می‌دهد که در آن نیروها به یک جسم واقع بر یک سطح بی‌اصطکاک اثر می‌کنند. اگر بزرگی‌های نیروها به طور مناسب انتخاب شوند، در



شکل ۵-۲۲ پرسش ۵.

کدام حالت ممکن است جسم، (الف) ساکن باشد و (ب) با سرعت ثابت حرکت کند؟

۶ شکل ۵-۲۳ یک جعبه‌ی نان را در چهار حالت نشان می‌دهد که به آن نیروهای افقی وارد می‌شوند. این حالت‌ها را برحسب بزرگی شتاب جعبه، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

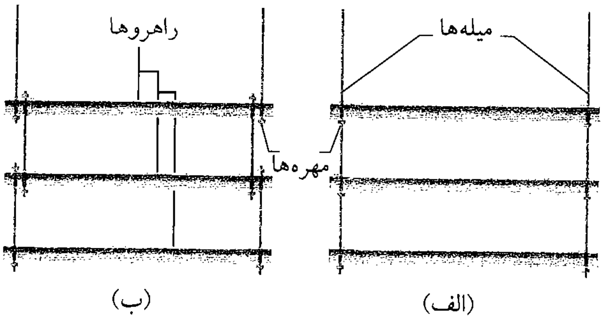


شکل ۵-۲۳ پرسش ۶.

۷ تاریخ ۱۷ جولای ۱۹۸۱، آمریکا، کانزاس سیتی[1]: هتل تازه افتتاح شده‌ی هایات ریجنسی[2] مملو از جمعیتی است که در حال تماشای برنامه‌ی موسیقی یک گروه معروف در دهه‌ی ۱۹۴۰ هستند. بسیاری از مردم در راهروهایی جمع شده‌اند که مانند پل‌های معلق بر فراز یک ایوان پهن کشیده شده‌اند. ناگهان دو تا از این راهروها می‌رُمبند و بر سر افراد شرکت کننده در جشن در ایوان فرو می‌ریزند.

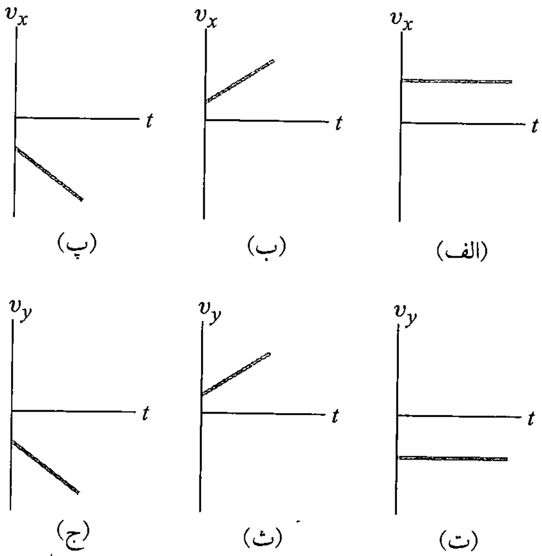
این راهروها توسط پیچ و مهره به میله‌های قائم وصل شده و بر روی هم به صورت معلق قرار گرفته بودند. در طراحی اولی قرار بود فقط از دو میله‌ی بلند استفاده شود که هر سه راهرو را به یکدیگر وصل کنند (شکل ۵-۲۴ الف). اگر مجموع جرم هر راهرو و افراد روی آن M باشد، جرمی که در کل دو مهره در (الف) پایین‌ترین راهرو و (ب) بالاترین راهرو تحمل می‌کنند، چقدر است؟

گذاشتن مهره‌ها روی یک میله فقط در دو انتهای آن امکان‌پذیر است، در نتیجه طراحی اولی را چنین تغییر دادند: به جای دو میله، از شش میله برای اتصال دو به دوی راهروها استفاده شد (شکل ۵-۲۴ ب). در این صورت مجموع جرمی که دو مهره در (پ) پایین‌ترین راهرو و (ت) سمت بالای بالاترین راهرو، و (ث) سمت پایین بالاترین راهرو تحمل می‌کنند، چقدر است؟ این طراحی بود که ناموفق و یک اشتباه ساده‌ی مهندسی بود.



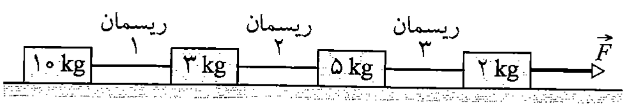
شکل ۵-۲۴ پرسش ۷.

۸ شکل ۵-۲۵ سه نمودار تغییرات مؤلفه‌ی سرعت $v_x(t)$ و سه نمودار تغییرات مؤلفه‌ی سرعت $v_y(t)$ را نشان می‌دهد. این نمودارها با مقیاس رسم نشده‌اند. کدام نمودار $v_x(t)$ و کدام نمودار $v_y(t)$ بهتر از همه با هر یک از چهار حالت مربوط به پرسش ۱ و شکل ۵-۱۹ متناظر است؟



شکل ۵-۲۵ پرسش ۸.

۹ شکل ۵-۲۶ قطاری متشکل از چهار قطعه را نشان می‌دهد که با نیروی $\vec{F}$ بر روی یک سطح بی‌اصطکاک کشیده می‌شوند. جرم کل قطعه‌هایی که به سمت راست توسط، (الف) نیروی $\vec{F}$، (ب) ریسمان ۳ و (پ) ریسمان ۱، شتاب پیدا می‌کنند، چیست؟

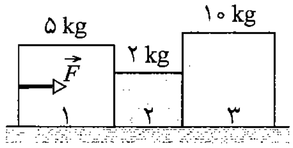


شکل ۵-۲۶ پرسش ۹.

1. Kansas City 2. Hyatt Regency

(ت) این قطعه‌ها را با توجه به بزرگی شتاب آن‌ها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. (ث) ریسمان‌ها را با توجه به نیروی کشش آن‌ها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

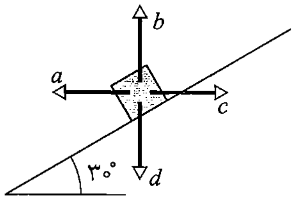
۱۰ شکل ۵-۲۷ سه قطعه‌ی به هم چسبیده را نشان می‌دهد که روی یک سطح بی‌اصطکاک با نیروی $\vec{F}$ هُل داده می‌شوند. جرم کل قطعه‌هایی که به سمت راست توسط، (الف) نیروی $\vec{F}$، (ب) نیروی $\vec{F}_{21}$، وارد شده به قطعه‌ی ۲ از سوی قطعه‌ی ۱، و (پ) نیروی $\vec{F}_{32}$، وارد شده به قطعه‌ی ۳ از سوی قطعه‌ی ۲، شتاب پیدا می‌کنند، چیست؟ (ت) این قطعه‌ها را برحسب بزرگی شتاب آن‌ها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. (ث) نیروهای $\vec{F}$، $\vec{F}_{21}$ و $\vec{F}_{32}$ را برحسب بزرگی آن‌ها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۵-۲۷ پرسش ۱۰.

۱۱ نیروی قائم $\vec{F}$ به جسمی به جرم m که روی سطح زمین قرار دارد، وارد می‌شود. هنگامی که بزرگی F به تدریج از صفر افزایش پیدا می‌کند بزرگی نیروی عمودی $\vec{F}_N$ وارد شده به جسم از سوی سطح در حالتی که نیروی $\vec{F}$، (الف) پایین‌سو و (ب) بالاسو، باشد، چگونه تغییر می‌کند؟

۱۲ شکل ۵-۲۸ چهار انتخاب مربوط به جهت و راستای نیرویی با بزرگی F را نشان می‌دهد که می‌توان به یک جسم واقع بر روی یک سطح شیب‌دار وارد کرد. این راستاها افقی یا قائم هستند. (برای انتخاب b، نیرو آن‌قدر نیست که جسم را از سطح جدا کند). این انتخاب‌ها را برحسب بزرگی نیروی عمودی وارد شده به جسم از سوی سطح، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۵-۲۸ پرسش ۱۲.

مسئله‌ها

پودمان ۵-۱ قانون‌های اول و دوم نیوتون

* ۱ یک جسم ۳٫۰ کیلوگرمی فقط تحت اثر دو نیروی افقی قرار می‌گیرد و می‌تواند روی یک سطح بی‌اصطکاک حرکت کند. یکی از نیروها ۹٫۰N در جهت خاور و نیروی دیگر ۸٫۰N است که تحت زاویه‌ی ۶۲ درجه‌ی شمال محور باختری اثر می‌کند. بزرگی شتاب جسم چقدر است؟

* ۲ دو نیروی افقی در صفحه‌ی xy، به یک تخته ساطور ۲٫۰ کیلوگرمی واقع بر روی پیشخوان بی‌اصطکاک آشپزخانه وارد می‌شوند. یکی ازنیروها $\vec{F}_1 = (۳٫۰\,\mathrm{N})\hat{i} + (۴٫۰\,\mathrm{N})\hat{j}$ است. شتاب وارد شده به تخته ساطور را با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه چنان پیدا کنید که نیروی دیگر یکی از نیروهای زیر باشد

(الف) $\vec{F}_2 = (-۳٫۰\,\mathrm{N})\hat{i} + (-۴٫۰\,\mathrm{N})\hat{j}$،

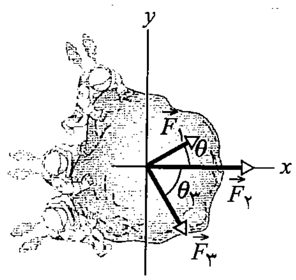
(ب) $\vec{F}_2 = (-۳٫۰\,\mathrm{N})\hat{i} + (۴٫۰\,\mathrm{N})\hat{j}$، و

(پ) $\vec{F}_2 = (۳٫۰\,\mathrm{N})\hat{i} + (-۴٫۰\,\mathrm{N})\hat{j}$.

* ۳ اگر جرم ۱kg استاندارد تحت زاویه‌ی ۲۰ درجه نسبت به محور x مثبت با شتاب $۲٫۰۰\,\mathrm{m/s^2}$ حرکت کند، (الف) مؤلفه‌ی x و (ب) مؤلفه‌ی y، نیروی برایند وارد شده به آن، و (پ) نیروی برایند به‌صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟

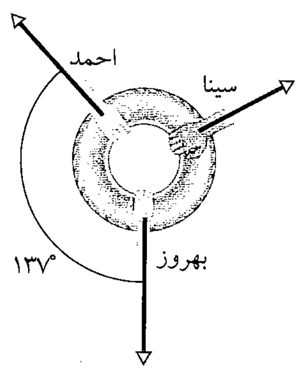
** ۴ هرگاه به ذره‌ای دو نیرو وارد شود، ذره با سرعت ثابت $\vec{v} = (۳\,\mathrm{m/s})\hat{i} - (۴\,\mathrm{m/s})\hat{j}$ حرکت می‌کند. اگر یکی از نیروها $\vec{F}_1 = (۲\,\mathrm{N})\hat{i} + (-۶\,\mathrm{N})\hat{j}$ باشد، نیروی دیگر چیست؟

** ۵ سه فضانورد با موتورهای موشکی به پشت بسته‌ی خود، به‌پیش رانده می‌شوند. این فضانوردان با نیروهای $F_1 = ۳۲\,\mathrm{N}$، $F_2 = ۵۵\,\mathrm{N}$، $F_3 = ۴۱\,\mathrm{N}$ و $\theta_1 = ۳۰°$ و $\theta_3 = ۶۰°$، مطابق شکل ۵-۲۹، سیارکی به جرم ۱۲۰kg را به سمت یک پایگاه پردازش در فضا هدایت می‌کنند. شتاب این سیارک (الف) به صورت نمادگذاری بردارهای یکه و (ب) بزرگی و (پ) جهت نسبت به محور x مثبت چیست؟



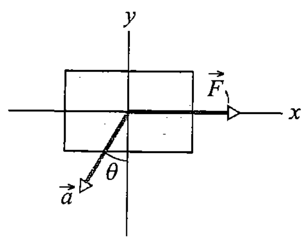
شکل ۵-۲۹ مسئله‌ی ۵.

** ۶ در یک مسابقه‌ی طناب کشی، احمد، بهروز و سینا، یک لاستیک خودرو را به طور افقی تحت زاویه‌های نشان داده شده در نمای از بالا در شکل ۵-۳۰، می‌کشند. با وجود وارد شدن این سه نیرو لاستیک ساکن می‌ماند. احمد با نیروی $\vec{F}_A$ به بزرگی $220\,N$ و سینا با نیروی $\vec{F}_C$ به بزرگی $170\,N$ لاستیک را می‌کشند. توجه کنید که جهت $\vec{F}_C$ مشخص نشده است. بزرگی نیروی بهروز $\vec{F}_B$، چیست؟



شکل ۵-۳۰ مسئله‌ی ۶.

** ۷ در شکل ۵-۳۱، دو نیرو به یک جعبه‌ی ۲/۰ کیلوگرمی وارد می‌شوند، اما درشکل فقط یکی از نیروها داده شده است. به‌ازای $F_1 = 20.0\,N$، $a = 12.0\,m/s^2$، و $\theta = 30.0°$، نیروی



شکل ۵-۳۱ مسئله‌ی ۷.

دوم را به صورت، (الف) نمادگذاری بردارهای یکه و (ب) بزرگی و (پ) زاویه نسبت به محور x مثبت، معین کنید.

** ۸ یک شیء ۲/۰۰ کیلوگرمی تحت تأثیر سه نیرو دارای شتاب $\vec{a} = -(8.00\,m/s^2)\hat{i} + (6.00\,m/s^2)\hat{j}$ می‌شود. اگر دو تا از این نیروها به صورت $\vec{F}_1 = (30.0\,N)\hat{i} + (16.0\,N)\hat{j}$ و $\vec{F}_2 = -(12.0\,N)\hat{i} + (8.00\,N)\hat{j}$ باشند، نیروی سوم را پیدا کنید.

** ۹ یک‌جسم ۰/۳۴۰ کیلوگرمی درصفحه‌ی xy طبق معادله‌های

$$x(t) = -15.00 + 2.00t - 4.00t^3$$

و

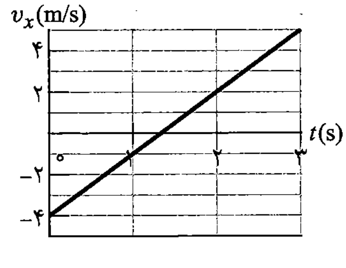
$$y(t) = 25.00 + 7.00t - 9.00t^2$$

حرکت می‌کند. در این معادله‌ها x و y برحسب متر و t برحسب ثانیه است. در زمان $t = 0.700\,s$، (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی نیروی برایند وارد شده به جسم (نسبت به جهت مثبت محور x) و (پ) زاویه‌ی مسیر حرکت جسم، را پیدا کنید.

** ۱۰ یک جسم ۰/۱۵۰ کیلوگرمی طبق معادله‌ی $x(t) = -13.00 + 2.00t + 4.00t^2 - 3.00t^3$ در طول محور x حرکت می‌کند. در این معادله x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. نیروی برایند وارد شده به این جسم در زمان $t = 3.40\,s$ به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟

** ۱۱ جسمی به جرم $2.0\,kg$ با یک نیروی تغییرپذیر در راستای محور x به‌پیش رانده می‌شود. مکان این‌جسم ازمعادله‌ی $x = 3.0\,m + (4.0\,m/s)t + ct^2 - (2.0\,m/s^3)t^3$، به‌دست می‌آید، که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه‌است. ضریب c یک‌مقدار ثابت است. در زمان $t = 3.0\,s$، بزرگی نیروی وارد شده به جسم، $36\,N$ در جهت منفی محور x است. مقدار c چقدر است؟

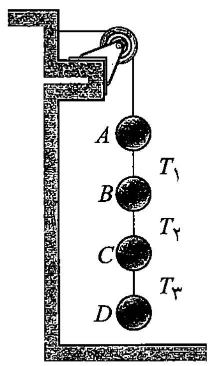
*** ۱۲ دو نیروی افقی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ به یک قرص ۴/۰ کیلوگرمی وارد می‌شوند و آن را روی یک سطح یخی بی‌اصطکاک واقع در دستگاه مختصات xy می‌لغزانند. نیروی $\vec{F}_1$ در جهت مثبت محور x و دارای بزرگی $7.0\,N$ است. نیروی $\vec{F}_2$ دارای بزرگی $9.0\,N$ است. شکل ۵-۳۲ مؤلفه‌ی x سرعت قرص v_x، را به صورت تابعی از زمان در حین لغزیدن قرص نشان می‌دهد. زاویه‌ی میان راستاهای ثابت نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ چیست؟



شکل ۵-۳۲ مسئله‌ی ۱۲.

پودمان ۵-۲ معرفی برخی نیروهای خاص

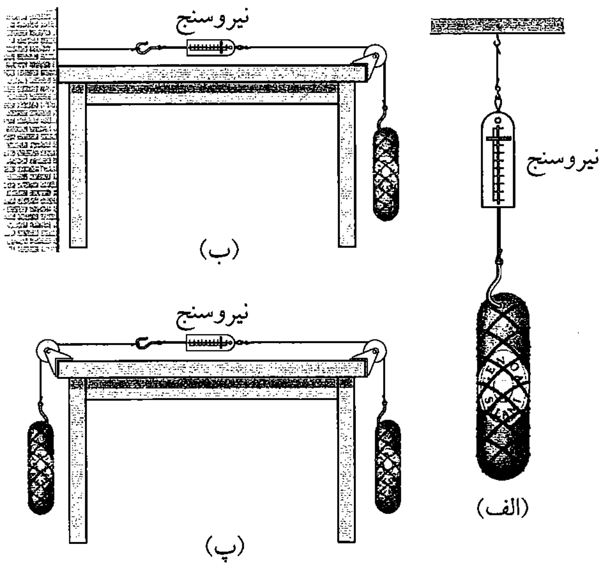
* **۱۳** شکل ۵-۳۳ آرایشی را نشان می‌دهد که در آن چهار قرص به وسیله‌ی ریسمان آویخته شده‌اند. بلندترین ریسمان، یعنی ریسمان بالایی از روی یک قرقره‌ی بی‌اصطکاک گذشته است و با نیرویی به بزرگی ۹۸N دیوار متصل به ریسمان را می‌کشد. نیروهای کشش درسه ریسمان کوتاه‌تر $T_1 = ۵۸/۸\,\text{N}$، $T_2 = ۴۹/۰\,\text{N}$ و $T_3 = ۹/۸\,\text{N}$ هستند. جرم (الف) قرص A، (ب) قرص B، (پ) قرص C و (ت) قرص D، چیست؟



شکل ۵-۳۳ مسئله‌ی ۱۳.

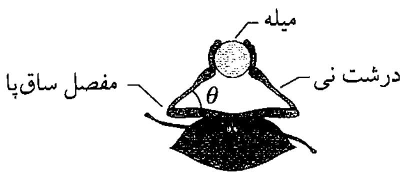
* **۱۴** جسمی به‌وزن ۳/۰N درروی یک‌سطح افقی به‌حال سکون قرار دارد. یک نخ قائم متصل به جسم نیرویی به بزرگی ۱/۰N به بالاسو به جسم وارد می‌کند. (الف) بزرگی و (ب) جهت نیرویی که از سوی جسم به سطح افقی وارد می‌شود، چیست؟

* **۱۵** (الف) یک بسته‌ی کالباس به جرم ۱۱/۰kg به وسیله‌ی ریسمانی به یک نیروسنج وصل شده و نیروسنج نیز با ریسمان دیگری از سقف آویخته شده است (شکل ۵-۳۴ الف). نیروسنج که برحسب یکاهای وزن SI درجه‌بندی شده است، چه عددی را نشان می‌دهد؟ (ب) در شکل ۵-۳۴ ب، بسته‌ی کالباس از طریق ریسمانی که از روی قرقره‌ای عبور کرده به نیروسنج وصل شده است. سر دیگر نیروسنج نیز با ریسمان دیگری به دیوار متصل است. در این حالت نیروسنج چه عددی را نشان می‌دهد؟ (پ) در شکل ۵-۳۴ پ، نیروسنج به‌جای دیوار، در سمت چپ به یک بسته‌ی کالباس ۱۱/۰ کیلوگرمی دیگر وصل شده است و دستگاه در حال سکون قرار دارد. نیروسنج چه عددی را نشان می‌دهد؟



شکل ۵-۳۴ مسئله‌ی ۱۵.

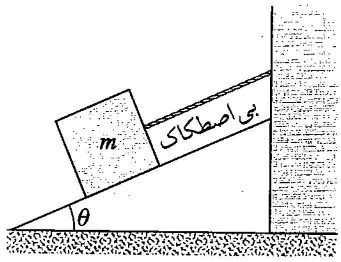
** **۱۶** برخی حشره‌ها با آویزان شدن از یک میله‌ی باریک می‌توانند (مانند یک شاخه‌ی کوچک درخت) در زیر آن راه بروند. فرض کنید جرم چنین حشره‌ای m است و از یک میله‌ی افقی، مطابق شکل ۵-۳۵، تحت زاویه‌ی $\theta = ۴۰°$ آویزان است. هر شش پای این حشره تحت نیروی کشش یکسان قرار دارند و ران حشره که به بدن نزدیک است، افقی است. (الف) نسبت نیروی کشش در هر درشت نی (بخش جلویی ساق پا) به وزن حشره چقدر است؟ (ب) اگر حشره ساق‌های پای خود را باز کند، آیا نیروی کشش در هر درشت نی افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟



شکل ۵-۳۵ مسئله‌ی ۱۶.

پودمان ۵-۳ کاربرد قانون‌های نیوتون

* **۱۷** در شکل ۵-۳۶، جرم جسم $8/5\,kg$ و زاویه‌ی θ برابر با ۳۰ درجه است. (الف) نیروی کشش ریسمان و (ب) نیروی عمودی وارد شده به جسم، چقدر است؟ (پ) اگر ریسمان قطع شود بزرگی شتاب حاصل برای جسم را پیدا کنید.



شکل ۵-۳۶ مسئله‌ی ۱۷.

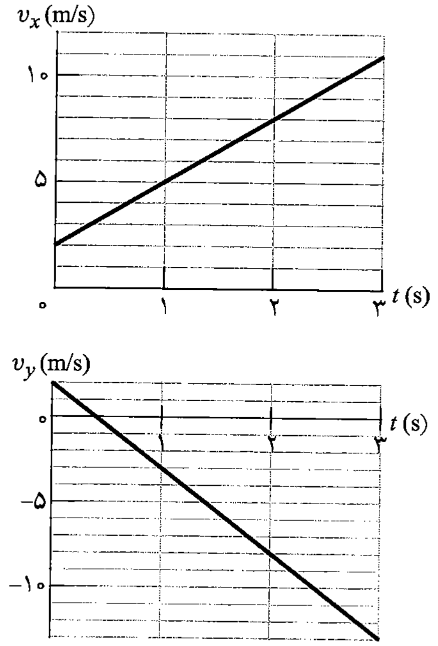
* **۱۸** در آوریل ۱۹۷۴ جان ماسیس[1] بلژیکی ترتیبی داد تا دو واگن قطارمسافری را حرکت دهد. او در حالی که انتهای یک طناب متصل به واگن‌ها را به کمک دستمالی به دندان گرفته و خود را با فشار دادن به بست‌های عرضی ریل‌ها به عقب خم کرده بود، این کار را انجام داد. وزن واگن‌ها روی هم $700\,kN$ (در حدود ۸۰ تن) بود. فرض کنید او واگن‌ها را با نیروی ثابتی که ۲/۵ برابر وزن بدنش بود، تحت زاویه‌ی بالاسوی $\theta = 30°$ نسبت به افق می‌کشید. جرم او $80\,kg$ بود و واگن‌ها را به اندازه‌ی $1/0\,m$ حرکت داد. با چشم‌پوشی از هر گونه نیروی بازدارنده‌ی ناشی از دوران چرخ‌ها، تندی واگن‌ها را در پایان کشیدن آن‌ها پیدا کنید.

* **۱۹** یک سورتمه‌ی موشکی ۵۰۰ کیلوگرمی می‌تواند با یک نیروی ثابت در مدت $1/8\,s$ از حال سکون تا تندی $1600\,km/h$ شتاب بگیرد. بزرگی نیروی برایند لازم چقدر است؟

* **۲۰** خودرویی که با تندی $53\,km/h$ در حال حرکت است، به پایه‌ی یک پل برخورد می‌کند. مسافر درون خودرو پس از پیمودن مسافت $65\,cm$ به سمت جلو (نسبت به جاده) توسط یک کیسه‌ی هوا متوقف می‌شود. جرم مسافر $41\,kg$ است. بزرگی نیروی وارد شده به بالاتنه‌ی مسافر (با فرض ثابت بودن) چقدر است؟

1. John Massis

* **۲۱** نیروی افقی ثابت $\vec{F}_a$ بسته‌ای ۲/۰۰ کیلوگرمی را بر روی یک سطح بی‌اصطکاک، که دستگاه مختصات xy بر آن رسم شده است، هُل می‌دهد. شکل ۵-۳۷ نمودار مؤلفه‌های سرعت x و y این بسته را برحسب زمان نشان می‌دهد. (الف) بزرگی و (ب) جهت $\vec{F}_a$، چیست؟



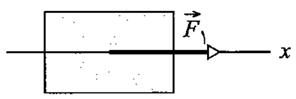
شکل ۵-۳۷ مسئله‌ی ۲۱.

* **۲۲** در یک پارک تفریحی شخصی در اتاقکی نشسته که قرار است با شتاب $1/24g$، که در آن $g = 9/80\,m/s^2$، در جهت منفی محور y به پایین‌سو کشیده شود. یک سکه‌ی ۰/۵۶۷ گرمی روی زانوی این شخص قرار دارد. شتاب این سکه در لحظه‌ی شروع حرکت، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، (الف) نسبت به زمین و (ب) نسبت به شخص، چیست؟ (پ) چه مدت طول می‌کشد تا این سکه به سقف اتاقک در ارتفاع $2/20\,m$ بالاتر از زانوی شخص، برسد؟ با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه، (ت) نیروی واقعی وارد شده به سکه و (ث) نیروی ظاهری وارد شده به سکه، برحسب شتاب سکه که شخص اندازه می‌گیرد، چیست؟

* **۲۳** تارزان که $820\,N$ وزن دارد، در لبه‌ی پرتگاهی انتهای یک شاخه‌ی ۲۰/۰ متری آویخته شده از یک درخت تاک بلند را تحت زاویه‌ی ۲۲/۰ درجه نسبت به راستای قائم می‌گیرد و

تاب می‌خورد. فرض کنید محور x از لبه‌ی پرتگاه به طور افقی به برون سو امتداد دارد و محور y هم از لبه‌ی پرتگاه رو به بالا در نظر گرفته شده است. بی‌درنگ پس از جدا شدن تارزان از لبه‌ی پرتگاه نیروی کشش تاک ۷۶۰N است. در این لحظه (الف) نیروی وارد شده به تارزان از سوی شاخه‌ی تاک به صورت نمادگذاری بردارهای یکه و نیروی برایند وارد شده به آن، (ب) به صورت نمادگذاری بردارهای یکه و به صورت (پ) بزرگی و (ت) زاویه نسبت به محور x مثبت، چیست؟ (ث) بزرگی و (ج) زاویه‌ی شتاب تارزان، درست پس از آن، چیست؟

* **۲۴** در شکل ۵-۳۸، نشان داده شده از بالا، دو نیروی افقی به جعبه‌ای ۲٫۰ کیلوگرمی وارد می‌شوند، اما فقط یکی از نیروها (با بزرگی $F_1 =$ ۲۰N) نشان داده شده است. جعبه در راستای محور x حرکت می‌کند. به ازای هر یک از مقادیر شتاب a_x جعبه که در زیر می‌آیند، نیروی دوم را به صورت نمادگذاری بردارهای یکه پیدا کنید: (الف) ۱۰m/s²، (ب) ۲۰m/s²، (پ) صفر، (ت) ۱۰m/s²− و (ث) ۲۰m/s²−.



شکل ۵-۳۸ مسئله‌ی ۲۴.

* **۲۵** ***فشار تابشی خورشید.*** «قایق خورشیدی» فضاپیمایی با یک بادبان بزرگ است که با نور خورشید رانده می‌شود. اگر چه میزان این راندن فضاپیما درمقیاس عادی بسیار ضعیف است، فضاپیما می‌تواند بدون صرف شدن هزینه و پیمودن یک سفر آرام از خورشید دور شود. فرض کنید فضاپیما دارای جرم ۹۰۰kg و نیروی تابشی داده شده به آن ۲۰N است. (الف) بزرگی شتاب حاصل چقدر است؟ اگر فضاپیما از حال سکون به راه بیفتد، (ب) در مدت یک روز چه مسافتی را می‌پیماید و (پ) در این حالت با چه تندی‌ای حرکت می‌کند؟

* **۲۶** نیروی کششی که یک نخ ماهیگیری در هنگام کشیدن سریع تحمل می‌کند، به طور معمول، «قدرت نخ» نامیده می‌شود. کمترین قدرت نخ چقدر باید باشد تا بتواند یک ماهی به وزن ۸۵N را که با تندی ۲٫۸m/s حرکت می‌کند، در طی مسافت ۱۱cm متوقف کند؟ شتاب کندکننده را ثابت در نظر بگیرید.

* **۲۷** الکترونی با تندی $۱٫۲\times۱۰^{۷}$m/s به طور افقی به ناحیه‌ای وارد می‌شود که در آنجا یک‌نیروی قائم و ثابت $۴٫۵\times۱۰^{-۱۶}$N به الکترون اثر می‌کند. جرم الکترون $۹٫۱۱\times۱۰^{-۳۱}$kg است. فاصله‌ای را که الکترون در راستای قائم در مدت پیمودن مسافت افقی، ۳۰mm منحرف می‌شود، حساب کنید.

* **۲۸** اگر خودرویی به وزن $۱٫۳۰\times۱۰^{۴}$N و در حال حرکت با تندی ۴۰km/h را ترمز کنند، پس از پیمودن ۱۵m متوقف می‌شود. فرض کنید نیرویی که خودرو را متوقف می‌کند ثابت است. مطلوب است تعیین (الف) بزرگی این نیرو و (ب) زمان لازم برای متوقف شدن خودرو. اگر تندی آغازی خودرو دو برابر شود و خودرو تحت اثر همان نیروی ترمز قرار گیرد، (پ) مسافت پیموده شده تا زمان توقف و (ت) زمان لازم برای متوقف شدن خودرو، چند برابر می‌شود؟ (این موضوع می‌تواند درسی باشد برای آگاهی از خطر رانندگی با تندی‌های بالا).

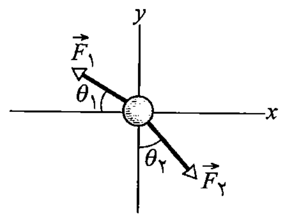
* **۲۹** یک مأمور آتش‌نشانی که ۷۱۲N وزن دارد، با شتاب ۳٫۰۰m/s² از یک تیر قائم به پایین می‌لغزد. (الف) بزرگی و (ب) جهت (به سمت بالا یا پایین) نیروی قائمی که از سوی تیر به مأمور وارد می‌شود و (پ) بزرگی و (ت) جهت نیروی قائمی که مأمور به تیر وارد می‌کند، چیست؟

* **۳۰** بادهای بسیار تند پیرامون یک دیوباد می‌توانند پرتابه‌هایی را به درختان، دیوارهای ساختمان‌ها، و حتی تابلوهای فلزی راهنمایی و رانندگی بکوبند. در یک شبیه‌سازی آزمایشگاهی، یک چوب خلال دندان استاندارد با یک تفنگ بادی به شاخه‌ای از درخت بلوط شلیک شد. خلال دندان ۰٫۱۳ گرم جرم داشت و تندی آن پیش از وارد شدن به شاخه‌ی درخت ۲۲۰m/s و عمق نفوذ آن در شاخه ۱۵mm بود. اگر تندی آن با آهنگ یکنواخت کاهش یافته باشد، بزرگی نیرویی که شاخه به خلال دندان وارد کرده، چقدر بوده است؟

** **۳۱** جسمی با تندی آغازی $v_0 =$ ۳٫۵۰m/s بر روی یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک به سمت بالا پرتاب می‌شود. زاویه‌ی شیب سطح برابر است با $\theta =$ ۳۲٫۰°. (الف) جسم تا چه مسافتی بالا می‌رود؟ (ب) چه مدت طول می‌کشد تا جسم این

مسافت را بپیماید؟ (پ) تندی جسم هنگام بازگشت به پایین سطح شیب‌دار چیست؟

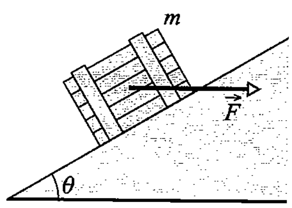
** ۳۲ شکل ۵-۳۹ یک نیمه‌ی لیمو به جرم $۰٫۰۲۵۰\mathrm{kg}$ و دو نیرو از سه نیروی افقی را، با دید از بالا، نشان می‌دهد. این نیروها در روی یک میز بی‌اصطکاک به لیمو وارد می‌شوند. نیروی $\vec{F}_۱$ با بزرگی $۶٫۰۰\mathrm{N}$ تحت زاویه‌ی $\theta_۱ = ۳۰٫۰^\circ$ و نیروی $\vec{F}_۲$ با بزرگی $۷٫۰۰\mathrm{N}$ تحت زاویه‌ی $\theta_۲ = ۳۰٫۰^\circ$ وارد می‌شود. نیروی سوم را به صورت نمادگذاری بردارهای یکه در حالت‌های زیر پیدا کنید. نیمه‌ی لیمو (الف) ساکن است، (ب) دارای سرعت ثابت $\vec{v} = (۱۳٫۰\hat{i} - ۱۴٫۰\hat{j})\,\mathrm{m/s}$ است و (پ) دارای سرعت متغیر $\vec{v} = (۱۳٫۰t\hat{i} - ۱۴٫۰t\hat{j})\,\mathrm{m/s}$ است، که در آن t زمان است؟



شکل ۵-۳۹ مسئله‌ی ۳۲.

** ۳۳ آسانسوری با بار خود در مجموع $۱۶۰۰\mathrm{kg}$ جرم دارد. در حالی که آسانسور با تندی پایین‌سوی $۱۲\mathrm{m/s}$ حرکت می‌کند تحت اثر یک شتاب ثابت قرار می‌گیرد و پس از پیمودن مسافت $۴۲\mathrm{m}$ متوقف می‌شود. در این حالت نیروی کشش کابل نگهدارنده‌ی آسانسور را پیدا کنید.

** ۳۴ در شکل ۵-۴۰، صندوقی به جرم $m = ۱۰۰\mathrm{kg}$ با تندی ثابت بر روی یک شیب‌راهه‌ی بی‌اصطکاک (با زاویه‌ی شیب $\theta = ۳۰٫۰^\circ$) توسط نیروی افقی $\vec{F}$ به سمت بالا هُل داده می‌شود. بزرگی (الف) نیروی $\vec{F}$ و (ب) نیرویی که شیب‌راهه به صندوق وارد می‌کند، چقدر است؟



شکل ۵-۴۰ مسئله‌ی ۳۴.

** ۳۵ سرعت جسمی ۳٫۰۰ کیلوگرمی با رابطه‌ی $\vec{v} = (۸٫۰۰t\hat{i} + ۳٫۰۰t^۲\hat{j})\,\mathrm{m/s}$ داده شده است، که در آن t برحسب ثانیه است. در لحظه‌ای که بزرگی نیروی برایند وارد شده به جسم $۳۵٫۰\mathrm{N}$ است، جهت (نسبت به محور x مثبت) (الف) نیروی برایند و (ب) جهت حرکت جسم، چیست؟

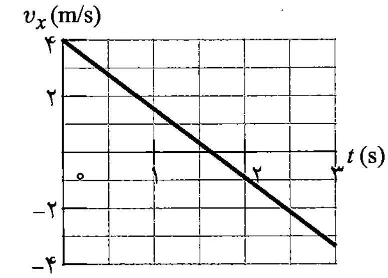
** ۳۶ اسکی‌بازی به جرم $۵۰\mathrm{kg}$ با گرفتن یک طناب یدک‌کش که به موازات سطح پیست اسکی بی‌اصطکاک حرکت می‌کند، به بالا کشیده می‌شود. زاویه‌ی سطح نسبت به راستای افقی ۸٫۰ درجه است. مطلوب‌است تعیین‌بزرگی نیروی $F_{(\text{طناب})}$ که طناب در حالت‌های زیر به اسکی‌باز وارد می‌کند: (الف) بزرگی سرعت اسکی‌باز v در مقدار $۲٫۰\mathrm{m/s}$ ثابت است و (ب) سرعت $v = ۲٫۰\mathrm{m/s}$ با آهنگ $۰٫۱۰\mathrm{m/s^۲}$ افزایش می‌یابد.

** ۳۷ دختری به جرم $۴۰\mathrm{kg}$ و سورتمه‌ای به جرم $۸٫۴\mathrm{kg}$ روی سطح یخ بسته و بی‌اصطکاک دریاچه‌ای در فاصله‌ی $۱۵\mathrm{m}$ از یکدیگر قرار دارند، اما با طنابی با جرم قابل چشم‌پوشی به هم وصل شده‌اند. دختر یک نیروی افقی ۵٫۲ نیوتونی به طناب وارد می‌کند. بزرگی شتاب (الف) سورتمه و (ب) دختر، چیست؟ (پ) در چه فاصله‌ای نسبت به مکان آغازی دختر، آن دو به هم می‌رسند؟

** ۳۸ اسکی‌بازی به جرم $۴۰\mathrm{kg}$ از سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک پیست اسکی، که با راستای افقی زاویه‌ی ۱۰ درجه می‌سازد، یک راست به سمت پایین حرکت می‌کند. فرض کنید اسکی‌باز در طول شیب در جهت منفی محور x حرکت می‌کند. در این حالت، یک نیروی باد با مؤلفه‌ی F_x به اسکی‌باز وارد می‌شود. مقدار F_x در حالت‌های زیر چیست؟ بزرگی سرعت اسکی‌باز (الف) ثابت است، (ب) با آهنگ $۱٫۰\mathrm{m/s^۲}$ افزایش می‌یابد و (پ) با آهنگ $۲٫۰\mathrm{m/s^۲}$ افزایش می‌یابد.

** ۳۹ کره‌ای به جرم $۳٫۰ \times ۱۰^{-۴}\mathrm{kg}$ به نخی آویخته شده است. باد ملایمی در حال وزیدن به طور افقی کره را به گونه‌ای هُل می‌دهد که نخ با محور قائم زاویه‌ی ثابت ۳۷ درجه می‌سازد. مطلوب است تعیین (الف) بزرگی نیروی باد و (ب) نیروی کشش نخ.

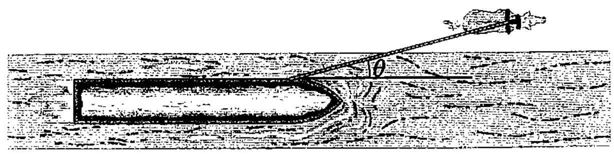
** ۴۰ یک‌جعبه‌ی خرما به‌جرم ۵٫۰۰kg را بر روی شیب‌راهه‌ای بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب θ نسبت بـه افـق، بـه سـمت بـالا می‌لغزانیم. شکل ۵-۴۱ نمودار تغییـرات v_x، مؤلفـه‌ی سـرعت جعبه در راستای محور x واقع بر شیب‌راهه را برحسـب زمـان t نشان می‌دهد. بزرگی نیروی عمودی وارد شـده بـه جعبـه از سوی شیب‌راهه چیست؟



شکل ۵-۴۱ مسئله‌ی ۴۰.

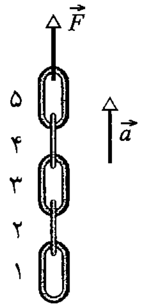
** ۴۱ طنابی داریم که اگر نیـروی کشـش آن از ۳۸۷ N تجـاوز کند پاره می‌شود. این طناب را برای پایین فرستادن یک بسـته‌ی مواد ساختمانی کهنـه بـه وزن ۴۴۹ N از ارتفـاع ۶٫۱m مـورد استفاده قرار می‌دهیم. (الف) بزرگی شتاب بسته چقدر باشـد تـا طناب در آستانه‌ی پاره شدن قرار گیرد؟ (ب) با این شتاب بسته با چه تندی‌ای به زمین برخورد می‌کند؟

** ۴۲ در زمان‌های گذشته اسب‌ها کرجـی‌هـا را، مطـابق شـکل ۵-۴۲، در آبراه‌ها می‌کشـیدند. فـرض کنیـد اسـبی طنـابی را بـا نیروی ۷۹۰۰ N و تحت زاویه‌ی $\theta = ۱۸^\circ$ نسـبت بـه راسـتای حرکت کرجی مـی‌کشـد و کرجـی در جهـت مثبـت محـور x حرکت می‌کند. جرم کرجی ۹۵۰۰kg و شتاب آن ۰٫۱۲ m/s^2 است. (الف) بزرگی و (ب) جهت نیروی وارد شده به کرجی از سوی آب نسبت محور x مثبت، چیست؟



شکل ۵-۴۲ مسئله‌ی ۴۲.

** ۴۳ در شکل ۵-۴۳، زنجیری که پنج حلقـه دارد و جـرم هـر حلقه ۰٫۱۰۰kg اسـت، بـا شـتاب ثابـت $a = ۲٫۵۰\,\text{m/s}^2$ بـه سمت بالا کشیده می‌شود. مطلوب است تعیـین بزرگـی، (الـف) نیرویی که حلقه‌ی ۲ به حلقه‌ی ۱ وارد می‌کند، (ب) نیرویی کـه حلقه‌ی ۳ به حلقه‌ی ۲ وارد می‌کند، (پ) نیرویی کـه حلقـه‌ی ۴ به حلقه‌ی ۳ وارد می‌کند و (ت) نیرویی که حلقه‌ی ۵ به حلقه‌ی ۴ وارد می‌کند. سپس، بزرگی، (ث) نیروی $\vec{F}$ که شـخص بـالا برنده‌ی زنجیر به حلقه‌ی بالایی وارد می‌کند و (ج) ***نیروی برایند*** شتاب‌دهنده به هر حلقه‌ی زنجیر را پیدا کنید.



شکل ۵-۴۳ مسئله‌ی ۴۳.

** ۴۴ در درون آسانسوری که با شتاب کند کننده‌ی ۲٫۴ m/s^2 به سمت پایین حرکت می‌کند، لامپی به وسیله‌ی سیمی از سقف آویزان است. (الف) اگر نیروی کشش سیم ۸۹ N باشـد، جـرم لامپ چقدر است؟ (ب) وقتی آسانسور با شـتاب تنـد کننـده‌ی ۲٫۴ m/s^2 به بالاسو حرکت می‌کند، نیروی کشش سیم چقـدر است؟

** ۴۵ اتاقـک آسانسـوری کـه ۲۷٫۸kN وزن دارد، بـه بالاسـو حرکت می‌کند. نیروی کشش کابل را در شرایطی حسـاب کنیـد که تندی اتاقک (الف) با آهنگ ۱٫۲۲ m/s^2 در حال افـزایش و (ب) با آهنگ ۱٫۲۲ m/s^2 در حال کاهش، باشد.

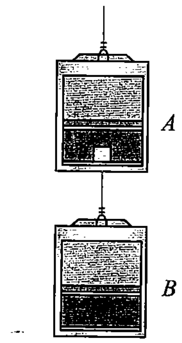
** ۴۶ اتاقک آسانسوری با یک کابل به بالاسو کشیده مـی‌شـود. جرم اتاقک و تنها مسافر آن ۲۰۰۰kg است. وقتـی ایـن مسـافر سکه‌ای را رها می‌کند شتاب آن نسبت بـه اتاقـک ۸٫۰۰ m/s^2 به پایین‌سو است. نیروی کشش کابل چقدر است؟

** ۴۷ خانواده‌ی زاکینی بـه خـاطر نمـایش پرتـاب شدنشـان از دهانه‌ی توپ با اسـتفاده کـردن از نوارهـای کشسـان یـا هـوای فشرده، معروف‌اند. در یکی از این نمایش‌ها، امانوئل زاکینـی[1] از

1. Emanuel Zacchini

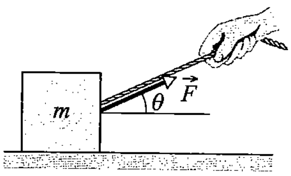
یک توپ شلیک شد و پس از عبور از فراز سه چرخ و فلک شهر بازی، در فاصله‌ی ۶۹m دورتر بر روی یک تور باز شده‌ی هم ارتفاع با نقطه‌ی پرتاب، فرود آمد. او در درون لوله‌ی توپ فاصله‌ی ۵٫۲m را پیمود و تحت زاویه‌ی ۵۳ درجه شلیک شد. اگر جرم او ۸۵kg و شتاب حرکتش درون لوله ثابت بوده باشد، بزرگی نیروی پیش‌ران او چقدر بوده است؟ (***راهنمایی:*** این پرتاب را در راستای یک شیب‌راهه‌ی ۵۳ درجه در نظر بگیرید و از نیروی پَسار هوا چشم‌پوشی کنید).

٭٭ ۴۸ در شکل ۵-۴۴، دو اتاقک آسانسور A و B با یک کابل کوتاه به هم وصل شده‌اند و به وسیله‌ی یک کابل متصل به بالای اتاقک A می‌توانند به بالا و پایین کشیده شوند. جرم اتاقک A برابر با ۱۷۰۰kg و جرم اتاقک B برابر با ۱۳۰۰kg است. در کف اتاقک A یک جعبه‌ی ۱۲٫۰ کیلوگرمی قرار دارد. نیروی کشش در کابل وصل کننده‌ی اتاقک‌ها $۱٫۹۱\times ۱۰^{۴}$N است. بزرگی نیروی عمودی وارد شده به جعبه از سوی کف اتاقک A چقدر است؟



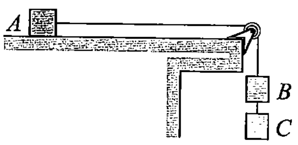
شکل ۵-۴۴ مسئله‌ی ۴۸.

٭٭ ۴۹ در شکل ۵-۴۵، جسمی به جرم $m = ۵٫۰۰$kg به وسیله‌ی ریسمانی که نیروی $F = ۱۲٫۰$N را تحت زاویه‌ی $\theta = ۲۵٫۰°$ وارد می‌کند، روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک کشیده می‌شود. (الف) بزرگی شتاب جسم چقدر است؟ (ب) بزرگی نیروی $\vec{F}$ را به تدریج افزایش می‌دهیم. مقدار این نیرو درست پیش از بلند شدن (کامل) جسم از روی سطح چقدر است؟ (پ) بزرگی شتاب جسم درست پیش از بلند شدن (کامل) آن از روی سطح، چقدر است؟



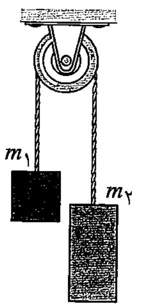
شکل ۵-۴۵ مسئله‌های ۴۹ و ۶۰.

٭٭ ۵۰ در شکل ۵-۴۶، سه جعبه با طناب‌هایی به هم وصل شده‌اند و یکی از طناب‌ها از روی یک قرقره‌ی با اصطکاک ناچیز در محور و جرم ناچیز عبور کرده است. جرم‌های این سه جعبه عبارت‌اند از: $m_A = ۳۰٫۰$kg، $m_B = ۴۰٫۰$kg و $m_C = ۱۰٫۰$kg. هرگاه این مجموعه را از حال سکون رها کنیم، (الف) نیروی کشش در طناب وصل کننده‌ی B و C چقدر است و (ب) جعبه‌ی A در ۰٫۲۵۰s نخست چه مسافتی را (با این فرض که به قرقره نمی‌رسد) می‌پیماید؟



شکل ۵-۴۶ مسئله‌ی ۵۰.

٭٭ ۵۱ شکل ۵-۴۷ دو جسم را نشان می‌دهد که به وسیله‌ی یک طناب (با جرم ناچیز) در حال گذشتن از روی یک قرقره‌ی بی‌اصطکاک (با جرم ناچیز) به هم وصل شده‌اند. این آرایش را ***ماشین آتوود***[1] می‌نامند. جرم یک جسم $m_۱ = ۱٫۳۰$kg و جرم جسم دیگر $m_۲ = ۲٫۸۰$kg است. (الف) بزرگی شتاب اجسام و (ب) نیروی کشش طناب، چقدر است؟

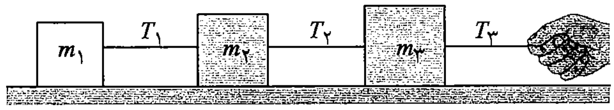


شکل ۵-۴۷ مسئله‌های ۵۱ و ۶۵.

1. Atwood's machine

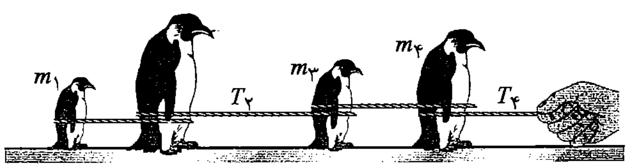
** ۵۲ شخصی به جرم ۸۵kg به وسیله‌ی طنابی که از روی قرقره‌ی بی‌اصطکاکی عبور کرده و به یک کیسه‌ی شن ۶۵ کیلوگرمی متصل است، از ارتفاع ۱۰/۰ متری پایین می‌آید. اگر شخص از حال سکون شروع به حرکت کرده باشد، با چه تندی‌ای به زمین برخورد می‌کند؟

** ۵۳ سه جسم که، مطابق شکل ۵-۴۸، به هم وصل شده‌اند روی یک میز افقی بی‌اصطکاک با نیروی $T_۳ = ۶۵/۰\,\mathrm{N}$ به سمت راست کشیده می‌شوند. به ازای $m_۱ = ۱۲/۰\,\mathrm{kg}$، $m_۲ = ۲۴/۰\,\mathrm{kg}$ و $m_۳ = ۳۱/۰\,\mathrm{kg}$، مطلوب است محاسبه‌ی، (الف) شتاب دستگاه و (ب) نیروی کشش $T_۱$ و (پ) نیروی کشش $T_۲$.



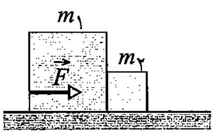
شکل ۵-۴۸ مسئله‌ی ۵۳.

** ۵۴ شکل ۵-۴۹ چهار پنگوئن را نشان می‌دهد که به وسیله‌ی نگهبان باغ وحش بر روی سطح یخ بسته‌ی بسیار لغزنده (بی‌اصطکاک) کشیده می‌شوند. جرم‌های سه پنگوئن و نیروهای کشش دو طناب عبارت‌اند از: $m_۱ = ۱۲\,\mathrm{kg}$، $m_۳ = ۱۵\,\mathrm{kg}$، $m_۴ = ۲۰\,\mathrm{kg}$، $T_۲ = ۱۱۱\,\mathrm{N}$ و $T_۴ = ۲۲۲\,\mathrm{N}$. جرم نامعلوم پنگوئن چهارم $m_۲$، را پیدا کنید.



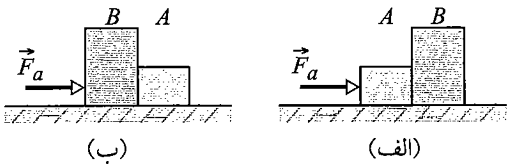
شکل ۵-۴۹ مسئله‌ی ۵۴.

** ۵۵ دو جسم روی میز بی‌اصطکاکی با هم تماس دارند. یک نیروی افقی، مطابق شکل ۵-۵۰، به جسم بزرگ‌تر وارد می‌شود. (الف) به ازای $m_۱ = ۲/۳\,\mathrm{kg}$، $m_۲ = ۱/۲\,\mathrm{kg}$ و $F = ۳/۲\,\mathrm{N}$، بزرگی نیروی تماسی میان دو جسم را پیدا کنید. (ب) نشان دهید که اگر همان نیرو با بزرگی F به جسم کوچک‌تر و در جهت مخالف وارد شود، بزرگی نیروی میان دو جسم ۲/۱N می‌شود، که با مقدار به دست آمده در قسمت (الف) مساوی نیست. (پ) دلیل این اختلاف را توضیح دهید.



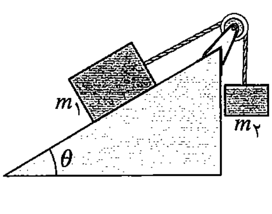
شکل ۵-۵۰ مسئله‌ی ۵۵.

** ۵۶ در شکل ۵-۵۱ الف، نیروی افقی ثابت $\vec{F}_a$ به جسم A وارد می‌شود، که آن هم جسم B را با نیروی ۲۰/۰N در راستای افقی به سمت راست هُل می‌دهد. در شکل ۵-۵۱ ب، همان نیروی $\vec{F}_a$ به جسم B وارد می‌شود. در این حالت جسم A، جسم B را با نیروی افقی ۱۰/۰N به سمت چپ هُل می‌دهد. مجموع جرم هر دو جسم ۱۲/۰kg است. بزرگی (الف) شتاب اجسام در شکل ۵-۵۱ الف و (ب) نیروی $\vec{F}_a$ چقدر است؟



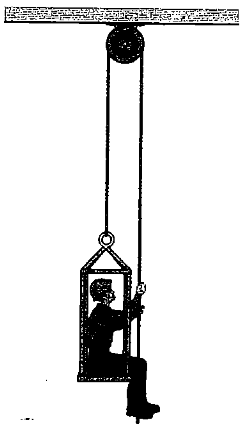
شکل ۵-۵۱ مسئله‌ی ۵۶.

** ۵۷ جسمی به جرم $m_۱ = ۳/۷۰\,\mathrm{kg}$ روی یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta = ۳۰/۰^\circ$ قرار دارد. این جسم از طریق ریسمان عبور کرده از روی یک قرقره‌ی بی‌جرم و بی‌اصطکاک به‌جسم دیگری به جرم $m_۲ = ۲/۳۰\,\mathrm{kg}$ وصل شده است (شکل ۵-۵۲). (الف) بزرگی شتاب هر جسم، (ب) جهت شتاب جسم آویخته و (پ) نیروی کشش ریسمان چیست؟



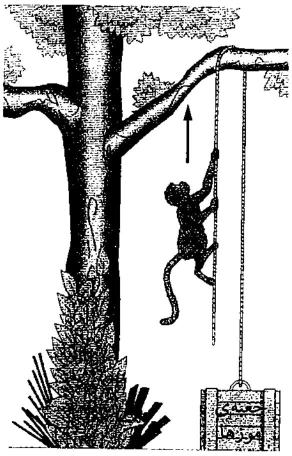
شکل ۵-۵۲ مسئله‌ی ۵۷.

** ۵۸ شکل ۵-۵۳ شخصی را نشان می‌دهد که روی یک صندلی نشسته است. صندلی به طناب بی‌جرمی که از روی قرقره‌ای بی‌جرم و بی‌اصطکاک عبور کرده وصل شده است. سر دیگر طناب را شخص در دست خود نگه داشته است. جرم شخص و صندلی در مجموع ۹۵٫۰kg است. شخص طناب را با چه نیرویی باید بکشد تا (الف) با سرعت ثابت و (ب) با شتاب بالاسوی $۱٫۳۰\,\mathrm{m/s^2}$ حرکت کند؟ (*راهنمایی*: در اینجا نمودار جسم ـ آزاد، به واقع، می‌تواند به شما کمک کند). اکنون، فرض کنید طناب سمت راست آن‌قدر دراز است که به زمین می‌رسد و یک فرد همکار آن را می‌کشد. فرد همکار طناب را با چه نیرویی باید بکشد تا شخص، (پ) با سرعت ثابت و (ت) با شتاب بالاسوی $۱٫۳۰\,\mathrm{m/s^2}$ حرکت کند؟ بزرگی نیرویی که دستگاه قرقره، (ث) در قسمت الف، (ج) در قسمت ب، (چ) در قسمت پ و (ح) در قسمت ت، به سقف وارد می‌کند، چیست؟



شکل ۵-۵۳ مسئله‌ی ۵۸.

** ۵۹ میمونی به جرم ۱۰kg از طناب بی‌جرمی که از روی شاخه‌ی بی‌اصطکاک درختی عبور کرده است، بالا می‌رود (شکل ۵-۵۴). سر دیگر طناب به جعبه‌ای محتوی موز به جرم ۱۵kg، که روی زمین قرار دارد، وصل شده است. (الف) بزرگی کمترین شتاب میمون چقدر باید باشد تا جعبه از زمین بلند شود؟ اگر پس از بلند شدن جعبه، میمون از بالا رفتن دست بکشد و طناب را هم‌چنان نگه دارد، (ب) بزرگی و (پ) جهت شتاب میمون و (ت) نیروی کشش طناب، چیست؟



شکل ۵-۵۴ مسئله‌ی ۵۹.

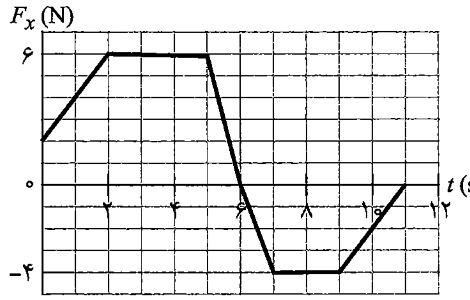
** ۶۰ شکل ۵-۴۵ جسمی ۵٫۰۰ کیلوگرمی را نشان می‌دهد که با یک طناب و بانیروی ثابت ۲۰٫۰N در روی کف بی‌اصطکاک اتاقی کشیده می‌شود، اما زاویه‌ی $\theta(t)$ برحسب زمان تغییر می‌کند. به‌ازای $\theta = ۲۵٫۰^\circ$، شتاب جسم درحالت‌های زیر با چه آهنگی تغییر می‌کند (الف) $\theta(t) = (۲٫۰۰\times۱۰^{-۲}$ درجه$/\mathrm{s})t$ و (ب) $\theta(t) = -(۲٫۰۰\times۱۰^{-۲}$ درجه$/\mathrm{s})t$. (*راهنمایی*: زاویه‌ها باید برحسب رادیان باشند).

** ۶۱ یک بالون هوای داغ به جرم M در راستای قائم با شتاب پایین‌سوی a فرود می‌آید. چه جرمی (از وزنه‌های تعادل) باید از بالون بیرون ریخته شود تا بالون شتابی به بزرگی a به بالاسو پیدا کند؟ فرض کنید نیروی بالاسوی وارد شده از سوی هوا (نیروی برآر) به‌خاطر کاهش یافتن جرم بالون تغییر نمی‌کند.

*** ۶۲ در پرتاب وزنه بسیاری از ورزشکاران ترجیح می‌دهند وزنه را با زاویه‌ای کوچک‌تر (در حدود ۴۲ درجه) از زاویه‌ای که به طور نظری منجر به بیشترین برد برای وزنه‌ای با همان تندی و همان ارتفاع می‌شود، پرتاب کنند. یک دلیل این کار تندی‌ای است که پرتابگر می‌تواند در مرحله‌ی شتاب‌دهی در پرتاب، به وزنه بدهد. فرض کنید وزنه‌ای به جرم ۷٫۲۶۰kg که با تندی آغازی ۲٫۵۰۰m/s (ناشی از حرکت آغازین پرتابگر) پرتاب می‌شود، در طول یک مسیر راست به طول ۱٫۶۵۰m با نیرویی ثابت به بزرگی ۳۸۰٫۰N شتاب می‌گیرد. اگر زاویه‌ی میان مسیر وزنه و راستای افقی (الف) ۳۰٫۰۰ درجه و (ب) ۴۲٫۰۰ درجه باشد، تندی وزنه در پایان مرحله‌ی شتاب گرفتن

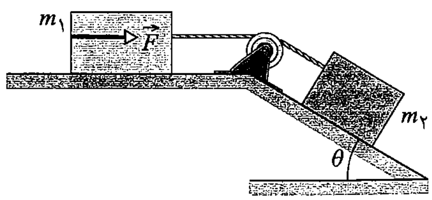
چقدر است؟ (*راهنمایی*: حرکت را طوری در نظر بگیرید که گویی در راستای یک شیب‌راهه‌ی با زاویه‌ی معین صورت می‌گیرد). (پ) اگر پرتابگر زاویه‌ی پرتاب را از ۳۰٫۰۰ درجه به ۴۲٫۰۰ درجه افزایش دهد تندی پرتاب وزنه چند درصد کاهش خواهد داشت؟

***** ۶۳** شکل ۵-۵۵ نمودار مؤلفه‌ی نیروی F_x وارد شده به یک قطعه یخ به جرم ۳٫۰۰kg را به صورت تابعی از زمان t نشان می‌دهد. قطعه یخ می‌تواند فقط در طول محور x حرکت کند. در زمان $t = ۰$، قطعه یخ در جهت مثبت محور x با تندی ۳٫۰m/s حرکت می‌کند. (الف) تندی و (ب) جهت حرکت قطعه یخ در زمان $t = ۱۱\text{s}$ چیست؟



شکل ۵-۵۵ مسئله‌ی ۶۳.

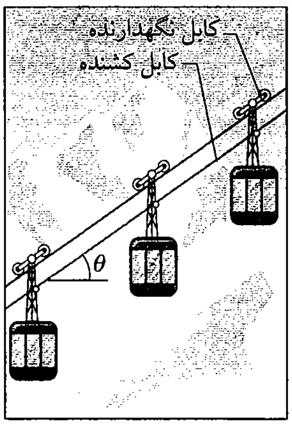
***** ۶۴** شکل ۵-۵۶ جعبه‌ای به جرم $m_۲ = ۱٫۰\text{kg}$ را نشان می‌دهد که روی یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta = ۳۰^\circ$ قرار گرفته است. این جعبه به وسیله‌ی طنابی با جرم ناچیز که از روی قرقره‌ی بی‌جرم و بی‌اصطکاکی گذشته به جعبه‌ای به جرم $m_۱ = ۳٫۰\text{kg}$ واقع بر روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک وصل شده است. (الف) اگر بزرگی نیروی افقی $\vec{F}$ برابر با ۲٫۳N باشد، نیروی کشش ریسمان میان دو جعبه چقدر است؟ (ب) بیشترین مقدار بزرگی $\vec{F}$ چقدر باید باشد تا ریسمان میان جعبه‌ها شل نشود؟



شکل ۵-۵۶ مسئله‌ی ۶۴.

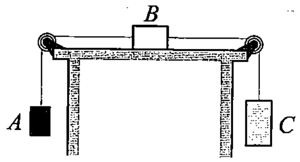
***** ۶۵** شکل ۵-۴۷ ***ماشین آتوود*** را نشان می‌دهد، که در آن دو جعبه به وسیله‌ی طنابی (با جرم ناچیز) که از روی یک قرقره‌ی بی‌اصطکاک (و نیز با جرم ناچیز) گذشته است، به هم وصل شده‌اند. در زمان $t = ۰$، جعبه‌ی ۱ دارای جرم ۱٫۳۰kg و جعبه‌ی ۲ دارای جرم ۲٫۸۰kg است، اما جرم جعبه‌ی ۱ (از طریق نشت از یک سوراخ) با آهنگ ثابت ۰٫۲۰۰kg/s در حال کاهش یافتن است. بزرگی شتاب جعبه‌ها با چه آهنگی در (الف) زمان $t = ۰$ و (ب) زمان $t = ۳٫۰۰\text{s}$ تغییر می‌کند؟ (پ) این شتاب در چه زمانی به مقدار بیشینه‌ی خود می‌رسد؟

***** ۶۶** شکل ۵-۵۷ بخشی از یک دستگاه تله کابین در کوه‌های آلپ را نشان می‌دهد. بیشینه‌ی جرم مجاز برای هر اتاقک با مسافرهای آن ۲۸۰۰kg است. اتاقک‌ها که روی یک کابل نگهدارنده سوار شده‌اند، به وسیله‌ی یک کابل دیگر متصل به برج‌های نگهدارنده کشیده می‌شوند. فرض کنید کابل‌ها به طور کامل به حالت کشیده هستند و زاویه‌ی شیب آن‌ها نسبت به افق $\theta = ۳۵^\circ$ است. اگر اتاقک‌ها با شتاب $۰٫۸۱\text{m/s}^۲$ بالا بروند و جرم آن‌ها به مقدار بیشینه‌ی مجاز باشد، اختلاف نیروی کشش میان بخش‌های مجاور کابل کشنده چیست؟



شکل ۵-۵۷ مسئله‌ی ۶۶.

***** ۶۷** شکل ۵-۵۸ سه جسم را نشان می‌دهد که به وسیله‌ی ریسمان‌هایی که از روی قرقره‌های بی‌اصطکاک گذشته‌اند، به هم وصل شده‌اند. جسم B بر روی یک میز بی‌اصطکاک قرار دارد و جرم‌ها عبارت‌اند از: $m_A = ۶٫۰۰\text{kg}$، $m_B = ۸٫۰۰\text{kg}$ و $m_C = ۱۰٫۰\text{kg}$. هرگاه اجسام را رها کنیم نیروی کشش ریسمان واقع در سمت راست چقدر است؟

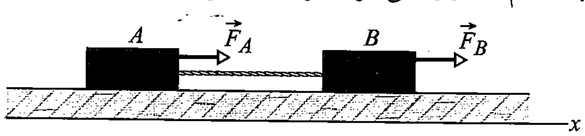


شکل ۵-۵۸ مسئله‌ی ۶۷.

٭٭٭ ۶۸ یک پرتابگر وزنه، وزنه‌ای به جرم $m = ۷٫۲۶۰\,\mathrm{kg}$ را تحت زاویه‌ی ۳۴٫۱۰ درجه نسبت به راستای افقی با تندی آغازی $۲٫۵۰۰\,\mathrm{m/s}$ (ناشی از حرکت آغازین پرتابگر) پرتاب می‌کند و در طول یک مسیر راست‌خط $۱٫۶۵۰\,\mathrm{m}$ به وزنه شتاب می‌دهد. این وزنه در ارتفاع $۲٫۱۱۰\,\mathrm{m}$ و تحت زاویه‌ی ۳۴٫۱۰ درجه از دست پرتابگر جدا می‌شود و در فاصله‌ی افقی $۱۵٫۹۰\,\mathrm{m}$ به زمین برخورد می‌کند. بزرگی نیروی متوسط پرتابگر در مرحله‌ی شتاب‌دهی به وزنه چقدر است؟ (*راهنمایی:* حرکت در مرحله‌ی شتاب‌دهی را طوری در نظر بگیرید که گویی وزنه در راستای یک شیب‌راهه‌ی با زاویه‌ی معین پرتاب شده است).

مسئله‌های بیشتر

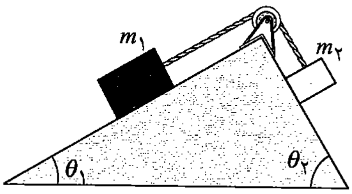
۶۹ در شکل ۵-۵۹، جسم A به جرم $۴٫۰\,\mathrm{kg}$ و جسم B به جرم $۶٫۰\,\mathrm{kg}$ با ریسمانی به جرم ناچیز به هم وصل شده‌اند. نیروی $\vec{F}_A = (۱۲\mathrm{N})\hat{\mathrm{i}}$ به جسم A و نیروی $\vec{F}_B = (۲۴\mathrm{N})\hat{\mathrm{i}}$ به جسم B وارد می‌شود. نیروی کشش ریسمان چقدر است؟



شکل ۵-۵۹ مسئله‌ی ۶۹.

۷۰ شخصی به جرم $۸۰\,\mathrm{kg}$ از پنجره‌ای که $۰٫۵۰\,\mathrm{m}$ بالاتر از کف حیاط قرار دارد، فرود می‌آید. او در هنگام فرود آمدن فراموش می‌کند زانوهایش را خم کند و در طی فاصله‌ی قائم $۲٫۰\,\mathrm{cm}$ متوقف می‌شود. (الف) شتاب متوسط شخص از لحظه‌ی رسیدن پاهایش به کف حیاط تا لحظه‌ی متوقف شدن او، چیست؟ (ب) بزرگی نیروی متوسطی که کف حیاط به شخص وارد می‌کند تا متوقف شود، چقدر است؟

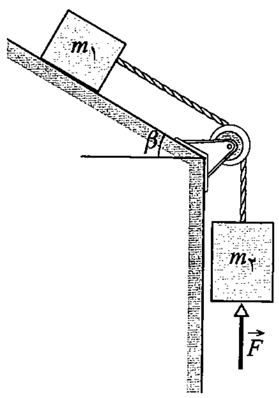
۷۱ شکل ۵-۶۰ جعبه‌ای (به جرم $m_1 = ۳٫۰\,\mathrm{kg}$) را نشان می‌دهد که بر روی یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta_1 = ۳۰°$ قرار دارد. این جعبه از طریق یک طناب با جرم ناچیز به جعبه‌ی دیگری (به جرم $m_2 = ۲٫۰\,\mathrm{kg}$) وصل شده است. این جعبه روی یک‌سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta_2 = ۶۰°$ واقع است. قرقره بی‌اصطکاک و دارای جرم ناچیز است. نیروی کشش طناب چیست؟



شکل ۵-۶۰ مسئله‌ی ۷۱.

۷۲ سه نیرو به جسمی که با سرعت بدون تغییر $\vec{v} = (۲\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{i}} - (۷\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{j}}$ حرکت می‌کند، وارد می‌شوند. دو تا از این نیروها $\vec{F}_1 = (۲\mathrm{N})\hat{\mathrm{i}} + (۳\mathrm{N})\hat{\mathrm{j}} + (-۲\mathrm{N})\hat{\mathrm{k}}$ و $\vec{F}_2 = (-۵\mathrm{N})\hat{\mathrm{i}} + (۸\mathrm{N})\hat{\mathrm{j}} + (-۲\mathrm{N})\hat{\mathrm{k}}$ هستند. نیروی سوم چیست؟

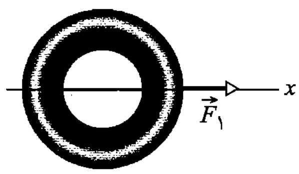
۷۳ در شکل ۵-۶۱، یک قوطی کنسرو (به جرم $m_1 = ۱٫۰\,\mathrm{kg}$) روی سطح شیب‌دار بی‌اصطکاکی قرار دارد و از طریق یک طناب به یک قوطی کنسرو گوشت گاو نمک زده (به جرم $m_2 = ۲٫۰\,\mathrm{kg}$) وصل شده است. قرقره بی‌جرم و بی‌اصطکاک است. یک نیروی بالاسو به بزرگی $F = ۶٫۰\,\mathrm{N}$ به قوطی به جرم m_2، که دارای شتاب پایین‌سوی $۵٫۵\,\mathrm{m/s^2}$ است، وارد می‌شود. (الف) نیروی کشش طناب وصل کننده‌ی دو جرم و (ب) زاویه‌ی β چقدر است؟



شکل ۵-۶۱ مسئله‌ی ۷۳.

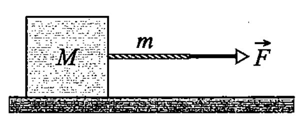
۷۴ جسمی فقط تحت اثر دو نیروی با بزرگی‌های ۲۰N و ۳۵N قرار می‌گیرد و زاویه‌ی میان راستاهای نیروها ۸۰ درجه است. بزرگی شتاب برایند $۲۰ \mathrm{m/s^2}$ است. جرم جسم چقدر است؟

۷۵ شکل ۵-۶۲ تصویر یک لاستیک ۱۲ کیلوگرمی را، با دید از بالا، نشان می‌دهد که با سه طناب افقی کشیده شده است. در شکل یکی از نیروها ($F_1 = ۵۰\mathrm{N}$) نشان داده شده‌است. نیروهای دو طناب دیگر در جهتی اثر می‌کنند که بزرگی شتاب برایند لاستیک کمترین مقدار a را داشته باشد. مطلوب است بزرگی کمترین شتاب a در شرایط، (الف) $F_2 = ۳۰\mathrm{N}$، $F_3 = ۲۰\mathrm{N}$؛ (ب) $F_2 = ۳۰\mathrm{N}$، $F_3 = ۱۰\mathrm{N}$؛ و (پ) $F_2 = F_3 = ۳۰\mathrm{N}$.



شکل ۵-۶۲ مسئله‌ی ۷۵.

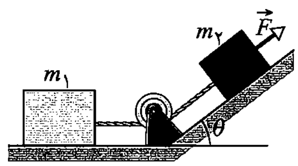
۷۶ جسمی به جرم M به وسیله‌ی طنابی به جرم m، مطابق شکل ۵-۶۳، روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک کشیده می‌شود. نیروی افقی $\vec{F}$ به یک سر طناب وارد می‌شود. (الف) نشان دهید که طناب ***باید شکم دادگی پیدا کند***، حتی اگر مقدار آن ناچیز باشد. با فرض آنکه شکم‌دادگی قابل چشم‌پوشی باشد، مطلوب است تعیین (ب) شتاب طناب و جسم، (پ) نیروی وارد شده به جسم از سوی طناب و (ت) نیروی کشش طناب در وسط آن.



شکل ۵-۶۳ مسئله‌ی ۷۶.

۷۷ کارگری صندوقی را با طنابی که به آن بسته شده است در روی کف یک کارخانه می‌کشد. کارگر با وارد کردن نیروی $F = ۴۵۰\mathrm{N}$ به طناب، آن را تحت زاویه‌ی $\theta = ۳۸^\circ$ نسبت به راستای افقی می‌کشد و کف کارخانه نیز یک نیروی افقی به بزرگی $f = ۱۲۵\mathrm{N}$ در خلاف جهت حرکت به صندوق وارد می‌کند. مطلوب است محاسبه‌ی بزرگی شتاب صندوق در حالتی که (الف) جرم آن ۳۱۰kg و (ب) وزن آن ۳۱۰N، باشد.

۷۸ در شکل ۵-۶۴، نیروی $\vec{F}$ به بزرگی ۱۲N به جعبه‌ای به جرم $m_2 = ۱/۰\mathrm{kg}$ وارد می‌شود. این نیرو به سمت بالای یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی شیب $\theta = ۳۷^\circ$ اثر می‌کند. این جعبه با یک طناب به جعبه‌ی دیگری به جرم $m_1 = ۳/۰\mathrm{kg}$ واقع بر کف اتاق وصل شده است. کف اتاق، سطح شیب‌دار و قرقره بی‌اصطکاک هستند و جرم‌های قرقره و طناب ناچیزند. نیروی کشش طناب چیست؟



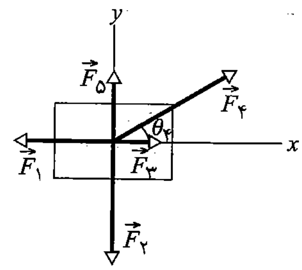
شکل ۵-۶۴ مسئله‌ی ۷۸.

۷۹ در جایی از زمین که در آن $g = ۹/۸\mathrm{m/s^2}$، وزن یک جسم ۲۲N است. در جایی که در آن $g = ۴/۹\mathrm{m/s^2}$، (الف) وزن و (ب) جرم جسم، چیست؟ جسم اگر به جایی از فضا که در آن $g = ۰$، برود، (پ) وزن و (ت) جرم آن، چیست؟

۸۰ شخصی به جرم ۸۰kg به وسیله‌ی چتر نجات با شتاب پایین‌سوی $۲/۵\mathrm{m/s^2}$ در حال پایین آمدن است. جرم چتر ۵/۰kg است. (الف) نیروی بالاسویی که از سوی هوا به چتر نجات باز شده وارد می‌شود، چیست؟ (ب) نیروی پایین‌سویی که شخص به چتر وارد می‌کند، چیست؟

۸۱ یک فضاپیما از سطح کره‌ی ماه، که در آنجا $g = ۱/۶\mathrm{m/s^2}$، به طور قائم بلند می‌شود. اگر شتاب بالاسوی این فضاپیما در لحظه‌ی بلند شدن $۱/۰\mathrm{m/s^2}$ باشد، بزرگی نیرویی که فضاپیما به خلبان وارد می‌کند، چقدر است؟ وزن خلبان در روی زمین ۷۳۵N است.

۸۲ شکل ۵-۶۵ جعبه‌ای به جرم $m = ۴/۰\mathrm{kg}$ را، با دید از بالا، نشان می‌دهد که پنج نیرو آن را به اطراف می‌کشند. بزرگی این نیروها عبارت‌اند از: $F_1 = ۱۱\mathrm{N}$، $F_2 = ۱۷\mathrm{N}$، $F_3 = ۳/۰\mathrm{N}$، $F_4 = ۱۴\mathrm{N}$ و $F_5 = ۵/۰\mathrm{N}$ و $\theta_4 = ۳۰^\circ$. شتاب جعبه را (الف) به صورت نمادگذاری بردارهای یکه و به صورت (ب) بزرگی و (پ) زاویه نسبت به محور x مثبت، به دست آورید.



شکل ۵-۶۵ مسئله‌ی ۸۲.

۸۳ نیروی خاصی به شیئی به جرم m_1 شتاب ۱۲٫۰ m/s^2 و به شیئی به جرم m_2 شتاب ۳٫۳۰ m/s^2 را می‌دهد. این نیرو چه شتابی را به شیئی به جرم (الف) $m_2 - m_1$ و (ب) $m_2 + m_1$، می‌دهد؟

۸۴ یخچال کوچکی با نیروی ثابت $\vec{F}$ روی سطح لیز (بی‌اصطکاک) اتاق در حالتی که $\vec{F}$ افقی است (حالت ۱) یا در حالتی که $\vec{F}$ با سطح زاویه‌ی مثبت θ را می‌سازد (حالت ۲) کشیده می‌شود. (الف) اگر در هر دو حالت مدت زمان کشیدن یخچال یکسان و برابر با t باشد، نسبت تندی یخچال در حالت ۲ به تندی آن در حالت ۱ چیست؟ (ب) اگر در هر دو حالت یخچال به اندازه‌ی مسافت d کشیده شود، نسبت این تندی‌ها چیست؟

۸۵ یک بازیگر ۵۲ کیلوگرمی سیرک باید از طنابی به پایین بلغزد که اگر نیروی کشش آن از ۴۲۵ N تجاوز کند پاره می‌شود. (الف) اگر این بازیگر به صورت ساکن از طناب آویزان شود چه اتفاقی می‌افتد؟ (ب) شتاب بازیگر چقدر باید باشد تا از پاره شدن طناب جلوگیری شود؟

۸۶ وزن یک شخص ۷۵ کیلوگرمی را، (الف) در روی زمین، (ب) در روی سیاره‌ی مریخ، که در آن $g =$ ۳٫۷ m/s^2 و (پ) در فضای میان ستاره‌ها، که در آن $g = $ ۰، حساب کنید. (ت) جرم شخص در هر یک از این مکان‌ها چقدر است؟

۸۷ شیئی از یک ترازوی فنری متصل به سقف اتاقک یک آسانسور آویخته شده است. وقتی اتاقک متوقف است این ترازو عدد ۶۵ N را نشان می‌دهد. ترازو در حالت‌های زیر چه عددی را نشان خواهد داد: اتاقک (الف) با تندی ثابت ۷٫۶ m/s و (ب) با تندی ۷٫۶ m/s که با آهنگ ۲٫۴ m/s^2 کاهش می‌یابد، به بالاسو حرکت می‌کند؟

۸۸ فرض کنید فضاپیمایی در حال فرود آمدن بر سطح کالیستو[1]، یکی از قمرهای سیاره‌ی مشتری، است. اگر موتور فضاپیما نیروی (رانش) بالاسوی ۳۲۶۰ N را وارد کند، فضاپیما با تندی ثابت فرود می‌آید؛ اگر موتور نیروی ۲۲۰۰ N را وارد کند، فضاپیما با شتاب پایین‌سوی ۰٫۳۹ m/s^2 حرکت می‌کند. (الف) وزن فضاپیمای در حال فرود در نزدیکی سطح کالیستو چقدر است؟ (ب) جرم فضاپیما چقدر است؟ (پ) بزرگی شتاب سقوط آزاد در نزدیکی سطح کالیستو چیست؟

۸۹ یک موتور جت ۱۴۰۰ کیلوگرمی فقط با سه پیچ به بدنه‌ی یک هواپیمای مسافربری بسته شده است (در عمل چنین است). فرض کنید هر پیچ یک سوم وزن موتور را تحمل می‌کند. (الف) در حالتی که هواپیما روی باند پرواز منتظر است تا بلند شود، نیروی وارد شده به هر پیچ را حساب کنید. (ب) در حین پرواز هواپیما با هوای آشفته مواجه می‌شود و ناگهان تحت اثر یک شتاب قائم و بالاسوی ۲٫۶ m/s^2 قرار می‌گیرد. در این حالت نیروی وارد شده به هر پیچ را به دست آورید.

۹۰ یک سفینه‌ی فضایی به جرم ۱٫۲۰×۱۰^۶ kg در آغاز نسبت به یک سیستم ستاره‌ای ساکن است. (الف) چه شتاب ثابتی لازم است تا سفینه در مدت ۳٫۰ شبانه‌روز به تندی ۰٫۱۰c (که c تندی نور و برابر با ۳٫۰×۱۰^۸ m/s است) نسبت به سیستم ستاره‌ای برسد؟ (ب) این شتاب چند برابر g است؟ (پ) نیروی مورد نیاز این شتاب چیست؟ (ت) اگر پس از رسیدن سفینه به تندی ۰٫۱۰c موتورها خاموش شوند (که از آن پس تندی ثابت می‌ماند)، چه مدت طول می‌کشد تا سفینه (از آغاز تا پایان حرکت) سفری را به مسافت ۵٫۰ ماه نوری (مسافتی که نور در مدت ۵٫۰ ماه می‌پیماید) انجام دهد؟

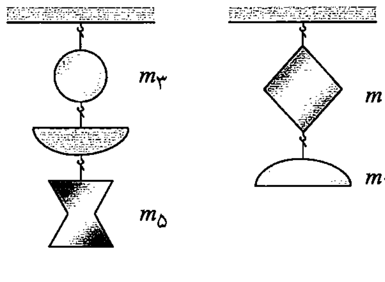
۹۱ موتور سیکلت سواری به جرم ۶۰٫۰ kg با شتاب ۳٫۰ m/s^2 از یک شیب‌راهه‌ی با زاویه‌ی شیب ۱۰ درجه نسبت به افق بالا می‌رود. (الف) بزرگی نیروی برایند وارد شده به موتورسوار و (ب) بزرگی نیرویی که موتورسیکلت به موتورسوار وارد می‌کند، چقدر است؟

۹۲ شتاب آغازی بالاسوی موشکی به جرم ۱٫۳×۱۰^۴ kg را که

1. Callisto

نیروی (رانش) آغازی بالاسوی موتـور آن $۲/۶\times۱۰^{۵}\,\mathrm{N}$ اسـت، حساب کنید. از نیروی گرانشی وارد شده به موشک چشم‌پوشی نکنید.

۹۳ شکل ۵-۶۶ الف یک مجموعه‌ی حرکت‌پذیر را نشان می‌دهد که از یک سقف آویخته شده است؛ ایـن مجموعـه شـامل دو قطعه‌ی فلزی (به جـرم‌هـای $m_۱=۳/۵\,\mathrm{kg}$ و $m_۲=۴/۵\,\mathrm{kg}$) است که با طناب‌هایی با جرم ناچیز، به هم وصل شده‌اند. نیروی کشش در (الـف) طنـاب پـایینی و (ب) طنـاب بـالایی، چقـدر است؟ شکل ۵-۶۶ ب، یک مجموعه‌ی حرکت‌پذیر شـامل سـه قطعـه‌ی فلـزی را نشـان مـی‌دهـد. دو تـا از ایـن جـرم‌هـا $m_۳=۴/۸\,\mathrm{kg}$ و $m_۵=۵/۵\,\mathrm{kg}$ هسـتند. نیـروی کشـش در طناب بالایی $۱۹۹\,\mathrm{N}$ است. نیروی کشش در (پ) طناب پـایینی و (ت) طناب میانی، چیست؟



شکل ۵-۶۶ مسئله‌ی ۹۳.

۹۴ حیوان گورکنی به جرم $۱۲\,\mathrm{kg}$ با سرعت آغازی $۵/۰\,\mathrm{m/s}$ در جهت مثبت محور x روی سطح یخ بسته و بی‌اصطکاک یـک استخر بزرگ می‌دود. مکان آغازی حیوان در روی یـخ را مبـداء مختصات در نظر می‌گیریم. حیوان وقتی که تحت اثر نیروی ۱۷ نیوتونی باد در جهت مثبت محور y قرار می‌گیرد، روی یخ سُر می‌خورد. پس از ۳/۰ ثانیه سُر خوردن، (الف) سـرعت و (ب) بردار مکان حیوان به صورت نمادگذاری بردارهای یکه چیست؟

۹۵ در شکل ۵-۱۲، فرض کنید جـرم اجسـام $۲/۰\,\mathrm{kg}$ و $۴/۰\,\mathrm{kg}$ باشد. (الف) اگر بخواهیم بزرگی شتاب تا حد امکان زیاد باشد، جرم جسم آویخته شده چقدر باید باشد؟ در این صـورت، (ب) بزرگی شتاب و (پ) نیروی کشش ریسمان، چقدر است؟

۹۶ هسته‌ای که نوترون سرگردانی را گیر می‌اندازد، باید نوترون را با ***نیروی قوی*** در طی فاصله‌ای معادل قطر هسـته متوقـف کنـد. این نیرو، که محتویات هسته را به هم «مـی‌چسـباند» در خـارج هسته، به تقریب، صفر است. فرض کنید یک نوترون سـرگردان بـا تنـدی آغـازی $۱/۴\times۱۰^{۷}\,\mathrm{m/s}$ درون هسـته‌ای بـه قطـر $d=۱/۰\times۱۰^{-۱۴}\,\mathrm{m}$ گیر می‌افتد. با این فرض که نیـروی قـوی وارد شده به نوترون ثابت باشد، بزرگی این نیـرو را پیـدا کنیـد. جرم نوترون $۱/۶۷\times۱۰^{-۲۷}\,\mathrm{kg}$ است.

۹۷ اگـر جسـم $۱\,\mathrm{kg}$ اسـتاندارد فقـط تحـت اثـر نیروهـای $F_۱=(۳/۰\,\mathrm{N})\hat{\mathrm{i}}+(۴/۰\,\mathrm{N})\hat{\mathrm{j}}$ و $F_۲=(-۲/۰\,\mathrm{N})\hat{\mathrm{i}}+(-۶/۰\,\mathrm{N})\hat{\mathrm{j}}$ شتاب پیدا کند، نیـروی $\vec{F}_{\mathrm{net}}$ (الـف) بـه صـورت نمادگـذاری بردارهای یکه و به صورت (ب) بزرگی و (پ) زاویه نسبت بـه جهت مثبت محور x، چیسـت؟ (ت) بزرگـی و (ث) زاویـه‌ی شتاب $\vec{a}$، چیست؟

فصل ۶

نیرو و حرکت ـ ۲

۶-۱ اصطکاک

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۶-۱ تفاوت میان اصطکاک در حالت ایستایی و حالت جنبشی را تشخیص دهید.

۶-۲ جهت و بزرگی نیروی اصطکاک را معین کنید.

۶-۳ در مورد اشیای واقع در روی سطح‌های افقی، قائم، یا شیب‌دار دارای اصطکاک نمودارهای جسم ـ آزاد را رسم کنید و قانون دوم نیوتون را به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

• وقتی نیروی $\vec{F}$ می‌خواهد جسمی را بر روی سطحی بلغزاند، نیروی اصطکاک ناشی از سطح به جسم وارد می‌شود. نیروی اصطکاک با سطح موازی است و جهتش به گونه‌ای است که با لغزیدن جسم مخالفت می‌کند. این اثر ناشی از قید میان جسم و سطح است.

اگر جسم نلغزد، نیروی اصطکاک نیروی اصطکاک ایستایی $\vec{f}_s$، است. اگر لغزش وجود داشته باشد، نیروی اصطکاک نیروی اصطکاک جنبشی $\vec{f}_k$، است.

• اگر جسمی حرکت نکند، بزرگی نیروی اصطکاک ایستایی $\vec{f}_s$ برابر با بزرگی مؤلفه‌ی $\vec{F}$ موازی با سطح است و f_s ناهمسو با این مؤلفه است. هرگاه این مؤلفه افزایش یابد، f_s نیز افزایش پیدا می‌کند.

• بزرگی $\vec{f}_s$ دارای مقدار بیشینه‌ی $\vec{f}_{s,\max}$ است که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$f_{s,\max} = \mu_s F_N$$

که در آن μ_s ضریب اصطکاک ایستایی و F_N بزرگی نیروی عمودی است. اگر مؤلفه‌ی موازی با سطح $\vec{F}$ از $f_{s,\max}$ بیشتر شود، جسم بر روی سطح می‌لغزد.

• هرگاه جسم شروع به لغزیدن بر روی سطح بکند، بزرگی نیروی اصطکاک به سرعت تا مقدار ثابت f_k کاهش می‌یابد، که برابر است با

$$f_k = \mu_k F_N$$

که در آن μ_k ضریب اصطکاک جنبشی است.

فیزیک در این باره چه می‌گوید؟

در این فصل، فیزیک مربوط به سه نوع نیروی متعارف را که عبارت‌اند از: **نیروی اصطکاک**، **نیروی پَسار (پس‌کشی)** و **نیروی مرکزگرا**، مطالعه می‌کنیم. تعمیرکاری که یک خودرو را برای مسابقه‌ی ایندیاناپولیس ۵۰۰ آماده می‌کند، باید تمام این سه نیرو را در نظر بگیرد. نیروهای اصطکاک وارد شده به چرخ‌های خودرو نقش مؤثری در شتاب‌گیری خودرو برای بیرون آمدن از تعمیرگاه و عبور کردن از پیچ مسیر دارند (اگر لاستیک خودرو با لکه‌ی روغنی برخورد کند، اصطکاک از میان می‌رود و خودرو نیز دچار مشکل می‌شود). نیروهای پَسار وارد شده به خودرو از سوی هوای پیرامون هم باید به حداقل برسند وگرنه خودرو سوخت بسیار زیادی مصرف می‌کند و باید هر چه زودتر دوباره سوخت‌گیری کند (حتی یک توقف ۱۴ ثانیه‌ای برای سوخت‌گیری هم می‌تواند باعث باخت در مسابقه شود). نیروهای مرکزگرا نقش مهمی در پیچ‌های جاده دارند (اگر نیروی مرکزگرا کافی نباشد، خودرو در سر پیچ به سمت بیرون جاده سُر می‌خورد). در اینجا بحث خود را با نیروهای اصطکاک آغاز می‌کنیم.

اصطکاک

در کارهای روزانه نیروهای اصطکاک را نمی‌توان از میان برد. اگر ما نتوانیم با این نیروها مقابله کنیم، آن‌ها هر شیء متحرکی را از حرکت باز می‌دارند و هر محور در حال چرخشی را متوقف می‌کنند. در حدود ۲۰% از سوخت مصرف شده در خودرو، صرف مقابله با اصطکاک در موتور و بخش‌های متحرک آن می‌شود. از سوی دیگر، اگر به طور کلی اصطکاک وجود نداشته باشد نمی‌توان با خودرو به جایی رفت و نمی‌توان راه رفت، یا دوچرخه‌سواری کرد؛ نمی‌توان مدادی را به دست گرفت، و اگر هم‌چنین شود مداد نمی‌نویسد. میخ‌ها و پیچ‌ها بدون استفاده می‌مانند، پارچه‌های بافته شده رشته رشته می‌شوند و گره‌ها باز می‌مانند.

سه آزمایش. در اینجا نیروهای اصطکاک میان اجسام صُلب و خشک را در نظر می‌گیریم که نسبت به هم ساکن‌اند یا با تندی کم بر رویِ هم حرکت می‌کنند. سه آزمایش تصوری ساده‌ی زیر را در نظر بگیرید:

۱. کتابی را بر روی یک پیشخوان افقی دراز می‌لغزانیم. همان‌طور که انتظار داریم، کتاب حرکتش کند و سپس متوقف می‌شود. نتیجه‌ی گرفته شده این است که کتاب باید شتابی موازی با سطح پیشخوان و ناهمسو با حرکت کتاب داشته باشد. بنابراین، با توجه به قانون دوم نیوتون باید نیرویی به موازات سطح پیشخوان و ناهمسو با حرکت به کتاب وارد شده باشد. این نیرو، **نیروی اصطکاک** است.

۲. کتاب را به طور افقی هُل می‌دهیم تا با سرعت ثابت بر روی پیشخوان حرکت کند. آیا نیروی مؤثر بر کتاب تنها نیروی افقی وارد شده به کتاب است؟ نه، چون در آن صورت کتاب باید شتاب پیدا می‌کرد. با توجه به قانون دوم نیوتون، نیروی دیگری هم باید وجود داشته باشد که ناهمسو با نیروی ما و با همان بزرگی به کتاب وارد شود تا دو

نیرو اثر یکدیگر را خنثی کنند. این نیروی دوم یک نیروی اصطکاک موازی با سطح پیشخوان است.

۳. صندوق سنگینی را به طور افقی هُل می‌دهیم، اما صندوق حرکت نمی‌کند. با توجه به قانون دوم نیوتون نیروی دیگری نیز باید به صندوق وارد شده باشد تا با نیروی ما مقابله کند. علاوه بر این، این نیرو باید با نیروی ما ناهمسو و به همان بزرگی باشد تا دو نیرو با یکدیگر متوازن شوند. این نیروی دوم یک نیروی اصطکاک است. اکنون، صندوق را با نیروی بیشتری هُل می‌دهیم. صندوق باز هم حرکت نمی‌کند. به نظر می‌رسد که بزرگی نیروی اصطکاک را آن‌قدر می‌توان تغییر داد که دو نیرو باز هم با هم متوازن شوند. اکنون صندوق را با تمام قدرت هُل می‌دهیم و مشاهده می‌کنیم که شروع به لغزیدن می‌کند. نتیجه می‌گیریم که نیروی اصطکاک دارای یک بزرگی بیشینه است و هرگاه بزرگی نیروی وارد شده به صندوق از این مقدار تجاوز کند صندوق می‌لغزد.

دوگونه اصطکاک. شکل ۶-۱ نموداری از آزمایش ذکر شده را به طور مشروح نشان می‌دهد. در شکل ۶-۱ الف، جسمی روی سطح میز به حال سکون قرار دارد و نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ با نیروی عمودی $\vec{F}_N$ متوازن شده است. در شکل ۶-۱ ب، نیروی $\vec{F}$ را به جسم وارد می‌کنیم تا آن را به سمت چپ بکشیم. در پاسخ این عمل نیروی اصطکاک $\vec{f}_s$ به سمت راست به جسم وارد می‌شود و نیروی ما را خنثی می‌کند. نیروی $\vec{f}_s$ را **نیروی اصطکاک ایستایی** می‌نامند. در این حالت جسم حرکت نمی‌کند.

شکل‌های ۶-۱ پ و ۶-۱ ت نشان می‌دهند که وقتی بزرگی نیروی وارد شده افزایش پیدا می‌کند، بزرگی نیروی اصطکاک ایستایی $\vec{f}_s$ نیز افزایش می‌یابد و جسم ساکن می‌ماند. اما هنگامی که نیروی وارد شده به مقدار معینی می‌رسد جسم از تماس با سطح میز «جاکن می‌شود» و به سمت چپ شتاب پیدا می‌کند (شکل ۶-۱ ث). در این حالت نیروی اصطکاکی که با حرکت مخالفت می‌کند، **نیروی اصطکاک جنبشی** $\vec{f}_k$، نامیده می‌شود.

بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی که در هنگام حرکت کردن اثر می‌کند، به طور معمول، از بزرگی بیشینه‌ی نیروی اصطکاک ایستایی به هنگام نبود حرکت، کمتر است. بنابراین، اگر بخواهیم جسمی با تندی ثابت بر روی سطحی حرکت کند، به طور معمول، باید بزرگی نیروی وارد شده در لحظه‌ی شروع حرکت را، مانند شکل ۶-۱ ج، کاهش دهیم. به عنوان مثال، شکل ۶-۱ چ نتیجه‌های آزمایشی را نشان می‌دهد که در آن نیروی وارد شده به جسم به تدریج زیاد شده است تا جسم از جای خود حرکت کند. به نیروی کاهش یافته‌ی لازم برای حرکت کردن جسم با تندی ثابت پس از جاکن شدن جسم، توجه کنید.

دیدگاه ریزمقیاس. نیروی اصطکاک در اصل برابر با مجموع برداری نیروهایی است که در میان اتم‌های سطحی یک جسم و اتم‌های سطحی جسم دیگر اثر می‌کنند. اگر دو سطح فلزی صیقلی و تمیز در یک خلاء کاملاً مناسب (برای حفظ کردن تمیزی سطح) با هم در تماس باشند نمی‌توان آن‌ها را بر روی هم لغزاند. چون سطح‌ها به‌قدری صاف‌اند که اتم‌های زیادی از

زمانی جسم به حرکت در می‌افتد که تحت نیروی خنثی نشده قرار گیرد.

هم وزن جسم ↑ ← نیروی اصطکاک ↑

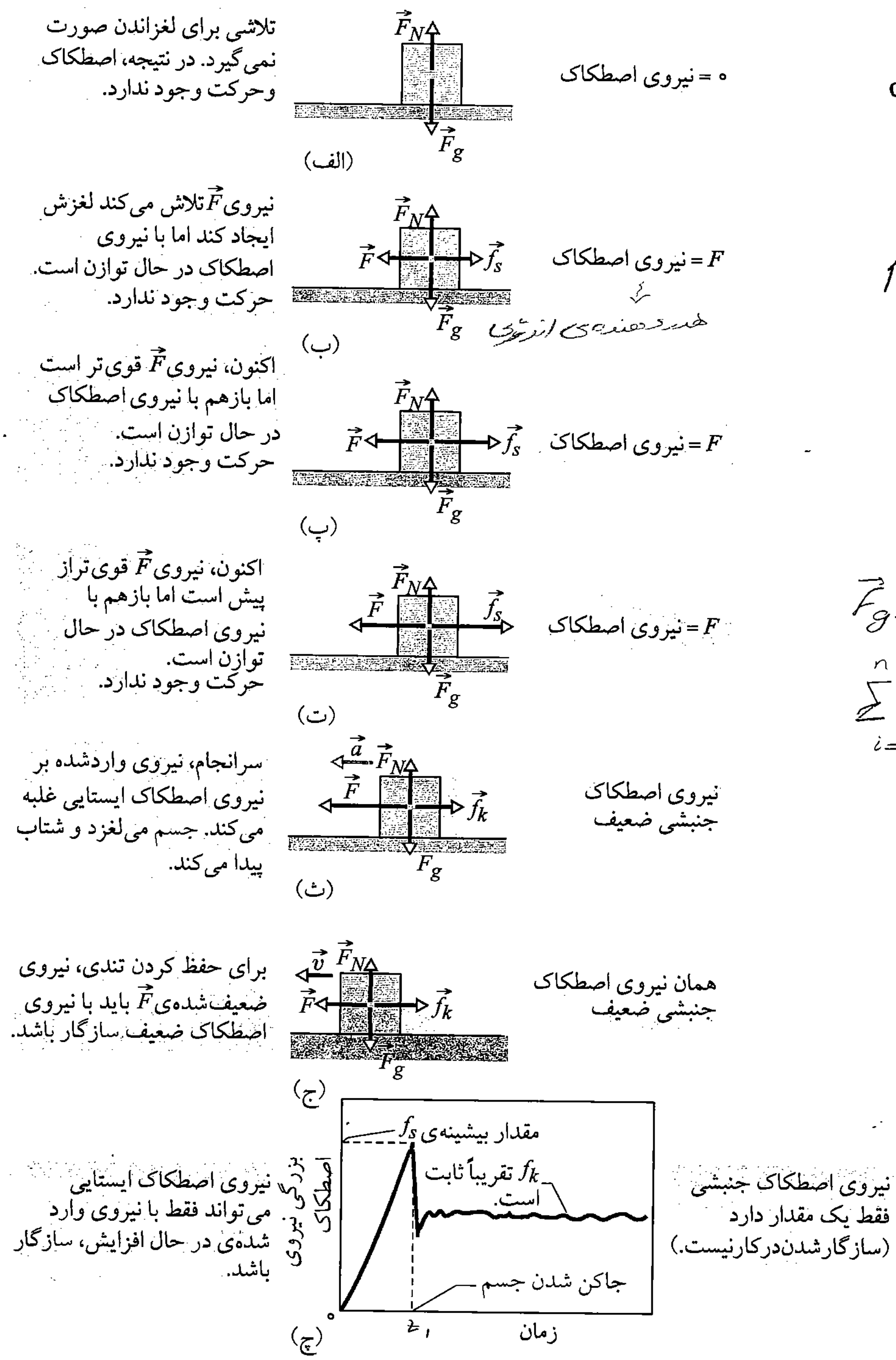
راه کارهای افزایش اصطکاک:

۱- سطوح تماس را زبر کنیم

۲- وزن جسم را زیاد کنیم

$$\vec{F}_g = \vec{N} = m\vec{g}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$$



شکل ۶-۱ (الف) نمودار نیروهای وارد شده به یک جسم ساکن. (ب تا ت) نیروی خارجی $\vec{F}$ به جسم وارد می‌شود و با نیروی اصطکاک ایستایی $\vec{f}_s$ در حال توازن است. وقتی F افزایش می‌یابد f_s هم زیاد می‌شود، تا آنکه f_s به یک مقدار بیشینه‌ی معین می‌رسد. (ث) وقتی f_s به مقدار بیشینه‌ی خود می‌رسد، جسم ناگهان در جهت نیروی $\vec{F}$ شتاب‌دار و «جاکن می‌شود». (ج) اکنون اگر بخواهیم جسم با سرعت ثابت حرکت کند، درست پیش از جاکن شدن آن نیروی F باید از مقدار بیشینه کمتر شود. (چ) نمودار برخی نتیجه‌های تجربی مربوط به حالت‌های (الف) تا (ج).

Exactly = دقیقاً   Approximately = تقریباً

یک سطح با اتم‌های سطح دیگر تماس پیدا می‌کنند و سطح‌ها با خوردن **جوش سرد** به طور لحظه‌ای به یکدیگر تکه فلز واحدی تشکیل می‌دهند. به ویژه، اگر کارگر ماشین‌کاری سطح‌های دو قطعه را به طور کامل جلا بدهد و آن‌ها را در هوا روی هم بگذارد، گرچه تماس اتم به اتم سطح‌ها کم است اما قطعه‌ها چنان به هم می‌چسبند که فقط با ابزار می‌توان آن‌ها را از هم جدا کرد. البته، رسیدن به شرایط تماس اتم به اتم سطح‌ها، معمولاً امکان‌پذیر نیست،

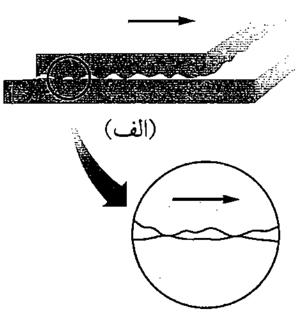
حتی یک سطح فلزی کاملاً صیقلی هم در مقیاس اتمی ناصاف است. علاوه بر این، چون سطح‌های اشیای معمولی از لایه‌های اکسیدی و آلودگی‌های دیگر پوشیده شده‌اند، عمل جوش خوردن سرد کاهش پیدا می‌کند.

وقتی دو سطح معمولی بر روی هم قرار می‌گیرند، فقط نقطه‌های برجسته با هم تماس پیدا می‌کنند. (مانند این است که کوه‌های آلپ سویس را برگردانیم و آن‌ها را بر روی کوه‌های آلپ اتریش قرار دهیم). وسعت ***سطح ریزمقیاس*** واقعی تماس، شاید به نسبت 10^4 برابر، کوچک‌تر از وسعت ***سطح درشت مقیاس*** ظاهری باشد. با وجود این، عده‌ی زیادی از نقطه‌های تماس به هم جوش سرد می‌خورند و همین جوش‌ها هستند که هنگام وارد کردن نیرو برای لغزاندن سطح‌ها بر روی هم اصطکاک ایستایی ایجاد می‌کنند.

اگر نیروی وارد شده آن‌قدر بزرگ باشد که بتواند یک سطح را بر روی سطح دیگر بکشد و **اصطکاک لغزشی** را به وجود آورد، ابتدا جوش‌ها گسیخته می‌شوند (در لحظه‌ی جاکن شدن) و آنگاه تا وقتی که حرکت و شانس تشکیل شدن تماس‌ها وجود دارد عمل باز تشکیل و گسیختن جوش‌ها ادامه پیدا می‌کند (شکل ۶-۲). نیروی اصطکاک جنبشی $\vec{f}_k$، که با حرکت کردن مخالفت می‌کند، برابر با مجموع برداری نیروهایی است که در این تماس‌های اتفاقی وارد می‌شوند.

اگر دو سطح را به شدت به هم فشار بدهیم، نقطه‌هایی که جوش سرد می‌خورند بیشتر می‌شوند. در نتیجه، برای لغزاندن سطح‌ها بر روی هم نیروی بزرگ‌تری لازم است. در این حالت مقدار بیشینه‌ی نیروی اصطکاک ایستایی $\vec{f}_s$، بیشتر می‌شود. هنگامی که سطح‌ها بر روی هم می‌لغزند نقطه‌های بیشتری جوش سرد می‌خورند و نیروی اصطکاک جنبشی $\vec{f}_k$، نیز بیشتر خواهد شد.

حرکت لغزشی یک سطح بر روی سطح دیگر، اغلب، «نامنظم» است، زیرا دو سطح به طور متناوب به هم می‌چسبند و سپس می‌لغزند. این ***چسبیدن و لغزیدن تکراری*** می‌تواند صدای جیر جیر یا جیغ جیغ تولید کند، مانند وقتی که لاستیک خودرو بر روی سنگ‌فرش خشک سُر می‌خورد، یا ناخن دست بر روی سطح تخته کشیده می‌شود، یا دَری با لولای زنگ زده باز می‌شود. این نوع حرکت می‌تواند صداهای خوش‌آیند نیز تولید کند، مانند وقتی که آرشه به نحو مناسبی روی سیم ویولن کشیده می‌شود.



(الف)

(ب)

شکل ۶-۲ نمایش سازوکار **اصطکاک لغزشی**. (الف) در این تصویر بزرگ شده سطح بالایی بر روی سطح پایینی به سمت راست می‌لغزد. (ب) تصویر بزرگ شده‌ی دو نقطه که در آنجا جوش خوردگی سرد صورت گرفته است. برای گسستن این جوش خوردگی‌ها و ادامه‌ی حرکت نیرو لازم است.

اصطکاک لغزشی > اصطکاک غلتشی

خاصیت‌های نیروی اصطکاک

تجربه نشان می‌دهد که وقتی یک جسم خشک و روغن‌کاری نشده روی یک سطح فشرده می‌شود و می‌خواهیم آن را با نیروی $\vec{F}$ روی سطحی بلغزانیم، نیروی اصطکاک حاصل دارای سه خاصیت زیر است:

خاصیت ۱. اگر جسم حرکت نکند، نیروی اصطکاک ایستایی $\vec{f}_s$ و مؤلفه ی موازی با سطح نیروی $\vec{F}$ اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند. بزرگی این دو نیرو یکسان و $\vec{f}_s$ با

مؤلفه‌ی $\vec{F}$ ناهمسو است.

خاصیت ۲. بزرگی $\vec{f}_s$ مقدار بیشینه‌ای دارد که از معادله‌ی زیر به دست می‌آید

$$f_{s,\max} = \mu_s F_N \qquad (۶-۱)$$

ضریب اصطکاک متغیر است $\boxed{0 \le \max}$

در این معادله μ_s **ضریب اصطکاک ایستایی** و F_N بزرگی نیروی عمودی است که سطح به جسم وارد می‌کند. اگر بزرگی مؤلفه‌ی موازی با سطح نیروی $\vec{F}$ از $f_{s,\max}$ بیشتر شود جسم در طول سطح شروع به لغزیدن می‌کند.

خاصیت ۳. اگر جسم در طول سطح شروع به لغزیدن بکند، بزرگی نیروی اصطکاک خیلی زود به مقدار f_k کاهش می‌یابد. این مقدار از معادله‌ی زیر به دست می‌آید

$$f_k = \mu_k F_N \qquad (۶-۲)$$

نیروی اصطکاک جنبشی تقریباً ثابت است.

در این معادله μ_k **ضریب اصطکاک جنبشی** است. در حین لغزیدن جسم، نیروی اصطکاک جنبشی $\vec{f}_k$، که بزرگی‌اش از معادله‌ی ۶-۲ به دست می‌آید، با حرکت کردن مخالفت می‌کند.

بزرگی نیروی عمودی F_N، که در خاصیت‌های ۲ و ۳ ظاهر شده است، میزان نیروی فشار دهنده‌ی جسم به سطح را نشان می‌دهد. هر چه جسم با نیروی بیشتری به سطح فشرده شود، بنابه قانون سوم نیوتون F_N بزرگ‌تر می‌شود. در خاصیت‌های ۱ و ۲ فقط از تک نیروی وارد شده‌ی $\vec{F}$ نام برده شد، اما این موضوع در مورد نیروی برایند چند نیروی وارد شده به جسم هم صدق می‌کند. معادله‌های ۶-۱ و ۶-۲، ***معادله‌هایی برداری نیستند***؛ $\vec{f}_k$ یا $\vec{f}_s$ همیشه با سطح موازی است و با لغزیدن جسم مخالفت می‌کند، اما نیروی $\vec{F}_N$ بر سطح عمود است.

ضریب‌های μ_s و μ_k بی‌بُعدند و باید به طور تجربی معین شوند. مقدار این ضریب‌ها به خواص ویژه‌ی جسم و سطح بستگی دارد. از این رو، به طور معمول، برای بیان کردن آن‌ها از واژه‌ی «میان» استفاده می‌شود. مثلاً، گفته می‌شود که «مقدار μ_s ***میان*** تخم مرغ و قابلمه‌ی تفلون‌اندود ۰٫۰۴ است، اما مقدار μ_s میان کفش‌های کوه‌نوردی و صخره ۱٫۲ است». فرض می‌کنیم که مقدار μ_k به تندی لغزیدن جسم در طول سطح بستگی نداشته باشد.

☑ خودآزمایی ۱

جسمی روی کف اتاق واقع شده است. (الف) بزرگی نیروی اصطکاکی که سطح به جسم وارد می‌کند، چقدر است؟ (ب) اکنون، یک نیروی افقی ۵ نیوتونی به جسم وارد می‌شود اما جسم حرکت نمی‌کند. بزرگی نیروی اصطکاک وارد شده به جسم چقدر است؟ (پ) اگر بیشینه‌ی مقدار نیروی اصطکاک ایستایی وارد شده به جسم $10\,N$ و بزرگی نیروی افقی وارد شده به آن $8\,N$ باشد، آیا جسم حرکت می‌کند؟ (ت) اگر بزرگی نیروی افقی وارد شده $12\,N$ باشد، چطور؟ (ث) بزرگی نیروی اصطکاک در قسمت (پ) چقدر است؟

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱-۶ نیروی زاویه‌دار وارد شده به جسم ساکن

این مسئله‌ی نمونه مربوط به یک نیروی وارد شده‌ی مایل است که برای پیدا کردن نیروی اصطکاک باید از مؤلفه‌های آن استفاده کنیم. در اینجا چالش عمده‌یافتن همه‌ی مؤلفه‌هاست. شکل ۶-۳ الف نیرویی با بزرگی $F = ۱۲/۰\text{N}$ را نشان می‌دهد که به یک جسم ۸/۰۰ کیلوگرمی تحت زاویه‌ی $\theta = ۳۰/۰°$ به پایین‌سو وارد شده است. ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم و سطح $\mu_s = ۰/۷۰۰$ و ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k = ۰/۴۰۰$ است. آیا این جسم شروع به لغزیدن می‌کند یا ساکن می‌ماند؟ بزرگی نیروی اصطکاک وارد شده به جسم چیست؟

نکته‌های کلیدی

(۱) وقتی شیئی در روی یک سطح ساکن است، نیروی اصطکاک ایستایی با مؤلفه‌ی نیرویی که می‌خواهد جسم را بر روی سطح بلغزاند، برابر است. (۲) بزرگی بیشینه‌ی ممکن این نیرو از معادله‌ی ۶-۱ ($f_{s,\max} = \mu_s F_N$) به دست می‌آید. (۳) اگر مؤلفه‌ی نیروی وارد شده در راستای سطح از حد اصطکاک ایستایی بیشتر شود، جسم شروع به لغزیدن می‌کند. (۴) اگر جسم بلغزد، نیروی اصطکاک جنبشی از معادله‌ی ۶-۲ ($f_k = \mu_k F_N$) به دست می‌آید.

محاسبات: برای آنکه بفهمیم جسم می‌لغزد (و از آنجا بزرگی نیروی اصطکاک را حساب کنیم)، باید مؤلفه‌ی F_x نیروی وارد شده را با بزرگی بیشینه‌ی $f_{s,\max}$ که نیروی اصطکاک ایستایی می‌تواند داشته باشد مقایسه کنیم. از مثلث تشکیل شده با مؤلفه‌ها و نیروی کامل نشان داده شده در شکل ۶-۳ ب، داریم

$$F_x = F\cos\theta$$

$$F_x = (۱۲/۰\text{N})\cos ۳۰° = ۱۰/۳۹\text{N} \qquad (۶\text{-}۳)$$

با توجه به معادله‌ی ۶-۱ می‌دانیم که $f_{s,\max} = \mu_s F_N$، اما برای محاسبه‌ی $f_{s,\max}$ به بزرگی نیروی عمودی F_N، نیاز داریم. چون نیروی عمودی به صورت قائم است، باید قانون دوم نیوتون ($F_{\text{net},y} = ma_y$) مربوط به مؤلفه‌های قائم نیروی وارد شده به جسم را، که در شکل ۶-۳ پ نشان داده شده است، بنویسیم. نیروی گرانشی با بزرگی mg به پایین‌سو وارد می‌شود. نیروی وارد شده دارای مؤلفه‌ی پایین‌سوی $F_y = F\sin\theta$ است و شتاب قائم a_y صفر است. بنابراین، قانون دوم نیوتون را می‌توان چنین نوشت

$$F_N - mg - F\sin\theta = m(۰) \qquad (۶\text{-}۴)$$

و از آنجا، داریم

$$F_N = mg + F\sin\theta \qquad (۶\text{-}۵)$$

اکنون، می‌توان $f_{s,\max} = \mu_s F_N$ را حساب کرد:

$$f_{s,\max} = \mu_s(mg + F\sin\theta)$$

$$f_{s,\max} = (۰/۷۰۰)(۸/۰۰\text{kg})(۹/۸\text{m/s}^۲) + (۱۲/۰\text{N})\sin ۳۰°$$

$$f_{s,\max} = ۵۹/۰۸\text{N} \qquad (۶\text{-}۶)$$

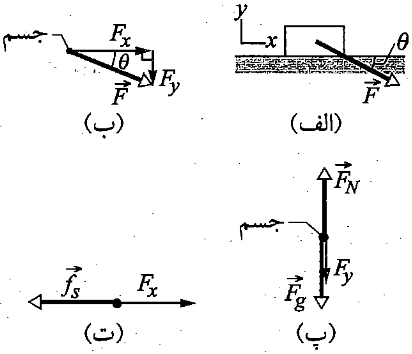
چون بزرگی F_x (مساوی با $۱۰/۳۹\text{N}$) مؤلفه‌ی نیرو که می‌خواهد جسم را بلغزاند. از $f_{s,\max}$ (مساوی با $۵۹/۰۸\text{N}$) کمتر است، جسم ساکن می‌ماند. منظور این است که بزرگی f_s نیروی اصطکاک با F_x ***سازگار است.***

با توجه به شکل ۶-۳ ت، قانون دوم نیوتون مربوط به مؤلفه‌های x را می‌توان چنین نوشت

$$F_x - f_s = m(۰) \qquad (۶\text{-}۷)$$

در نتیجه، داریم

$$f_s = F_x = ۱۰/۳۹\text{N} \approx ۱۰/۴\text{N} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$



شکل ۶-۳ (الف) نمایش نیرویی که به یک جسم ساکن وارد شده است. (ب) مؤلفه‌های این نیروی وارد شده. (پ) مؤلفه‌های نیروی قائم. (ت) مؤلفه‌های نیروی افقی.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۶-۲ لغزیدن تا توقف در جاده‌های یخ زده‌ی افقی و شیب‌دار

برخی فیلم‌های خنده‌آور مربوط به خودروهایی هستند که بی‌اختیار بر روی جاده‌های یخ زده سُر می‌خورند. در اینجا می‌خواهیم مسافت پیموده شده تا توقف نوعی یک خودرو را، که از تندی آغازی ۱۰٫۰m/s تا توقف، بر روی یک جاده‌ی افقی خشک، یک جاده‌ی افقی یخ زده و یک تپه‌ی یخ زده (هر کدام را که می‌پسندید) می‌لغزد، با هم مقایسه کنیم.

(الف) در جاده‌ای افقی (شکل ۶-۴ الف) با ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k = ۰٫۶۰$، که مقداری نوعی برای اصطکاک میان لاستیک‌های خودرو و سطح خشک خیابان است، یک خودرو پس از پیمودن چه مسافتی متوقف می‌شود؟ از هرگونه تأثیر هوا روی خودرو چشم‌پوشی و فرض می‌کنیم که چرخ‌ها قفل می‌شوند و لاستیک‌ها می‌لغزند و محور x در جهت حرکت خودرو قرار دارد.

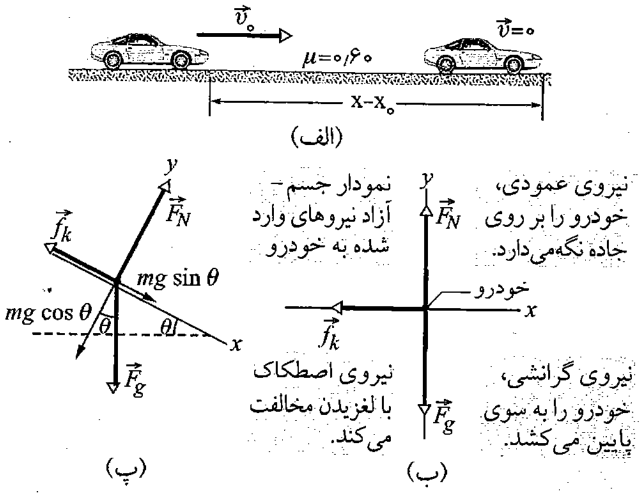
نکته‌های کلیدی

(۱) خودرو شتاب می‌گیرد (تندی‌اش کاهش می‌یابد) زیرا یک نیروی اصطکاک افقی در خلاف جهت حرکت و در جهت منفی محور x، به آن وارد می‌شود. (۲) نیروی اصطکاک یک نیروی اصطکاک جنبشی است که بزرگی‌اش از معادله‌ی ۶-۲ ($f_k = \mu_k F_N$) به دست می‌آید، که در اینجا F_N بزرگی نیروی عمودی وارد شده از جاده به خودرو است. (۳) با نوشتن قانون دوم نیوتون ($F_{\mathrm{net},x} = ma_x$) برای حرکت خودرو در راستای جاده، می‌توان این نیروی اصطکاک را به شتاب خودرو ربط داد.

محاسبات: شکل ۶-۴ ب نمودار جسم ـ آزاد مربوط به خودرو را نشان می‌دهد. نیروی عمودی بالاسو، نیروی گرانشی پایین‌سو و نیروی اصطکاک افقی است. چون نیروی اصطکاک تنها نیروی دارای مؤلفه‌ی x است، قانون دوم نیوتون درباره‌ی حرکت در راستای محور x چنین نوشته می‌شود.

$$-f_k = ma_x \qquad (۶\text{-}۸)$$

با جانشانی $f_k = \mu_k F_N$ در معادله‌ی بالا، داریم



شکل ۶-۴ (الف) خودرویی به سمت راست می‌لغزد و سرانجام پس از پیمودن مسافت ۲۹۰m متوقف می‌شود. نمودار جسم ـ آزاد مربوط به خودرو بر روی (ب) یک جاده‌ی افقی و (پ) یک تپه.

$$-\mu_k F_N = ma_x \qquad (۶\text{-}۹)$$

شکل ۶-۴ ب نشان می‌دهد که نیروی عمودی بالاسو با نیروی گرانشی پایین‌سو متوازن می‌شود، در نتیجه در معادله‌ی ۶-۹ به‌جای بزرگی F_N می‌توان بزرگی mg را قرار داد. در این صورت می‌توان m را حذف کرد (در نتیجه مسافت توقف به جرم خودرو بستگی ندارد ـ سنگین یا سبک بودن خودرو اهمیتی ندارد). با حل کردن معادله نسبت به a_x، داریم

$$a_x = -\mu_k g \qquad (۶\text{-}۱۰)$$

چون شتاب ثابت است، می‌توان از معادله‌های شتاب ثابت در جدول ۲-۱ استفاده کرد. آسان‌ترین انتخاب برای پیدا کردن مسافت لغزش $x - x_0$، معادله‌ی ۲-۱۶ [$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$] است و از آنجا، داریم

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a_x} \qquad (۶\text{-}۱۱)$$

با جانشانی a_x از معادله‌ی ۶-۱۰، داریم

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{-2\mu_k g} \qquad (۶\text{-}۱۲)$$

با وارد کردن تندی آغازی $v_0 = ۱۰٫۰\,\mathrm{m/s}$، تندی پایانی $v = ۰$ و ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k = ۰٫۶۰$، مسافت توقف خودرو

چنین به دست می‌آید

(پاسخ) $x - x_۰ = ۸٫۵۰\,\mathrm{m} \approx ۸٫۵\,\mathrm{m}$

(ب) اگر جاده پوشیده از یخ با $\mu_k = ۰٫۱۰$ باشد، مسافت توقف خودرو چیست؟

محاسبه: حل مسئله با استفاده کردن از معادله‌ی ۶-۱۲ بسیار ساده می‌شود و با جانشانی مقدار جدید μ_k، داریم

(پاسخ) $x - x_۰ = ۵۱\,\mathrm{m}$

بنابراین، مسافت طولانی‌تری برای لغزیدن لازم است تا خودرو در مسیر خود به چیزی برخورد نکند.

(پ) اکنون خودرویی را در نظر می‌گیریم که از یک تپه‌ی یخ زده با زاویه‌ی شیب $\theta = ۵٫۰۰^\circ$ (یک شیب ملایم، نه شیبی شبیه به تپه‌های سانفرانسیسکو) به پایین می‌لغزد. نمودار جسم ـ آزاد نشان داده شده در شکل ۶-۴ ب، مانند سطح شیب‌دار مسئله‌ی نمونه‌ی ۵-۴ است، با این تفاوت که برای سازگار بودن با شکل ۶-۴ ب، جهت مثبت محور x به سمت ***پایین*** سطح شیب‌دار است. در این حالت مسافت توقف چقدر است؟

محاسبات: شکل ۶-۴ ب و شکل ۶-۴ پ دو تفاوت عمده را نشان می‌دهند: (۱) یک مؤلفه‌ی نیروی گرانشی در راستای محور x یکوری شده وجود دارد که خودرو را به پایین تپه می‌کشد. با توجه به مسئله‌ی نمونه‌ی ۵-۴ و شکل ۵-۱۵ می‌دانیم که مؤلفه‌ی رو به پایین تپه $mg\sin\theta$ است که در جهت مثبت محور x در شکل ۶-۴ پ است. (۲) اکنون نیروی عمودی (که باز هم بر جاده عمود است) تنها با یکی از مؤلفه‌های نیروی گرانشی، و نه نیروی گرانشی کامل، متوازن می‌شود. نتیجه‌ی این توازن را با استفاده کردن از مسئله‌ی نمونه‌ی ۵-۴ (شکل ۵-۱۵ خ را ببینید) چنین می‌نویسیم

$$F_N = mg\cos\theta$$

با وجود این تغییرات، باز هم می‌خواهیم قانون دوم نیوتون ($F_{\mathrm{net},x} = ma_x$) درباره‌ی حرکت در راستای محور x (یکوری شده) بنویسیم. در نتیجه، داریم

$$-f_k + mg\sin\theta = ma_x$$

$$-\mu_k F_N + mg\sin\theta = ma_x$$

و

$$-\mu_k mg\cos\theta + mg\sin\theta = ma_x$$

با حل کردن معادله نسبت به شتاب و جانشانی داده‌ها، داریم

$$a_x = -\mu_k g\cos\theta + g\sin\theta$$

$$a_x = -(۰٫۱۰)(۹٫۸\,\mathrm{m/s^۲})\cos ۵٫۰۰^\circ + (۹٫۸\,\mathrm{m/s^۲})\sin ۵٫۰۰^\circ$$

$$a_x = -۰٫۱۲۲\,\mathrm{m/s^۲} \qquad (۶\text{-}۱۳)$$

با جانشانی این نتیجه در معادله‌ی ۶-۱۱، مسافت توقف به سمت پایین تپه به دست می‌آید:

(پاسخ) $x - x_۰ = ۴۰۹\,\mathrm{m} \approx ۴۰۰\,\mathrm{m}$

این مسافت در حدود $\frac{۱}{۴}$ مایل است! چنین تپه‌های یخ زده‌ای افرادی را که می‌توانند این محاسبه را انجام دهند (و در نتیجه می‌دانند که باید در خانه بمانند)، از افرادی که نمی‌توانند محاسبه را انجام دهند (و در نتیجه کارشان به فیلم‌های خنده‌آور می‌کشد) از هم جدا می‌کنند.

۶-۲ نیروی پَسار و تندی حد = Resistive Force = نیروی بازدارنده .

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۶-۴ رابطه‌ی میان نیروی پَسار وارد شده به یک شیء در حال حرکت در هوا و تندی آن شیء را به کار ببرید.

۶-۵ تندی حد یک شیء در حال سقوط در هوا را معین کنید.

نکته‌های کلیدی

● وقتی در بین هوا (یا شاره‌ی دیگر) و یک جسم حرکت نسبی وجود دارد، جسم تحت تأثیر نیروی پَسار $\vec{D}$ قرار می‌گیرد که با حرکت نسبی مخالفت می‌کند و در جهتی است که شاره نسبت به جسم شارش پیدا می‌کند. بزرگی $\vec{D}$، از طریق ضریب پَسار C، که به طور تجربی معین شده است، به صورت زیر به تندی نسبی v بستگی دارد.

$$D = \frac{1}{2}C\rho A v^2$$

که در آن ρ چگالی شاره (جرم یکای حجم) و A مساحت مقطع مؤثر جسم (مساحت سطح مقطع عمود بر سرعت نسبی $\vec{v}$) است.

● وقتی یک شیء پهن به قدر کافی در هوا سقوط می‌کند، بزرگی نیروی پَسار $\vec{D}$ و نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد شده به جسم برابر می‌شوند. در این صورت جسم با تندی حد ثابت v_t سقوط می‌کند که برابر است با

$$v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C\rho A}}$$

نیروی پَسار و تندی حد

شاره، چیزی است که می‌تواند جاری شود و، به طور معمول، به صورت گاز یا مایع است. وقتی میان شاره و یک جسم سرعت نسبی وجود دارد (به خاطر حرکت کردن جسم در درون شاره یا عبور شاره از کنار جسم)، مقاومت شاره به صورت **نیروی پَسار (نیروی پس‌کشی)** $\vec{D}$ به جسم وارد می‌شود. این نیرو با حرکت نسبی مخالف است و در جهت شارش شاره نسبت به جسم اثر می‌کند.

حجم سطح↑ ⟸ نیروی مقاومت↑

نیروی پسار ⟸ به سطح تماس مرتبط دارد.

در اینجا فقط حالت‌هایی را در نظر می‌گیریم که شاره هواست، جسم پهن (مانند گوی بیس‌بال) است نه باریک (مانند نیزه) و حرکت نسبی به قدری سریع است که هوا در پشت جسم آشفته می‌شود (به گِردشار تبدیل می‌شود). در چنین حالت‌هایی بزرگی نیروی پسار $\vec{D}$ از طریق ***ضریب پسار*** C، که به طور تجربی معین می‌شود، بنا به رابطه‌ی زیر به تندی نسبی v، بستگی دارد

$$D = \frac{1}{2}C\rho A v^2 \qquad (۶-۱۴)$$

که در آن ρ **چگالی** (جرم یکای حجم) هوا و A **مساحت مقطع مؤثر جسم** (مساحت سطح مقطع عمود بر سرعت $\vec{v}$) است. ضریب پسار C (که مقدار نوعی آن از ۰٫۴۰ تا ۱٫۰ است) برای یک جسم معین ثابت نیست، زیرا اگر v به نحو قابل ملاحظه‌ای تغییر کند مقدار C هم می‌تواند تغییر کند. در اینجا از حالت‌های پیچیده چشم‌پوشی می‌شود.

شکل ۶-۵ این اسکی‌باز در یک «وضعیت تخم‌مرغی» قرار گرفته است تا مساحت سطح مقطع مؤثر و در نتیجه، نیروی پسار وارد شده به خودش را به کمترین مقدار برساند.

اسکی‌بازهای تندرو هنگام پایین آمدن از پیست به خوبی می‌دانند که نیروی پسار هوا به A و v^2 بستگی دارد. یک اسکی‌بازِ برای رسیدن به تندی‌های بالا باید D را تا حد امکان کاهش دهد. برای این کار، اسکی‌باز خود را مثلاً، در «وضعیت تخم‌مرغی» (شکل ۶-۵) قرار می‌دهد تا A به کمترین مقدار برسد.

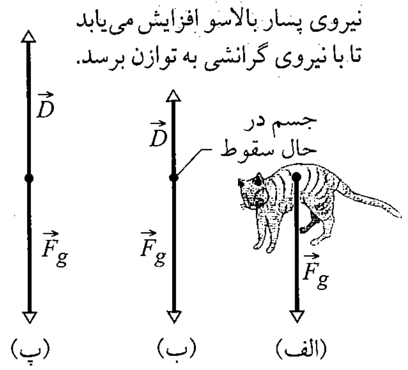
سقوط کردن. وقتی یک جسم پهن از حال سکون در هوا سقوط می‌کند، جهت نیروی

پسار $\vec{D}$ به بالاسو است؛ بزرگی این نیرو در حین افزایش یافتن تندی جسم به تدریج از صفر افزایش پیدا می‌کند. این نیروی بالاسوی $\vec{D}$ با نیروی گرانشی پایین‌سوی $\vec{F}_g$، وارد شده به جسم مخالفت می‌کند. با استفاده کردن از قانون دوم نیوتون برای محور قائم y ($F_{\text{net},y} = ma_y$)، این نیروها را بنا به رابطه‌ی زیر می‌توان به شتاب جسم ربط داد

$$D - F_g = ma \qquad (۱۵-۶)$$

که در آن m جرم جسم است. همان‌طور که شکل ۶-۶ نشان می‌دهد، اگر جسم در طی مسافت زیادی سقوط کند، سرانجام D با F_g برابر می‌شود. با توجه به معادله‌ی ۶-۱۵ نتیجه می‌گیریم که $a = ۰$، و تندی جسم دیگر افزایش پیدا نمی‌کند. از آن به بعد، جسم با تندی ثابت، موسوم به **تندی حد**، یا **تندی پایانی** v_t، سقوط می‌کند.

در حین افزایش یافتن تندی گربه نیروی پسار بالاسو افزایش می‌یابد تا با نیروی گرانشی به توازن برسد.



شکل ۶-۶ نمودار نیروهایی که به یک جسم هنگام سقوط در هوا وارد می‌شوند: (الف) وضعیت جسم درست در هنگامی که شروع به افتادن می‌کند، و (ب) نمودار جسم - آزاد اندکی پس از ظاهر شدن نیروی پسار هوا. (پ) نیروی پسار هوا افزایش می‌یابد تا با نیروی گرانشی وارد شده به جسم برابر شود. در این حالت جسم با تندی حد ثابت سقوط می‌کند.

برای پیدا کردن v_t، مقدار $a = ۰$ و مقدار D از معادله‌ی ۶-۱۴ را در معادله‌ی ۶-۱۵ قرار می‌دهیم. در این صورت، داریم

$$\frac{۱}{۲} C \rho A v_t^۲ - F_g = ۰$$

سرعت حد

در نتیجه، خواهیم داشت

$$v_t = \sqrt{\frac{۲F_g}{C\rho A}} \qquad (۱۶-۶)$$

جدول ۶-۱ مقدار v_t مربوط به برخی اشیای آشنا را نشان می‌دهد.

C = ثابتی است که از طریق تجربه به دست می‌آید و بستگی به شکل جسم و فشار و رطوبت محیط وابسته است

طبق محاسبات* مبتنی بر معادله‌ی ۶-۱۴ یک گربه باید تقریباً از طبقه‌ی ششم یک آپارتمان بیفتد تا به تندی حد برسد. پیش از رسیدن به این تندی، داریم $F_g > D$ و چون نیروی برایند پایین‌سو است گربه با شتاب سقوط می‌کند. در فصل ۲، کتاب گفته شد که بدن شتاب‌سنج است، نه تندی سنج. گربه هم‌چنین شتاب را حس می‌کند دچار ترس و دلهره می‌شود، پاهایش

جدول ۶-۱ تندی حد برخی اشیا در هوا

۷ و ۱۱ و ۱۵ و ۲۵ و ۳۹ و

شیء	تندی حد (m/s)	مسافت مربوط به ۹۵% (m)[1]
وزنه (مخصوص پرتاب)	۱۴۵	۲۵۰۰
شیرجه‌رو هوایی (مقدار نوعی)	۶۰	۴۳۰
گوی بیس‌بال	۴۲	۲۱۰
توپ تنیس	۳۱	۱۱۵
توپ بسکتبال	۲۰	۴۷
توپ پینگ پونگ	۹	۱۰
قطره‌ی باران (به شعاع ۱٫۵ mm)	۷	۶
چترباز (نوعی)	۵	۳

$\frac{m}{s} \times \frac{۳۶۰۰}{1\,h} \times \frac{1\,km}{۱۰۰۰\,m}$

۱۸ $\frac{km}{h}$

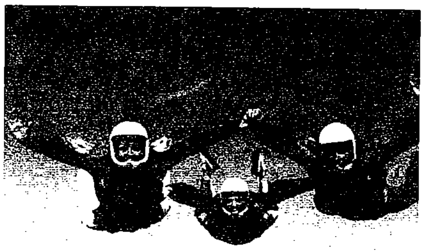
۱. این مقدار مسافتی است که شیء باید ازحال سکون سقوط کند تا تندی‌اش به ۹۵% تندی حد برسد.

منبع: گرفته شده از Peter J.Brancazio. *Sport Science*, 1984, Simon & Schuster. New York.

* W.O. Whitney and C.J. Mehlhaff, "High-Rise Syndrome in Cats." *The Journal of the American Veterinary Medical Association*, 1987.

را در زیر بدنش جمع می‌کند، سرش را به تو می‌کشد و ستون فقراتش را به بالا خم می‌کند. این کار مقدار A را کم و در نتیجه v_t را زیاد می‌کند و احتمالاً گربه موقع رسیدن به زمین آسیب می‌بیند.

اما اگر گربه به تندی حد v_t برسد، شتاب حذف می‌شود و گربه تا حدی آرامش پیدا می‌کند، پاهایش را دراز می‌کند و گردنش را به طور افقی به سمت بیرون می‌کشد و ستون فقراتش را صاف می‌کند (مانند یک سنجاب در حال پرش). این کارها سبب افزایش یافتن مساحت A و بنا به معادله‌ی ۶-۱۴، سبب افزایش یافتن نیروی پسار D، می‌شود. در این حالت چون $D > F_g$، تندی سقوط گربه کم می‌شود (نیروی برایند بالاسو است) تا دوباره به یک تندی حد جدید و کمتر v_t برسد. کاهش یافتن v_t امکان صدمه دیدن جدی را در موقع برخورد به زمین کاهش می‌دهد. گربه درست پیش از پایان یافتن سقوط که می‌بیند به زمین نزدیک می‌شود، پاهایش را در زیر بدنش به عقب می‌کشد تا برای فرود آمدن به زمین آماده باشد.



شکل ۶-۷ شیرجه‌روهای هوایی در وضعیت افقی «عقاب گشوده‌بال» نیروی پسار هوا را به بیشترین مقدار می‌رسانند.

انسان‌ها اغلب به عنوان سرگرمی از ارتفاع‌های بالا در هوا شیرجه می‌روند. در آوریل سال ۱۹۸۷ (فروردین ۱۳۶۶) در یک برنامه‌ی پرش، گریگوری رابرتسون[1] متوجه شد که یکی از شیرجه‌روها به نام دبی ویلیامز[2] بر اثر برخورد با شیرجه‌رو دیگر بی‌هوش شده است و نمی‌تواند چتر نجاتش را باز کند. رابرتسون که در آن لحظه درست در بالای سر ویلیامز قرار داشت و پس از ۴ کیلومتر سقوط هنوز چترش را باز نکرده بود، راستای بدنش را طوری تغییر می‌دهد که سرش به سمت پایین باشد تا A کمتر و تندی پایین‌سو بیشتر شود. او پس از رسیدن به ویلیامز با تندی حد تقریبی ۳۲۰km/h، به حالت افقی و در «وضعیت عقاب گشوده بال» (مانند شکل ۶-۷) قرار گرفت تا D را افزایش دهد و بتواند ویلیامز را بگیرد. او چتر نجات ویلیامز را باز کرد و پس از رها کردن او در حدود ۱۰ ثانیه پیش از برخورد به زمین، چتر خودش را هم باز کرد. ویلیامز به خاطر عدم توانایی در کنترل خود هنگام برخورد به زمین آسیب‌های درونی شدیدی دید، اما توانست جان سالم بدر ببرد.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۶-۳ تندی حد قطره‌ی باران در حال سقوط

قطره‌ی بارانی به شعاع $R = ۱/۵ \text{mm}$ از توده‌ی ابری واقع در ارتفاع $h = ۱۲۰۰ \text{m}$ به زمین سقوط می‌کند. ضریب پسار C برای این قطره ۰/۶۰ است. فرض کنید قطره در حین سقوط به شکل کره است. چگالی آب ρ_w، برابر با ۱۰۰۰kg/m^3 و چگالی هوا ρ_a، برابر با $۱/۲ \text{kg/m}^3$ است.

(الف) همان‌طور که جدول ۶-۱ نشان می‌دهد، قطره‌ی باران پس از چند متر سقوط به‌تندی حد می‌رسد. تندی حد آن چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

قطره‌ی باران هنگامی به تندی حد می‌رسد که نیروی گرانشی وارد شده به آن با نیروی پسار هوا برابر و شتاب قطره صفر شود. بنابراین، برای پیدا کردن v_t می‌توان از قانون دوم نیوتون و از معادله‌ی مربوط به نیروی پسار هوا استفاده کرد. برای این کار معادله‌ی ۶-۱۶ نیاز ما را برآورده می‌کند.

1. Gregory Robertson 2. Debbie Williams

محاسبات: برای استفاده کردن از معادله‌ی ۶-۱۶ باید مساحت مقطع مؤثر قطره A، وبزرگی نیروی گرانشی F_g، در دست باشد. چون قطره کروی است، A برابر با مساحت دایره‌ای به شعاع کره است (یعنی $\pi R^۲$). برای تعیین F_g سه موضوع را در نظر می‌گیریم: (۱) $F_g = mg$، که m جرم قطره است؛ (۲) حجم قطره (ی کروی) $V = \frac{۴}{۳}\pi R^۳$ است؛ و (۳) چگالی آب درون قطره، یا جرم یکای حجم، برابر است با $\rho_w = m/V$. بنابراین، داریم

$$F_g = V\rho_w g = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \rho_w g$$

اکنون این مقدار، و نیز مقدار A و داده‌های معلوم را در معادله‌ی ۶-۱۶ قرار می‌دهیم. با دقت کردن در تمایز میان چگالی هوا ρ_a، و چگالی آب ρ_w، داریم

$$v_t = \sqrt{\frac{۲F_g}{C\rho_a A}} = \sqrt{\frac{۸\pi R^۳\rho_w g}{۳C\rho_a \pi R^۲}} = \sqrt{\frac{۸R\rho_w g}{۳C\rho_a}}$$

$$v_t = \sqrt{\frac{(۸)(۱/۵\times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{m})(۱۰۰۰\,\mathrm{kg/m^۳})(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲})}{(۳)(۰/۶۰)(۱/۲\,\mathrm{kg/m^۳})}} \Rightarrow$$

$$v_t = ۷/۴\,\mathrm{m/s} \approx ۲۷\,\mathrm{km/h} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

توجه کنید که ارتفاع توده‌ی ابر در این محاسبه وارد نمی‌شود.

(ب) اگر نیروی پسار هوا اثر نکند، تندی قطره‌ی باران درست پیش از برخورد به زمین چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

در نبود نیروی پسار هوا برای کاهش دادن تندی، قطره‌ی باران در حین سقوط با شتاب سقوط آزاد ثابت g پایین می‌آید و ما می‌توانیم از معادله‌های با شتاب ثابت جدول ۲-۱ استفاده کنیم.

محاسبه: چون شتاب g معلوم، سرعت آغازی $v_۰$ برابر با صفر، و جابه‌جایی $x - x_۰$ برابر با $-h$ است، با استفاده کردن از معادله‌ی ۲-۱۶، برای v داریم

$$v = \sqrt{۲gh} = \sqrt{(۲)(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲})(۱۲۰۰\,\mathrm{m})} \Rightarrow$$

$$v = ۱۵۳\,\mathrm{m/s} \approx ۵۵۰\,\mathrm{km/h} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

با دانستن این تندی قطره‌های باران، دیگر **ویلیام شکسپیر** نمی‌توانست بنویسد «می‌بارید چون باران ملایمی که از عرش خدا بر زمین می‌بارد.»

در واقع، این تندی در حدود تندی گلوله‌ای است که از یک تفنگ با کالیبر بزرگ شلیک می‌شود!

۶-۳ حرکت دایره‌ای یکنواخت

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۶-۶ مسیر پیموده شده در حرکت دایره‌ای یکنواخت را رسم کنید و بردارهای سرعت، شتاب و نیرو (بزرگی‌ها و جهت‌ها) در حین حرکت را توضیح دهید.

۶-۷ مشخص کنید تا زمانی که یک نیروی برایند شعاعی درون‌سو (یک نیروی مرکزگرا) وجود نداشته باشد یک جسم نمی‌تواند حرکت دایره‌ای انجام دهد.

۶-۸ برای یک ذره‌ی در حال حرکت دایره‌ای یکنواخت، رابطه‌ی میان شعاع مسیر، تندی و جرم ذره و نیروی برایند وارد شده به ذره را به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

- اگر ذره‌ای با تندی ثابت v روی یک دایره یا روی یک کمان دایره‌ای به شعاع R حرکت کند، می‌گوییم آن ذره حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. در این صورت ذره دارای شتاب مرکزگرای $\vec{a}$ است، که بزرگی‌اش از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

● این شتاب از یک نیروی مرکزگرای برایند وارد شده به ذره ناشی می‌شود، که بزرگی‌اش برابر است با

$$a = \frac{v^2}{R}$$

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

که در آن m جرم ذره است. کمیت‌های برداری $\vec{a}$ و $\vec{F}$ به سوی مرکز خمیدگی مسیر ذره هستند.

حرکت دایره‌ای یکنواخت

در پودمان ۴-۵ دیدیم که وقتی جسمی با تندی ثابت v در یک مسیر دایره‌ای (یا کمانی از دایره) حرکت می‌کند، می‌گوییم حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. هم‌چنین، یادآوری می‌کنیم که در این حرکت جسم دارای یک شتاب مرکزگرا (به سوی مرکز دایره) با بزرگی ثابت زیر است

$$a = \frac{v^2}{R} \quad \text{(شتاب مرکزگرا)} \qquad (۶-۱۷)$$

که در آن R شعاع دایره است.

اکنون، دو مثال زیر را درباره‌ی حرکت دایره‌ای یکنواخت بیان می‌کنیم:

۱. ***حرکت خودرو در یک مسیر خمیده.*** فرض کنید در وسط صندلی‌های عقب خودرویی نشسته‌اند و با تندی زیاد و ثابت در یک جاده‌ی تخت حرکت می‌کنید. وقتی راننده در سر یک پیچ ناگهان به چپ می‌پیچد شما در روی صندلی به سمت راست سُر می‌خورید و تا پایان دور زدن به صورت فشرده به بدنه‌ی خودرو باقی می‌مانید. در این شرایط چه اتفاقی می‌افتد؟

هنگامی‌که خودرو در روی یک کمان دایره‌ای حرکت می‌کند حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد؛ یعنی، جهت شتاب خودرو به سوی مرکز دایره است. بنا به قانون دوم نیوتون این شتاب باید از نیرویی ناشی شده باشد. علاوه بر این، جهت این نیرو نیز باید به سوی مرکز دایره باشد. در نتیجه، این، یک **نیروی مرکزگرا** است و صفت مرکزگرا حاکی از جهت نیرو است. در این مثال، نیروی مرکزگرا یک نیروی اصطکاک است که جاده به لاستیک‌های خودرو وارد می‌کند؛ این نیرو دور زدن را امکان‌پذیر می‌سازد.

اگر بخواهید با خودرو حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام دهید، باید به شما هم یک نیروی مرکزگرا وارد شود. اما واضح است که نیروی اصطکاکی که صندلی به شما وارد می‌کند آن‌قدر زیاد نیست که شما را همراه با خودرو در روی مسیر دایره‌ای حرکت بدهد. در نتیجه، صندلی زیر شما سُر می‌خورد و شما به بدنه‌ی راست خودرو فشرده می‌شوید. از این پس، بدنه نیروی مرکزگرای لازم را به شما وارد می‌کند و شما همراه با خودرو حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهید.

۲. *حرکت مداری زمین.* اکنون، فرض کنید سرنشین سفینه‌ی فضایی ***اتلانتیس*** هستید. وقتی که شما همراه با سفینه به دور زمین می‌گردید، در اتاقک خود شناور می‌شوید. در این شرایط چه اتفاقی می‌افتد؟

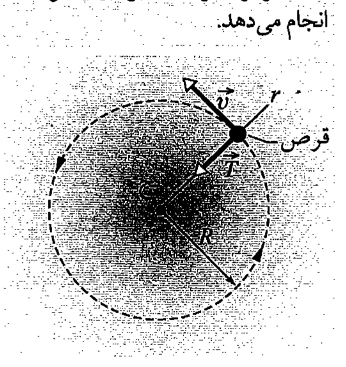
شما و سفینه، هر دو، حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهید و دارای شتابی به سوی مرکز دایره هستید. باز هم بنا به قانون دوم نیوتون، نیروهای مرکزگرا باید این شتاب را به وجود آورند. در این حالت نیروهای مرکزگرا، نیروهای جاذبه‌ی گرانشی زمین (وارد شده به شما و سفینه) هستند که در راستای شعاع و به سوی مرکز زمین اثر می‌کنند.

در خودرو و سفینه، هر دو، که حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهید، نیروی مرکزگرا به شما اثر می‌کند، اما احساسی که در دو حالت به شما دست می‌دهد کاملاً متفاوت است. در خودرو به دیوار فشرده می‌شوید و متوجه می‌شوید که دیوار به شما فشار وارد می‌کند. اما در سفینه‌ی در حال دور زدن شناور هستید و هیچ نیرویی را حس نمی‌کنید. دلیل این تفاوت چیست؟

این تفاوت به ماهیت دو نیروی مرکزگرا مربوط می‌شود. در خودرو نیروی مرکزگرا به‌صورت هُل دادن توسط بدنه‌ی خودرو به بخشی از بدن وارد می‌شود. شما این فشرده شدن را می‌توانید در بخشی از بدن خود حس کنید. در سفینه نیروی مرکزگرا نیروی جاذبه‌ی گرانشی زمین است که به هر اتم بدن شما وارد می‌شود. بنابراین، هیچ نیروی فشاری (یا هُل دادنی) به هیچ بخشی از بدن شما وارد نمی‌شود و شما هیچ نیرویی را حس نمی‌کنید. (این احساس را «بی‌وزنی» می‌گویند، اما این یک توصیف گول زننده است. نیروی جاذبه‌ای که به ما وارد می‌شود، از میان نمی‌رود، اما البته، در سفینه اندکی کمتر از مقدار آن در روی زمین است).

قرص هاکی به خاطر یک نیروی روبه مرکز، حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد.

مثال دیگر در مورد نیروی مرکزگرا در شکل ۶-۸ نشان داده شده است. در اینجا یک قرص هاکی به نخی وصل شده و سر دیگر نخ هم به میخی متصل است. قرص با تندی ثابت v در یک مسیر دایره‌ای افقی حرکت می‌کند. در این حالت، نیروی مرکزگرا در راستای شعاع است و از طریق نخ قرص را به درون‌سو می‌کشد. اگر این نیرو نباشد، قرص به جای حرکت‌کردن در یک مسیر دایره‌ای، به خط راست حرکت می‌کند.



شکل ۶-۸ تصویر یک قرص هاکی به جرم m، با دید از بالا، که با تندی ثابت v در یک مسیر دایره‌ای به شعاع R بر روی سطح افقی بی‌اصطکاکی حرکت می‌کند. نیروی مرکزگرای وارد شده به قرص $\vec{T}$ است، که همان نیروی کشش نخ در راستای محور شعاعی r است و قرص را به سوی مرکز دایره می‌کشد.

باز هم توجه کنید که نیروی مرکزگرا نوع جدیدی از نیرو نیست و این نام صرفاً جهت نیرو را مشخص می‌کند. در واقع، نیروی مرکزگرا می‌تواند نیروی اصطکاک، نیروی گرانشی، نیروی ناشی از بدنه‌ی خودرو یا یک نخ، یا هر نیروی دیگری باشد. در تمام این حالت‌ها می‌توان گفت که:

نیروی مرکزگرا با تغییر دادن جهت سرعت جسم بدون تغییر دادن تندی، به جسم شتاب می‌دهد.

با استفاده کردن از قانون دوم نیوتون و معادله‌ی ۶-۱۷ $(a = v^2 / R)$، بزرگی F، نیروی

مرکزگرا (یا یک نیروی مرکزگرای برایند) را می‌توان از معادله‌ی زیر به دست آورد

$$F = m\frac{v^{2}}{R} \quad \text{(بزرگی نیروی مرکزگرا)} \qquad (6\text{–}18)$$

چون در اینجا تندی v ثابت است، بزرگی‌های شتاب و نیرو هم ثابت‌اند.

اما جهت‌های شتاب و نیروی مرکزگرا ثابت نیستند و پیوسته تغییر می‌کنند، به گونه‌ای که همیشه به سوی مرکز دایره‌اند. به همین دلیل، بردارهای نیرو و شتاب را گاهی در راستای محور شعاعی r که همراه جسم حرکت می‌کند، رسم می‌کنند. این محور همیشه از مرکز دایره به سوی جسم، مطابق شکل ۶–۸ ، کشیده می‌شود. جهت مثبت محور شعاعی به برون‌سوی دایره است، اما بردارهای شتاب و نیرو در راستای شعاع و به درون‌سوی دایره‌اند.

☑ خودآزمایی ۲

همان‌طور که دوستداران هر پارک تفریحی می‌دانند، چرخ و فلک قائم یک وسیله‌ی سواری شامل صندلی‌های تعبیه شده بر روی یک حلقه‌ی بزرگ است که حول محور افقی می‌چرخد. وقتی در یک چرخ و فلک نشسته‌اید و چرخ با تندی ثابت می‌چرخد، جهت شتاب $\vec{a}$ و نیروی عمودی $\vec{F}_N$ وارد شده به شما (از سوی صندلی) در هنگام عبور کردن از (الف) بالاترین نقطه‌ی و (ب) پایین‌ترین نقطه‌ی چرخ، چیست؟ (پ) بزرگی شتاب در بالاترین نقطه چه نسبتی با بزرگی آن در پایین‌ترین نقطه دارد؟ (ت) بزرگی‌های نیروی عمودی در این دو نقطه چه نسبتی با هم دارند؟

مسئله‌ی نمونه‌ی ۶–۴ حلقه‌ی دایره‌ای قائم، دیاوُلو

اغلب به خاطر سوار شدن خودرو به حرکت دایره‌ای افقی عادت کرده‌ایم. اما حرکت دایره‌ای قائم می‌تواند تازگی داشته باشد. در این مسئله‌ی نمونه، به نظر می‌رسد که چنین حرکتی با نیروی گرانشی مقابله می‌کند.

در سال ۱۹۰۱/۱۲۸۰ در یک سیرک، آلو دیاوُلو[1] «بی‌باک» سوار بر دوچرخه در یک مسیر حلقه‌ای قائم (شکل ۶–۹ الف) به اجرای نمایشی پرداخت. فرض کنید حلقه به صورت دایره‌ای به شعاع $R = 2/7\,\text{m}$ باشد. کمترین تندی v، که دیاوُلو و دوچرخه‌اش باید داشته باشند تا بتوانند در بالای حلقه در تماس با مسیر باقی بمانند، چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

می‌توان فرض کرد که دیاوُلو و دوچرخه‌اش به‌صورت یک ذره با حرکت دایره‌ای یکنواخت از بالاترین نقطه‌ی حلقه عبور می‌کنند. بنابراین، شتاب این ذره $\vec{a}$، در بالاترین نقطه‌ی حلقه، دارای بزرگی $a = v^{2}/R$ است، که از معادله‌ی ۶–۱۷ به دست می‌آید و جهتش به سمت پایین و به سوی مرکز حلقه‌ی دایره‌ای است.

محاسبات: نمودار جسم ـ آزاد شکل ۶–۹ ب، نیروهایی را که در بالاترین نقطه‌ی حلقه به ذره وارد می‌شوند، نشان می‌دهد. نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ در راستای محور y به پایین‌سو و نیروی عمودی $\vec{F}_N$ که حلقه به ذره وارد می‌کند، نیز به پایین‌سو است (حلقه می‌تواند به سمت پایین هُل بدهد، نه به سمت بالا). بنابراین، با استفاده کردن از قانون دومِ نیوتن برای مؤلفه‌های مربوط به

1. Allo Diavolo

محور y $(F_{\text{net},y}=ma_y)$، داریم

$$-F_N - F_g = m(-a)$$

یا

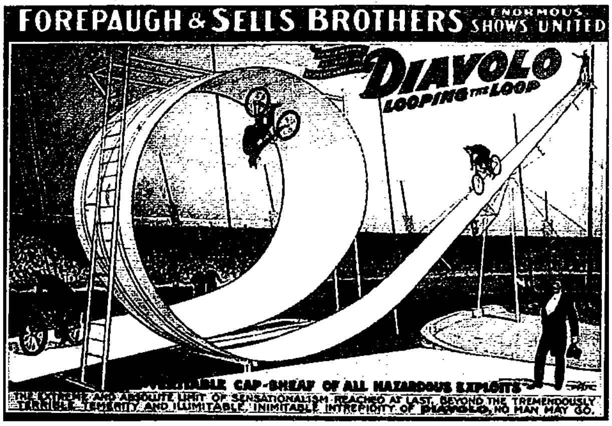
$$-F_N - mg = m\left(-\frac{v^۲}{R}\right) \qquad (۱۹\text{-}۶)$$

اگر ذره کمترین تندی v را برای باقی ماندن روی حلقه داشته باشد، در آستانه‌ی جدا شدن از حلقه (افتادن از حلقه) خواهد بود، که به معنی $F_N = ۰$ است. با جانشانی این مقدار F_N در معادله‌ی ۶-۱۹، حل کردن معادله نسبت به v و جانشانی مقادیر معلوم، داریم

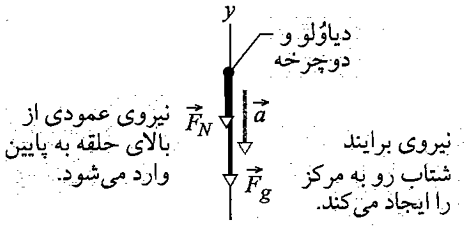
$$v=\sqrt{gR}=\sqrt{(۹/۸\,\text{m/s}^۲)(۲/۷\,\text{m})} \Rightarrow$$

$$v = ۵/۱\,\text{m/s} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

توضیحات: دیاوُلو مطمئن بود که تندی‌اش در بالاترین نقطه‌ی حلقه از $۵/۱\,\text{m/s}$ بیشتر است و او از حلقه جدا نخواهد شد و سقوط نمی‌کند. توجه کنید که این تندی از جرم دیاولو و دوچرخه‌اش مستقل است. با آنکه گفته می‌شود او پیش از اجرا کردن نمایش در یک مهمانی مفصل شرکت کرده بود، اما باز هم تندی‌اش باید از $۵/۱\,\text{m/s}$ تجاوز می‌کرد تا هنگام عبور کردن از بالای حلقه در تماس با حلقه باقی بماند.



(الف)



(ب)

شکل ۶-۹ (الف) آگهی تبلیغاتی مربوط به دیاولو در زمان نمایش، و (ب) نمودار جسم ـ آزاد مربوط به دوچرخه سوار در بالاترین نقطه‌ی حلقه.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۶-۵ خودرو در یک پیچ دایره‌ای تخت

مسابقه‌ی وارونه: یک خودرو نوین مسابقه به گونه‌ای طراحی شده است که هوای در حال گذر از پیرامون آن را به پایین فشار می‌دهد و به خودرو اجازه می‌دهد در یک پیچ تخت در مسابقه‌ی جایزه‌ی بزرگ بتواند بدون کاهش‌یافتن اصطکاک خیلی تندتر حرکت کند. این فشار پایین‌سو را ***برآر منفی*** ***(بالابری منفی)*** می‌نامند. آیا یک خودرو مسابقه می‌تواند دارای چنان نیروی برآر منفی باشد که بتواند در روی یک سقف دراز به طور وارونه، آن گونه که در نخستین فیلم تخیلی ***مردان سیاه‌پوش*** وجود داشت، حرکت کند؟

شکل ۶-۱۰ الف، یک خودرو مسابقه‌ی جایزه‌ی بزرگ به جرم $m = ۶۰۰\,\text{kg}$ را نشان می‌دهد که در یک مسیر دایره‌ای تخت به شعاع $R = ۱۰۰\,\text{m}$ حرکت می‌کند. به خاطر شکل خودرو و بال‌های نصب شده بر روی آن، هوای در حال گذر از پیرامون یک نیروی پایین‌سوی برآر منفی $\vec{F}_L$، به خودرو وارد می‌کند. ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیک‌ها و مسیر $۰/۷۵$ است. (فرض کنید نیروهای واردشده به هریک ازچهار لاستیک برابرند). (الف) اگر خودرو در حال حرکت کردن با تندی $۲۸/۶\,\text{m/s}$ در آستانه‌ی بیرون لغزیدن از پیچ باشد، بزرگی نیروی برآر منفی $\vec{F}_L$ پایین‌سوی وارد شده به خودرو چقدر است؟

نکته‌های کلیدی

۱. یک نیروی مرکزگرا باید به خودرو وارد شود زیرا در روی

کمانی از دایره حرکت می‌کند؛ جهت این نیرو باید به سوی مرکز خمیدگی کمان (که در اینجا افقی است) باشد.

۲. تنها نیروی افقی وارد شده به خودرو نیروی اصطکاکی است که از جاده به لاستیک‌ها وارد می‌شود. بنابراین، نیروی مرکزگرای لازم یک نیروی اصطکاک است.

۳. چون خودرو نمی‌لغزد، نیروی اصطکاک باید ***نیروی اصطکاک ایستایی*** $\vec{f}_s$ باشد (شکل ۶-۱۰ الف).

۴. چون خودرو در آستانه‌ی لغزیدن است، بزرگی f_s برابر با مقدار بیشینه‌ی $f_{s,\max} = \mu_s F_N$ است، که در آن F_N بزرگی نیروی عمودی $\vec{F}_N$ وارد شده به خودرو از سوی جاده است.

محاسبات راستای شعاعی: درنمودار جسم ـ آزادشکل ۶-۱۰ ب نیروی اصطکاک $\vec{f}_s$ نشان داده شده است. این نیرو در جهت منفی محور شعاعی r است که همیشه از مرکز خمیدگی تا محل خودرو در حال حرکت ادامه دارد. این نیرو یک شتاب مرکزگرا با بزرگی $v^۲/R$ به وجود می‌آورد. با نوشتن قانون دوم نیوتون برای مؤلفه‌های واقع در راستای محور r، می‌توان رابطه‌ی میان این نیرو و شتاب $(F_{\text{net},r} = ma_r)$ را چنین نوشت

$$-f_s = m\left(-\frac{v^۲}{R}\right) \qquad (۶\text{-}۲۰)$$

با قرار دادن $f_{s,\max} = \mu_s F_N$ به جای f_s در این رابطه، داریم

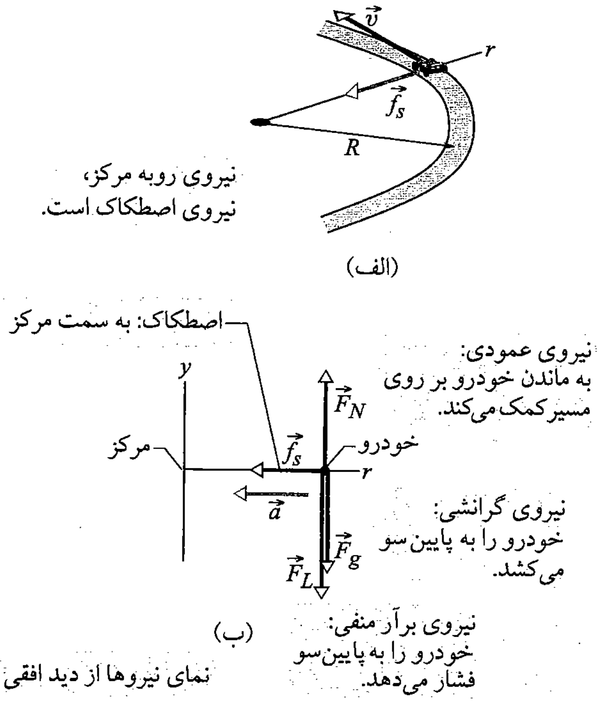
$$\mu_s F_N = m\left(\frac{v^۲}{R}\right) \qquad (۶\text{-}۲۱)$$

محاسبات راستای قائم: اکنون نیروهای قائم وارد شده به خودرو را در نظر می‌گیریم. در شکل ۶-۱۰ ب، جهت نیروی عمودی $\vec{F}_N$ به سمت بالا و در جهت مثبت محور y است. جهت نیروی گرانشی $\vec{F}_g = m\vec{g}$ و جهت نیروی برآر منفی $\vec{F}_L$، به سمت پایین است. شتاب خودرو در راستای محور y صفر است. بنابراین، قانون دوم نیوتون برای مؤلفه‌های مربوط به راستای محور y $(F_{\text{net},y} = ma_y)$ را می‌توان چنین نوشت

$$F_N - mg - F_L = ۰$$

یا

$$F_N = mg + F_L \qquad (۶\text{-}۲۲)$$



شکل ۶-۱۰ (الف) یک خودرو مسابقه با تندی ثابت v در یک مسیر خمیده‌ی تخت حرکت می‌کند. نیروی اصطکاک $\vec{f}_s$، نیروی مرکزگرای لازم در راستای محور شعاعی r را تأمین می‌کند. (ب) نمودار جسم ـ آزاد مربوط به خودرو (که با مقیاس رسم نشده است)، در صفحه‌ی قائم شامل r.

ترکیب کردن نتیجه‌ها: اکنون مقدار F_N از معادله‌ی ۶-۲۲ را در معادله‌ی ۶-۲۱ قرار می‌دهیم تا نتیجه‌های به دست آمده برای راستاهای دو محور با هم ترکیب شوند. با انجام دادن این کار و سپس حل کردن معادله‌ی حاصل نسبت به F_L، داریم

$$F_L = m\left(\frac{v^۲}{\mu_s R} - g\right)$$

$$F_L = (۶۰۰\,\text{kg})\left(\frac{(۲۸/۶\,\text{m/s})^۲}{(۰/۷۵)(۱۰۰\,\text{m})} - ۹/۸\,\text{m/s}^۲\right) \Rightarrow$$

$$F_L = ۶۶۳/۷\,\text{N} \approx ۶۶۰\,\text{N} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

(ب) بزرگی نیروی برآر F_L وارد شده به خودرو، درست مانند نیروی پسار (معادله‌ی ۶-۱۴)، به مجذور تندی، $v^۲$، بستگی دارد. بنابراین، خودرو وقتی تندتر حرکت می‌کند، درست مانند وقتی که در بخش مستقیم جاده حرکت می‌کند، نیروی برآر منفی وارد شده به آن بیشتر می‌شود. بزرگی نیروی برآر منفی برای تندی ۹۰m/s چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

F_L با $v^{۲}$ متناسب است.

محاسبات: بدین ترتیب، نسبت نیروی برآر منفی $F_{L,۹۰}$ در تندی $v = ۹۰\,\mathrm{m/s}$، به نیروی برآر منفی F_L در تندی $۲۸/۶\,\mathrm{m/s}$ را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{F_{L,۹۰}}{F_L} = \frac{(۹۰\,\mathrm{m/s})^{۲}}{(۲۸/۶\,\mathrm{m/s})^{۲}}$$

با جانشانی نیروی برآر منفی معلوم $F_L = ۶۶۳/۷\,\mathrm{N}$، مقدار $F_{L,۹۰}$ چنین به دست می‌آید

(پاسخ) $$F_{L,۹۰} = ۶۵۷۲\,\mathrm{N} \approx ۶۶۰۰\,\mathrm{N}$$

مسابقه‌ی وارونه: البته امکان ***رو به زیر شدن*** خودرو مسابقه به شرطی وجود دارد که بر نیروی وزن خودرو غلبه شود:

$$F_g = mg = (۶۰۰\,\mathrm{kg})(۹/۸\,\mathrm{m/s^{۲}})$$

$$F_g = ۵۸۸۰\,\mathrm{N}$$

وقتی خودرو رو به زیر می‌شود نیروی برآر منفی، ***نیروی بالاسوی*** $۶۶۰۰\,\mathrm{N}$ است که از نیروی پایین‌سوی $۵۸۸۰\,\mathrm{N}$ بیشتر است. بنابراین، خودرو ***به شرطی*** می‌تواند بر روی سقف حرکت کند که دارای تندی $۹۰\,\mathrm{m/s}$ (برابر با $۳۲۴\,\mathrm{km/h} = ۲۰۱\,\mathrm{mi/h}$) باشد. اما حرکت به صورت رو به زیر با این تندی زیاد در یک مسیر افقی بسیار خطرناک است و این گونه ***مسابقه‌ی رو به زیر*** را به جز در فیلم‌های سینمایی، نمی‌توان دید.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۶-۶ خودرو در یک پیچ دایره‌ای با شیب عرضی

بررسی این مسئله کاملاً چالش برانگیز است، اما برای حل کردن آن تنها چند خط عملیات جبری لازم است. ما در اینجا نه تنها با یک حرکت دایره‌ای یکنواخت بلکه با یک شیب‌راهه نیز سروکار داریم. اما نیازی به دستگاه محورهای مختصات یکوری شده، نظیر محورهای به کار رفته در شیب‌راهه‌های دیگر نداریم. در عوض، می‌توانیم یک چارچوب عادی حرکت را در نظر بگیریم و با محورهای افقی و قائم ساده کار بکنیم. مانند همه جای این فصل کتاب، می‌توانیم از قانون دوم نیوتون آغاز کنیم، اما لازم است مؤلفه‌ی نیرویی را که سبب حرکت دایره‌ای یکنواخت است، مشخص کنیم.

بخش‌های خمیده‌ی بزرگ‌راه را همیشه به طور عرضی شیب می‌دهند (به یکور کج می‌کنند) تا مانع بیرون لغزیدن خودروها از بزرگ‌راه بشوند. وقتی کف بزرگ‌راه خشک است نیروی اصطکاک میان لاستیک‌ها و سطح جاده برای جلوگیری از لغزیدن کافی است. اما هنگامی که جاده خیس است نیروی اصطکاک ممکن است ناچیز باشد و در این حالت وجود شیب عرضی در جاده لازم است. شکل ۶-۱۱ الف، خودرویی به جرم m را نشان می‌دهد که با تندی ثابت $v = ۲۰\,\mathrm{m/s}$ در یک مسیر دایره‌ای دارای شیب عرضی و شعاع دوران $R = ۱۹۰\,\mathrm{m}$ حرکت می‌کند. (این خودرو، به جای خودرو مسابقه یک خودرو معمولی است، یعنی نیروی قائم ناشی از هوای در حال گذراز پیرامون ناچیز است). اگر نیروی اصطکاک ناشی از مسیر ناچیز باشد، کدام زاویه‌ی شیب عرضی θ مانع لغزیدن خودرو می‌شود؟

نکته‌های کلیدی

در اینجا مسیر دارای شیب عرضی است به گونه‌ای که نیروی عمودی وارد شده به خودرو $\vec{F}_N$، به سمت مرکز دایره‌ی مسیر کج شده است (شکل ۶-۱۱ ب). در نتیجه $\vec{F}_N$ دارای یک مؤلفه‌ی مرکزگرا به بزرگی F_{Nr} در راستای محور شعاعی r و به درون‌سو است. می‌خواهیم مقدار زاویه‌ی شیب عرضی θ را طوری معین کنیم که این مؤلفه‌ی مرکزگرا خودرو را بدون نیاز به اصطکاک، بر روی مسیر دایره‌ای نگه دارد.

محاسبه‌ی راستای شعاعی: همان‌طور که شکل ۶-۱۱ ب نشان می‌دهد (و شما باید آن را راستیابی کنید)، زاویه‌ی نیروی $\vec{F}_N$ با راستای قائم برابر با زاویه‌ی شیب عرضی مسیر θ، است. بنابراین، مؤلفه‌ی شعاعی F_N برابر با $F_N \sin\theta$ است. اکنون، می‌توان قانون دوم نیوتون مربوط به مؤلفه‌های واقع در راستای محور r $(F_{\mathrm{net},r} = ma_r)$ را به صورت زیر نوشت

$$-F_N \sin\theta = m\left(-\frac{v^{۲}}{r}\right) \qquad (۶\text{-}۲۳)$$

مقدار θ را نمی‌توان از این معادله به دست آورد زیرا معادله مقادیر نامعلوم F_N و m را نیز دارد.

محاسبات راستای قائم: اکنون، نیروها و شتاب مربوط به راستای محور y در شکل ۶-۱۱ ب را در نظر می‌گیریم. مؤلفه‌ی قائم نیروی عمودی $F_{Ny} = F_N \cos\theta$ است، نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد شده به خودرو دارای بزرگی mg است و شتاب خودرو در راستای محور y صفر است. بنابراین، قانون دوم نیوتون مربوط به مؤلفه‌ها در راستای محور y $(F_{\text{net},y} = ma_y)$ را می‌توان چنین نوشت

$$F_N \cos\theta - mg = m(۰)$$

و از آنجا داریم

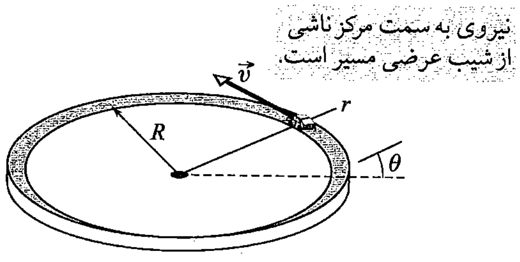
$$F_N \cos\theta = mg \qquad (۶-۲۴)$$

ترکیب کردن نتیجه‌ها: معادله‌ی ۶-۲۴ دارای مقادیر نامعلوم F_N و m نیز هست، اما توجه کنید که از تقسیم کردن معادله‌ی ۶-۲۳ به معادله‌ی ۶-۲۴، هر دو مقدار نامعلوم حذف می‌شوند. با انجام دادن این کار و جانشین کردن $(\sin\theta)/(\cos\theta)$ با $\tan\theta$، مقدار θ به دست می‌آید

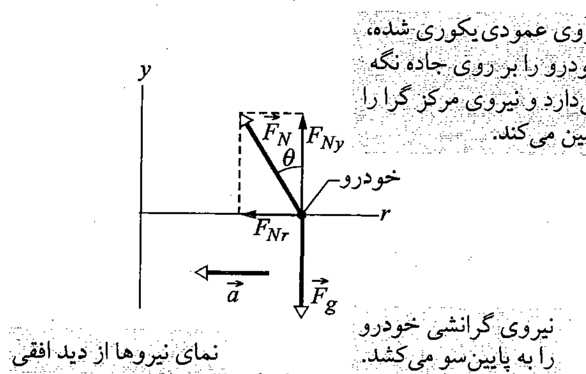
$$\theta = \tan^{-1}\frac{v^۲}{gR}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{(۲۰\,\text{m/s})^۲}{(۹/۸\,\text{m/s}^۲)(۱۹۰\,\text{m})} \Rightarrow$$

$$\theta = ۱۲^\circ \qquad \textbf{(پاسخ)}$$



(الف)



(ب)

شکل ۶-۱۱ (الف) خودرویی با تندی ثابت v در یک جاده‌ی خمیده با شیب عرضی حرکت می‌کند. زاویه‌ی شیب عرضی برای واضح بودن به صورت غیرعادی نشان داده شده است. (ب) نمودار جسم ـ آزاد مربوط به خودرو، با این فرض که اصطکاک میان لاستیک‌ها و جاده صفر است و نیروی برآر منفی به خودرو وارد نمی‌شود. مؤلفه‌ی درون‌سوی شعاعی F_{Nr} نیروی عمودی (در راستای محور شعاعی r)، نیروی مرکزگرای لازم و شتاب شعاعی را تأمین می‌کند.

مرور و چکیده‌ی مطالب

اصطکاک وقتی می‌خواهیم با نیروی $\vec{F}$ جسمی را بر روی یک سطح بلغزانیم، یک **نیروی اصطکاک** از سوی سطح به جسم وارد می‌شود. نیروی اصطکاک با سطح موازی و با جهت لغزیدن مخالف است. نیروی اصطکاک از درگیری میان اتم‌های جسم و اتم‌های سطح ناشی می‌شود، که آن را جوش‌خوردگی سرد می‌نامند.

اگر جسم نلغزد، نیروی اصطکاک **نیروی اصطکاک ایستایی** $\vec{f}_s$، نام دارد. اگر جسم بلغزد، نیروی اصطکاک **نیروی اصطکاک جنبشی** f_k، نامیده می‌شود.

۱. اگر جسم حرکت نکند، نیروی اصطکاک ایستایی $\vec{f}_s$ و مؤلفه‌ی موازی با سطح نیروی $\vec{F}$ از لحاظ بزرگی با هم برابرند و $\vec{f}_s$ در جهت مخالف این مؤلفه است. اگر این مؤلفه‌ی موازی با سطح افزایش یابد بزرگی f_s نیز افزایش می‌یابد.

۲. بزرگی $\vec{f}_s$ مقدار بیشینه‌ای دارد که از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید

$$f_{s,\max} = \mu_s F_N \qquad (۶-۱)$$

که در آن μ_s **ضریب اصطکاک ایستایی** و F_N بزرگی نیروی عمودی است. اگر مؤلفه‌ی موازی با سطح $\vec{F}$ بزرگ‌تر از $f_{s,\max}$ باشد، جسم روی سطح می‌لغزد.

۳. اگر جسم روی سطح بلغزد، بزرگی نیروی اصطکاک به سرعت

تا مقدار ثابت f_k کاهش پیدا می‌کند:

$$f_k = \mu_k F_N \quad (۶-۲)$$

که در آن μ_k **ضریب اصطکاک جنبشی** است.

نیروی پَسار وقتی میان جسم و هوا (یا هر شاره‌ی دیگر) حرکت نسبی وجود داشته باشد، نیروی مقاومت شاره به صورت **نیروی پَسار (نیروی پس‌کشی)** $\vec{D}$، به جسم وارد می‌شود، که با حرکت نسبی مخالف است و در جهت شارش شاره نسبت به جسم اثر می‌کند. بزرگی $\vec{D}$ و تندی نسبی v از طریق **ضریب پسار** C، که به طور تجربی معین می‌شود، بنا به رابطه‌ی زیر به هم مربوط‌اند

$$D = \frac{۱}{۲}C\rho A v^۲ \quad (۶-۱۴)$$

که در آن ρ چگالی (جرم یکای حجم) شاره و A **مساحت مقطع مؤثر** جسم (مساحت سطح مقطع عمود بر سرعت نسبی $\vec{v}$) است.

تندی حد وقتی یک شیء پهن از ارتفاع بالا در هوا به اندازه‌ی کافی سقوط می‌کند بزرگی نیروی پسار $\vec{D}$ و نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد شده به جسم، برابر می‌شوند. پس از آن جسم با **تندی حد** ثابت v_t، که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید، سقوط می‌کند

$$v_t = \sqrt{\frac{۲F_g}{C\rho A}} \quad (۶-۱۶)$$

حرکت دایره‌ای یکنواخت هرگاه ذره‌ای در یک مسیر دایره‌ای یا کمانی از دایره با تندی ثابت v حرکت کند، می‌گوییم **حرکت دایره‌ای یکنواخت** انجام می‌دهد. این ذره دارای **شتاب مرکزگرای** $\vec{a}$ است که بزرگی‌اش از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$a = \frac{v^۲}{R} \quad (۶-۱۷)$$

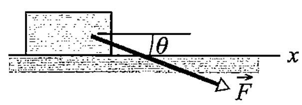
این شتاب از یک **نیروی مرکزگرای برایند** وارد شده به ذره ناشی می‌شود و بزرگی‌اش برابر است با

$$F = \frac{mv^۲}{R} \quad (۶-۱۸)$$

که در آن m جرم ذره است. جهت کمیت‌های برداری $\vec{a}$ و $\vec{F}$ به سوی مرکز خمیدگی مسیر ذره است. یک ذره تنها هنگامی می‌تواند حرکت دایره‌ای انجام دهد که به آن یک نیروی مرکزگرای برایند وارد شود.

پرسش‌ها

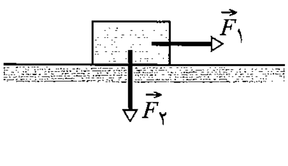
۱ در شکل ۶-۱۲، اگر جعبه ساکن باشد و θ زاویه‌ی میان راستای افقی و نیروی $\vec{F}$ را افزایش دهیم، آیا کمیت‌های زیر افزایش می‌یابند، کاهش می‌یابند، یا ثابت می‌مانند: (الف) F_x؛ (ب) f_s؛ (پ) F_N؛ (ت) $f_{s,\max}$؟ (ث) حال اگر جعبه در حال لغزیدن باشد و θ را افزایش دهیم، آیا بزرگی نیروی اصطکاک وارد شده به جعبه افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟



شکل ۶-۱۲ پرسش ۱.

۲ پرسش ۱ را برای حالتی که نیروی $\vec{F}$ تحت زاویه‌ی مثبت θ نسبت به راستای افقی اثر می‌کند، تکرار کنید.

۳ در شکل ۶-۱۳، نیروی افقی $\vec{F}_۱$ به بزرگی ۱۰N به جعبه‌ی روی کف اتاق وارد می‌شود، اما جعبه نمی‌لغزد. آنگاه، اگر بزرگی نیروی قائم $\vec{F}_۲$ را از صفر افزایش دهیم، آیا کمیت‌های زیر افزایش می‌یابند، کاهش می‌یابند، یا ثابت می‌مانند: (الف) بزرگی نیروی اصطکاک $\vec{f}_s$ وارد شده به جعبه؛ (ب) بزرگی نیروی عمودی $\vec{F}_N$، که کف اتاق به جعبه وارد می‌کند؛ (پ) مقدار بیشینه‌ی $f_{s,\max}$، بزرگی نیروی اصطکاک ایستایی وارد شده به جعبه؟ (ت) آیا جعبه می‌لغزد؟

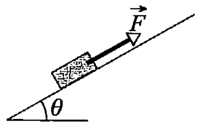


شکل ۶-۱۳ پرسش ۳.

۴ در سه آزمایش سه نیروی افقی متفاوت به یک جسم واقع بر روی سطح یک پیشخوان وارد می‌شوند. بزرگی‌های نیروها $F_1 = 12\,\text{N}$، $F_2 = 8\,\text{N}$ و $F_3 = 4\,\text{N}$ هستند. در هر آزمایش با وجود نیروی وارد شده، جسم ساکن می‌ماند. نیروها را با توجه به (الف) بزرگی نیروی اصطکاک ایستایی f_s، وارد شده از سطح به جسم و (ب) مقدار بیشینه‌ی $f_{s,\max}$ آن نیرو، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

۵ اگر جعبه‌ی سیبی را چنان به دیوار فشار دهیم که به پایین نلغزد، جهت (الف) نیروی اصطکاک ایستایی $\vec{f}_s$ وارد شده به جعبه از سوی دیوار و (ب) نیروی عمودی وارد شده به جعبه از سوی دیوار، چیست؟ اگر میزان فشار را زیاد کنیم، چه تغییری در (پ) f_s، (ت) F_N و (ث) $f_{s,\max}$، به وجود می‌آید؟

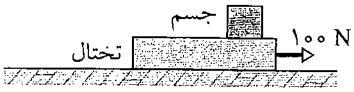
۶ در شکل ۶-۱۴، جسمی به جرم m با نیروی اصطکاکی که از سطح یک شیب‌راهه به آن وارد می‌شود، روی سطح ساکن است. سپس یک نیروی $\vec{F}$ به بالاسوی شیب‌راهه به جسم وارد می‌شود و بزرگی‌اش به تدریج از صفر افزایش می‌یابد. در حین افزایش دادن نیرو، جهت و بزرگی نیروی اصطکاک وارد شده به جسم چه تغییری می‌کند؟



شکل ۶-۱۴ پرسش ۶.

۷ پرسش ۶ را درحالتی پاسخ بدهید که جهت نیروی $\vec{F}$ به پایین‌سوی شیب‌راهه باشد. وقتی بزرگی $\vec{F}$ از صفر افزایش می‌یابد، جهت و بزرگی نیروی اصطکاک وارد شده به جسم چه تغییری می‌کند؟

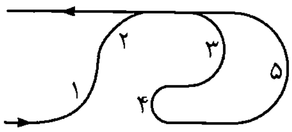
۸ در شکل ۶-۱۵، یک نیروی افقی ۱۰۰ نیوتونی به یک تختال ۱۰ کیلوگرمی که در آغاز بر روی یک سطح بی‌اصطکاک ساکن است، وارد می‌شود تا به تختال شتاب بدهد. یک جسم ۱۰ کیلوگرمی را بر روی تختال قرار می‌دهیم. ضریب اصطکاک میان جسم و تختال، μ، معلوم نیست و جسم ممکن است بلغزد. (الف) با در نظر گرفتن این امکان، گستره‌ی قابل قبول مقادیر بزرگی شتاب تختال، a_s، چیست؟ (*راهنمایی:* لازم نیست



شکل ۶-۱۵ پرسش ۸.

محاسبات را انجام دهید، فقط مقادیر فرین μ را در نظر بگیرید). (ب) گستره‌ی ممکن برای بزرگی شتاب جسم، a_b، چیست؟

۹ شکل ۶-۱۶ مسیر خودرویی را نشان می‌دهد که پنج کمان دایره‌ای به شعاع‌های R_0، $2R_0$ و $3R_0$ را با تندی ثابت می‌پیماید. کمان‌ها را با توجه به بزرگی نیروی مرکزگرای وارد شده به خودرو از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۶-۱۶ پرسش ۹.

۱۰ در سال ۱۹۸۷/۱۳۶۶ در یک عملیات شیرین‌کاری در جشن هالووین[1]، دو چترباز شیرجه‌رو در آسمان که در باختر شیکاگو در حال سقوط آزاد بودند، یک کدو تنبل را در بین خودشان رد و بدل می‌کردند. این شیرین‌کاری به خوبی پیش می‌رفت تا آنکه یکی از چتربازها که کدو را در دست داشت، چترش را باز می‌کند. کدو تنبل از دست او رها می‌شود و در حدود ۰/۵ km سقوط می‌کند، سقف خانه‌ای را می‌شکافد، محکم به کف آشپزخانه برخورد می‌کند و به همه جای این آشپزخانه‌ی تازه‌آراسته پاشیده می‌شود. از نقطه نظر چترباز شیرجه رونده و از نقطه نظر کدو تنبل، چرا چترباز نتوانست کدو را نگه دارد؟

۱۱ شخصی که بر یک چرخ و فلک قائم سوار است، از، (۱) بالاترین نقطه، (۲) پایین‌ترین نقطه و (۳) نقطه‌ی میان ارتفاع مسیر حرکت چرخ، عبور می‌کند. اگر چرخ با تندی ثابت بچرخد، این سه نقطه را با توجه به (الف) بزرگی شتاب مرکزگرای شخص، (ب) بزرگی نیروی مرکزگرای برایند وارد شده به شخص، و (پ) بزرگی نیروی عمودی وارد شده به شخص، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

1. Halloween

۱۲ در طی یک پرواز عادی در سال ۱۹۵۶/۱۳۳۵، یک خلبان آزمایش کننده به نام تام اتریج[1] جنگنده‌ی جت خود را به حالت شیرجه تحت زاویه‌ی ۲۰ درجه قرار داد تا یک مسلسل ۲۰ میلی‌متری هواپیما را آزمایش کند. در حالی که هواپیما در ارتفاع ۴۰۰۰ متری با تندی بیش از تندی صوت پرواز می‌کرد، خلبان رگباری از گلوله‌ها را به اطراف شلیک کرد. آنگاه، پس از خنک شدن مسلسل، او رگبار دیگری را در ارتفاع ۲۰۰۰ متری شلیک کرد؛ پس از آن، تندی او ۳۴۴ m / s، تندی گلوله‌ها نسبت به او ۷۳۰ m / s بود و او هنوز در حال شیرجه رفتن بود.

تقریباً بی‌درنگ پس از آن، حفاظ پیرامون او تکه پاره شد و مکنده‌ی هوای طرف راست او آسیب دید. هواپیما پس از مدتی پرواز، به خاطر کم شدن توانایی در یک ناحیه‌ی جنگی سقوط کرد، اما اتریج توانست از انفجار حاصل از سقوط بگریزد. توضیح دهید که درست پس از شلیک کردن رگبار دوم گلوله‌های مسلسل، ظاهراً چه اتفاقی افتاده است. (اتریج تنها خلبانی بوده که می‌خواسته است هواپیمایش سرنگون شود).

۱۳ جعبه‌ای بر روی سطح شیب‌داری با زاویه‌ی شیب θ نسبت به راستای افقی قرار دارد. وقتی θ را از صفر افزایش می‌دهیم، و پیش از لغزیدن جعبه، آیا کمیت‌های زیر افزایش می‌یابند، کاهش می‌یابند، یا ثابت می‌مانند: (الف) مؤلفه‌ی نیروی گرانشی وارد شده به جعبه در راستای سطح شیب‌دار، (ب) بزرگی نیروی اصطکاک ایستایی وارد شده به جعبه از سوی سطح شیب‌دار، (پ) مؤلفه‌ی نیروی گرانشی وارد شده به جعبه، که بر سطح شیب‌دار عمود است، (ت) بزرگی نیروی عمودی وارد شده به جعبه از سوی سطح شیب‌دار و (ث) مقدار بیشینه‌ی $f_{s,\max}$ نیروی اصطکاک ایستایی؟

مسئله‌ها

پودمان ۶-۱ اصطکاک

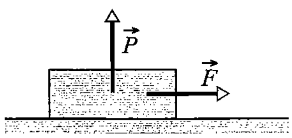
* **۱** کف یک واگن تخت راه آهن را با صندوق‌هایی بار کرده‌اند که ضریب اصطکاک ایستایی میان صندوق‌ها و کف ۰/۲۵ است. اگر قطار با تندی ۴۸ km / h در حال حرکت باشد در طی چه مسافت کوتاهی می‌تواند با شتاب ثابت متوقف شود بی‌آنکه صندوق‌ها بر کف واگن بلغزند؟

* **۲** در بازی شافل بورد[2] در خوابگاه دانشگاه، دانشجویانی که از امتحانات نهایی عصبانی‌اند، برای به جلو راندن کتاب حسابان در راهرو خوابگاه از یک دسته‌ی جاروب استفاده می‌کنند. اگر این کتاب ۳/۵ کیلوگرمی با نیروی افقی ۲۵ N که دسته‌ی جاروب وارد می‌کند، از حال سکون به اندازه‌ی ۰/۹۰ m به جلو رانده شود و به تندی ۱/۶۰ m / s برسد، ضریب اصطکاک جنبشی میان کتاب و کف راهرو چقدر است؟

* **۳** یک کمد اتاق خواب به جرم ۴۵ kg، شامل کشوهای محتوی لباس، روی کف اتاق قرار دارد. (الف) اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان کمد و کف اتاق ۰/۴۵ باشد، بزرگی کمینه‌ی نیروی افقی لازم برای به حرکت درآوردن کمد چقدر است؟ (ب) اگر کشوهای محتوی لباس به جرم ۱۷ kg را از کمد خارج کنیم و سپس کمد را هُل بدهیم، این بار بزرگی کمینه‌ی نیرو چقدر خواهد شد؟

* **۴** مدتی که طول می‌کشد تا خوکی از یک سُرسُره‌ی با زاویه‌ی شیب ۳۵ درجه به پایین بلغزد دو برابر مدت لغزیدن از سُرسُره‌ی بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب ۳۵ درجه است. ضریب اصطکاک جنبشی میان حیوان و سُرسُره چقدر است؟

* **۵** جسمی به جرم ۲/۵ kg در آغاز روی یک سطح افقی ساکن است. این جسم، تحت تأثیر نیروی افقی $\vec{F}$ به بزرگی ۶/۰ N و نیروی قائم $\vec{P}$، قرار می‌گیرد (شکل ۶-۱۷). ضریب‌های اصطکاک میان جسم و سطح عبارت‌اند از $\mu_s =$ ۰/۴۰ و $\mu_k =$ ۰/۲۵. بزرگی نیروی اصطکاک وارد شده به جسم را



شکل ۶-۱۷ مسئله‌ی ۵.

1. Tom Attridge 2. shuffleboard

به‌ازای بزرگی $\vec{P}$ برابر با (الف) ۸٫۰N، (ب) ۱۰N و (پ) ۱۲N، معین کنید.

* ۶ یک بازیکن بیس‌بال به جرم $m = ۷۹\,kg$ که در حال لغزیدن در پایگاه دوم است، تندی‌اش با نیروی اصطکاکی به بزرگی ۴۷۰N کاهش پیدا می‌کند. ضریب اصطکاک جنبشی میان بازیکن و زمین μ_k، چقدر است؟

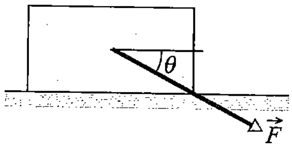
* ۷ شخصی با نیروی افقی ۲۲۰N یک صندوق ۵۵ کیلوگرمی را روی یک سطح تراز حرکت می‌دهد. ضریب اصطکاک جنبشی میان صندوق و سطح ۰٫۳۵ است. بزرگی (الف) نیروی اصطکاک و (ب) شتاب صندوق، چیست؟

* ۸ ***سنگ‌های لغزان مرموز.*** در طول مسیر دور افتاده‌ی مسابقه‌ی پلایا[1] در دره‌ی مرگ[2] کالیفرنیا، گاهی سنگ‌ها از جای خود کنده می‌شوند و در بیابان حرکت می‌کنند، چنان‌که گویی مهاجرت کرده‌اند (شکل ۶-۱۸). این حرکت سنگ‌ها سال‌ها حس کنجکاوی مردم را برانگیخته بود. یک توجیه این عمل این بود که بادهای شدید همراه با رگبارهای ناگهانی سنگ‌های صاف را بر روی زمین نرم شده توسط باران، می‌کشند. وقتی صحرا خشک می‌شود آثار کشیده شدن سنگ‌ها بر جای می‌ماند. اندازه‌گیری‌ها نشان می‌دهند که ضریب اصطکاک جنبشی میان سنگ‌ها و زمین‌های خیس شده‌ی پلایا در حدود ۰٫۸۰ است. نیروی افقی لازم برای آنکه سنگی به جرم ۲۰kg با وزیدن یک تندباد به حرکت در آید چقدر است؟ (دنباله‌ی موضوع در مسئله‌ی ۳۷ ادامه پیدا می‌کند).

شکل ۶-۱۸ مسئله‌ی ۸. چه چیزی سنگ‌ها را به حرکت در آورده است؟

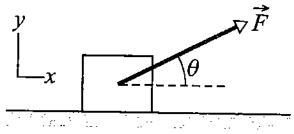
1. Playa 2. Death Valley

* ۹ جسمی ۳٫۵ کیلوگرمی با نیروی $\vec{F}$ به بزرگی ۱۵N تحت زاویه‌ی $\theta = ۴۰°$ نسبت به افق، روی سطحی افقی هُل داده می‌شود (شکل ۶-۱۹). ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و سطح ۰٫۲۵ است. مطلوب است محاسبه‌ی بزرگی، (الف) نیروی اصطکاکی که سطح به جسم وارد می‌کند و (ب) شتاب جسم.



شکل ۶-۱۹ مسئله‌های ۹ و ۳۲.

* ۱۰ شکل ۶-۲۰ جسمی به جرم m را نشان می‌دهد که در آغاز برروی کف اتاق ساکن است. اکنون نیرویی به‌بزرگی $۰٫۵۰۰mg$ تحت زاویه‌ی $\theta = ۲۰°$ به بالاسو به این جسم وارد می‌شود. بزرگی شتاب جسم در کف اتاق را در حالت‌هایی پیدا کنید که ضریب‌های اصطکاک برابر باشند با: (الف) $\mu_s = ۰٫۶۰۰$ و $\mu_k = ۰٫۵۰۰$ و (ب) $\mu_s = ۰٫۴۰۰$ و $\mu_k = ۰٫۳۰۰$.

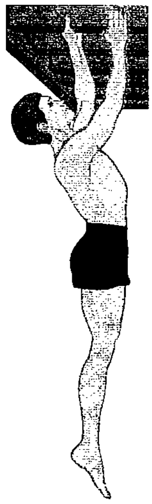


شکل ۶-۲۰ مسئله‌ی ۱۰.

* ۱۱ یک صندوق ۶۸ کیلوگرمی با طنابی متصل به صندوق که زاویه‌ی آن نسبت به راستای افقی ۱۵ درجه است روی یک سطح افقی کشیده می‌شود. (الف) اگر ضریب اصطکاک ایستایی ۰٫۵۰ باشد، بزرگی کمینه‌ی نیرویی که به طناب باید وارد شود تا صندوق به حرکت در آید، چقدر است؟ (ب) به ازای $\mu_k = ۰٫۳۵$، بزرگی شتاب آغازی صندوق چقدر است؟

* ۱۲ در حدود سال ۱۹۱۵، هنری سینکاسکی[1] از اهالی فیلادلفیا[2]، با گرفتن تیر سقف اتاق، به طوری که انگشت شست هر دست در یک طرف تیر و انگشت‌های دیگر در طرف مقابل تیر قرار داشتند، خودش را به حالت آویخته نگه داشت (شکل ۶-۲۱). جرم سینکاسکی ۷۹kg بود. اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان

1. Henry Sincosky 2. Philadelphia

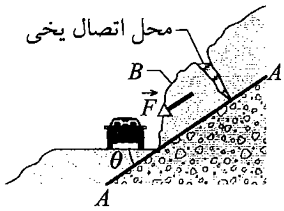


شکل ۶-۲۱ مسئله‌ی ۱۲.

دست و تیر ۰٫۷۰ باشد، کمترین بزرگی نیروی عمودی که هر انگشت شست یا انگشت‌های مقابل به تیر وارد می‌کردند، چقدر است؟ (سینکاسکی پس از آویزان شدن خود را تا چانه بالا کشید و سپس با دست‌هایش در طول تیر حرکت کرد. اگر این کار او را قابل توجه نمی‌دانید، خودتان آن را امتحان کنید).

* ۱۳ کارگری یک صندوق ۳۵ کیلوگرمی را به طور افقی و با نیرویی به بزرگی ۱۱۰N هُل می‌دهد. ضریب اصطکاک ایستایی میان صندوق و سطح ۰٫۳۷ است. (الف) در این شرایط مقدار $f_{s,\max}$ چقدر است؟ (ب) آیا صندوق حرکت می‌کند؟ (پ) نیروی اصطکاک وارد شده به صندوق از سوی سطح چقدر است؟ (ت) اکنون، فرض کنید کارگر دیگری صندوق را به طور قائم به بالاسو می‌کشد تا به کارگر اول کمک کرده باشد. کمترین مقدار نیروی قائم چقدر باید باشد تا کارگر اول با نیروی ۱۱۰N بتواند صندوق را به حرکت در آورد؟ (ث) اگر کارگر دوم برای کمک کردن به کارگر اول صندوق را به طور افقی بکشد، کمترین مقدار نیروی کشش چقدر باید باشد تا صندوق حرکت کند؟

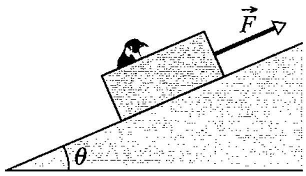
* ۱۴ شکل ۶-۲۲ مقطع جاده‌ای را نشان می‌دهد که در دامنه‌ی کوه ایجاد شده است. خط AA' سطحی را نشان می‌دهد که ممکن است در امتداد آن لغزش صورت بگیرد. قطعه‌ی B، که در بالای جاده قرار دارد، با یک شکاف بزرگ (به نام ***محل اتصال***) از تخته سنگ بالایی جدا شده است، به گونه‌ای که فقط اصطکاک میان قطعه‌ی B و صفحه‌ی بستر تخته سنگ مانع لغزیدن است. جرم قطعه‌ی B برابر با $1/8\times10^{7}$kg، ***زاویه‌ی میل*** صفحه‌ی بستر، θ، برابر با ۲۴ درجه و ضریب اصطکاک ایستایی میان قطعه و صفحه ۰٫۶۳ است. (الف) نشان دهید که در این شرایط قطعه‌ی B نخواهد لغزید. (ب) سپس آب به محل اتصال میان دو سنگ وارد و بر اثر انجماد منبسط می‌شود و یک نیروی $\vec{F}$ موازی با AA' به قطعه‌ی B وارد می‌کند. کمینه‌ی مقدار F که می‌تواند باعث لغزیدن قطعه به پایین صفحه‌ی بستر بشود، چقدر است؟



شکل ۶-۲۲ مسئله‌ی ۱۴.

* ۱۵ ضریب اصطکاک ایستایی میان تفلون ماهی‌تابه و تخم‌مرغ نیمرو شده، در حدود ۰٫۰۴ است. کمترین زاویه‌ی شیبی که به ماهی‌تابه می‌توان داد تا تخم‌مرغ‌ها بر روی کف آن بلغزند، چقدر است؟

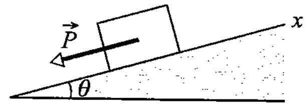
** ۱۶ سورتمه‌ای حامل یک پنگوئن به وزن ۸۰N در روی سطح شیب‌داری با زاویه‌ی شیب ۲۰ درجه نسبت به راستای افقی به حال سکون قرار دارد (شکل ۶-۲۳). ضریب اصطکاک ایستایی میان سورتمه وسطح شیب‌دار ۰٫۲۵ و ضریب اصطکاک جنبشی میان آن‌ها ۰٫۱۵ است. (الف) بزرگی کمترین نیروی $\vec{F}$ موازی با سطح شیب‌دار چقدر باید باشد تا مانع لغزیدن سورتمه به پایین سطح بشود؟ (ب) بزرگی کمینه‌ی F چقدر باید باشد تا سورتمه به سمت بالای سطح شروع به حرکت کند؟ (پ)



شکل ۶-۲۳ مسئله‌های ۱۶ و ۲۲.

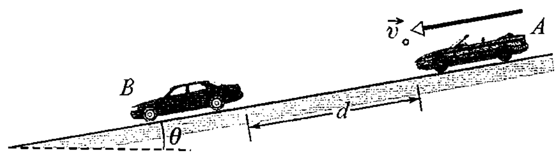
مقدار نیروی لازم F برای حرکت کردن سورتمه به سمت بالای سطح شیب‌دار با سرعت ثابت، چقدر است؟

** ۱۷ در شکل ۶-۲۴، نیروی $\vec{P}$ به موازات یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی شیب $\theta =$ °۱۵، به جسمی به وزن ۴۵ N که در آغاز ساکن است، وارد می‌شود. جهت مثبت محور x به سمت بالای سطح شیب‌دار است. ضریب‌های اصطکاک میان جسم و سطح عبارت‌اند از $\mu_s =$ ۰/۵۰ و $\mu_k =$ ۰/۳۴. نیروی اصطکاک واردشده به جسم از سوی سطح شیب‌دار به صورت نمادگذاری بردارهای یکه به ازای $\vec{P}$ برابر با (الف) $\hat{\mathrm{i}}$(−۵/۰ N)، (ب) $\hat{\mathrm{i}}$(−۸/۰ N) و (پ) $\hat{\mathrm{i}}$(−۱۵ N)، چیست؟



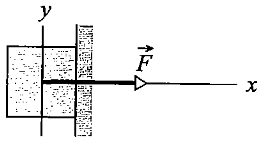
شکل ۶-۲۴ مسئله‌ی ۱۷.

** ۱۸ شما را به عنوان یک ***کارشناس شاهد*** دعوت می‌کنند تا در مورد حادثه‌ای که در آن خودرو A از پشت به خودرو B در حال ایستادن در پشت چراغ قرمز در روی شیب یک تپه برخورد کرده است (شکل ۶-۲۵)، نظر بدهید. زاویه‌ی شیب این تپه $\theta =$ °۱۲/۰ و فاصله‌ی میان خودروها در لحظه‌ی شروع سُرخوردن خودرو A (که فاقد سیستم ضد قفل ترمز خودکار است) برابر است با $d =$ ۲۴/۰ m. تندی خودرو A در لحظه‌ی ترمز کردن $v_0 =$ ۱۸/۰ m/s بوده است. اگر ضریب اصطکاک جنبشی (الف) ۰/۶۰ (سطح جاده‌ی خشک) و (ب) ۰/۱۰ (سطح جاده‌ی پر از برگ‌های خیس) باشد، خودرو A با چه تندی‌ای به خودرو B برخورد کرده است؟



شکل ۶-۲۵ مسئله‌ی ۱۸.

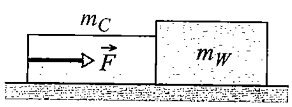
** ۱۹ جسمی به وزن ۵/۰ N با نیروی افقی ۱۲ N به دیوار قائمی فشار داده می‌شود (شکل ۶-۲۶). ضریب اصطکاک



شکل ۶-۲۶ مسئله‌ی ۱۹.

ایستایی میان دیوار و جسم ۰/۶۰ و ضریب اصطکاک جنبشی میان آن‌ها ۰/۴۰ است. فرض کنید جسم در آغاز در حال حرکت نیست. (الف) آیا جسم حرکت می‌کند؟ (ب) نیروی وارد شده به جسم از سوی دیوار به صورت نمادگذاری بردارهای یکه چیست؟

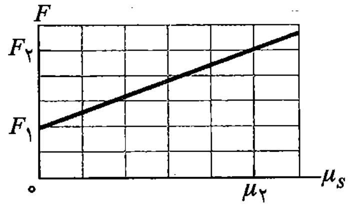
** ۲۰ در شکل ۶-۲۷، در روی یک سطح افقی یک پاکت شیر (به جرم $m_C =$ ۱/۰kg) و یک قوطی روغن (به جرم $m_W =$ ۳/۰kg) با وارد کردن نیروی افقی $\vec{F}$ به پاکت شیر شتاب پیدا می‌کنند. بزرگی نیروی اصطکاک وارد شده به پاکت شیر ۲/۰ N و بزرگی نیروی اصطکاک وارد شده به قوطی روغن ۴/۰ N است. اگر بزرگی $\vec{F}$ برابر با ۱۲ N باشد، بزرگی نیرویی که پاکت شیر به قوطی روغن وارد می‌کند، چقدر است؟



شکل ۶-۲۷ مسئله‌ی ۲۰.

** ۲۱ جعبه‌ای محتوی شن، که در آغاز ساکن است، به وسیله‌ی کابلی در روی سطح زمین کشیده می‌شود. نیروی کشش کابل نمی‌تواند از ۱۱۰۰ N تجاوز کند. ضریب اصطکاک ایستایی میان جعبه و سطح ۰/۳۵ است. (الف) زاویه‌ی کابل نسبت به راستای افقی چقدر باید باشد تا بیشترین مقدار ممکن شن جابه‌جا شود؟ (ب) در این حالت وزن شن و جعبه چقدر است؟

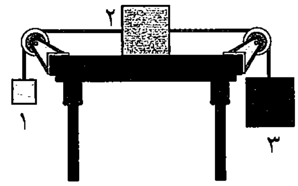
** ۲۲ در شکل ۶-۲۳، سورتمه‌ای با کشیده شدن به وسیله‌ی یک طناب به سمت بالای سطح شیب‌دار بر روی سطح نگه داشته می‌شود. می‌خواهیم سورتمه در آستانه‌ی حرکت کردن به سمت بالای سطح باشد. در شکل ۶-۲۸، نمودار تغییرات بزرگی نیروی F، که لازم است از طناب به سورتمه وارد شود، برحسب گستره‌ای از مقادیر ضریب اصطکاک ایستایی μ_s میان



شکل ۶-۲۸ مسئله‌ی ۲۲.

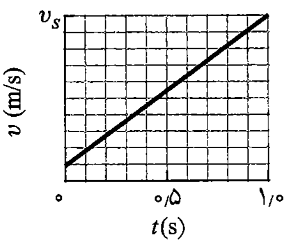
سورتمه و سطح شیب‌دار رسم شده است: $F_۱ = ۲/۰\text{N}$، $F_۲ = ۵/۰\text{N}$ و $\mu_۲ = ۰/۵۰$. زاویه‌ی سطح شیب‌دار θ، چقدر است؟

**** ۲۳** هرگاه سه جسم مربوط به شکل ۶-۲۹ را از حال سکون رها کنیم، اجسام با شتاب $۰/۵۰۰\text{m/s}^۲$ به حرکت در می‌آیند. جسم ۱ دارای جرم M، جسم ۲ دارای جرم $۲M$ و جسم ۳ دارای جرم $۲M$ است. ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم ۲ و سطح میز چقدر است؟



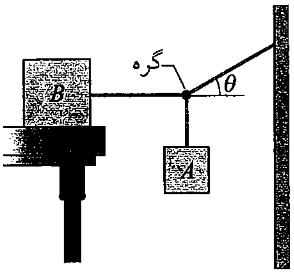
شکل ۶-۲۹ مسئله‌ی ۲۳.

**** ۲۴** یک جسم ۴/۱۰ کیلوگرمی بر روی کف اتاق با نیروی ثابت افقی به بزرگی $۴۰/۰\text{N}$ هُل داده می‌شود. شکل ۶-۳۰، نمودارتغییرات تندی v، برحسب‌زمان t را درهنگام حرکت‌کردن جسم در راستای محور x بر روی کف اتاق نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم شکل با مقدار $v_s = ۵/۰\text{m/s}$ مشخص شده است. ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و کف اتاق چیست؟



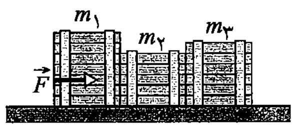
شکل ۶-۳۰ مسئله‌ی ۲۴.

**** ۲۵** در شکل ۶-۳۱، وزن جسم B برابر با ۷۱۱N است. ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم و میز ۰/۲۵ و زاویه‌ی θ برابر با ۳۰ درجه است. فرض کنید ریسمان میان B و گره به صورت افقی است. بیشینه‌ی وزن جسم A چقدر باید باشد تا دستگاه به حال سکون باقی بماند؟



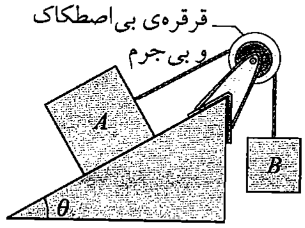
شکل ۶-۳۱ مسئله‌ی ۲۵.

**** ۲۶** شکل ۶-۳۲ سه صندوق را نشان می‌دهد که با نیروی افقی $\vec{F}$ به بزرگی ۴۴۰N بر روی یک سطح بتونی هُل داده می‌شوند. جرم صندوق‌ها $m_۱ = ۳۰/۰\text{kg}$، $m_۲ = ۱۰/۰\text{kg}$ و $m_۳ = ۲۰/۰\text{kg}$ است. ضریب اصطکاک جنبشی میان سطح و هر صندوق ۰/۷۰۰ است. (الف) بزرگی $F_{۳۲}$، نیروی وارد شده به صندوق ۳ از سوی صندوق ۲، چیست؟ (ب) اکنون، اگر این صندوق‌ها روی یک سطح صیقلی با ضریب اصطکاک جنبشی کمتر از ۰/۷۰۰ بلغزند، آیا بزرگی $F_{۳۲}$ نسبت به بزرگی مربوط به حالت ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۷۰۰ بیشتر می‌شود، کمتر می‌شود یا به همان مقدار است؟



شکل ۶-۳۲ مسئله‌ی ۲۶.

**** ۲۷** درشکل ۶-۳۳، وزن جسم A برابر با ۱۰۲N و وزن جسم B برابر با ۳۲N است. ضریب‌های اصطکاک میان جسم A و سطح شیب‌دار $\mu_s = ۰/۵۶$ و $\mu_k = ۰/۲۵$ هستند. زاویه‌ی θ برابر با ۴۰ درجه است. فرض می‌کنیم جهت محور x به سمت بالای سطح شیب‌دار باشد. شتاب جسم A را به صورت نمادگذاری بردارهای یکه در حالتی پیدا کنید که جسم A در

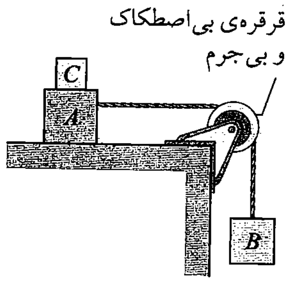


شکل ۶-۳۳ مسئله‌های ۲۷ و ۲۸.

آغاز، (الف) در حال سکون باشد، (ب) به سمت بالای سطح شیب‌دار حرکت کند و (پ) به سمت پایین سطح حرکت کند.

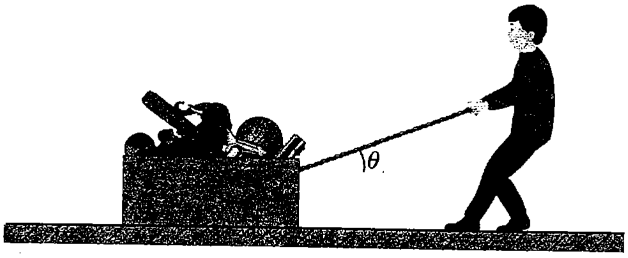
** **۲۸** در شکل ۶-۳۳، دو جسم با طنابی که از روی قرقره‌ای گذشته است، به هم وصل شده‌اند. جرم جسم A برابر با ۱۰kg و ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم A و سطح شیب‌دار ۰/۲۰ است. زاویه‌ی شیب سطح θ، برابر با ۳۰ درجه است و جسم A با تندی ثابت از سطح به پایین می‌لغزد. جرم جسم B چقدر است؟ فرض می‌کنیم جرم طناب متصل کننده قابل چشم‌پوشی است (کار قرقره فقط تغییر دادن راستای طناب است).

** **۲۹** در شکل ۶-۳۴، وزن اجسام A و B، به ترتیب، ۴۴N و ۲۲N است. (الف) اگر μ_s میان جسم A و میز ۰/۲۰ باشد، کمینه‌ی مقدار وزنه‌ی C را طوری معین کنید که جسم A نلغزد. (ب) جسم C را ناگهان از روی جسم A برمی‌داریم. اگر μ_k میان جسم A و میز ۰/۱۵ باشد، شتاب جسم A چقدر خواهد بود؟



شکل ۶-۳۴ مسئله‌ی ۲۹.

** **۳۰** وزن مجموع یک صندوق اسباب بازی و محتویات آن ۱۸۰N است. ضریب اصطکاک ایستایی میان صندوق و کف اتاق ۰/۴۲ است. در شکل ۶-۳۵ پسربچه‌ای می‌خواهد با

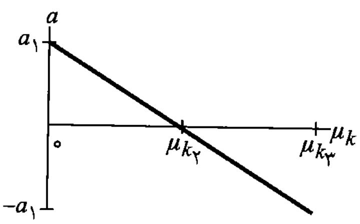


شکل ۶-۳۵ مسئله‌ی ۳۰.

کشیدن طناب متصل به صندوق، آن را بر روی کف اتاق حرکت دهد. (الف) به ازای $\theta = ۴۲°$، بزرگی نیروی $\vec{F}$ که باید پسربچه به طناب وارد کند تا صندوق در آستانه‌ی حرکت کردن قرار گیرد، چقدر است؟ (ب) رابطه‌ی مربوط به بزرگی F لازم برای قرار دادن صندوق در آستانه‌ی حرکت را به صورت تابعی از زاویه‌ی θ بنویسید. (پ) مقدار θ برای آنکه F کمینه شود و (ت) بزرگی این مقدار کمینه، را معین کنید.

** **۳۱** دو جسم به وزن‌های ۳/۶N و ۷/۲N با ریسمانی بی‌جرم به هم وصل شده‌اند و از سطح شیب‌داری با زاویه‌ی شیب ۳۰ درجه به پایین می‌لغزند. ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم سبک‌تر و سطح ۰/۱۰ و میان جسم سنگین‌تر و سطح ۰/۲۰ است. با این فرض که جسم سبک‌تر در جلو قرار دارد، (الف) بزرگی شتاب اجسام و (ب) نیروی کشش ریسمان کشیده شده، را پیدا کنید.

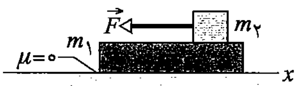
** **۳۲** جسمی بر روی کف اتاق با نیروی ثابتی که تحت زاویه‌ی پایین‌سوی θ (شکل ۶-۱۹) وارد شده است، هُل داده می‌شود. شکل ۶-۳۶ نمودار تغییرات بزرگی شتاب a برحسب گستره‌ای از مقادیر ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و کف، μ_k، را نشان می‌دهد: $a_1 = ۳/۰ \mathrm{m/s^2}$، $\mu_{k2} = ۰/۲۰$ و $\mu_{k3} = ۰/۴۰$. مقدار θ چیست؟



شکل ۶-۳۶ مسئله‌ی ۳۲.

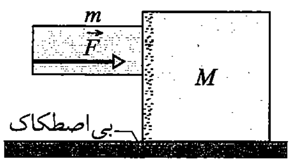
*** ۳۳ موتور یک قایق ۱۰۰۰ کیلوگرمی، در حالی که قایق با تندی ۹۰٫۰km/h در حال حرکت است، خاموش می‌شود. بزرگی نیروی اصطکاک میان قایق و آب، $\vec{f_k}$، بنا به رابطه‌ی f_k = ۷۰v با تندی قایق v، متناسب است؛ v برحسب متر بر ثانیه و f_k برحسب نیوتون است. چه مدت طول می‌کشد تا تندی قایق به ۴۵km/h برسد؟

*** ۳۴ در شکل ۶-۳۷، تختالی به جرم m_1 = ۴۰kg روی یک سطح بی‌اصطکاک قرار گرفته و جسمی به‌جرم m_2 = ۱۰kg روی این تختال گذاشته شده است. ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم و تختال ۰٫۶۰ و ضریب اصطکاک جنبشی میان آن‌ها ۰٫۴۰ است. یک نیروی افقی $\vec{F}$ به بزرگی ۱۰۰N، مطابق شکل، جسم m_2 را به طور مستقیم شروع به کشیدن می‌کند. شتاب (الف) جسم و (ب) تختال، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟



شکل ۶-۳۷ مسئله‌ی ۳۴.

*** ۳۵ در شکل ۶-۳۸، دو جسم نشان داده شده (به جرم‌های m = ۱۶kg و M = ۸۸kg) به هم نچسبیده‌اند. ضریب اصطکاک ایستایی میان دو جسم μ_s = ۰٫۳۸ و سطح زیر جسم بزرگ‌تر بی‌اصطکاک است. بزرگی کمینه‌ی نیروی افقی $\vec{F}$ چقدر باید باشد تا از لغزیدن جسم کوچک‌تر از کنار جسم بزرگ‌تر به پایین جلوگیری شود؟



شکل ۶-۳۸ مسئله‌ی ۳۵.

پودمان ۶-۲ نیروی پسار و تندی حد

* ۳۶ تندی حد یک شیرجه‌رو در آسمان در وضعیت عقاب گشوده بال ۱۶۰km/h و در وضعیت سر به پایین ۳۱۰km/h است. فرض کنید ضریب پسار شیرجه‌رو C، از وضعیتی به وضعیت دیگر تغییر نمی‌کند. نسبت مساحت مقطع مؤثر A را در وضعیت کندتر به مقدار آن در وضعیت تندتر، پیدا کنید.

** ۳۷ *ادامه‌ی مسئله‌ی ۸* اکنون، فرض کنید که با استفاده کردن از معادله‌ی ۶-۱۴ می‌توان نیروی پسار هوا را که به یک سنگ ۲۰ کیلوگرمی وارد می‌شود، به دست آورد. مساحت مقطع مؤثر سنگ در مقابل باد ۰٫۰۴۰m² و ضریب پسار C برابر با ۰٫۸۰ است. چگالی هوا را ۱٫۲۱kg/m³ و ضریب اصطکاک جنبشی را ۰٫۸۰ بگیرید. (الف) تندی باد V، در سطح زمین، برحسب کیلومتر بر ساعت چقدر باید باشد تا سنگی را که شروع به‌حرکت کرده است در حال حرکت نگه دارد؟ چون حرکت باد در سطح زمین کند می‌شود، تندی‌های گزارش شده اغلب مربوط به اندازه‌گیری در ارتفاع ۱۰ متری هستند. فرض کنید تندی باد ۲٫۰۰ برابر تندی آن در سطح زمین باشد. (ب) برای پاسخ دادن به قسمت (الف)، تندی باد گزارش شده‌ی مربوط به توفان چقدر است؟ (ب) آیا این مقدار برای بادهای تند قابل قبول است؟ (دنباله‌ی موضوع در مسئله‌ی ۶۵ ادامه پیدا می‌کند).

** ۳۸ فرض کنید معادله‌ی ۶-۱۴ نیروی پسار وارد شده به یک خلبان و صندلی پرش او را پس از پریدن از یک هواپیمای در حال پرواز افقی با تندی ۱۳۰۰km/h به دست می‌دهد. در ضمن، فرض کنید جرم صندلی برابر با جرم خلبان و ضریب پسار برابر با ضریب پسار یک چترباز در حال شیرجه رفتن است. با حدس زدن جرم خلبان به نحوی پذیرفتنی و با استفاده کردن از مقدار مناسب v_t از جدول ۶-۱، بزرگی (الف) نیروی پسار وارد شده به ***خلبان + صندلی*** و (ب) شتاب کند کننده‌ی افقی (برحسب g) هر دوی آن‌ها را درست پس از پریدن از هواپیما برآورد کنید [نتیجه‌ی قسمت (الف) یک الزام فنی را نشان دهد: صندلی باید یک مانع حفاظتی برای منحرف کردن باد در ابتدا از بالای سر خلبان، باشد].

** ۳۹ نسبت نیروی پسار وارد شده به یک جت مسافری در حال پرواز با تندی ۱۰۰۰km/h در ارتفاع ۱۰ کیلومتری، به نیروی پسار وارد شده به یک هواپیمای ملخ‌دار در حال پرواز با نصف تندی جت و در نصف آن ارتفاع را حساب کنید. در ارتفاع ۱۰ کیلومتری چگالی هوا ۰٫۳۸kg/m³ و در ارتفاع ۵٫۰ کیلومتری چگالی هوا ۰٫۶۷kg/m³ است. فرض کنید

دو هواپیما دارای مقطع مؤثر و ضریب پسار C، یکسان‌اند.

** ۴۰ تندی یک اسکی‌باز در حین پایین رفتن از یک تپه توسط نیروی پسار وارد شده به بدن او از سوی هوا و هم‌چنین نیروی اصطکاک جنبشی وارد شده به چوب‌های اسکی، کند می‌شود. (الف) فرض کنید زاویه‌ی شیب تپه $\theta = ۴۰/۰°$، برف خشک است و ضریب اصطکاک جنبشی آن برابر است با $\mu_k = ۰/۰۴۰۰$، جرم اسکی‌باز و تجهیزاتش $m = ۸۵/۰\,\text{kg}$، مساحت مقطع مؤثر اسکی‌باز (به صورت خم شده) $A = ۱/۳۰\,\text{m}^۲$، ضریب پسار $C = ۰/۱۵۰$ و چگالی هوا $۱/۲۰\,\text{kg/m}^۳$ است. (الف) تندی حد چقدر است؟ (ب) اگر اسکی‌باز بتواند با تنظیم، مثلاً، حالت دست‌های خود C را به مقدار کم dC تغییر دهد، تغییر متناظر در تندی حد چقدر است؟

پودمان ۶-۳ حرکت دایره‌ای یکنواخت

* ۴۱ گربه‌ای روی یک چرخ و فلک افقی ساکن و در فاصله‌ی $۵/۴\,\text{m}$ از مرکز چرخ در حال چرت زدن است. در این حال، مسئول چرخ و فلک آن را به راه می‌اندازد و گردش چرخ را به آهنگ مناسب یک دور کامل در هر $۶/۰$ ثانیه می‌رساند. کمترین ضریب اصطکاک ایستایی میان گربه و چرخ و فلک چقدر باید باشد تا گربه بدون لغزیدن در جای خود بماند؟

* ۴۲ فرض کنید ضریب اصطکاک ایستایی میان جاده و لاستیک‌های یک خودرو $۰/۶۰$ است و خودرو نیروی برآر منفی ندارد. خودرو هنگامی که یک مسیر خمیده‌ی تراز به شعاع $۳۰/۵\,\text{m}$ را دور می‌زند، چه تندی‌ای باید داشته باشد تا در آستانه‌ی لغزیدن قرار گیرد؟

* ۴۳ کمترین شعاع یک جاده‌ی بی‌شیب عرضی (تخت) چقدر باید باشد تا دوچرخه‌سواری بتواند با تندی $۲۹\,\text{km/h}$ دور بزند. ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیک‌ها و جاده برابر است با $\mu_s = ۰/۳۲$.

* ۴۴ اعضای تیم جامائیکا در حین مسابقه‌ی سورتمه سواری دو نفره‌ی المپیک پیچی به شعاع $۷/۶\,\text{m}$ را با تندی $۹۶/۶\,\text{km/h}$ پیمودند. شتاب آن‌ها برحسب g چه بوده است؟

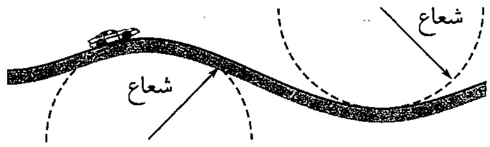
** ۴۵ دانشجویی به وزن $۶۶۷\,\text{N}$ بر روی یک چرخ و فلک قائم که با تندی ثابت می‌چرخد، سوار است (دانشجو راست نشسته است). در بالاترین نقطه‌ی مسیر بزرگی نیروی عمودی $\vec{F}_N$، وارد شده به دانشجو از سوی صندلی $۵۵۶\,\text{N}$ است. (الف) دانشجو در آنجا احساس «سبکی» می‌کند یا «سنگینی»؟ (ب) در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر بزرگی $\vec{F}_N$ چقدر است؟ (پ) اگر تندی چرخ دو برابر شود، بزرگی F_N (پ) در بالاترین نقطه و (ت) در پایین‌ترین نقطه، چقدر است؟

** ۴۶ یک افسر پلیس در یک تعقیب و گریز سخت، خودرو خود را در یک پیچ دایره‌ای به شعاع $۳۰۰\,\text{m}$ با تندی ثابت $۸۰/۰\,\text{km/h}$ می‌رانَد. جرم افسر $۵۵/۰\,\text{kg}$ است. (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی ***نیروی برایند*** وارد شده به صندلی از سوی افسر (نسبت به راستای قائم) چقدر است؟ (***راهنمایی:*** هر دو نیروی افقی و قائم را در نظر بگیرید).

** ۴۷ شخصی به جرم $۸۰\,\text{kg}$، که به حرکت دایره‌ای عادت دارد، بر چرخ و فلکی سوار است. چرخ در دایره‌ای قائم به شعاع $۱۰\,\text{m}$ با تندی ثابت $۶/۱\,\text{m/s}$ می‌چرخد. (الف) دوره‌ی تناوب این حرکت چقدر است؟ بزرگی نیروی عمودی وارد شده به شخص از سوی صندلی، (ب) در بالاترین نقطه‌ی مسیر دایره‌ای و (پ) در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر، چقدر است؟

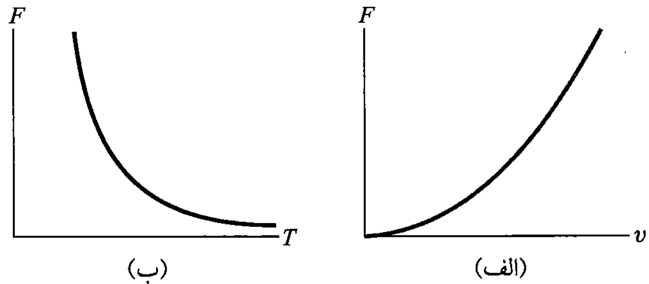
** ۴۸ جرم یک قطار هوایی تفریحی با ظرفیت کامل مسافر، $۱۲۰۰\,\text{kg}$ است. وقتی قطار از بالاترین نقطه‌ی یک تپه‌ی دایره‌ای به شعاع $۱۸\,\text{m}$ عبور می‌کند تندی‌اش تغییر نمی‌کند. (الف) بزرگی F_N و (ب) جهت (بالاسو یا پایین‌سو) نیروی عمودی وارد شده به قطار در حال حرکت با تندی $v = ۱۱\,\text{m/s}$ از سوی مسیر، چیست؟ (پ) F_N و (ت) جهت آن، به ازای $v = ۱۴\,\text{m/s}$، چیست؟

** ۴۹ در شکل ۶-۳۹، خودرویی با تندی ثابت در بالای یک تپه‌ی دایره‌ای و سپس در دره‌ای دایره‌ای با همان شعاع، حرکت می‌کند. در بالای تپه نیروی عمودی وارد شده به راننده از سوی صندلی خودرو صفر است. جرم راننده $۷۰/۰\,\text{kg}$ است. هنگام عبور خودرو از ته دره بزرگی نیروی عمودی وارد شده به راننده از سوی صندلی، چیست؟



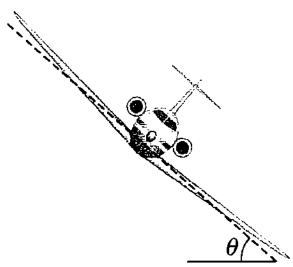
شکل ۶-۳۹ مسئله‌ی ۴۹.

** **۵۰** مسافری به جرم ۸۵٫۰kg در مسیری دایره‌ای به شعاع $r =$ ۳٫۵۰m حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. (الف) شکل ۶-۴۰ الف، نمودار تغییرات بزرگی F، نیروی برایند مرکزگرای لازم را در گستره‌ای از مقادیر ممکن مربوط به تندی مسافر v، نشان می‌دهد. شیب نمودار در تندی $v =$ ۸٫۳۰m/s چقدر است؟ (ب) شکل ۶-۴۰ ب، نمودار تغییرات بزرگی F مربوط به گستره‌ای از مقادیر ممکن دوره‌ی تناوب T را نشان می‌دهد. شیب این نمودار به ازای $T =$ ۲٫۵۰s چقدر است؟



شکل ۶-۴۰ مسئله‌ی ۵۰.

** **۵۱** هواپیمایی با تندی ۴۸۰km/h (شکل ۶-۴۱) در روی دایره‌ای افقی پرواز می‌کند. اگر بال‌های هواپیما نسبت به راستای افقی دارای زاویه‌ی $\theta =$ ۴۰° باشد، شعاع دایره‌ی پرواز هواپیما چقدر است؟ فرض کنید نیروی لازم برای نگهداشتن هواپیما به‌طور کامل توسط یک «نیروی برآر آئرودینامیکی» عمود بر سطح بال تأمین می‌شود.



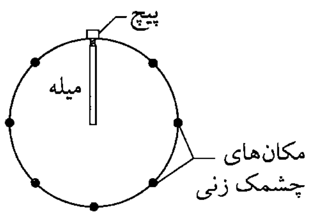
شکل ۶-۴۱ مسئله‌ی ۵۱.

** **۵۲** در یک پارک تفریحی خودرویی در یک دایره‌ی قائم، که در انتهای یک دیرک صُلب با جرم ناچیز قرار دارد، حرکت می‌کند. وزن مجموع خودرو و مسافران ۵٫۰kN و شعاع دایره‌ی مسیر ۱۰m است. در بالاترین نقطه‌ی دایره، (الف) بزرگی F_B و (ب) جهت آن (بالاسو یا پایین‌سو) نیروی وارد شده به خودرو از سوی دیرک در تندی $v =$ ۵٫۰m/s، چیست؟ به ازای $v =$ ۱۲m/s، (پ) F_B و (ت) جهت آن، چیست؟

** **۵۳** یک اتوبوس برقی شهری قدیمی مسیر خمیده‌ی تختی به شعاع ۹٫۱m را با تندی ۱۶km/h می‌پیماید. دستگیره‌های آویخته شده از سقف اتوبوس تحت چه زاویه‌ای نسبت به راستای قائم قرار می‌گیرند؟

** **۵۴** در طراحی وسایل سواری گردان در پارک‌های تفریحی مهندسان سازنده‌ی وسایل باید توجه کنند که تغییرات کوچک در برخی پارامترها می‌تواند نیروی برایند وارد شده به مسافران را تغییر دهد. مسافری به جرم m را در نظر بگیرید که سوار بر یک وسیله با تندی v در روی یک دایره‌ی افقی به شعاع r می‌چرخد. تغییر بزرگی نیروی برایند dF را در حالت‌های زیر پیدا کنید. (الف) شعاع دوران به اندازه‌ی dr تغییر می‌کند اما v ثابت است، (ب) تندی به اندازه‌ی dv تغییر می‌کند اما r ثابت است و (پ) دوره‌ی تناوب به اندازه‌ی dT تغییر می‌کند اما r ثابت است.

** **۵۵** پیچی به یک سر میله‌ی افقی باریکی بسته شده است و میله به دور سر دیگر خود در سطحی افقی می‌چرخد. شخصی با تاباندن نور یک چراغ چشمک‌زن بر روی میله و پیچ، حرکت آن‌ها را مشاهده می‌کند و آهنگ چشمک‌زنی چراغ به گونه‌ای تنظیم می‌شود که میله و پیچ در هر دوران کامل در هشت مکان بافاصله‌ی یکسان ظاهر شوند (شکل ۶-۴۲). آهنگ چشمک‌زنی

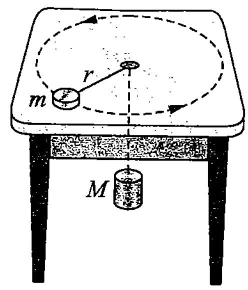


شکل ۶-۴۲ مسئله‌ی ۵۵.

۲۰۰۰ چشمک بر ثانیه است؛ پیچ ۳۰ گرم جرم دارد و در فاصله‌ی ۳٫۵cm از محور دوران واقع است. بزرگی نیروی وارد شده به پیچ از سوی میله چیست؟

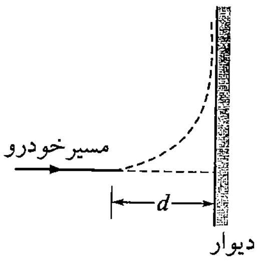
** ۵۶ بزرگ‌راهی دایره‌ای با شیب عرضی، برای عبور وسایل نقلیه‌ی با تندی ۶۰km/h طراحی شده است. شعاع خمیدگی بزرگ‌راه ۲۰۰m است. در یک روز بارانی خودروها با تندی ۴۰km/h از این بزرگ‌راه عبور می‌کنند. ضریب اصطکاک کمینه‌ی میان لاستیک‌ها و جاده چقدر باید باشد تا خودروها بدون لغزیدن جاده را دور بزنند؟ (فرض کنید خودروها نیروی برآر منفی ندارند).

** ۵۷ قرصی به جرم $m = ۱٫۵۰\text{kg}$ از طریق ریسمانی، که از سوراخ وسط میزی عبور کرده است، به استوانه‌ی آویخته‌ای به جرم $M = ۲٫۵۰\text{kg}$ وصل شده است. این قرص در یک مسیر دایره‌ای به شعاع $r = ۲۰٫۰\text{cm}$ بر روی سطح بی‌اصطکاک میز می‌لغزد (شکل ۶-۴۳). قرص با چه تندی‌ای باید بچرخد تا استوانه ساکن بماند؟



شکل ۶-۴۳ مسئله‌ی ۵۷.

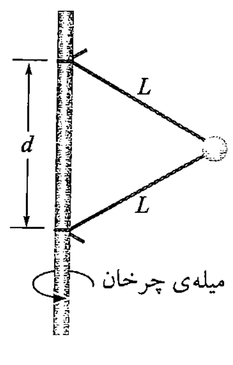
** ۵۸ ***ترمز کنیم یا دور بزنیم؟*** شکل ۶-۴۴ مسیر حرکت خودرویی را در هنگام حرکت کردن به سوی یک دیوار، با دید از بالا، نشان می‌دهد. فرض کنید راننده وقتی به فاصله‌ی $d = ۱۰۷\text{m}$ از دیوار می‌رسد شروع به ترمز کردن می‌کند. جرم خودرو را $m = ۱۴۰۰\text{kg}$، تندی آغازی خودرو را $v_۰ = ۳۵\text{m/s}$ و ضریب اصطکاک ایستایی را $\mu_s = ۰٫۵۰$ بگیرید. فرض کنید وزن خودرو، حتی در هنگام ترمز کردن، به‌طور مساوی بر روی چهار چرخ توزیع شده است. (الف) بزرگی نیروی اصطکاک ایستایی لازم (میان لاستیک‌ها و جاده) چقدر باید باشد تا خودرو درست در هنگام رسیدن به دیوار



شکل ۶-۴۴ مسئله‌ی ۵۸.

متوقف شود؟ (ب) نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه‌ی ممکن $f_{s,\max}$، چقدر است؟ (پ) اگر ضریب اصطکاک جنبشی میان لاستیک‌ها (در حال لغزیدن) و جاده $\mu_k = ۰٫۴۰$ باشد، خودرو با چه تندی‌ای به دیوار برخورد می‌کند؟ برای جلوگیری از تصادف، راننده می‌تواند طوری دور بزند که خودرو، مطابق شکل، درست از کنار دیوار عبور کند. (ت) بزرگی نیروی اصطکاک لازم برای نگهداشتن خودرو بر روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع d با تندی معین $v_۰$، چقدر باید باشد تا خودرو یک ربع دایره را بپیماید و سپس به طور موازی با دیوار حرکت کند؟ (ث) آیا نیروی مورد نیاز برای امکان دایره‌ای شدن مسیر از $f_{s,\max}$ کمتر است؟

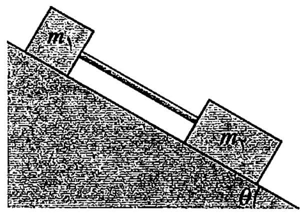
*** ۵۹ در شکل ۶-۴۵، گلوله‌ای به جرم ۱٫۳۴kg با دو ریسمان بی‌جرم، هر یک به طول $L = ۱٫۷۰\text{m}$، به یک میله‌ی قائم در حال دوران وصل شده است. ریسمان‌ها در دو نقطه به فاصله‌ی $d = ۱٫۷۰\text{m}$ از یکدیگر، به میله بسته شده‌اند. نیروی کشش در ریسمان بالایی ۳۵N است. (الف) نیروی کشش در ریسمان پایینی، (ب) بزرگی نیروی برایند $\vec{F}_{\text{net}}$ وارد شده به گلوله و (پ) تندی گلوله، چقدر است؟ (ت) جهت $\vec{F}_{\text{net}}$ چیست؟



شکل ۶-۴۵ مسئله‌ی ۵۹.

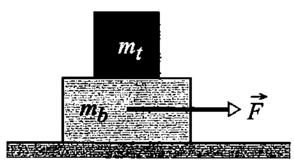
مسئله‌های بیشتر

۶۰ در شکل ۶-۴۶، جعبه‌ای (به جرم کل $m_1 = ۱٫۶۵\,\text{kg}$) با جعبه‌ی دیگر (به جرم کل $m_2 = ۳٫۳۰\,\text{kg}$)، که به وسیله‌ی میله‌ی صُلب بی‌جرمی به هم وصل شده‌اند، در روی سطح شیب‌داری به پایین می‌لغزند. زاویه‌ی شیب سطح برابر است با $\theta = ۳۰٫۰^\circ$. ضریب اصطکاک جنبشی میان جعبه‌ی بالایی و سطح شیب‌دار $\mu_1 = ۰٫۲۲۶$ و میان جعبه‌ی پایینی و سطح شیب‌دار $\mu_2 = ۰٫۱۱۳$ است. مطلوب است محاسبه‌ی، (الف) نیروی کشش میله و (ت) بزرگی شتاب مشترک دو جعبه. (پ) اگر جای دو جعبه را عوض کنیم، پاسخ‌های قسمت‌های (الف) و (ب) چگونه تغییر می‌کنند؟



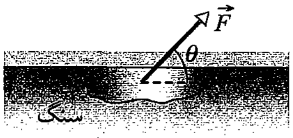
شکل ۶-۴۶ مسئله‌ی ۶۰.

۶۱ جسمی به جرم $m_t = ۴٫۰\,\text{kg}$ روی جسم دیگری به جرم $m_b = ۵٫۰\,\text{kg}$ قرار داده شده است. برای لغزاندن جسم بالایی بر روی جسم پایینی، در حالی که جسم پایینی ثابت نگه داشته شده است، باید دست کم یک نیروی افقی ۱۲N به جسم بالایی وارد شود. اکنون مجموعه‌ی این دو جسم را روی یک میز بی‌اصطکاک افقی قرار می‌دهیم (شکل ۶-۴۷). بزرگی (الف) نیروی افقی بیشینه‌ی $\vec{F}$ که باید به جسم پایینی وارد شود تا هر دو جسم با هم حرکت کنند و (ب) شتاب برایند دو جسم، چقدر است؟



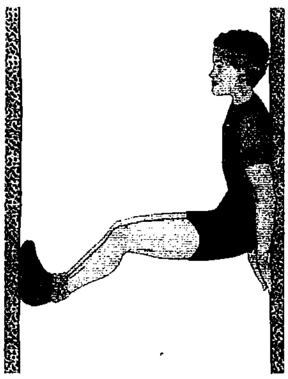
شکل ۶-۴۷ مسئله‌ی ۶۱.

۶۲ سنگی به جرم $۵٫۰۰\,\text{kg}$ بر روی سقف افقی ورودی یک غار کشیده می‌شود (شکل ۶-۴۸). اگر ضریب اصطکاک جنبشی ۰٫۶۵ و زاویه‌ی نیروی وارد شده به سنگ نسبت به راستای افقی $\theta = ۷۰٫۰^\circ$ باشد، بزرگی این نیرو چقدر باید باشد تا سنگ با سرعت ثابت حرکت کند؟



شکل ۶-۴۸ مسئله‌ی ۶۲.

۶۳ در شکل ۶-۴۹، صخره‌نوردی به جرم $۴۹\,\text{kg}$ از یک تنوره‌ی سنگی بالا می‌رود. ضریب اصطکاک ایستایی میان کفش‌های او و صخره ۱٫۲ و میان پشت او و صخره ۰٫۸۰ است. صخره‌نورد فشار به صخره را کم می‌کند تا پشت و کفش‌هایش در آستانه‌ی لغزیدن قرار گیرند. (الف) نمودار جسم ـ آزاد مربوط به صخره‌نورد را رسم کنید. (ب) او چه نیرویی به صخره وارد می‌کند؟ (پ) چه کسری از وزن او توسط نیروی اصطکاک وارد شده به کفش‌هایش تحمل می‌شود؟



شکل ۶-۴۹ مسئله‌ی ۶۳.

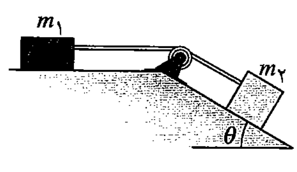
۶۴ قطار تندرویی یک دایره‌ی افقی تخت به شعاع $۴۷۰\,\text{m}$ را با تندی ثابت دور می‌زند. بزرگی مؤلفه‌های افقی و قائم نیرویی که قطار به یک مسافر ۵۱٫۰ کیلوگرمی وارد می‌کند، به ترتیب، ۲۱۰N و ۵۰۰N است. (الف) بزرگی نیروی برایند (*تمام نیروها*) وارد شده به مسافر چقدر است؟ (ب) تندی قطار چقدر است؟

۶۵ ***ادامه‌ی مسئله‌های ۸ و ۳۷.*** توجیه دیگر در این باره این است که سنگ‌ها فقط وقتی حرکت می‌کنند که آب باریده شده در

توفان در سطح وسیع به صورت برگه‌ای نازک یخ بزنند. سنگ‌ها در این برگه‌ی یخ گیر می‌افتند. سپس، هنگامی که هوا بر اثر وزش باد از روی این برگه عبور می‌کند، نیروهای پسار هوای وارد شده به برگه و سنگ‌ها آن‌ها راحرکت می‌دهند و درنتیجه، سنگ‌ها ازجای خود کشیده می‌شوند. بزرگی نیروی پسار هوا که به این «کشتی بادبانی یخی» افقی وارد می‌شود، از رابطه‌ی $D_i = 4C_i\ \rho A_i v^2$ به دست می‌آید، که در آن C_i ضریب پسار ($2/0 \times 10^{-3}$)، ρ چگالی هوا ($1/21 kg/m^3$)، A_i مساحت افقی یخ و v تندی باد در سطح یخ است.

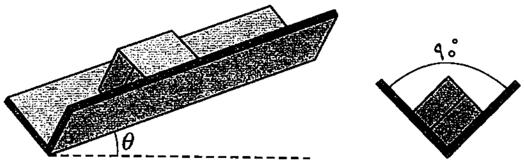
فرض‌های زیر را در نظر بگیرید: ابعاد برگه ۴۰۰m در ۵۰۰m در ۴/۰mm و ضریب اصطکاک جنبشی برگه نسبت به زمین ۰/۱۰ و چگالی یخ $917 kg/m^3$ است. هم‌چنین، فرض کنید ۱۰۰ سنگ مشابه نظیر سنگ مربوط به مسئله‌ی ۸ در یخ‌گیر افتاده‌اند. برای ادامه‌ی حرکت برگه تندی مورد نیاز باد، (الف) در نزدیکی برگه و (ب) در ارتفاع ۱۰ متری، چقدر است؟ (پ) آیا این مقادیر برای بادهای تند مربوط به یک‌توفان پذیرفتنی‌اند؟

۶۶ در شکل ۶-۵۰، جسم ۱ به جرم $m_1 = 2/0 kg$ و جسم ۲ به جرم $m_2 = 3/0 kg$ با ریسمانی به جرم ناچیز به هم وصل شده و در آغاز در جای خود قرار داده شده‌اند. جسم ۲ روی یک سطح بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta = 30°$ قرار دارد. ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم ۱ و سطح افقی ۰/۲۵ است. جرم و اصطکاک قرقره ناچیز است. هنگامی که دو جسم را رها می‌کنیم و آن‌ها حرکت می‌کنند نیروی کشش ریسمان چه خواهد بود؟



شکل ۶-۵۰ مسئله‌ی ۶۶.

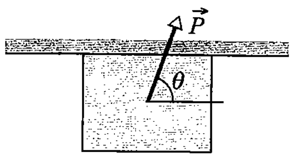
۶۷ در شکل ۶-۵۱، صندوقی درون یک سطح شیب‌دار ناودانی با زاویه‌ی ۹۰ درجه به پایین می‌لغزد. ضریب اصطکاک جنبشی میان صندوق و ناودان μ_k است. شتاب صندوق برحسب μ_k، θ و g چیست؟



شکل ۶-۵۱ مسئله‌ی ۶۷.

۶۸ ***طراحی یک پیچ بزرگ‌راه.*** اگر خودرویی با تندی زیاد به پیچ جاده‌ای وارد شود، به سمت بیرون پیچ سُر می‌خورد. در یک پیچ با شیب عرضی و اصطکاک به خودرو تندرو یک نیروی اصطکاک وارد می‌شود تا مانع لغزیدن آن به بیرون پیچ شود. جهت این نیرو به سمت پایین شیب عرضی (در جهت حرکت آب‌های ناشی از باران) است. یک پیچ دایره‌ای به شعاع $R = 200 m$ با شیب عرضی θ را در نظر بگیرید، که در آن ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیک‌ها و جاده μ_s است. یک خودرو (بدون نیروی برآر منفی) باید مطابق شکل ۶-۱۱ در این پیچ حرکت کند. (الف) رابطه‌ی مربوط به تندی خودرو v_{max}، را به گونه‌ای پیدا کنید که خودرو در آستانه‌ی لغزیدن به بیرون پیچ قرار گیرد. (ب) نمودار تغییرات v_{max} برحسب زاویه‌ی θ را در گستره‌ای از زاویه‌های صفر تا ۵۰ درجه، نخست به ازای $\mu_s = 0/60$ (جاده‌ی خشک) و سپس به ازای $\mu_s = 0/050$ (جاده‌ی خیس، یا یخ زده)، برای همان شکل، رسم کنید. مقدار v_{max} را برحسب کیلومتر بر ساعت به ازای زاویه‌ی شیب عرضی $\theta = 10°$ و به ازای (پ) $\mu_s = 0/60$ و (ت) $\mu_s = 0/050$، حساب کنید. (اکنون متوجه خواهید شد چرا در موقع لغزنده بودن پیچ جاده که برای راننده قابل تشخیص نیست و او می‌خواهد با تندی متعارف رانندگی کند، حادثه رخ می‌دهد.)

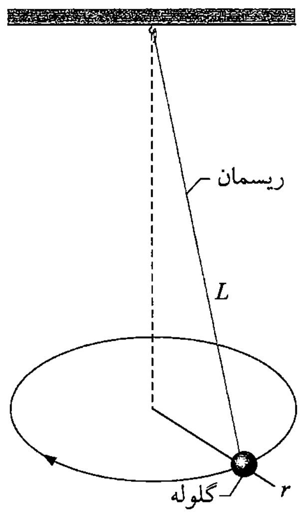
۶۹ یک دانشجوی عصبانی از امتحانات نهایی، جسمی ۵/۰ کیلوگرمی را با نیروی $\vec{P}$ به بزرگی ۸۰N تحت زاویه‌ی $\theta = 70°$ بر روی سقف اتاقش هُل می‌دهد (شکل ۶-۵۲). اگر



شکل ۶-۵۲ مسئله‌ی ۶۹.

ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و سقف ۰٫۴۰ باشد، بزرگی شتاب جسم چقدر است؟

۷۰ شکل ۶-۵۳ یک ***آونگ مخروطی*** را نشان می‌دهد که گلوله‌ی آن (جسم کوچک متصل به انتهای پایینی ریسمان) در روی یک دایره‌ی افقی با تندی ثابت حرکت می‌کند. (در هنگام چرخیدن گلوله، ریسمان سطح جانبی یک مخروط را جارو می‌کند). جرم گلوله ۰٫۰۴۰kg، جرم ریسمان ناچیز و طول آن $L =$ ۰٫۹۰m است. گلوله در روی دایره‌ای با محیط ۰٫۹۴m حرکت می‌کند. (الف) نیروی کشش ریسمان و (ب) دوره‌ی تناوب حرکت آونگ چقدر است؟

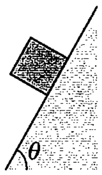


شکل ۶-۵۳ مسئله‌ی ۷۰.

۷۱ یک جسم فولادی به جرم ۸٫۰۰kg در روی یک میز افقی به حال سکون قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم و میز ۰٫۴۵۰ است. این جسم تحت تأثیر یک نیرو قرار می‌گیرد. بزرگی این نیرو را تا سه رقم با معنی به گونه‌ای معین کنید که جسم در شرایط زیر در آستانه‌ی لغزیدن قرار گیرد: (الف) راستای نیرو افقی است، (ب) نیرو به سمت بالا تحت زاویه‌ی ۶۰٫۰ درجه نسبت به افق است و (پ) نیرو به سمت پایین تحت زاویه‌ی ۶۰٫۰ درجه نسبت به افق است.

۷۲ جعبه‌ای محتوی مواد غذایی در پیاده‌رو خیابانی شیب‌دار با شتاب ۰٫۷۵m/s^2 به سمت یک مغازه‌ی خواروبار فروشی می‌لغزد و پایین می‌رود. زاویه‌ی شیب‌راهه نسبت به افق ۴۰ درجه است. ضریب اصطکاک جنبشی میان جعبه و شیب‌راهه چیست؟

۷۳ در شکل ۶-۵۴، ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و سطح شیب‌دار ۰٫۲۰، و زاویه‌ی θ برابر با ۶۰ درجه است. (الف) بزرگی a و (ب) جهت شتاب جسم (به سمت بالا یا پایین سطح شیب‌دار) در حالی که جسم به پایین می‌لغزد، چیست؟ اگر جسم به سمت بالا لغزانده شود، (پ) بزرگی a و (ت) جهت آن چیست؟

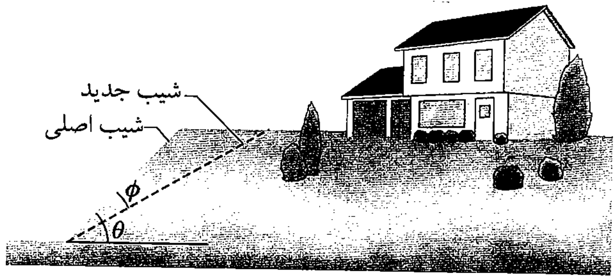


شکل ۶-۵۴ مسئله‌ی ۷۳.

۷۴ یک قرص هاکی به جرم ۱۱۰ گرم به اندازه‌ی ۱۵ متر روی یخ می‌لغزد و به وسیله‌ی نیروی اصطکاک متوقف می‌شود. (الف) اگر تندی آغازی قرص ۶٫۰m/s باشد، بزرگی نیروی اصطکاک چقدر است؟ (ب) ضریب اصطکاک میان قرص و یخ چقدر است؟

۷۵ لوکوموتیوی ۲۵ واگن قطار را در روی یک ریل افقی می‌کشد. هر واگن ۵٫۰×۱۰^{4}kg جرم دارد و تحت اثر نیروی اصطکاک $f =$ ۲۵۰v است، که در آن v برحسب متر بر ثانیه و f برحسب نیوتون است. در لحظه‌ای که قطار دارای تندی ۳۰km/h است بزرگی شتاب آن ۰٫۲۰m/s^2 است. (الف) نیروی کشش جفت شدگی میان واگن اول و لوکوموتیو چقدر است؟ (ب) اگر این نیروی کشش برابر با بیشینه‌ی نیرویی باشد که لوکوموتیو می‌تواند به قطار وارد کند، بیشترین شیب سطحی که روی آن لوکوموتیو می‌تواند قطار را با تندی ۳۰km/h به سمت بالا بکشد چقدر است؟

۷۶ خانه‌ای بر بالای تپه‌ای با شیب $\theta =$ ۴۵° ساخته شده است (شکل ۶-۵۵). مطالعات مهندسی نشان می‌دهند که این زاویه‌ی شیب باید کاهش یابد زیرا لایه‌های بالایی خاک ممکن است بر روی لایه‌های پایینی بلغزند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان دو لایه‌ی خاک ۰٫۵ باشد، کمترین مقدار زاویه‌ی ϕ که به‌ازای



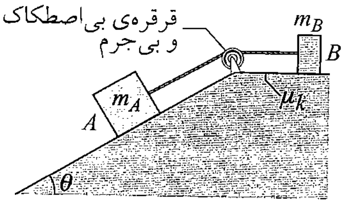
شکل ۶-۵۵ مسئله‌ی ۷۶.

آن شیب موجود تپه باید کاهش یابد تا لغزش خاک صورت نگیرد، چقدر است؟

۷۷ تندی حد یک گلوله‌ی کروی در حال سقوط آزاد به جرم ۶٫۰۰kg، شعاع ۳٫۰۰cm و ضریب پسار ۱٫۶۰، چقدر است؟ چگالی هوای پیرامون گلوله‌ی در حال سقوط $۱٫۲۰\,kg/m^3$ است.

۷۸ دانشجویی می‌خواهد ضریب‌های اصطکاک ایستایی و جنبشی میان یک جعبه و یک الوار را معین کند. او جعبه را روی الوار قرار می‌دهد و یک سر الوار را به تدریج بلند می‌کند. وقتی زاویه‌ی شیب الوار نسبت به راستای افقی به ۳۰ درجه می‌رسد. جعبه شروع به لغزیدن می‌کند و در مدت ۴٫۰ ثانیه با شتاب ثابت مسافتی به اندازه‌ی ۲٫۵m به سمت پایین می‌لغزد. (الف) ضریب اصطکاک ایستایی و (ب) ضریب اصطکاک جنبشی میان جعبه و الوار چقدر است؟

۷۹ در شکل ۶-۵۶، جسم A دارای جرم $m_A = ۴٫۰\,kg$ و جسم B دارای جرم $m_B = ۲٫۰\,kg$ است. ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم B و سطح افقی $\mu_k = ۰٫۵۰$ است. سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک و زاویه‌ی شیب آن $\theta = ۳۰^\circ$ است. قرقره فقط جهت ریسمان وصل کننده‌ی دو جسم را تغییر می‌دهد و جرم ریسمان ناچیز است. (الف) نیروی کشش ریسمان و (ب) بزرگی شتاب اجسام را پیدا کنید.

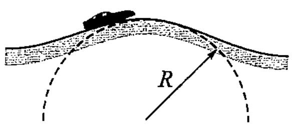


شکل ۶-۵۶ مسئله‌ی ۷۹.

۸۰ نیروی پسار وارد شده به پرتابه‌ای به قطر ۵۳cm را که در ارتفاع پایین با تندی ۲۵۰m/s حرکت می‌کند، حساب کنید. چگالی هوا در این ارتفاع $۱٫۲\,kg/m^3$ است و فرض کنید $C = ۰٫۷۵$.

۸۱ دوچرخه‌سواری دایره‌ای به شعاع ۲۵٫۰m را با تندی ثابت ۹٫۰۰m/s دور می‌زند. جرم دوچرخه و دوچرخه‌سوار ۸۵٫۰kg است. مطلوب است محاسبه‌ی بزرگی، (الف) نیروی اصطکاک وارد شده به دوچرخه از سوی جاده و (ب) ***نیروی برایند*** وارد شده به دوچرخه از سوی جاده.

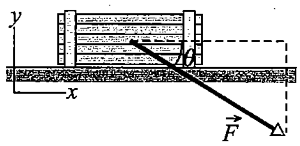
۸۲ در شکل ۶-۵۷، راننده‌ای شیرین کار یک خودرو (بدون نیروی برآر منفی) را در بالای تپه‌ای می‌راند که مقطع آن را می‌توان به‌تقریب دایره‌ای به شعاع $R = ۲۵۰\,m$ در نظر گرفت. بیشترین تندی خودرو در بالای تپه چقدر می‌تواند باشد تا خودرو از سطح جاده بلند نشود؟



شکل ۶-۵۷ مسئله‌ی ۸۲.

۸۳ قرار است یک صندوق را در کف یک بارانداز هُل بدهید. وزن صندوق ۱۶۵N، ضریب اصطکاک ایستایی میان صندوق و کف ۰٫۵۱۰ و ضریب اصطکاک جنبشی ۰٫۳۲ است. راستای نیروی وارد شده به صندوق افقی است. (الف) بزرگی نیروی وارد شده به صندوق چقدر باید باشد تا صندوق در آستانه‌ی لغزیدن قرار گیرد؟ (ب) بزرگی نیروی وارد شده چقدر باید باشد تا صندوق با سرعت ثابت حرکت کند؟ (پ) اکنون، اگر صندوق را با نیروی به دست آمده در قسمت (الف) هُل بدهید، بزرگی شتاب صندوق چقدر خواهد بود؟

۸۴ در شکل ۶-۵۸، نیروی $\vec{F}$ به صندوقی به جرم m، واقع بر روی کف اتاق، وارد می‌شود. ضریب اصطکاک ایستایی میان صندوق و کف μ_s است. زاویه‌ی θ در آغاز صفر است، اما به‌تدریج افزایش می‌یابد، به گونه‌ای که بردار نیرو در شکل به‌صورت ساعت‌گرد می‌چرخد. در حین چرخیدن نیرو، بزرگی F به طور پیوسته به گونه‌ای تنظیم می‌شود، که صندوق همیشه



شکل ۶–۵۸ مسئله‌ی ۸۴.

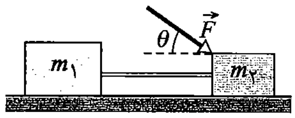
در آستانه‌ی لغزیدن قرار گیرد. به ازای $\mu_s = ۰/۷۰$، (الف) نمودار تغییرات نسبت $\frac{F}{mg}$ را برحسب θ رسم کنید و (ب) زاویه‌ی θ_{inf} را، که به ازای آن این نسبت به یک مقدار بی‌نهایت میل می‌کند، معین کنید. (پ) آیا روغن‌کاری کف اتاق مقدار θ_{inf} را افزایش می‌دهد، کاهش می‌دهد، یا تغییر نمی‌دهد؟ (ت) به ازای $\mu_s = ۰/۶۰$ مقدار θ_{inf} چقدر است؟

۸۵ در یک بعدازظهر، خودرویی در خیابانی متوقف شده است که روی تپه‌ای با زاویه‌ی شیب ۳۵/۰ درجه نسبت به افق قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیک‌ها و سطح خیابان ۰/۷۲۵ است. شب هنگام بر اثر بارش برف و باران در منطقه، به خاطر یخ زدگی و تغییرات شیمیایی در سطح جاده در اثر کاهش دما، ضریب اصطکاک کاهش می‌یابد. ضریب اصطکاک چند درصد باید کاهش پیدا کند تا خودرو با خطر پایین لغزیدن از خیابان مواجه شود؟

۸۶ شخصی یک قلوه سنگ (به جرم ۰/۲۵۰kg) را در کیسه‌ی کوچک (به جرم ۰/۰۱۰kg) یک قلاب سنگ قرار می‌دهد و آن را در یک دایره‌ی قائم به شعاع ۰/۶۵۰m می‌چرخاند. جرم ریسمان میان کیسه و دست شخص ناچیز است و اگر ریسمان تحت نیروی کشش ۳۳/۰N، یا بیشتر، قرار گیرد پاره می‌شود. فرض کنید شخص سنگ‌انداز می‌تواند تندی سنگ را به تدریج افزایش دهد. (الف) آیا ریسمان در پایین‌ترین نقطه‌ی دایره‌ی مسیر پاره می‌شود یا در بالاترین نقطه؟ پاره شدن ریسمان به‌ازای چه تندی‌ای از سنگ صورت می‌گیرد؟

۸۷ خودرویی به وزن ۱۰/۷kN در حال حرکت کردن با تندی ۱۳/۴m/s و بدون نیروی برآر منفی، تلاش می‌کند در یک مسیر خمیده‌ی به شعاع ۶۱/۰m و بی‌شیب عرضی دور بزنند. (الف) بزرگی نیروی اصطکاک لاستیک‌ها چقدر باید باشد تا خودرو در روی مسیر دایره‌ای خود بماند؟ (ب) اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیک‌ها و جاده ۰/۳۵۰ باشد آیا تلاش خودرو برای دور زدن روی جاده موفقیت‌آمیز است؟

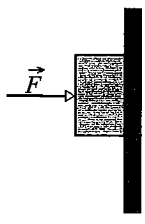
۸۸ درشکل ۶–۵۹، جسم ۱ به‌جرم $m_1 = ۲/۰\text{kg}$ و جسم ۲ به‌جرم $m_2 = ۱/۰\text{kg}$ با ریسمانی به جرم ناچیز به هم وصل شده‌اند. جسم ۲ را با نیروی $\vec{F}$ به بزرگی ۲۰N و تحت زاویه‌ی $\theta = ۳۵°$ هُل می‌دهیم. ضریب اصطکاک جنبشی میان هر جسم و سطح افقی ۰/۲۰ است. نیروی کشش ریسمان چقدر است؟



شکل ۶–۵۹ مسئله‌ی ۸۸.

۸۹ یک قفسه‌ی پرونده به وزن ۵۵۶N روی کف اتاق قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان قفسه و کف ۰/۶۸ و ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۵۶ است. برای حرکت دادن این قفسه در چهار بار مختلف آن را با نیروهای افقی (الف) ۲۲۲N، (ب) ۳۳۴N، (پ) ۴۴۵N، و (ت) ۵۵۶N، هُل می‌دهیم. بزرگی نیروی اصطکاک وارد شده به قفسه از سوی کف اتاق را برای هر بار هُل دادن حساب کنید. (قفسه در آغاز ساکن است). (ث) در کدام یک از این چهار بار قفسه حرکت می‌کند؟

۹۰ در شکل ۶–۶۰، جسمی به وزن ۲۲N با نیروی افقی $\vec{F}$ به بزرگی ۶۰N بر روی یک دیوار قائم نگه داشته می‌شود. ضریب اصطکاک ایستایی میان دیوار و جسم ۰/۵۵ و ضریب اصطکاک جنبشی میان آن‌ها ۰/۳۸ است. در شش بار آزمایش، نیروی دیگر $\vec{P}$ را به موازات دیوار با بزرگی‌ها و جهت‌های زیر به جسم وارد می‌کنیم: (الف) ۳۴N، بالا، (ب) ۱۲N، بالا، (پ) ۴۸N، بالا، (ت) ۶۲N، بالا، (ث) ۱۰N، پایین، و (ج) ۱۸N، پایین. در هر آزمایش بزرگی نیروی اصطکاک وارد شده به جسم



شکل ۶–۶۰ مسئله‌ی ۹۰.

چقدر است؟ در کدام آزمایش، جسم (چ) به سمت بالای دیوار و (ح) به سمت پایین دیوار، حرکت می‌کند؟ (خ) در کدام آزمایش جهت نیروی اصطکاک به سمت پایین دیوار است؟

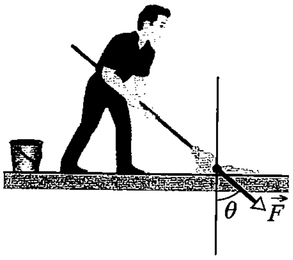
۹۱ جسمی با سرعت ثابت بر روی یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی شیب θ به پایین می‌لغزد. سپس این جسم با تندی آغازی $v_۰$ به سمت بالای همان سطح شیب‌دار پرتاب می‌شود. (الف) این جسم پیش از متوقف شدن تا چه فاصله‌ای از سطح شیب‌دار بالا می‌رود؟ (ب) پس از متوقف شدن، آیا جسم دوباره به پایین می‌لغزد؟ برای توجیه پاسخ خود دلیل بیاورید.

۹۲ پیچ دایره‌ای یک بزرگ‌راه برای حرکت کردن وسایل نقلیه‌ی با تندی ۶۰km/h طراحی شده است. فرض کنید این وسایل نقلیه خودروهایی بدون نیروی برآر منفی هستند. (الف) اگر شعاع پیچ ۱۵۰m باشد زاویه‌ی صحیح شیب عرضی جاده چقدر است؟ (ب) اگر این پیچ شیب عرضی نداشته باشد، ضریب اصطکاک کمینه‌ی میان لاستیک‌ها و جاده چقدر باید باشد تا وسایل نقلیه در هنگام حرکت کردن با تندی ۶۰km/h به سمت بیرون پیچ نلغزند؟

۹۳ جعبه‌ای به جرم ۱٫۵kg در آغاز روی یک سطح افقی قرار دارد و در زمان $t = ۰$ یک نیروی افقی $\vec{F} = (۱٫۸t)\hat{\mathrm{i}}\,\mathrm{N}$ (که t برحسب ثانیه است) به این جعبه وارد می‌شود. شتاب جعبه برحسب t، در زمان‌های $۰ \le t \le ۲٫۸\mathrm{s}$ به صورت $\vec{a} = ۰$ و در زمان‌های $t > ۲٫۸\mathrm{s}$ به‌صورت $\vec{a} = (۱٫۲t - ۲٫۴)\hat{\mathrm{i}}\,\mathrm{m/s^2}$ است. (الف) ضریب اصطکاک ایستایی میان جعبه وسطح چقدر است؟ (ب) ضریب اصطکاک جنبشی میان جعبه و سطح چیست؟

۹۴ کودکی به وزن ۱۴۰N در بالای سُرسُره‌ای که با افق زاویه‌ی ۲۵ درجه می‌سازد، ساکن است. این کودک برای جلوگیری از سُر خوردن کناره‌های دو طرف سُرسُره را با دست‌های خود گرفته است. کودک پس از رها کردن کناره‌ها با شتاب ثابت $۰٫۸۶\,\mathrm{m/s^2}$ (البته به سمت پایین سُرسُره) به حرکت در می‌آید. (الف) ضریب اصطکاک جنبشی میان کودک و سُرسُره چقدر است؟ (ب) مقادیر داده شده در این مسئله با چه مقادیر بیشینه و کمینه‌ی ضریب اصطکاک ایستایی میان کودک و سُرسُره سازگار هستند؟

۹۵ در شکل ۶-۶۱، یک کارگر وسواسی دسته‌ی زمین‌شو را با نیروی $\vec{F}$ در جهت دسته، به جلو هُل می‌دهد. زاویه‌ی دسته‌ی زمین‌شو نسبت به راستای قائم θ است و μ_s و μ_k، به ترتیب، ضریب‌های اصطکاک ایستایی و جنبشی میان کلّه‌ی زمین‌شو و کف اتاق هستند. جرم دسته را نادیده بگیرید و فرض کنید که کل جرم زمین‌شو m، در کلّه‌ی آن متمرکز شده است. (الف) اگر کلّه‌ی زمین‌شو با سرعت ثابت در کف اتاق حرکت کند بزرگی F چقدر است؟ (ب) نشان دهید که اگر θ از مقدار معین $\theta_۰$ کمتر باشد، در آن صورت $\vec{F}$ (که باز هم در جهت دسته است) نمی‌تواند کلّه‌ی زمین‌شو را حرکت دهد. مقدار $\theta_۰$ را پیدا کنید.

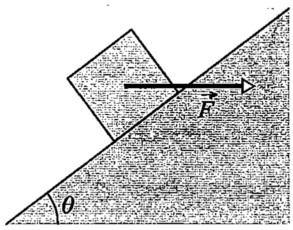


شکل ۶-۶۱ مسئله‌ی ۹۵.

۹۶ بچه‌ای سبد پیک‌نیک خود را روی کناره‌ی بیرونی یک چرخ و فلک افقی گذاشته است. چرخ و فلک دارای شعاع ۴٫۶m است و در هر ۳۰ ثانیه یک دور می‌زند. (الف) تندی یک نقطه از کناره‌ی چرخ و فلک چقدر است؟ (ب) کمترین مقدار ضریب اصطکاک ایستایی میان سبد پیک‌نیک و چرخ و فلک چقدر باید باشد تا سبد بر روی کناره باقی بماند؟

۹۷ یک کارگر انبار نیروی افقی ثابتی به بزرگی ۸۵N را به یک جعبه‌ی ۴۰ کیلوگرمی ساکن بر روی سطح افقی انبار وارد می‌کند. تندی این جعبه پس از پیمودن مسافت ۱٫۴m به ۱٫۰m/s می‌رسد. ضریب اصطکاک جنبشی میان جعبه و کف انبار چقدر است؟

۹۸ در شکل ۶-۶۲، یک جسم ۵٫۰ کیلوگرمی با وارد کردن نیروی افقی $\vec{F}$ به بزرگی ۵۰N از یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی شیب $\theta = ۳۷^\circ$ به سمت بالا لغزانده می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و سطح ۰٫۳۰ است. (الف) بزرگی



شکل ۶-۴۲ مسئله‌ی ۹۸.

و (ب) جهت شتاب جسم (بالاسو، یا پایین‌سوی سطح شیب‌دار) چیست؟ تندی آغازی جسم $۴/۰ \mathrm{m/s}$ است. (پ) این جسم تا چه فاصله‌ای از سطح شیب‌دار بالا می‌رود؟ (ت) وقتی جسم به بالاترین نقطه می‌رسد، آیا در آنجا ساکن می‌ماند یا به سمت پایین سطح شیب‌دار می‌لغزد؟

۹۹ جسم فولادی ۱۱ کیلوگرمی بر روی میزی افقی قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم و میز ۰/۵۲ است. (الف) بزرگی نیروی افقی‌ای که جسم را در آستانه‌ی حرکت قرار می‌دهد چیست؟ (ب) بزرگی نیروی بالاسوی تحت زاویه‌ی ۶۰ درجه نسبت به افق که جسم را در آستانه‌ی حرکت قرار می‌دهد چقدر است؟ (پ) اگر نیرو تحت زاویه‌ی ۶۰ درجه نسبت به افق به سمت پایین وارد شود، بزرگی‌اش چقدر می‌تواند باشد بدون آن که جسم حرکت کند؟

۱۰۰ یک اسکی واقع بر روی برف می‌تواند به برف بچسبد. اما اسکی هنگامی که بر روی برف حرکت داده می‌شود، در اثر مالش برف را گرم و بخشی از آن را ذوب می‌کند. در نتیجه، ضریب اصطکاک جنبشی کاهش می‌یابد و لغزیدن آغاز می‌شود. واکس زدن اسکی باعث دفع آب و کاهش یافتن اصطکاک با لایه‌ی آب به وجود آمده می‌شود. نشریه‌ای گزارش داده است که نوع جدیدی از اسکی پلاستیکی دفع کننده‌ی آب وجود دارد که در یک شیب ملایم ۲۰۰ متری در کوه‌های آلپ، اسکی‌باز توانسته است زمان پیمودن مسیر از بالا تا پایین شیب با اسکی‌های استاندارد را از ۶۱ ثانیه به ۴۲ ثانیه با اسکی‌های جدید کاهش دهد. بزرگی شتاب متوسط اسکی‌باز با (الف) اسکی‌های استاندارد و (ب) اسکی‌های جدید، چیست؟ با فرض آنکه شیب مسیر ۳/۰ درجه است، ضریب اصطکاک جنبشی مربوط به (پ) اسکی‌های استاندارد و (ت) اسکی‌های جدید را حساب کنید.

۱۰۱ کودکی در حال بازی کردن در نزدیکی یک کارگاه جاده‌سازی از بالای یک مانع بر روی یک سطح شیب‌دار کثیف با زاویه‌ی ۳۵ درجه در زیر افق سقوط می‌کند. کودک در هنگام لغزیدن از سطح شیب‌دار به ***پایین*** شتابش دارای بزرگی $۰/۵۰ \mathrm{m/s^2}$ و به سوی ***بالای*** سطح شیب‌دار است. ضریب اصطکاک جنبشی میان کودک و سطح چیست؟

۱۰۲ نیروی $۱۰۰ \mathrm{N}$ تحت زاویه‌ی θ نسبت به بالای افق، به یک صندلی ۲۵/۰ کیلوگرمی واقع بر کف اتاق وارد می‌شود. به‌ازای $\theta = ۰°$، (الف) مؤلفه‌ی افقی نیروی وارد شده F_h و (ب) بزرگی نیروی عمودی وارد شده از کف اتاق به صندلی F_N، چیست؟ به ازای $\theta = ۳۰/۰°$، (پ) F_h و (ت) F_N چقدر است؟ به ازای $\theta = ۶۰/۰°$، (ث) F_h و (ج) F_N چیست؟ اکنون، فرض کنید ضریب اصطکاک ایستایی میان صندلی و کف اتاق ۰/۴۲۰ است. آیا صندلی به ازای زاویه‌های θ برابر با (چ) صفر، (ح) ۳۰/۰ درجه و (خ) ۶۰/۰ درجه، می‌لغزد، یا ساکن می‌ماند؟

۱۰۳ ریسمانی می‌تواند بدون پاره شدن کشش بیشینه‌ی $۴۰ \mathrm{N}$ را تحمل کند. کودکی یک سنگ ۰/۳۷ کیلوگرمی را به یک سر این ریسمان می‌بندد و سر دیگرش را به دست می‌گیرد، سنگ را در یک دایره‌ی قائم به شعاع $۰/۹۱ \mathrm{m}$ می‌چرخاند و تندی آن را به آرامی افزایش می‌دهد تا ریسمان پاره شود. (الف) در لحظه‌ی پاره شدن ریسمان، سنگ در کجای مسیر خود قرار دارد؟ (ب) تندی سنگ در لحظه‌ی پاره شدن ریسمان چقدر است؟

۱۰۴ یک سورتمه‌ی چهار نفره‌ی مسابقه (با جرم کل $۶۳۰ \mathrm{kg}$) از لحظه‌ی شروع مسابقه در یک مسیر مستقیم به سوی پایین حرکت می‌کند. طول مسیر $۸۰/۰ \mathrm{m}$ و زاویه‌ی شیب ثابت مسیر نسبت به افق ۱۰/۲ درجه است. فرض کنید اثرهای ترکیبی اصطکاک و پَسار هوا یک نیروی ثابت $۶۲/۰ \mathrm{N}$ را به طور موازی با سطح شیب‌دار و به سمت بالای شیب به سورتمه وارد می‌کنند. به پرسش‌های زیر تا سه رقم با معنی پاسخ دهید. (الف) اگر سورتمه در لحظه‌ی شروع مسابقه دارای تندی $۶/۲۰ \mathrm{m/s}$ باشد، چه مدت طول می‌کشد تا از این مسیر

مستقیم پایین بیاید؟ (ب) فرض کنید افراد سوار شده بر سورتمه می‌توانند اثرهای اصطکاک و پسار هوا را به $42/0\,N$ کاهش دهند. به ازای همان تندی آغازی، چه مدت طول می‌کشد تا سورتمه مسیر را بپیماید؟

۱۰۵ وقتی یک جسم ۴۰ نیوتونی از سطح شیب‌داری با زاویه‌ی شیب ۲۵ درجه نسبت به افق به پایین می‌لغزد، شتابش $0/80\,m/s^2$ و به سمت بالای سطح است. ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و سطح شیب‌دار چقدر است؟

ب

فصل ۷

انرژی جنبشی و کار

۷–۱ انرژی جنبشی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۷–۱ رابطه‌ی میان انرژی جنبشی یک ذره، جرم و تندی آن را به کار ببرید.

۷–۲ مشخص کنید که انرژی جنبشی کمیتی نرده‌ای است.

نکته‌های کلیدی

● انرژی جنبشی K، مربوط به حرکت ذره‌ای به جرم m و تندی v، که v بسیار کمتر از تندی نور است، برابر است با

$$K = \frac{۱}{۲} m v^{۲} \quad \text{(انرژی جنبشی)}$$

فیزیک در این باره چه می‌گوید؟

یکی از هدف‌های بنیادی فیزیک بررسی چیزی به نام **انرژی** است که همه درباره‌ی آن حرف می‌زنند. اهمیت این موضوع بدیهی به نظر می‌رسد. در واقع، تمدن امروزی ما مبتنی بر کسب انرژی و کاربرد مفید آن است.

برای مثال، هر کسی می‌داند که هر نوع حرکتی به انرژی نیاز دارد: پرواز بر فراز اقیانوس آرام نیازمند انرژی است. بردن وسایل به طبقه‌ی بالای یک ساختمان اداری، یا به یک ایستگاه فضایی در حال دوران، به انرژی نیاز دارد. پرتاب کردن یک توپ هم به انرژی نیاز دارد. ما برای به دست آوردن و صرف کردن انرژی پول زیادی خرج می‌کنیم. جنگ‌ها به خاطر منابع انرژی آغاز شده‌اند و به خاطر مصرف بسیار زیاد و ناگهانی انرژی توسط یکی از طرف‌های درگیر، پایان یافته‌اند. هر کسی درباره‌ی انرژی و کاربرد آن مثال‌های زیادی می‌داند، اما به راستی معنی واژه‌ی ***انرژی*** چیست؟

انرژی چیست؟

اصطلاح ***انرژی*** چنان گسترده است که ارائه‌ی یک تعریف روشن برای آن مشکل است. از نظر فیزیکی انرژی کمیتی نرده‌ای است که به حالت (یا شرایط) یک یا چند شیء وابسته است. اما این تعریف مبهم‌تر از آن است که برای دانستن انرژی بتواند به ما کمکی بکند.

در اینجا با بیانی نه چندان دقیق می‌توان تعریفی از انرژی ارائه داد. انرژی کمیتی است که به یک دستگاه شامل یک یا چند شیء وابسته است. اگر نیرویی یکی از این اشیا را تغییر دهد، مثلاً آن را به حرکت در آورد، مقدار این انرژی تغییر می‌کند. دانشمندان و مهندسان پس از انجام دادن آزمایش‌های بی‌شمار دریافته‌اند که اگر طرح‌های نسبت داده شده به این مقادیر انرژی با دقت برنامه‌ریزی شوند، برای پیشگویی نتیجه‌های آزمایش‌ها، و حتی مهم‌تر از آن، ساختن ماشین‌ها، مانند ماشین‌های پرنده، می‌توان آن‌ها را به کار برد. این موفقیت مبتنی بر ویژگی شگفت‌آور جهان ماست: انرژی را می‌توان از نوعی به دیگر تبدیل و از جسمی به جسم دیگر منتقل کرد، اما مقدار کل آن همیشه یکسان است (***انرژی پایسته است***). برای این ***اصل پایستگی انرژی*** تاکنون هیچ استثنایی پیدا نشده است.

پول. انوع انرژی‌ها را می‌توان مانند عددهای نشان دهنده‌ی پول موجود در انواع گوناگون حساب‌های بانکی در نظر گرفت. برای پاسخ‌گویی به این پرسش که این عددها چه معنایی دارند و چگونه می‌توان آن‌ها را مبادله کرد، قاعده‌هایی وضع شده است. شما می‌توانید عددهای پول را از حسابی به حساب دیگر یا از سیستمی به سیستم دیگر تبدیل کنید و این کار را می‌توان به‌صورت الکترونیکی و بدون هیچ چیز مادی انجام داد. به هر حال، مبلغ کل (کل عددهای نشان دهنده‌ی پول) را همیشه می‌توان در حساب داشت: این کمیت همیشه پایسته است.

در این فصل توجه خود را فقط به یک نوع انرژی (***انرژی جنبشی***) و فقط به یک راه مربوط به انتقال انرژی (***کار***) معطوف می‌کنیم.

انرژی جنبشی

انرژی جنبشی K، انرژی‌ای است که ***به حالت حرکت*** یک شیء وابسته است. هر چه سرعت شیئی بیشتر باشد، انرژی جنبشی آن شیء بیشتر است. وقتی شیئی ساکن است، انرژی جنبشی آن صفر است.

برای شیئی به جرم m که تندی آن v، بسیار کمتر از تندی نور است، انرژی جنبشی چنین تعریف می‌شود

$$K = \frac{۱}{۲} m v^{۲} \quad \text{(انرژی جنبشی)} \qquad (۷-۱)$$

مثلاً، اردکی به جرم $۳٫۰\,\mathrm{kg}$ که با تندی $۲٫۰\,\mathrm{m/s}$ پرواز می‌کند، دارای انرژی جنبشی

$6.0\,kg\cdot m^2/s^2$ است، و این، عددی است که به حرکت اردک نسبت داده می‌شود.

یکای انرژی جنبشی (و هر نوع انرژی دیگر) در دستگاه SI، **ژول** (با نماد J) است، که به افتخار **جیمز پرسکات ژول**[1]، دانشمند انگلیسی دهه‌های ۱۸۰۰ میلادی، نام‌گذاری شده است. یک ژول با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۱ برحسب یکاهای جرم و سرعت چنین تعریف می‌شود:

$$\text{یک ژول} = 1\,J = 1\,kg\cdot m^2/s^2 \qquad (۷-۲)$$

بنابراین، انرژی جنبشی اردک در حال پرواز $6.0\,J$ است.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۷-۱ انرژی جنبشی، خرد شدن قطار

در سال ۱۸۹۶/۱۲۷۵، در واکو[2] تکزاس، ویلیام کراش[3] دو لوکوموتیو را در روی خط آهن به فاصله‌ی $6.4\,km$ به طور ناهمسو قرار داد. سپس، در حضور ۳۰۰۰۰ تماشاگر با روشن کردن و باز گذاشتن شیر کنترل بخار، لوکوموتیوها را با آخرین سرعت به حرکت درآورد تا به طور شاخ به شاخ به هم برخورد کنند (شکل ۷-۱). در این حادثه صدها نفر از مردم در اثر پراکنده شدن تکه‌پاره‌های آهن در هوا مجروح شدند و چند نفر هم جان خود را از دست دادند. با فرض آنکه وزن هر لوکوموتیو $1.2\times10^6\,N$ و شتاب حرکت آن‌ها مقدار ثابت $0.26\,m/s^2$ بوده باشد، انرژی جنبشی کل دو لوکوموتیو درست پیش از برخورد چقدر بوده است؟

نکته‌های کلیدی

(۱) باید انرژی جنبشی لوکوموتیو را با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۱ پیدا کنیم، اما برای این کار باید جرم هر لوکوموتیو و نیز تندی آن درست در لحظه‌ی پیش از برخورد معلوم باشد. (۲) چون شتاب لوکوموتیوها را ثابت فرض کردیم، برای پیدا کردن v، تندی هر لوکوموتیو درست پیش از برخورد، می‌توان از معادله‌های جدول ۲-۱ استفاده کرد.

محاسبات: برای این کار، معادله‌ی ۲-۱۶ مناسب است، زیرا مقادیر تمام متغیرها به جز v، معلوم‌اند:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

به ازای $v_0 = 0$ و $x - x_0 = 3.2\times10^3\,m$ (نصف فاصله‌ی آغازی دو لوکوموتیو)، خواهیم داشت

$$v^2 = 0 + 2(0.26\,m/s^2)(3.2\times10^3\,m)$$

یا

$$v = 40.8\,m/s = 147\,km/h$$

جرم هر لوکوموتیو را از تقسیم کردن وزن لوکوموتیو بر g می‌توان به دست آورد:

$$m = \frac{1.2\times10^6\,N}{9.8\,m/s^2} = 1.22\times10^5\,kg$$

شکل ۷-۱ تصویر صحنه‌ای از پیامد برخورد دو لوکوموتیو در سال ۱۸۹۶/۱۲۷۵.

1. James Prescott Joule 2. Waco 3. William Crush

اکنون، با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۱، انرژی جنبشی کل دو لوکوموتیو را درست پیش از برخورد پیدا می‌کنیم. داریم

$$K = ۲(\frac{۱}{۲}mv^۲) = (۱/۲۲\times۱۰^۵\text{kg})(۴۰/۸\text{m/s})^۲ \Rightarrow$$

$$K = ۲/۰\times۱۰^۸\text{J}$$ **(پاسخ)**

حاضر بودن در حوالی چنین تصادفی مانند حضور در حوالی یک بمب در حال انفجار است.

۲-۷ کار و انرژی جنبشی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۷-۳ رابطه‌ی میان یک نیرو (بزرگی و جهت) و کار انجام شده روی یک ذره توسط آن نیرو را در هنگام جابه‌جا شدن ذره به‌کار ببرید.

۷-۴ کار را از حاصل‌ضرب نقطه‌ای بردار نیرو و بردار جابه‌جایی، به‌صورت نمادگذاری بزرگی ـ زاویه، یا بردارهای یکه، حساب کنید.

۷-۵ اگر چند نیرو به یک ذره وارد شوند، کار خالص انجام شده توسط آن‌ها را حساب کنید.

۷-۶ قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی را برای ربط دادن کار انجام شده توسط یک نیرو (یا کار خالص انجام شده توسط چند نیرو) و تغییر حاصل در انرژی جنبشی، به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

- کار W، مقدار انرژی داده شده، یا گرفته شده از یک شیء، توسط نیروی وارد شده به آن شیء است. انرژی داده شده به شیء کار مثبت و انرژی گرفته شده از آن، کار منفی است.
- کار انجام شده روی یک ذره توسط نیروی ثابت $\vec{F}$ در جابه‌جایی $\vec{d}$ برابر است با

$$W = Fd\cos\phi = \vec{F}\cdot\vec{d} \quad \text{(کار، نیروی ثابت)}$$

که در آن ϕ زاویه‌ی ثابت میان راستاهای $\vec{F}$ و $\vec{d}$ است.

- تنها مؤلفه‌ای از $\vec{F}$ که در راستای جابه‌جایی $\vec{d}$ وجود دارد می‌تواند بر روی شیء کار انجام دهد.
- وقتی دو یا چند نیرو به یک شیئی وارد می‌شوند، کار خالص آن‌ها برابر با مجموع کارهای فردی انجام شده توسط نیروهاست، که هم‌چنین، برابر است با کاری که توسط نیروی برایند این نیروها $\vec{F}_{\text{net}}$، روی آن شیء انجام می‌شود.
- برای یک ذره، تغییر انرژی جنبشی ΔK، با W، کار خالص انجام شده روی ذره برابر است:

$$\Delta K = K_f - K_i = W \quad \text{(قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی)}$$

که در آن K_i انرژی جنبشی آغازی ذره و K_f انرژی جنبشی ذره پس از انجام شدن کار است. پس از بازآرایی معادله‌ی بالا، داریم

$$K_f = K_i + W$$

کار

اگر با وارد کردن نیرو به یک شیء تندی آن را زیاد کنیم، انرژی جنبشی شیء K (مساوی با $\frac{۱}{۲}mv^۲$) افزایش می‌یابد. هم‌چنین، اگر با وارد کردن نیرو به یک شیء تندی آن را کم کنیم، انرژی جنبشی شیء کاهش پیدا می‌کند. این تغییرات انرژی جنبشی را با گفتن اینکه نیروی ما انرژی را ***از ما به شیء*** یا ***از شیء به ما*** انتقال می‌دهد، توجیه می‌کنیم.

در این انتقال انرژی از طریق نیرو، گفته می‌شود کـه **کار** W ***توسط نیرو روی شیء انجام شده است***. به بیان صوری‌تر کار چنین تعریف می‌شود:

کار W انرژی‌ای است که با وارد کردن نیرو به یک شیء به آن داده یا از آن گرفتـه می‌شود. کار مربوط به انرژی داده شده به شیء مثبت و کار مربوط به انرژی گرفته شده از شیء منفی است.

بنابراین، «کار» همان انرژی منتقل شده است و «انجام دادن کـار»، عمـل انتقـال انـرژی اسـت. یکاهای کار همان یکاهای انرژی‌اند و ***کار کمیتی نرده‌ای است***.

واژه‌ی ***انتقال*** ممکن است گمراه کننده باشد. معنی انتقال این نیست کـه چیـزی مـادی بـه شیء وارد یا از آن خارج می‌شود؛ یعنی، انتقال ماننـد جریـان آب نیسـت، بلکـه ماننـد انتقـال الکترونیکی پول در میان دو حساب بانکی است: رقم موجودی در یک حساب بالا مـی‌رود، در حالی که رقم موجودی در حساب دیگر پایین می‌آید، بدون آنکه هیچ چیز مادی در میان آن دو حساب رد و بدل شود.

توجه کنید که در اینجا معنی عام واژه‌ی «کار» که تأکید بر هر تلاش فیزیکی یا ذهنی دارد، مورد نظر نیست. برای مثال، هنگامی که دیواری را به سختی فشار می‌دهیم بـه خـاطر انقبـاض مکرر و دائمی عضلات خسته می‌شویم و احساس ما می‌گوید که کار انجام می‌دهـیم. امـا ایـن تلاش باعث انتقال انرژی از ما به دیوار یا از دیوار به ما نمی‌شود و در نتیجه، بنا به تعریفی کـه بیان شد کاری روی دیوار انجام نشده است.

برای جلوگیری از اشتباه در این فصل، از نماد W فقط برای کار استفاده می‌کنیم و وزن را با هم‌ارز آن mg نشان می‌دهیم.

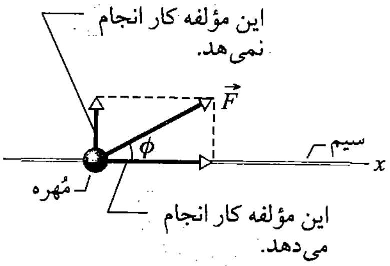
کار و انرژی جنبشی

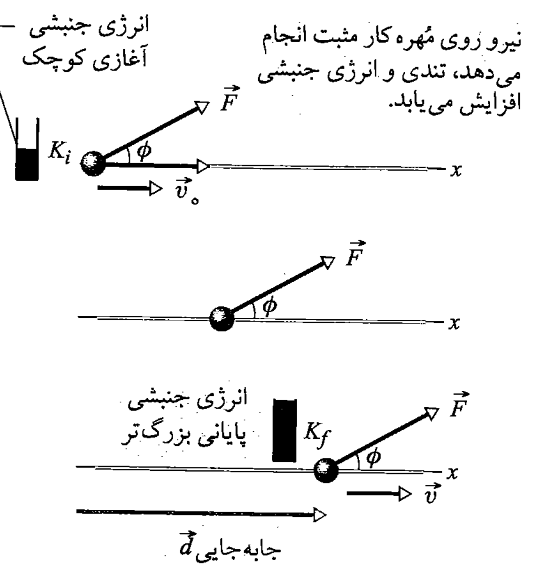
پیدا کردن رابطه‌ی کار

اکنون می‌خواهیم برای مُهره‌ای که در طول یک سیم بی‌اصـطکاک مـی‌توانـد بلغـزد و سـیم در راستای محور افقی x کشیده شده است (شکل ۷-۲) رابطه‌ی مربوط به کار را به دست آوریم. نیروی ثابت $\vec{F}$ تحت زاویه‌ی ϕ نسبت به سیم، در راستای سیم به مُهره شـتاب مـی‌دهـد. بـا استفاده کردن از قانون دوم نیوتون برای مؤلفه‌های x، رابطه‌ی میان نیرو و شـتاب را مـی‌تـوان چنین نوشت:

$$F_x = ma_x \qquad (۷-۳)$$

که در آن m جرم مُهره است. وقتی مُهره جابه‌جایی $\vec{d}$ را انجام مـی‌دهـد، نیـروی وارد شـده سرعت مُهره را از مقدار آغازی $\vec{v}_0$ به مقدار دیگر $\vec{v}$ تغییر می‌دهـد. چـون نیـرو ثابـت اسـت شتاب هم ثابت است. بنابراین، برای مؤلفه‌های مربوط به محور x با استفاده کردن از معادله‌ی





شکل ۷-۲ نیروی ثابت $\vec{F}$ تحت زاویه‌ی ϕ در راستای سیم به مُهره شتاب می‌دهد و مُهره به اندازه‌ی $\vec{d}$ جابه‌جا می‌شود. در نتیجه، سرعت مُهره از $\vec{v}_\circ$ به $\vec{v}$ تغییر می‌کند. در شکل، «پیمانه‌ی انرژی جنبشی» تغییر انرژی جنبشی مُهره را از مقدار K_i به مقدار K_f نشان می‌دهد.

$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = w_{net} = Fd$

مؤلفه‌ای از نیرو کار انجام می‌دهد که در جهت جابجایی باشد.

۲-۱۶ می‌توان نوشت

$$v^2 = v_\circ^2 + 2a_x d \qquad (۷-۴)$$

این معادله را نسبت به a_x حل و آن را در معادله‌ی ۷-۳ جانشانی می‌کنیم. پس از بازآرایش معادله‌ی حاصل، داریم

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_\circ^2 = F_x d \qquad (۷-۵)$$

در سمت چپ این معادله، جمله‌ی اول انرژی جنبشی مُهره، K_f، در پایان جابه‌جایی d و جمله‌ی دوم انرژی جنبشی مُهره، K_i، در آغاز جابه‌جایی است. بنابراین، سمت چپ معادله‌ی ۷-۵ مقدار تغییر انرژی جنبشی توسط نیرو را نشان می‌دهد و سمت راست معادله نشان می‌دهد که این تغییر برابر با $F_x d$ است. پس، W کار انجام شده روی مُهره توسط نیرو (انرژی منتقل شده در اثر نیرو) برابر است با

$$W = F_x d \qquad (۷-۶)$$

اگر مقادیر F_x و d معلوم باشند، با استفاده کردن از این معادله می‌توان W، کار انجام شده توسط نیرو روی مُهره را حساب کرد.

چون جابجایی با ... عمود است پس تأثیری در جابجایی نمی‌گذارد
$F.S = F.S.\cos 90^\circ = 0$

برای محاسبه‌ی کار انجام شده روی یک شیء توسط نیرو در حین جابه‌جایی شیء، فقط از مؤلفه‌ی نیرو در راستای جابه‌جایی استفاده می‌کنیم. مؤلفه‌ی عمود بر راستای جابه‌جایی نیرو کاری انجام نمی‌دهد.

با توجه به شکل ۷-۲، می‌بینیم که F_x را می‌توان به صورت $F\cos\phi$ نوشت، که در آن ϕ زاویه‌ی میان راستاهای جابه‌جایی $\vec{d}$ و نیروی $\vec{F}$ است. در حالت کلی، معادله‌ی ۷-۶ را

می‌توان چنین نوشت

$$W = Fd\cos\phi \quad \text{(کار انجام شده توسط نیروی ثابت)} \qquad (۷-۷)$$

با استفاده کردن از تعریف ضرب نرده‌ای (ضرب نقطه‌ای) (معادله‌ی ۳-۲۰) می‌توان نوشت

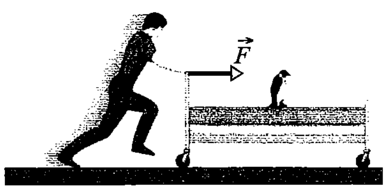
$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} \quad \text{(کار انجام شده توسط نیروی ثابت)} \qquad (۸-۷)$$

که در آن F بزرگی نیروی $\vec{F}$ است. (بهتر است بحث مربوط به حاصل‌ضرب نرده‌ای در پودمان ۳-۳ را مرور کنید). معادله‌ی ۷-۸ برای محاسبه‌ی کار، به ویژه، در حالتی مفید است که $\vec{F}$ و $\vec{d}$ به صورت نمادگذاری بردارهای یکه معرفی شوند.

هشدار: هنگام استفاده کردن از معادله‌های ۷-۶ تا ۷-۸ برای محاسبه‌ی کار انجام شده توسط نیرو روی یک شیء دو محدودیت وجود دارد. نخست، ***نیرو باید ثابت باشد***؛ یعنی در حین حرکت کردن شیء بزرگی و جهت نیرو نباید تغییر کند. (بعداً درباره‌ی نیروی متغیر که بزرگی‌اش تغییر می‌کند، بحث خواهیم کرد). دوم، ***شیء باید ذره مانند باشد.*** منظور این است که شیء باید ***صُلب*** باشد و همه‌ی بخش‌های آن با هم و در یک جهت حرکت کنند. در این فصل فقط اشیای ذره مانند شبیه تختخواب و پنگوئن روی آن را که در شکل ۷-۳ هُل داده می‌شوند، در نظر می‌گیریم.

علامت کار. کار انجام شده روی یک شیء توسط نیرو می‌تواند مثبت یا منفی باشد. برای مثال، اگر در معادله‌ی ۷-۷ زاویه‌ی ϕ کمتر از ۹۰ درجه باشد، $\cos\phi$ مثبت و در نتیجه، کار انجام شده هم مثبت است. اگر ϕ بیشتر از ۹۰ درجه (تا ۱۸۰ درجه) باشد، $\cos\phi$ منفی و کار انجام شده نیز منفی است. (آیا توجه دارید که به ازای $\phi = ۹۰^\circ$ کار صفر است؟). این نتیجه‌ها به یک قاعده‌ی ساده منجر می‌شوند. برای تعیین علامت کار انجام شده توسط یک نیرو، مؤلفه‌ی برداری نیرو در راستای جابه‌جایی را در نظر بگیرید:

نیرو هنگامی کار مثبت انجام می‌دهد که یک مؤلفه‌ی برداری همسو با جابه‌جایی و هنگامی کار منفی انجام می‌دهد که یک مؤلفه‌ی برداری ناهمسو با جابه‌جایی، داشته باشد. کار نیرو هنگامی صفر است که چنین مؤلفه‌ی برداری‌ای وجود نداشته باشد.



شکل ۷-۳ نمایش طرحی از مسابقه‌ی تختخواب‌رانی. برای محاسبه‌ی کاری که نیروی دانشجو روی تختخواب و پنگوئن روی آن انجام می‌دهد، می‌توان مجموع آن‌ها را، به‌تقریب، به صورت یک ذره در نظر گرفت.

یکاهای کار. یکای کار در دستگاه یکاهای SI، مانند یکای انرژی جنبشی، **ژول** است. اما با توجه به معادله‌های ۷-۶ و ۷-۷ می‌توان دید که یکای هم‌ارز دیگر کار **نیوتون ـ متر** (با نماد $\mathrm{N\cdot m}$) است. یکای کار در دستگاه بریتانیایی، **فوت ـ پوند** (با نماد $\mathrm{ft\cdot lb}$) است. با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۲، داریم

$$۱\,\mathrm{J} = ۱\,\mathrm{kg\cdot m^۲/s^۲} = ۱\,\mathrm{N\cdot m} = ۰/۷۳۸\,\mathrm{ft\cdot lb} \qquad (۹-۷)$$

کار خالص. وقتی دو یا چند نیرو به شیئی اثر می‌کنند **کار خالص** انجام شده روی شیء

برابر با مجموع کارهای انجام شده توسط هر یک از نیروهاست. کار خالص را به دو طریق می‌توان حساب کرد. (۱) کار انجام شده توسط هر یک از نیروها را معین و سپس آن‌ها را باهم جمع کنیم. (۲) راه دیگر آن است که، ابتدا نیروی برایند $\vec{F}_{\text{net}}$، این چند نیرو را پیدا کنیم. سپس، از معادله‌ی ۷-۷ با قرار دادن بزرگی F_{net} به جای F، و جانشانی زاویه‌ی ϕ میان راستاهای $\vec{F}_{\text{net}}$ و جابه‌جایی، یا، از معادله‌ی ۷-۸ با قرار دادن $\vec{F}_{\text{net}}$ به جای $\vec{F}$، استفاده کنیم.

قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی

معادله‌ی ۷-۵، تغییر انرژی جنبشی مُهره (از مقدار آغازی $K_i = \frac{1}{2}mv_0^2$ تا مقدار پایانی $K_f = \frac{1}{2}mv^2$) را به W (مساوی با $F_x d$)، کار انجام شده روی مُهره ربط می‌دهد. برای اشیای ذره مانند معادله‌ی یاد شده را می‌توان تعمیم داد. فرض کنید ΔK تغییر انرژی جنبشی شیء و W کار انجام شده روی آن باشد. در این صورت، می‌توان نوشت

$$\Delta K = K_f - K_i = W \tag{۷-۱۰}$$

که نشان می‌دهد:

(کار خالص انجام شده روی ذره) = (تغییر انرژی جنبشی یک ذره)

هم‌چنین، می‌توان نوشت

$$K_f = K_i + W \tag{۷-۱۱}$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 + F_x d$$

که نشان می‌دهد:

(انرژی جنبشی پس از انجام شدن کار خالص) = (انرژی جنبشی پیش از انجام شدن کار خالص) + (کار خالص انجام شده)

این گزاره‌ها بنابر سنت، **قضیه‌ی کار ـ انرژی** مربوط به ذرات را بیان می‌کنند. قضیه‌ی کار ـ انرژی برای کارهای مثبت و منفی، هر دو، معتبر است. کار خالص انجام شده روی یک ذره، اگر مثبت باشد، انرژی جنبشی ذره به اندازه‌ی کار انجام شده افزایش و اگر منفی باشد، انرژی جنبشی ذره به اندازه‌ی کار انجام شده کاهش، می‌یابد.

به عنوان مثال، اگر انرژی جنبشی ذره‌ای در آغاز ۵ J و انتقال خالص انرژی به ذره ۲ J (کار خالص مثبت) باشد، انرژی جنبشی پایانی ذره ۷ J خواهد بود. اما اگر انتقال خالص انرژی از ذره ۲ J (کار خالص منفی) باشد، انرژی جنبشی پایانی ذره ۳ J خواهد بود.

☑ خودآزمایی ۱

ذره‌ای در راستای محور x حرکت می‌کند. اگر سرعت ذره، (الف) از $-۳\,\text{m/s}$ به $-۲\,\text{m/s}$ و (ب) از $-۲\,\text{m/s}$ به $۲\,\text{m/s}$، تغییر کند، آیا انرژی جنبشی ذره افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟ (پ) در هر حالت، آیا کار انجام شده روی ذره مثبت است، منفی است، یا صفر است؟

مسئله‌ی نمونه‌ی ۷-۲ کار انجام شده توسط دو نیروی ثابت، جاسوس‌های صنعتی

در شکل ۷-۴ الف، دو مأمور مخفی یک گاوصندوق ۲۲۵ کیلوگرمی را که در آغاز ساکن است، به اندازه‌ی جابه‌جایی $\vec{d}$ به بزرگی ۸/۵۰m در روی یک سطح افقی به سمت کامیونی می‌لغزانند. مأمور ۰۰۱ گاوصندوق را با نیروی $\vec{F}_1$ به بزرگی ۱۲/۰N تحت زاویه‌ی ۳۰/۰ درجه پایین‌سوی افقی هُل می‌دهد و مأمور ۰۰۲ گاوصندوق را با نیروی $\vec{F}_2$ به بزرگی ۱۰/۰N تحت زاویه‌ی ۴۰/۰ درجه بالاسوی افقی، می‌کشد. بزرگی و جهت این نیروها در حین حرکت کردن صندوق تغییر نمی‌کند و تماس سطح با گاوصندوق بی‌اصطکاک است.

(الف) کار خالص انجام شده روی گاوصندوق توسط نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ در طی جابه‌جایی $\vec{d}$ چیست؟

نکته‌های کلیدی

(۱) کار خالص انجام شده W، روی گاوصندوق توسط دونیرو، برابر با مجموع کارهایی است که هر یک از دو نیرو انجام می‌دهند. (۲) گاوصندوق را می‌توان به صورت یک ذره در نظر گرفت و بزرگی و جهت نیروها هم ثابت‌اند. پس، برای محاسبه‌ی کار نیروها می‌توان از معادله‌ی ۷-۷ $(W = Fd\cos\phi)$، یا معادله‌ی ۷-۸ $(W = \vec{F}\cdot\vec{d})$ استفاده کرد. چون بزرگی و جهت نیروها را می‌دانیم، برای این کار معادله‌ی ۷-۷ را انتخاب می‌کنیم.

محاسبات: با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۷ و با توجه به نمودار جسم ـ آزاد مربوط به گاوصندوق در شکل ۷-۴ ب، کار انجام شده توسط $\vec{F}_1$ برابر است با

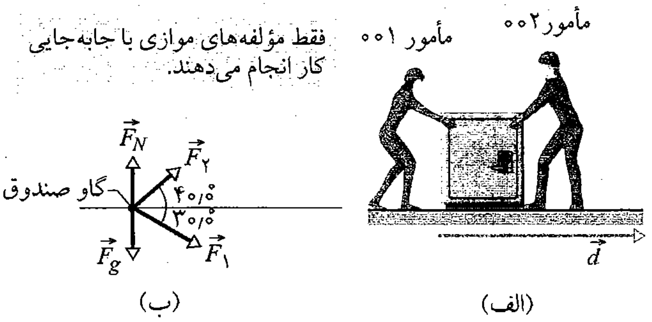
$$W_1 = F_1 d\cos\phi_1 = (۱۲/۰\,\mathrm{N})(۸/۵۰\,\mathrm{m})(\cos ۳۰/۰^\circ) \Rightarrow$$
$$W_1 = ۸۸/۳۳\,\mathrm{J}$$

و کار انجام شده توسط $\vec{F}_2$ برابر است با

$$W_2 = F_2 d\cos\phi_2 = (۱۰/۰\,\mathrm{N})(۸/۵۰\,\mathrm{m})(\cos ۴۰/۰^\circ) \Rightarrow$$
$$W_2 = ۶۵/۱۱\,\mathrm{J}$$

بنابراین، کار خالص W برابر است با

$$W = W_1 + W_2 = ۸۸/۳۳\,\mathrm{J} + ۶۵/۱۱\,\mathrm{J} \Rightarrow$$
(پاسخ) $$W = ۱۵۳/۴\,\mathrm{J} \approx ۱۵۳\,\mathrm{J}$$



شکل ۷-۴ (الف) دو مأمور مخفی گاوصندوقی را در طی جابه‌جایی $\vec{d}$ حرکت می‌دهند. (ب) نمودار جسم ـ آزاد مربوط به گاوصندوق.

پس، دو مأمور با جابه‌جا کردن گاوصندوق به اندازه‌ی ۸/۵۰m انرژی ۱۵۳J را به انرژی جنبشی گاوصندوق تبدیل می‌کنند.

(ب) در حین جابه‌جایی، W_g کار انجام شده روی گاوصندوق توسط نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ و W_N، کار انجام‌شده روی گاوصندوق توسط نیروی عمودی $\vec{F}_N$ ناشی از سطح، چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

چون نیروها از نظر بزرگی و جهت ثابت‌اند، کار انجام شده توسط آن‌ها را می‌توان با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۷ به دست آورد.

محاسبات: بنابراین، چون mg بزرگی نیروی گرانشی است، داریم

$$W_g = mgd\cos ۹۰^\circ = mgd(۰) \Rightarrow$$
(پاسخ) $$W_g = ۰$$

و

$$W_N = F_N d\cos ۹۰^\circ = F_N d(۰) \Rightarrow$$
(پاسخ) $$W_N = ۰$$

این نتیجه‌ها را باید از پیش می‌دانستیم. چون این نیروها بر جابه‌جایی گاوصندوق عمودند، کاری که روی گاوصندوق انجام می‌دهند صفر است و با گاوصندوق هیچ‌گونه انرژی‌ای مبادله نمی‌کنند.

(پ) گاوصندوق در آغاز ساکن است. تندی آن، در پایان جابه‌جایی ۸/۵۰m چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

چون نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ به گاوصندوق انرژی منتقل می‌کنند و انرژی آن را تغییر می‌دهند، تندی گاوصندوق تغییر می‌کند.

محاسبات: با ترکیب کردن معادله‌های ۷-۱۰ (قضیه‌ی کار - انرژی جنبشی) و ۷-۱ (تعریف انرژی جنبشی)، رابطه‌ی تندی با کار چنین به دست می‌آید:

$$W = K_f - K_i = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ - \frac{۱}{۲}mv_i^۲$$

تندی آغازی v_i صفر است، و می‌دانیم که کار انجام شده ۱۵۳٫۴J است. پس، با حل کردن معادله‌ی بالا نسبت به v_f و جانشانی داده‌های معلوم، داریم

$$v_f = \sqrt{\frac{۲W}{m}} = \sqrt{\frac{۲(۱۵۳٫۴\,\mathrm{J})}{۲۲۵\,\mathrm{kg}}} \Rightarrow$$

$$v_f = ۱٫۱۷\,\mathrm{m/s} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

مسئله‌ی نمونه‌ی ۷-۳ کار انجام شده توسط نیروی ثابت به صورت نمادگذاری بردارهای یکه

در یک روز توفانی صندوق محتوی پارچه‌ای روی کف روغنی و لیز پارکینگی لغزانده می‌شود و در حالی که صندوق جابه‌جایی $\vec{d} = (-۳٫۰\,\mathrm{m})\,\hat{\mathrm{i}}$ را انجام می‌دهد باد با نیروی

$$\vec{F} = (۲٫۰\,\mathrm{N})\,\hat{\mathrm{i}} + (-۶٫۰\,\mathrm{N})\,\hat{\mathrm{j}}$$

با حرکت صندوق مخالفت می‌کند. وضعیت حرکت صندوق و محورهای مختصات در شکل ۷-۵ نشان داده شده‌اند.

(الف) نیروی باد در حین جابه‌جایی صندوق چه کاری انجام می‌دهد؟

نکته‌ی کلیدی

چون صندوق را می‌توان یک ذره در نظر گرفت و نیروی باد نیز از نظر بزرگی و جهت در طول جابه‌جایی ثابت (پایا) است، برای محاسبه‌ی کار از معادله‌ی ۷-۷ $(W = Fd\cos\phi)$ یا معادله‌ی ۷-۸ $(W = \vec{F}\cdot\vec{d})$ استفاده می‌کنیم. چون $\vec{F}$ و $\vec{d}$ به صورت بردارهای یکه معلوم‌اند، معادله‌ی ۷-۸ را انتخاب می‌کنیم.

محاسبات: می‌توانیم بنویسیم

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = [(۲٫۰\,\mathrm{N})\,\hat{\mathrm{i}} + (-۶٫۰\,\mathrm{N})\,\hat{\mathrm{j}}]\cdot[(-۳٫۰\,\mathrm{m})\,\hat{\mathrm{i}}]$$

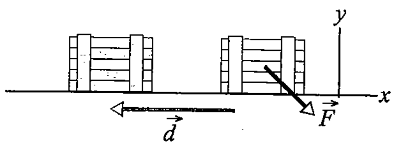
از حاصل‌ضرب‌های ممکن بردارهای یکه، فقط $\hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{i}}$، $\hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{j}}$ و $\hat{\mathrm{k}}\cdot\hat{\mathrm{k}}$ ناصفرند (پیوست ث پایان کتاب را ببینید). بنابراین، داریم

$$W = (۲٫۰\,\mathrm{N})(-۳٫۰\,\mathrm{m})\,\hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{i}} + (-۶٫۰\,\mathrm{N})(-۳٫۰\,\mathrm{m})\,\hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{i}} \Rightarrow$$

$$W = (-۶٫۰\,\mathrm{J})(۱) + ۰ \Rightarrow$$

$$W = -۶٫۰\,\mathrm{J} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

مؤلفه‌ی موازی با سطح نیرو کار *منفی* انجام می‌دهد و حرکت صندوق را کُند می‌کند.



شکل ۷-۵ نیروی $\vec{F}$ حرکت صندوق را در طی جابه‌جایی $\vec{d}$ کُند می‌کند.

پس، نیرو به اندازه‌ی ۶٫۰J روی صندوق کار منفی انجام می‌دهد، یعنی ۶٫۰J انرژی جنبشی از صندوق گرفته می‌شود.

(ب) اگر انرژی جنبشی صندوق در آغاز جابه‌جایی $\vec{d}$ برابر با ۱۰J باشد، انرژی جنبشی آن در پایان جابه‌جایی $\vec{d}$ چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

چون نیرو روی صندوق کار منفی انجام می‌دهد، انرژی جنبشی صندوق را کم می‌کند.

محاسبه: با استفاده کردن از قضیه‌ی کار - انرژی به صورت معادله‌ی ۷-۱۱، داریم

$$K_f = K_i + W = ۱۰\,\mathrm{J} + (-۶٫۰\,\mathrm{J}) \Rightarrow$$

$$K_f = ۴٫۰\,\mathrm{J} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

انرژی جنبشی کمتر به این معنی است که تندی صندوق کم شده است.

۳-۷ کار انجام شده توسط نیروی گرانشی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۷-۷ کار انجام شده توسط نیروی گرانشی را در هنگام بالا بردن یا پایین آوردن یک شیء حساب کنید.

۸-۷ قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی را برای حالت‌هایی که شیء بالا برده یا پایین آورده می‌شود، به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

- کار W_g، انجام شده توسط نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ روی یک شیء ذره مانند به جرم m در هنگامی که شیء جابه‌جایی $\vec{d}$ را انجام می‌دهد، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$W_g = mgd\cos\phi$$

که در آن ϕ زاویه‌ی میان $\vec{F}_g$ و $\vec{d}$ است.

- کار W_a، انجام شده توسط یک نیروی وارد شده در هنگام بالا بردن یا پایین آوردن یک شیء ذره مانند، از طریق معادله‌ی زیر با کار W_g، انجام شده توسط نیروی گرانشی و تغییر انرژی جنبشی شیء ΔK، رابطه دارد:

$$\Delta K = K_f - K_i = W_a + W_g$$

به ازای $K_f = K_i$، معادله‌ی بالا به صورت زیر ساده می‌شود

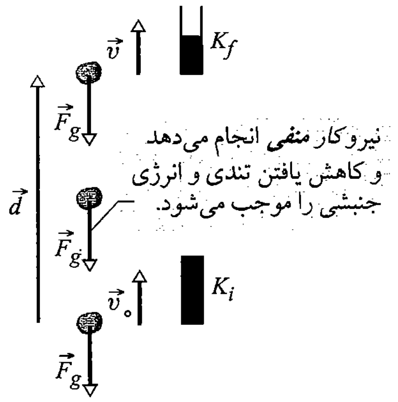
$$W_a = -W_g$$

بنا به این معادله، نیروی وارد شده، به شیء همان اندازه انرژی منتقل می‌کند که نیروی گرانشی از آن می‌گیرد.

کار انجام شده توسط نیروی گرانشی

اکنون، کار انجام شده روی یک شیء توسط نیروی گرانشی وارد شده به شیء، را بررسی می‌کنیم. شکل ۷-۶ یک گوجه‌فرنگی (ذره مانند) به جرم m را نشان می‌دهد که با تندی آغازی v_0 و با انرژی جنبشی آغازی $K_i = \frac{1}{2}mv_0^2$ به طور قائم به بالاسو پرتاب شده است. وقتی گوجه‌فرنگی بالا می‌رود حرکتش توسط نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ کُند می‌شود؛ یعنی به خاطر کاری که $\vec{F}_g$ روی گوجه‌فرنگی انجام می‌دهد انرژی جنبشی آن کم می‌شود. چون گوجه‌فرنگی به‌صورت یک ذره در نظر گرفته می‌شود، برای محاسبه‌ی کار انجام شده در طی جابه‌جایی $\vec{d}$ می‌توان از معادله‌ی ۷-۷ $(W = Fd\cos\phi)$ استفاده کرد. به جای بزرگی F، مقدار mg را که بزرگی $\vec{F}_g$ است، قرار می‌دهیم. در نتیجه، W_g، کار انجام شده توسط نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ برابر است با

$$W_g = mgd\cos\phi \quad \text{(کار انجام شده توسط نیروی گرانشی)} \qquad (۱۲-۷)$$



شکل ۷-۶ یک گوجه فرنگی (ذره مانند) به جرم m که با سرعت $\vec{v}_0$ به بالاسو پرتاب شده است، پس از پیمودن جابه‌جایی $\vec{d}$ به خاطر تأثیر نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ سرعتش به $\vec{v}$ کاهش می‌یابد. پیمانه‌ی انرژی جنبشی تغییر انرژی جنبشی گوجه فرنگی را از K_i (مساوی با $\frac{1}{2}mv_0^2$) به K_f (مساوی با $\frac{1}{2}mv^2$) نشان می‌دهد.

در مورد شیئی که بالا می‌رود، نیروی F_g، مطابق شکل ۷-۶، در جهت مخالف جابه‌جایی $\vec{d}$ وارد می‌شود. بنابراین، به ازای $\phi = 180°$، داریم

$$W_g = mgd\cos 180° = mgd(-1) = -mgd \qquad (۱۳-۷)$$

علامت منفی کار نشان می‌دهد که وقتی شیء بالا می‌رود، نیروی گرانشی وارد شده به آن،

مقدار mgd را از انرژی جنبشی شیء می‌گیرد. این موضوع با کُند شدن حرکت در هنگام بالا رفتن شیء سازگار است.

شیء پس از رسیدن به بیشینه‌ی ارتفاع به پایین سقوط می‌کند و ϕ زاویه‌ی میان نیروی $\vec{F}_g$ و جابه‌جایی $\vec{d}$ صفر می‌شود. بنابراین، می‌توان نوشت

$$W_g = mgd\cos ۰ = mgd(+۱) = +mgd \qquad (۱۴\text{-}۷)$$

علامت مثبت کار نشان می‌دهد که نیروی گرانشی در این حالت مقدار انرژی mgd را به انرژی جنبشی شیء در حال سقوط می‌دهد. (البته که تندی شیء افزایش می‌یابد).

کار انجام شده هنگام بالا بردن و پایین آوردن یک شیء

اکنون، فرض کنید عاملی یک شیء ذره مانند را با وارد کردن نیروی قائم $\vec{F}$ بلند می‌کند. در حین جابه‌جایی بالاسو، نیروی عامل کار مثبت W_a و نیروی گرانشی کار منفی W_g را روی شیء انجام می‌دهد. نیروی عامل به شیء انرژی می‌دهد، اما نیروی گرانشی از شیء انرژی می‌گیرد. با استفاده کردن از معادله‌ی ۷–۱۰ تغییر انرژی جنبشی شیء ΔK در این دو انتقال انرژی برابر است با

$$\Delta K = K_f - K_i = W_a + W_g \qquad (۱۵\text{-}۷)$$

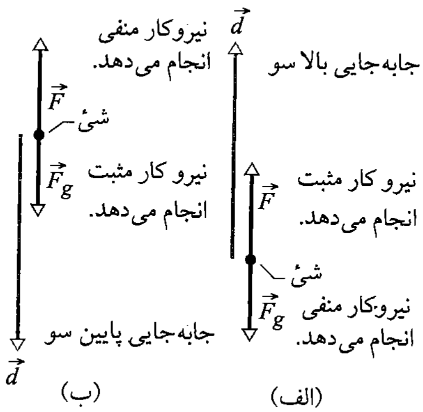
که در آن K_f انرژی جنبشی در پایان و K_i انرژی جنبشی در آغاز جابه‌جایی است. این معادله برای پایین آوردن شیء نیز صادق است. در این حالت، ***نیروی گرانشی به شیء انرژی می‌دهد و نیروی عامل از شیء انرژی می‌گیرد.***

اگر شیء پیش و پس از بالا رفتن ساکن باشد. (مثلاً، وقتی که کتابی را از روی زمین بر می‌داریم و در قفسه قرار می‌دهیم)، K_f و K_i هر دو صفرند. در این حالت، معادله‌ی ۷–۱۵ به صورت زیر ساده می‌شود

$$W_a + W_g = ۰$$

یا

$$W_a = -W_g \qquad (۱۶\text{-}۷)$$



شکل ۷–۷ (الف) نیروی وارد شده‌ی $\vec{F}$، شیئی را بالا می‌برد. جابه‌جایی $\vec{d}$ با نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد شده به شیء زاویه‌ی $\phi = ۱۸۰°$ تشکیل می‌دهد. نیروی وارد شده‌ی F روی شیء کار مثبت انجام می‌دهد. (ب) نیروی وارد شده‌ی $\vec{F}$، شیئی را پایین می‌آورد. جابه‌جایی $\vec{d}$ با نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد شده به شیء زاویه‌ی $\phi = ۰$ تشکیل می‌دهد. نیروی وارد شده‌ی F روی شیء کار منفی انجام می‌دهد.

توجه کنید که اگر K_f و K_i صفر نباشند اما با هم برابر باشند، باز همین نتیجه به دست می‌آید. به هر حال، این نتیجه نشان می‌دهد که کار انجام شده توسط نیروی عامل برابر با کار انجام شده توسط نیروی گرانشی با علامت منفی است؛ یعنی، مقدار انرژی‌ای که نیروی عامل به شیء می‌دهد، با مقدار انرژی‌ای که نیروی گرانشی از شیء می‌گیرد، برابر است. با استفاده کردن از معادله‌ی ۷–۱۲، معادله‌ی ۷–۱۶ را می‌توان چنین نوشت

$$W_a = -mgd\cos\phi \quad (K_f = K_i \text{ ؛کار انجام‌شده برای بالابردن و پایین آوردن شیء}) \qquad (۱۷\text{-}۷)$$

در این معادله ϕ زاویه‌ی میان $\vec{F}_g$ و $\vec{d}$ است. اگر جابه‌جایی در راستای قائم و به بالاسو باشد (شکل ۷–۷ الف) داریم $\phi = ۱۸۰°$ و کاری که نیروی عامل انجام می‌دهد، mgd است.

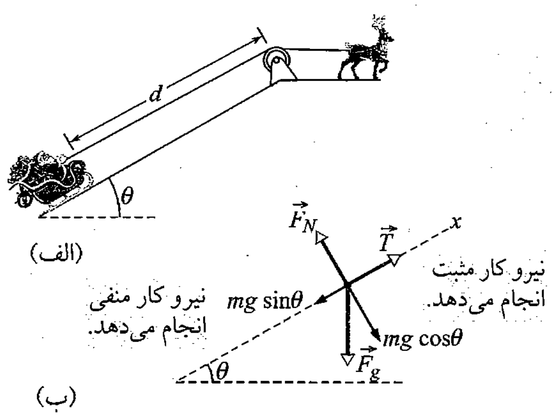
اگر جابه‌جایی در راستای قائم و به پایین‌سو باشد (شکل ۷-۷ ب) داریم $\phi = ۰$ و کاری که نیروی عامل انجام می‌دهد، $-mgd$ است.

معادله‌های ۷-۱۶ و ۷-۱۷ در هر حالتی که شیء بالا برده یا پایین آورده می‌شود و نیز شیء پیش و پس از بالا بردن ساکن است، صدق می‌کنند. این معادله‌ها از بزرگی نیروی به‌کاررفته مستقل‌اند. برای مثال، وقتی یک لیوان را از کف اتاق تا بالای سر بلند می‌کنیم، نیروی وارد شده به لیوان به طور قابل ملاحظه‌ای تغییر می‌کند. اما چون لیوان پیش و پس از بلند شدن ساکن است، کاری که انجام می‌دهیم می‌تواند از معادله‌های ۷-۱۶ و ۷-۱۷ به دست آید؛ در معادله‌ی ۷-۱۷، mg وزن لیوان و d مسافت پیموده شده در حین بلند شدن آن است.

مهم

مسئله‌ی نمونه‌ی ۷-۴ کار انجام شده در هنگام بالا کشیدن سورتمه از یک شیب برفی

در این مسئله، شیء در راستای یک شیب‌راهه کشیده می‌شود، اما در آغاز و در پایان حرکت ساکن است، و از این رو، انرژی جنبشی‌اش تغییر نمی‌کند (این موضوع مهم است). شکل ۷-۸ الف این وضعیت را نشان می‌دهد. طنابی سورتمه‌ی ۲۰۰ کیلوگرمی را (که ممکن است دیده باشید) از شیب‌راهه‌ای با زاویه‌ی شیب $\theta = ۳۰°$ در طی مسافت $d = ۲۰\text{m}$، به سمت بالا می‌کشد. جرم کل سورتمه و محتویات آن ۲۰۰kg است. شیب برفی چنان لغزنده است که می‌توان آن را بی‌اصطکاک در نظر گرفت. چقدر کار توسط هر یک از نیروهای وارد شده به سورتمه انجام می‌شود؟



شکل ۷-۸ (الف) سورتمه‌ای از یک شیب برفی به بالا کشیده می‌شود. (ب) نمودار جسم ـ آزاد مربوط به سورتمه.

نکته‌های کلیدی

(۱) در حین حرکت، بزرگی و جهت نیروها ثابت است، در نتیجه، کار انجام شده توسط هر یک از نیروها را با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۷ $(W = Fd\cos\phi)$ می‌توان حساب‌کرد. در اینجا ϕ زاویه‌ی میان نیرو و جابه‌جایی است. اگر از معادله‌ی ۷-۸ $(W = \vec{F}\cdot\vec{d})$ هم، که حاصل‌ضرب نقطه‌ای بردار نیرو و جابه‌جایی را به دست می‌دهد، استفاده کنیم به همین نتیجه می‌رسیم. (۲) با استفاده کردن از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی در معادله‌ی ۷-۱۰ $(\Delta K = W)$ می‌توان کار خالص انجام شده توسط نیروها را به تغییر انرژی جنبشی (یا نبود تغییر مانند این مسئله) ربط داد.

محاسبات: در بسیاری از مسئله‌های فیزیک مربوط به نیروها نخستین کاری که باید انجام داد، رسم کردن یک نمودار جسم ـ آزاد برای سازمان بخشیدن به فکرهای مورد نظر است. در مورد این سورتمه، شکل ۷-۸ ب یک نمودار جسم آزاد است، که نیروی گرانشی $\vec{F}_g$، نیروی کشش طناب $\vec{T}$، و نیروی عمودی وارد شده از سوی سطح شیب‌دار $\vec{F}_N$، را نشان می‌دهد.

کار نیروی عمودی W_N. کار را با این محاسبه‌ی آسان آغاز می‌کنیم. نیروی عمودی بر سطح شیب‌دار، و در نتیجه، بر جابه‌جایی سورتمه نیز عمود است. بنابراین، نیروی عمودی اثری در حرکت سورتمه ندارد و کار آن صفر است. به طور صوری‌تر با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۷ می‌توان نوشت

$$W_N = F_N d\cos ۹۰° = ۰ \quad \textbf{(پاسخ)}$$

$W_N = mg\cos\theta\, d\cos\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $W_g = 0$

$w_f = w_{FR} = mg \sin\theta \cdot d = mg \sin\theta d \cos\pi^{-1}$

کار نیروی گرانشی W_g. کار انجام شده توسط نیروی گرانشی را با دو روش می‌توان به دست آورد (شما می‌توانید از روش جالب دیگری هم استفاده کنید). با توجه به بحثی که پیش‌تر درباره‌ی شیب‌راهه‌ها داشتیم (مسئله‌ی نمونه‌ی ۵-۴ و شکل ۵-۱۵)، می‌دانیم که مؤلفه‌ی نیروی گرانشی در راستای سطح شیب‌دار دارای بزرگی $mg\sin\theta$ و به پایین‌سوی سطح است. بنابراین، بزرگی این مؤلفه برابر است با

$$F_{gx} = mg\sin\theta = (۲۰۰\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^۲)\sin ۳۰°$$

$$F_{gx} = ۹۸۰\,\text{N}$$

زاویه‌ی میان جابه‌جایی و این مؤلفه نیرو ϕ، برابر با ۱۸۰ درجه است. بنابراین، با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۷ می‌توان نوشت

$$W_g = F_{gx} d\cos ۱۸۰° = (۹۸۰\,\text{N})(۲۰\,\text{m})(-۱) \Rightarrow$$

(پاسخ) $W_g = -۱/۹۶\times ۱۰^۴\,\text{J}$

علامت منفی نشان می‌دهد که نیروی گرانشی انرژی را از سورتمه می‌گیرد.

روش (هم‌ارز) دیگر برای به دست آوردن این نتیجه، کاربرد نیروی گرانشی کامل $\vec{F}_g$ به جای یک مؤلفه است. زاویه‌ی میان $\vec{F}_g$ و $\vec{d}$ برابر با ۱۲۰ درجه است (زاویه‌ی شیب ۳۰ درجه را با زاویه‌ی ۹۰ درجه جمع کنید). در نتیجه، با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۷، داریم

$$W_g = F_g d\cos ۱۲۰° = mgd\cos ۱۲۰°$$

$$W_g = (۲۰۰\,\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^۲)(۲۰\text{m})\cos ۱۲۰° \Rightarrow$$

(پاسخ) $W_g = -۱/۹۶\times ۱۰^۴\,\text{J}$

کار نیروی کشش طناب W_T. برای محاسبه‌ی این کار دو روش وجود دارد. سریع‌ترین روش، استفاده کردن از قضیه‌ی کار - انرژی جنبشی معادله‌ی ۷-۱۰ ($\Delta K = W$) است، که در آن W، کار خالص انجام شده توسط نیروها برابر با $W_N + W_g + W_T$ است و تغییر انرژی جنبشی ΔK، صفر است (زیرا انرژی‌های آغازی و پایانی با هم برابر - یعنی صفر - هستند). بنابراین، با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۱۰، داریم

$$۰ = W_N + W_g + W_T = ۰ - ۱/۹۶\times۱۰^۴\,\text{J} + W_T \Rightarrow$$

(پاسخ) $W_T = ۱/۹۶\times ۱۰^۴\,\text{J}$

به جای انجام دادن این کار، می‌توان قانون دوم نیوتون درباره‌ی حرکت در راستای محور x را به کار برد و بزرگی نیروی کشش طناب F_T، را پیدا کرد. با فرض صفر بودن شتاب در راستای شیب (به جز در لحظه‌های کوتاه آغاز کردن و توقف)، می‌توان نوشت

$$F_{\text{net},x} = ma_x$$

$$F_T - mg\sin ۳۰° = m(۰)$$

در نتیجه، بزرگی نیروی مورد نظر برابر است با

$$F_T = mg\sin ۳۰°$$

چون این نیرو و جابه‌جایی، هر دو، به سوی بالای شیب هستند، زاویه‌ی میان این دو بردار صفر است. بنابراین، اکنون برای پیدا کردن کار انجام شده توسط نیروی کشش طناب می‌توان معادله‌ی ۷-۷ را به کار برد:

$$W_T = F_T d\cos ۰° = (mg\sin ۳۰°)d\cos ۰°$$

$$W_T = (۲۰۰\,\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^۲)(\sin ۳۰°)(۲۰\text{m})\cos ۰° \Rightarrow$$

(پاسخ) $W_T = ۱/۹۶\times ۱۰^۴\,\text{J}$

مسئله‌ی نمونه‌ی ۷-۵ کار انجام شده روی اتاقک آسانسور شتاب‌دار

اتاقک آسانسوری به جرم $m = ۵۰۰\text{kg}$ در حالی که با تندی $v_i = ۴/۰\,\text{m/s}$ در حال پایین آمدن است، کابل نگهدارنده‌ی آسانسور شروع به لغزیدن می‌کند و در نتیجه، آسانسور با شتاب ثابت $\vec{a} = \vec{g}/۵$ سقوط می‌کند (شکل ۷-۹ الف).

(الف) در حین پایین آمدن آسانسور به اندازه‌ی $d = ۱۲\text{m}$، کار W_g، که نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ روی اتاقک آسانسور انجام می‌دهد، چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

اتاقک را یک ذره در نظر بگیریم و W_g، کار انجام شده توسط

نیروی $\vec{F}_g$ را با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۱۲ ($W = mgd\cos\phi$) به دست می‌آوریم.

محاسبه: با توجه به شکل ۷-۹ ب، معلوم می‌شود که زاویه‌ی میان نیروی $\vec{F}_g$ و جابه‌جایی $\vec{d}$ صفر است. بنابراین، داریم

$$W_g = mgd\cos 0^\circ = (500\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2})(12\,\mathrm{m})(1) \Rightarrow$$

(پاسخ) $$W_g = 5.88\times 10^4\,\mathrm{J} \approx 59\,\mathrm{kJ}$$

(ب) هنگام سقوط کردن اتاقک به اندازه‌ی ۱۲m، کار انجام شده‌ی W_T، توسط نیروی کشش بالاسوی کابل $\vec{T}$، روی اتاقک آسانسور چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

نخست با نوشتن $F_{\mathrm{net},y} = ma_y$ برای مؤلفه‌ها درشکل ۷-۹ ب، می‌توان کار W_T را با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۷ ($W = Fd\cos\phi$) حساب کرد.

محاسبات: داریم

$$T - F_g = ma \qquad (۱۸\text{-}۷)$$

با حل کردن این معادله نسبت به T، قرار دادن مقدار mg به جای F_g و سپس جانشانی نتیجه‌ی حاصل در معادله‌ی ۷-۷، داریم

$$W_T = Td\cos\phi = m(a+g)\,d\cos\phi \qquad (۱۹\text{-}۷)$$

اکنون، با قراردادن $-g/5$ به‌جای شتاب (پایین‌سو) a و مقدار ۱۸۰ درجه به جای ϕ، زاویه‌ی میان نیروهای $\vec{T}$ و $m\vec{g}$، داریم

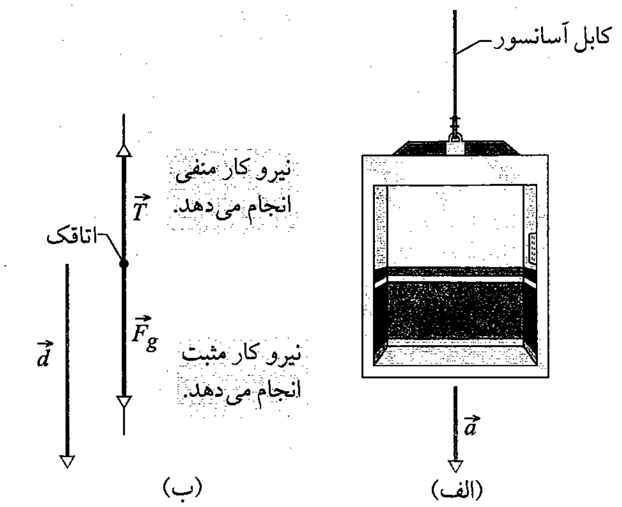
$$W_T = m\left(-\frac{g}{5}+g\right)d\cos\phi = \frac{4}{5}mgd\cos\phi$$

$$W_T = \frac{4}{5}(500\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2})(12\,\mathrm{m})\cos 180^\circ \Rightarrow$$

(پاسخ) $$W_T = -4.70\times 10^4\,\mathrm{J} \approx -47\,\mathrm{kJ}$$

هشدار: توجه کنید که W_T فقط مقدار منفی W_g نیست. دلیلش این است که چون اتاقک آسانسور هنگام پایین رفتن دارای شتاب است، تندی آن در حین سقوط تغییر می‌کند، و در نتیجه انرژی جنبشی‌اش هم تغییر می‌کند. بنابراین، معادله‌ی ۷-۱۶ (که در آن فرض می‌شود انرژی‌های جنبشی آغازی و پایانی با هم برابرند) در اینجا صدق نمی‌کند.

(پ) کار خالص W، که بر روی اتاقک در حال سقوط انجام می‌شود، چقدر است؟



شکل ۷-۹ اتاقک آسانسوری که با تندی v_i در حال پایین آمدن است، ناگهان شروع به پیدا کردن شتاب به پایین‌سو می‌کند. (الف) آسانسور با شتاب ثابت $\vec{a} = \vec{g}/5$ طی جابه‌جایی $\vec{d}$ پایین می‌آید. (ب) نمودار جسم ـ آزاد مربوط به اتاقک آسانسور، که در آن بردار جابه‌جایی نیز نشان داده شده است.

محاسبه: کار خالص برابر با مجموع کارهای انجام شده توسط نیروهای مؤثر بر اتاقک است:

$$W = W_g + W_T = 5.88\times 10^4\,\mathrm{J} - 4.70\times 10^4\,\mathrm{J} \Rightarrow$$

(پاسخ) $$W = 1.18\times 10^4\,\mathrm{J} \approx 12\,\mathrm{kJ}$$

(ت) انرژی جنبشی اتاقک آسانسور در انتهای مسیر ۱۲ متری سقوط چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

انرژی جنبشی به ***خاطر*** کار خالص انجام شده روی اتاقک طبق معادله‌ی ۷-۱۱ ($K_f = K_i + W$) تغییر می‌کند.

محاسبه: با توجه به معادله‌ی ۷-۱، انرژی جنبشی در آغاز سقوط را می‌توان از معادله‌ی $K_i = \frac{1}{2}mv_i^2$ به دست آورد. پس، معادله‌ی ۷-۱۱ را می‌توان چنین نوشت

$$K_f = K_i + W = \frac{1}{2}mv_i^2 + W$$

$$K_f = \frac{1}{2}(500\,\mathrm{kg})(4.0\,\mathrm{m/s})^2 + 1.18\times 10^4\,\mathrm{J} \Rightarrow$$

(پاسخ) $$K_f = 1.58\times 10^4\,\mathrm{J} \approx 16\,\mathrm{kJ}$$

۷-۴ کار انجام شده توسط نیروی فنر

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۷-۹ رابطه‌ی (قانون هوک) میان نیروی وارد شده به یک شیء از سوی فنر، مقدار کشیدگی یا تراکم فنر و ثابت فنر را به‌کار ببرید.

۷-۱۰ مشخص کنید که نیروی فنر یک نیروی متغیر است.

۷-۱۱ کار انجام شده توسط نیروی فنر روی یک شیء را با انتگرال‌گیری از تابع نیرو از مکان آغازی تا مکان پایانی شیء، یا با استفاده کردن از نتیجه‌ی عمومی شناخته شده‌ی این انتگرال‌گیری، حساب کنید.

۷-۱۲ کار انجام شده را با انتگرال‌گیری ترسیمی روی نمودار نیرو برحسب مکان شیء، حساب کنید.

۷-۱۳ قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی را برای حالتی که شیئی توسط نیروی فنر حرکت می‌کند، به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

- نیروی ناشی از فنر $\vec{F}_s$، برابر است با

$$\vec{F}_s = -k\vec{d} \quad \text{(قانون هوک)}$$

که در آن $\vec{d}$ جابه‌جایی سر آزاد فنر نسبت به حالت آرامش فنر (حالت بدون تراکم و بدون کشیدگی) و k ثابت فنر (معیاری برای سفتی فنر) است. اگر محور x در راستای فنر و مبداء مختصات در مکان سر آزاد و فنر در حالت آرامش باشد، می‌توان نوشت

$$F_x = -kx \quad \text{(قانون هوک)}$$

- بنابراین، نیروی فنر یک نیروی متغیر است: این نیرو با جابه‌جایی سر آزاد فنر تغییر می‌کند.

- اگر شیئی به سر آزاد فنر وصل شود، در هنگام حرکت کردن شیء از مکان آغازی x_i تا مکان پایانی x_f، کار انجام شده توسط نیروی فنر روی شیء W_s، برابر است با

$$W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

به ازای $x_i = 0$ و $x_f = x$، معادله‌ی بالا به صورت زیر در می‌آید

$$W_s = -\frac{1}{2}kx^2$$

کار انجام شده توسط نیروی فنر

اکنون، می‌خواهیم کار انجام شده روی یک شیء ذره مانند توسط ***نیروی متغیر*** خاصی، به نام **نیروی فنر** را که از فنر ناشی می‌شود، بررسی کنیم. شکل ریاضی بسیاری از نیروهای موجود در طبیعت، مانند نیروی فنر است. بنابراین، با بررسی این نیرو می‌توان بسیاری از نیروهای دیگر را درک کرد.

نیروی فنر

شکل ۷-۱۰ الف، فنری را در **حالت آرامش** نشان می‌دهد که نه متراکم شده و نه کشیده شده است. یک سر فنر ثابت است و به سر دیگر که آزاد است، یک شیء ذره مانند، یا یک جسم، وصل شده است. اگر جسم را، مطابق شکل ۷-۱۰ ب، به راست‌سو بکشیم، فنر باز می‌شود و

نیرویی به چپ‌سو به جسم وارد می‌کند (چون نیروی فنر می‌خواهد فنر را به حالت آرامش بازگرداند، گاهی آن را **_نیروی بازگرداننده_** می‌نامند). اگر با هُل دادن جسم به چپ‌سو، فنر را، مطابق شکل ۷-۱۰ پ، متراکم کنیم، فنر جسم را به راست‌سو هُل می‌دهد.

با یک تقریب خوب برای بسیاری از فنرها، نیروی ناشی از فنر $\vec{F}_s$، با $\vec{d}$، جابه‌جایی سر آزاد فنر، نسبت به حالت آرامش فنر، متناسب است. **_نیروی فنر_** از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

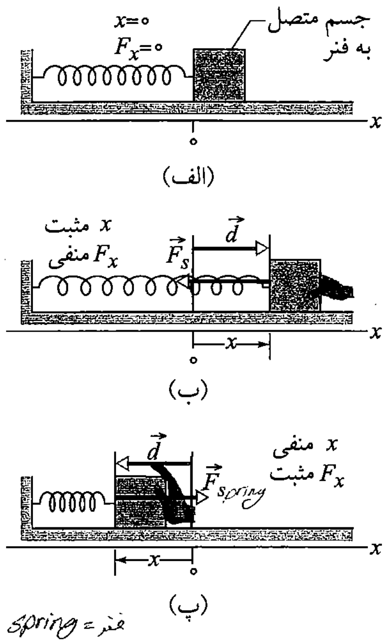
$$\vec{F}_s = -k\vec{d} \quad \text{(قانون هوک)} \qquad (۷-۲۰)$$

این رابطه بیان کننده‌ی **قانون هوک** است، که به افتخار **رابرت هوک**[1]، دانشمند انگلیسی دهه‌های ۱۶۰۰ میلادی نام‌گذاری شده است. علامت منفی در معادله‌ی ۷-۲۰ نشان می‌دهد که نیروی فنر همیشه با جهت جابه‌جا شدن سر آزاد فنر مخالف است. ثابت k را **ثابت فنر** (یا **ثابت نیرو**) می‌نامند، که معیاری برای سختی فنر است. بزرگ‌تر بودن k نشانه‌ی سخت‌تربودن فنر است؛ یعنی، به ازای یک جابه‌جایی معین کشیدن یا متراکم کردن فنر سخت‌تر است. یکای SI مربوط به k، **نیوتون بر متر** (با نماد N/m) است.

در شکل ۷-۱۰، محور x به طور موازی با طول فنر و مبداء مختصات ($x = 0$) در سر آزاد فنر در حالت آرامش، انتخاب شده است. برای این آرایش متداول فنر، معادله‌ی ۷-۲۰ را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$F_x = -kx \quad \text{(قانون هوک)} \qquad (۷-۲۱)$$

که در آن، اگر x مثبت باشد (فنر به سمت راست محور x کشیده شود)، F_x منفی است (نیروی کشش فنر به سمت چپ است) و اگر x منفی باشد (فنر به سمت چپ متراکم شود)، F_x مثبت است (نیروی هُل دادن فنر به سمت راست است). توجه کنید که نیروی فنر یک **_نیروی متغیر_** است زیرا بزرگی و جهت آن به مکان سر آزاد فنر x، بستگی دارد. بنابراین، F_x را می‌توان به صورت $F(x)$ نمایش داد. هم‌چنین، توجه کنید که قانون هوک یک **_رابطه‌ی خطی_** میان F_x و x است.



شکل ۷-۱۰ (الف) فنری در حالت آرامش قرار دارد. مبداء محور x در انتهای فنر و متصل به جسم واقع است. (ب) جابه‌جایی جسم $\vec{d}$ است و فنر به اندازه‌ی مقدار مثبت x کشیده شده است. به نیروی بازگرداننده‌ی $\vec{F}_s$ که توسط فنر وارد می‌شود، توجه کنید. (پ) فنر به اندازه‌ی مقدار **منفی** x متراکم شده است. باز هم به نیروی بازگرداننده توجه کنید.

کار انجام شده توسط نیروی فنر

برای پیدا کردن رابطه‌ی کار انجام شده توسط نیروی فنر در هنگام حرکت کردن جسم در شکل ۷-۱۰ الف، دو فرض ساده را در مورد فنر در نظر می‌گیریم. (۱) **_فنر بی‌جرم است_**؛ یعنی جرم آن در مقایسه با جرم جسم، قابل چشم‌پوشی است. (۲) **_فنر آرمانی است_**؛ یعنی به طور دقیق از قانون هوک پیروی می‌کند. در ضمن، فرض می‌کنیم که تماس میان جسم و سطح بی‌اصطکاک و جسم ذره مانند است.

جسم را به راست‌سو می‌کشیم و سپس آن را رها می‌کنیم. در حین حرکت کردن جسم به

1. Robert Hooke

راست‌سو نیروی فنر $\vec{F}_x$، روی آن کار انجام می‌دهد، که باعث کاهش یافتن انرژی جنبشی و کم شدن سرعت جسم می‌شود. اما این کار را با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۷ ($W = Fd\cos\phi$) ***نمی‌توان پیدا کرد*** زیرا این معادله برای نیروی ثابت صادق است و نیروی فنر یک نیروی متغیر است.

در مورد این مسئله روش ساده‌ای وجود دارد. (۱) جابه‌جایی جسم را به پاره‌های کوچکی چنان تقسیم می‌کنیم که بتوانیم از تغییرات F در هر یک از این پاره‌ها چشم‌پوشی کنیم. (۲) بنابراین، در هر یک از این پاره‌ها نیرو (به تقریب) دارای یک مقدار است و از این رو، ***می‌توان*** برای پیدا کردن کار انجام شده در آن پاره معادله‌ی ۷-۷ را به کار برد. (۳) اکنون، کار انجام شده در تمام پاره‌ها را با هم جمع می‌کنیم تا کار کل به دست آید. بسیار خوب، این چیزی بود که در پی آن بودیم، اما، به واقع نمی‌خواهیم برای جمع کردن عده‌ی زیادی از نتیجه‌ها چند روز وقت صرف کنیم و تازه مقادیر این نتیجه‌ها هم تقریبی‌اند. در عوض، این پاره‌ها را ***بی‌نهایت کوچک*** در نظر می‌گیریم تا خطای ما در هر نتیجه‌ی کار به صفر میل کند. سپس همه‌ی نتیجه‌های به دست آمده را به جای محاسبه‌ی دستی، از طریق انتگرال‌گیری با هم جمع می‌کنیم. با این محاسبه‌ی ساده می‌توان تمام عملیات را به جای چند روز در چند دقیقه انجام داد.

فرض می‌کنیم مکان آغازی جسم x_i و مکان پایانی آن x_f باشد. فاصله‌ی میان این دو مکان را به پاره‌های زیاد و کوچک به طول Δx تقسیم می‌کنیم. این پاره‌ها را که از x_i آغاز می‌شوند، با شماره‌های ۱، ۲، و نظیر آن‌ها، مشخص می‌کنیم. وقتی جسم طول یکی از این پاره‌ها را می‌پیماید، نیروی فنر به مقدار اندک تغییر می‌کند، زیرا طول پاره آن‌قدر کوتاه است که x به سختی تغییر می‌کند. بنابراین، نیرو در پاره‌ی ۱ را با F_{x1}، در پاره‌ی ۲ را با F_{x2}، و بقیه را نیز به همین ترتیب، نام‌گذاری می‌کنیم.

اکنون، با ثابت بودن نیرو در هر پاره کار انجام شده‌ی مربوط به هر پاره را با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۷ ***می‌توان به دست آورد***. در اینجا $\phi = 180°$ و در نتیجه، $\cos\phi = -1$. بنابراین، کار انجام شده در پاره‌ی ۱ برابر با $-F_{x1}\Delta x$، در پاره‌ی ۲ برابر با $-F_{x2}\Delta x$، و بقیه هم به همین ترتیب است. کار خالص انجام شده توسط فنر W_s، از x_i تا x_f برابر است با مجموع تمام کارهای مربوط به پاره‌ها:

$$W_s = \sum -F_{xj}\Delta x \qquad (۲۲\text{-}۷)$$

که در آن j شماره‌ی پاره است. در حالت حدی که Δx به صفر میل می‌کند، معادله‌ی ۷-۲۲ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} -F_x dx \qquad (۲۳\text{-}۷)$$

با توجه به معادله‌ی ۷-۲۱، بزرگی نیروی F_x برابر با kx است. در نتیجه، با جانشانی این

مقدار، داریم

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} -kx\,dx = -k\int_{x_i}^{x_f} x dx \Rightarrow$$

$$W_s = (-\frac{1}{2}k)[x^2]_{x_i}^{x_f} = (-\frac{1}{2}k)(x_f^2 - x_i^2) \qquad (۲۴-۷)$$

پس از انجام دادن عمل ضرب، خواهیم داشت

$$W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \quad \text{(کار انجام شده توسط نیروی فنر)} \qquad (۲۵-۷)$$

کار W_s، که توسط نیروی فنر انجام می‌شود، می‌تواند مثبت یا منفی باشد و بستگی به این دارد که در حین حرکت کردن جسم از x_i تا x_f ***انرژی خالص*** به جسم داده شود یا از آن گرفته شود. ***هشدار:*** در معادله‌ی ۷-۲۵ مکان پایانی x_f در ***جمله‌ی دوم*** سمت راست معادله ظاهر می‌شود. در نتیجه، این معادله نشان می‌دهد که:

اگر جسم از مکان آغازی به مکان مربوط به حالت آرامش $(x=0)$ نزدیک شود، کار W_s مثبت، اگر جسم از نقطه‌ی $x=0$ دور شود، کار منفی و اگر فاصله‌ی جسم تا نقطه‌ی $x=0$ ثابت بماند، کار صفر است.

اگر $x_i = 0$ و مکان پایانی x باشد، معادله‌ی ۷-۲۵ به صورت زیر ساده می‌شود

$$W_s = -\frac{1}{2}kx^2 \quad \text{(کار انجام شده توسط نیروی فنر)} \qquad (۲۶-۷)$$

کار انجام شده توسط نیروی یک عامل

اکنون، فرض کنید عاملی با وارد کردن نیروی $\vec{F}_a$ به جسم، آن را در راستای محور x جابه‌جا می‌کند. در حین جابه‌جایی، روی جسم نیروی عامل کار W_a و نیروی فنر کار W_s را انجام می‌دهد. بنا به معادله‌ی ۷-۱۰ تغییر انرژی جنبشی جسم ΔK، که از این دو انتقال انرژی ناشی می‌شود، برابر است با

$$\Delta K = K_f - K_i = W_a + W_s \qquad (۲۷-۷)$$

که در آن K_f انرژی جنبشی در پایان جابه‌جایی و K_i انرژی جنبشی در آغاز جابه‌جایی است. اگر جسم پیش و پس از جابه‌جا شدن ساکن باشد، K_f و K_i هر دو صفرند و معادله‌ی ۷-۲۷ به صورت زیر ساده می‌شود

$$W_a = -W_s \qquad (۲۸-۷)$$

هرگاه یک جسم متصل به فنر پیش و پس از جابه‌جا شدن ساکن باشد، کار انجام شده توسط نیروی عامل جابه‌جا کننده روی جسم برابر با کار انجام شده توسط نیروی فنر با علامت منفی است.

هشدار: اگر جسم پیش و پس از جابه‌جا شدن ساکن نباشد، عبارت ذکر شده **درست نیست**.

خودآزمایی ۲

برای سه وضعیت جسم در شکل ۷-۱۰، مکان‌های آغازی و پایانی جسم در راستای محور x، به ترتیب عبارت‌اند از: (الف) $-3\,cm$، $2\,cm$؛ (ب) $2\,cm$، $3\,cm$؛ و (پ) $-2\,cm$، $2\,cm$. در هر وضعیت، آیا کار انجام شده توسط نیروی فنر روی جسم مثبت است، منفی است، یا صفر است؟

مسئله‌ی نمونه‌ی ۷-۶ کار انجام شده توسط فنر برای تغییر دادن انرژی جنبشی

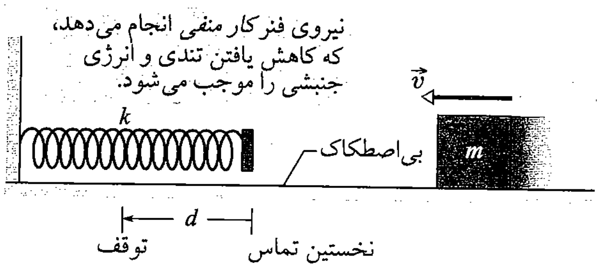
وقتی فنری روی یک شیء کار انجام می‌دهد، به سادگی ***نمی‌توان*** کار را با ضرب کردن نیروی فنر در جابه‌جایی شیء به دست آورد. دلیل آن این است که برای نیرو یک مقدار ثابت وجود ندارد و نیرو تغییر می‌کند. اما جابه‌جایی را می‌توان به عده‌ای بی‌نهایت بخش کوچک تقسیم کرد و از این رو، نیرو در هر بخش، به تقریب، ثابت است. عمل انتگرال‌گیری کارهای انجام شده‌ی مربوط به بخش‌ها را با هم جمع می‌کند. در اینجا از نتیجه‌ی ساده‌ی انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم.

در شکل ۷-۱۱، یک قوطی محتوی زیره‌ی سبز به جرم $m = 0/40\,kg$ با تندی $v = 0/50\,m/s$ بر روی سطح یک پیشخوان بی‌اصطکاک می‌لغزد. این قوطی به فنری با ثابت فنر $k = 750\,N/m$ می‌رسد و آن را متراکم می‌کند. وقتی قوطی به‌طور لحظه‌ای توسط فنر متوقف می‌شود، اندازه‌ی متراکم شدن فنر d، چقدر است؟

نکته‌های کلیدی

۱. کار انجام شده توسط نیروی فنر W_s، روی قوطی بنا به معادله‌ی ۷-۲۶ ($W_s = -\frac{1}{2}kx^2$) به مقدار متراکم شده‌ی فنر d، بستگی دارد، که در آن d به جای x قرار می‌گیرد.

۲. کار W_s بنا به معادله‌ی ۷-۱۰ ($K_f - K_i = W$)، به انرژی جنبشی قوطی نیز بستگی دارد.



شکل ۷-۱۱ یک قوطی به جرم m با سرعت $\vec{v}$ به طرف فنری با ثابت فنر k حرکت می‌کند.

۳. مقدار آغازی انرژی جنبشی قوطی $K = \frac{1}{2}mv^2$، و مقدار آن در هنگام توقف لحظه‌ای قوطی صفر است.

محاسبات: با در نظر گرفتن دو نکته‌ی نخست با هم، رابطه‌ی قضیه‌ی کار ـ انرژی مربوط به قوطی چنین نوشته می‌شود

$$K_f - K_i = -\frac{1}{2}kd^2$$

اگر جانشانی را با توجه به‌نکته‌ی سوم انجام دهیم، خواهیم داشت

$$0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}kd^2$$

پس از ساده کردن رابطه، جانشانی داده‌ها و حل کردن معادله‌ی حاصل نسبت به d، داریم

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = (0/50\,m/s)\sqrt{\frac{0/40\,kg}{750\,N/m}} \Rightarrow$$

$$d = 1/2 \times 10^{-2}\,m = 1/2\,cm \qquad \text{(پاسخ)}$$

۷-۵ کار انجام شده توسط یک نیروی متغیر کلی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۷-۱۴ با داشتن یک نیروی متغیر به صورت تابعی از مکان، کار انجام شده توسط آن نیرو بر روی یک شیء را با انتگرال‌گیری تابع از مکان آغازی تا مکان پایانی شیء، در یک، یا چند بعد، حساب کنید.

۷-۱۵ با داشتن نمودار نیرو برحسب مکان، کار انجام شده را با انتگرال‌گیری ترسیمی از مکان آغازی تا مکان پایانی شیء، حساب کنید.

۷-۱۶ نمودار شتاب برحسب مکان را به نمودار نیرو برحسب مکان تبدیل کنید.

۷-۱۷ قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی را برای حالت‌هایی که شیئی توسط یک نیروی متغیر حرکت می‌کند، به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

● هنگامی که نیروی $\vec{F}$ وارد شده به یک شیء ذره مانند به مکان شیء بستگی داشته باشد، باید کار انجام شده بر روی آن شیء توسط $\vec{F}$ در حین حرکت کردن از مکان آغازی r_i با مختصات (x_i، y_i و z_i) تا مکان پایانی r_f با مختصات(x_f، y_f و z_f) را با انتگرال‌گیری از نیرو به دست آورد. اگر فرض کنیم مؤلفه‌ی f_x به x، اما نه به y یا به z، مؤلفه‌ی F_y به y، اما نه به x یا به z و مؤلفه‌ی F_z به z، اما نه به x یا به y، بستگی دارد، در آن صورت، کار انجام شده برابر است با

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y\, dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z\, dz$$

● اگر $\vec{F}$ فقط مؤلفه‌ی x داشته باشد، رابطه‌ی بالا به صورت زیر ساده می‌شود

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$

کار انجام شده توسط یک نیروی متغیر کلی

تحلیل یک بعدی

اکنون، وضعیت شکل ۷-۲ را با این تفاوت در نظر می‌گیریم که نیرو در راستای محور x وارد می‌شود و بزرگی‌اش برحسب مکان x تغییر می‌کند. بنابراین، در حین حرکت کردن مُهره (ذره) بزرگی $F(x)$ نیرویی که روی آن کار انجام می‌دهد متغیر است. این نیرو فقط از لحاظ بزرگی تغییر می‌کند نه جهت، در ضمن، این بزرگی در هر نقطه، برحسب زمان تغییر نمی‌کند.

شکل ۷-۱۲ الف، نمودار یک ***نیروی متغیر یک بعدی*** را نشان می‌دهد. می‌خواهیم رابطه‌ی مربوط به کار انجام شده توسط این نیرو را هنگام حرکت کردن ذره از نقطه‌ی آغازی x_i تا نقطه‌ی پایانی x_f به دست آوریم. برای این کار از معادله‌ی ۷-۷ ($W = Fd\cos\phi$) ***نمی‌توان استفاده کرد*** زیرا آن معادله فقط در مورد نیروی ثابت $\vec{F}$ به کار می‌رود. در اینجا باز هم از ریاضیات استفاده می‌کنیم، سطح زیر منحنی شکل ۷-۱۲ الف را به عده‌ای نوار باریک به پهنای

Δx تقسیم می‌کنیم (شکل ۷-۱۲ ب). Δx را آن‌قدر کوچک انتخاب می‌کنیم که در این بازه نیروی $F(x)$ به نحو قابل قبولی ثابت بماند. فرض می‌کنیم $F_{j,\text{avg}}$ مقدار متوسط $F(x)$ در بازه‌ی jام باشد. بنابراین، در شکل ۷-۱۲ ب، $F_{j,\text{avg}}$ ارتفاع نوار jام است.

اگر $F_{j,\text{avg}}$ را ثابت بگیریم، نموّ کار ΔW_j، که توسط نیرو در بازه‌ی jام انجام می‌شود، به طور تقریبی از معادله‌ی ۷-۷ به دست می‌آید:

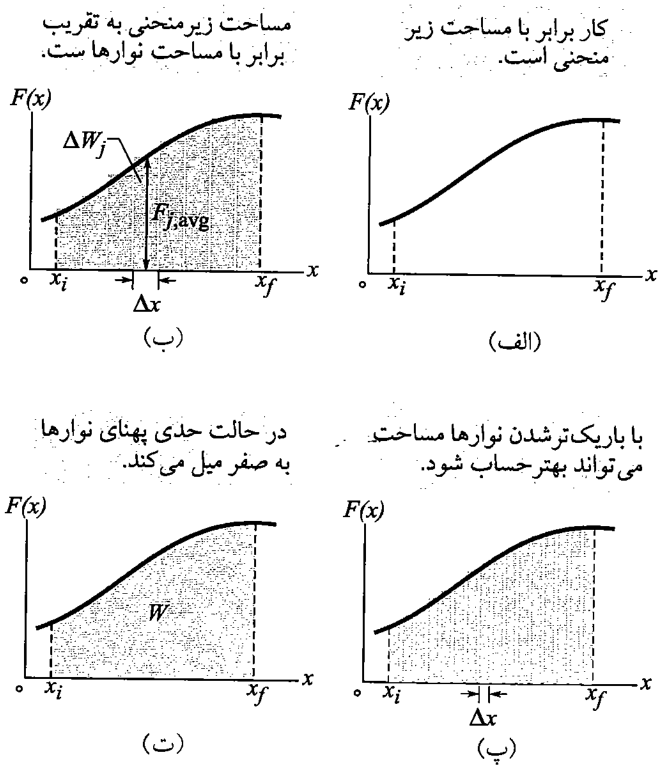
$$\Delta W_j = F_{j,\text{avg}}\Delta x \qquad (۷\text{-}۲۹)$$

در شکل ۷-۱۲ ب، ΔW_j برابر با مساحت مربع مستطیل jام است.

برای تعیین تقریبی کار کل W، که نیرو هنگام حرکت کردن ذره از x_i تا x_f انجام می‌دهد، مساحت‌های تمام نوارهای میان x_i و x_f در شکل ۷-۱۲ ب را با هم جمع می‌کنیم:

$$W = \sum \Delta W_j = \sum F_{j,\text{avg}}\Delta x \qquad (۷\text{-}۳۰)$$

معادله‌ی ۷-۳۰ یک معادله‌ی تقریبی است زیرا خط‌های شکسته‌ی تشکیل شده در بالای نوارهای مربع مستطیلی در شکل ۷-۱۲ ب، مقدار تقریبی منحنی $F(x)$ را نشان می‌دهند.



شکل ۷-۱۲ (الف) منحنی تغییرات نیروی یک بعدی $\vec{F}(x)$ مؤثر بر یک ذره برحسب جابه‌جایی x. ذره از x_i تا x_f حرکت می‌کند. (ب) همان منحنی شکل (الف) است، با این تفاوت که سطح زیر منحنی به نوارهای باریک تقسیم شده است. (پ) مانند شکل (ب) است، اما سطح زیر منحنی به نوارهای باریک‌تر تقسیم شده است. (ت) حالت حدی. نمایش کار انجام شده توسط نیرو با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۳۲، که برابر با مساحت سایه خورده در بین **منحنی** و محور x در فاصله‌ی میان x_i تا x_f است.

برای بهتر کردن تقریب، پهنای Δx نوارها را می‌توان کاهش داد (شکل ۷-۱۲ پ) و از عده‌ی بیشتری نوار استفاده کرد. در حالت حدی، پهنای هر نوار به صفر میل می‌کند و عده‌ی نوارها بی‌نهایت زیاد می‌شود. در این حالت، نتیجه‌ی دقیق چنین به دست می‌آید

$$W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum F_{j,\mathrm{avg}} \Delta x \qquad (۷-۳۱)$$

این حد درست همان چیزی است که از انتگرال تابع $F(x)$ در میان دو حد x_i و x_f معین می‌شود. در نتیجه، معادله‌ی ۷-۳۱ چنین نوشته می‌شود

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx \quad \text{(کار نیروی متغیر)} \qquad (۷-۳۲)$$

اگر تابع $F(x)$ در دست باشد، با جانشانی آن در معادله‌ی ۷-۳۲ و استفاده کردن از حدود مناسب انتگرال‌گیری، انتگرال را محاسبه و کار را پیدا کنیم. (پیوست ث پایان کتاب شامل عده‌ای انتگرال‌های متداول است). از نظر هندسی، کار برابر با مساحت بین منحنی $F(x)$ و محور x در فاصله‌ی میان دو حد x_i و x_f است (بخش سایه خورده در شکل ۷-۱۲ ت).

تحلیل سه بعدی

اکنون ذره‌ای را که یک نیروی سه بعدی به آن اثر می‌کند، در نظر می‌گیریم:

$$\vec{F} = F_x\hat{\mathrm{i}} + F_y\hat{\mathrm{j}} + F_z\hat{\mathrm{k}} \qquad (۷-۳۳)$$

در این معادله مؤلفه‌های نیروی F_x، F_y و F_z می‌توانند به مکان ذره بستگی داشته باشند؛ یعنی تابعی از مکان باشند. در اینجا سه فرض ساده کننده را در نظر می‌گیریم: F_x ممکن است به x، اما نه به y یا z، F_y ممکن است به y، اما نه به x یا z، و F_z ممکن است به z، اما نه به x یا y، بستگی داشته باشد. اکنون، فرض می‌کنیم ذره جابه‌جایی نموی زیر را انجام دهد

$$d\vec{r} = dx\hat{\mathrm{i}} + dy\hat{\mathrm{j}} + dz\hat{\mathrm{k}} \qquad (۷-۳۴)$$

نموّ کار dW، که $\vec{F}$ در حین جابه‌جایی $d\vec{r}$ روی ذره انجام می‌دهد، با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۸، چنین به دست می‌آید

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (۷-۳۵)$$

بنابراین، کار انجام شده‌ی W توسط نیروی $\vec{F}$ در موقع حرکت کردن در دستگاه x، y و z از مکان آغازی r_i با مختصات $(x_i، y_i \text{ و } z_i)$ به مکان پایانی r_f با مختصات $(x_f، y_f \text{ و } z_f)$ برابر است با

$$W = \int_{r_i}^{r_f} dW = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz \qquad (۷-۳۶)$$

اگر $\vec{F}$ فقط مؤلفه‌ی x داشته باشد، جمله‌های مربوط به y و z در معادله‌ی ۷-۳۶ صفر می‌شوند و معادله به صورت ساده‌ی معادله‌ی ۷-۳۲ در می‌آید.

قضیه‌ی کار ـ انرژی با نیروی متغیر

معادله‌ی ۷-۳۲ کار انجام شده توسط نیروی متغیر یک بعدی روی یک ذره را به دست می‌دهد. اکنون، باید مطمئن شویم که طبق بیان قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی، کار برابر با تغییر انرژی جنبشی ذره است.

ذره‌ای به جرم m را در نظر می‌گیریم که تحت اثر نیروی خالص $F(x)$ در راستای محور x حرکت می‌کند. کار انجام شده توسط این نیرو روی ذره در حین حرکت کردن از مکان آغازی x_i تا مکان پایانی x_f، با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۳۲ برابر است با

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx = \int_{x_i}^{x_f} madx \qquad (۷\text{-}۳۷)$$

در این معادله بنا به قانون دوم نیوتون به جای $F(x)$ مقدار ma قرار داده شده است. کمیت $madx$ در معادله‌ی ۷-۳۷ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$madx = m\frac{dv}{dt}dx \qquad (۷\text{-}۳۸)$$

با توجه به قاعده‌ی زنجیری در حسابان، داریم

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v \qquad (۷\text{-}۳۹)$$

پس، معادله‌ی ۷-۳۸ چنین نوشته می‌شود

$$madx = m\frac{dv}{dx}vdx = mvdv \qquad (۷\text{-}۴۰)$$

با جانشانی معادله‌ی ۷-۴۰ در معادله‌ی ۷-۳۷، داریم

$$W = \int_{v_i}^{v_f} mvdv = m\int_{v_i}^{v_f} vdv \Rightarrow$$

$$W = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ - \frac{۱}{۲}mv_i^۲ \qquad (۷\text{-}۴۱)$$

توجه کنید که در موقع تبدیل کردن متغیر x به v باید حدود انتگرال را هم برحسب متغیر جدید بنویسیم. درضمن، توجه کنید که چون جرم m ثابت است، می‌توان آن را از انتگرال خارج کرد.

با توجه به اینکه جمله‌های سمت راست معادله‌ی ۷-۴۱ معرف انرژی‌های جنبشی‌اند، معادله‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$W = K_f - K_i = \Delta K$$

که همان قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی را بیان می‌کند.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۷-۷ کار حساب شده به کمک انتگرال‌گیری ترسیمی

در شکل ۷-۱۳ ب، در اثر وارد شدن یک نیرو، جسمی ۸٫۰ کیلوگرمی بر روی سطح بی‌اصطکاک کف اتاق از نقطه‌ی آغازی $x_۱ = ۰$ تا نقطه‌ی پایانی $x_۳ = ۶٫۵\text{m}$ می‌لغزد. در حین حرکت کردن جسم بزرگی و جهت نیرو مطابق نمودار نشان داده شده در شکل ۷-۱۳ الف تغییر می‌کند. برای مثال، از $x = ۰$ تا $x = ۱\text{m}$، نیرو مثبت (در جهت مثبت محور x) است و بزرگی‌اش از صفر تا ۴۰N افزایش می‌یابد، و از $x = ۴\text{m}$ تا $x = ۵\text{m}$، نیرو منفی است و بزرگی‌اش از صفر تا ۲۰N افزایش می‌یابد. (توجه کنید

که نیرو در روی نمودار به صورت $-۲۰N$ نشان داده شده است). انرژی جنبشی جسم در مکان $x_۱$ برابر با $K_۱ = ۲۸۰J$ است. تندی جسم در مکان‌های $x_۱ = ۰$، $x_۲ = ۴٫۰m$ و $x_۳ = ۶٫۵m$ چیست؟

نکته‌های کلیدی

(۱) در هر نقطه تندی جسم را از طریق معادله‌ی ۷-۱ $(K = \frac{۱}{۲}mv^۲)$ می‌توان به انرژی جنبشی ربط داد. (۲) انرژی جنبشی مربوط به نقطه‌ی بعدی K_f، را با استفاده کردن از قضیه‌ی کار - انرژی جنبشی در معادله‌ی ۷-۱۰ $(K_f - K_i = W)$ می‌توان به انرژی جنبشی آغازی K_i و کار انجام شده روی جسم W، ربط داد. (۳) کار انجام شده‌ی W، توسط نیروی متغیر $F(x)$ را با انتگرال گرفتن از تابع نیرو برحسب مکان x، می‌توان حساب کرد. با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۳۲، داریم

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$$

تابع $F(x)$ در دست نیست تا بتوان انتگرال‌گیری کرد، اما نمودار $F(x)$ را، که می‌توان از آن انتگرال گرفت، در اختیار داریم و به کمک آن می‌توانیم مساحت میان خط رسم شده و محور x را پیدا کنیم. در جایی که نمودار بالای محور است، کار (مساوی با مساحت) مثبت و در جایی که نمودار در زیر محور است، کار منفی است.

محاسبات: تندی خواسته شده در $x = ۰$ به آسانی به دست می‌آید زیرا ما انرژی جنبشی را از پیش می‌دانیم. بنابراین، مقدار انرژی جنبشی را در فرمول مربوط قرار می‌دهیم:

$$K_۱ = \frac{۱}{۲}mv_۱^۲$$

$$۲۸۰J = \frac{۱}{۲}(۸٫۰kg)v_۱^۲$$

و از آنجا، داریم

(پاسخ) $$v_۱ = ۸٫۳۷m/s \approx ۸٫۴m/s$$

وقتی جسم از $x = ۰$ تا $x = ۴٫۰m$ حرکت می‌کند، نمودار شکل ۷-۱۳ الف در بالای محور x است، یعنی روی جسم کار مثبت انجام می‌شود. مساحت زیر نمودار را به یک مثلث سمت چپ، یک مربع مستطیل در مرکز و یک مثلث دیگر در سمت راست تقسیم می‌کنیم. مساحت کل برابر است با

$$\frac{۱}{۲}(۴۰N)(۱m)+(۴۰N)(۲m)+\frac{۱}{۲}(۴۰N)(۱m)=۱۲۰N.m=۱۲۰J$$

این نتیجه نشان می‌دهد که نیروی در بازه‌ی میان $x = ۰$ تا $x = ۴٫۰m$، روی جسم کار $۱۲۰J$ را انجام می‌دهد و انرژی جنبشی و تندی جسم افزایش می‌یابد. بنابراین، وقتی جسم به $x = ۴٫۰m$ می‌رسد، با استفاده کردن از قضیه‌ی کار - انرژی جنبشی می‌توان انرژی جنبشی را به دست آورد:

$$K_۲ = K_۱ + W$$

$$K_۲ = ۲۸۰J + ۱۲۰J = ۴۰۰J$$

بار دیگر با استفاده کردن از تعریف انرژی جنبشی، داریم

$$K_۲ = \frac{۱}{۲}mv_۲^۲$$

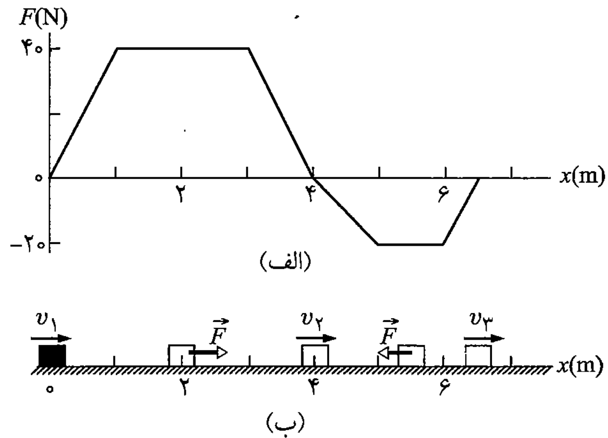
$$۴۰۰J = \frac{۱}{۲}(۸٫۰kg)(v_۲^۲)$$

و از آنجا، داریم

(پاسخ) $$v_۲ = ۱۰m/s$$

این مقدار بیشترین تندی جسم است زیرا از $x = ۴٫۰m$ تا $x = ۶٫۵m$ نیرو منفی است، یعنی ناهمسو با حرکت جسم است و روی جسم کار منفی انجام می‌دهد. در نتیجه، انرژی جنبشی و تندی جسم کاهش می‌یابد. در این گستره‌ی مکانی مساحت میان نمودار و محور x برابر است با

$$\frac{۱}{۲}(۲۰N)(۱m)+(۲۰N)(۱m)+\frac{۱}{۲}(۲۰N)(۰٫۵m)=۳۵N.m=۳۵J$$



شکل ۷-۱۳ (الف) نمودار نشان دهنده‌ی بزرگی و جهت نیروی متغیری که به جسم در حال حرکت در راستای محور x بر روی کف اتاق، وارد می‌شود. (ب) نمودار محل جسم در زمان‌های مختلف.

این نتیجه نشان می‌دهد که کار انجام شده توسط نیرو در این گستره‌ی مکانی، $-۳۵\,\mathrm{J}$ است. در نقطه‌ی $x = ۴/۰\,\mathrm{m}$، انرژی جنبشی جسم $K = ۴۰۰\,\mathrm{J}$ است. در $x = ۶/۵\,\mathrm{m}$، قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی نشان می‌دهد که انرژی جنبشی جسم برابر است با

$$K_۳ = K_۲ + W$$

$$K_۳ = ۴۰۰\,\mathrm{J} - ۳۵\,\mathrm{J} = ۳۶۵\,\mathrm{J}$$

باز هم با استفاده کردن از تعریف انرژی جنبشی، داریم

$$K_۳ = \frac{۱}{۲} m v_۳^۲$$

$$۳۶۵\,\mathrm{J} = \frac{۱}{۲}(۸/۰\,\mathrm{kg}) v_۳^۲$$

و از آنجا، داریم

$$v_۳ = ۹/۵۵\,\mathrm{m/s} \approx ۹/۶\,\mathrm{m/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

جسم باز هم در جهت مثبت محور x، اما اندکی سریع‌تر از آغاز، حرکت می‌کند.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۷-۸ کار، انتگرال‌گیری دوبعدی

وقتی نیروی وارد شده به یک شیء به مکان بستگی داشته باشد، کار انجام شده روی شیء را به سادگی از ضرب کردن نیرو در جابه‌جایی ***نمی‌توان به دست آورد.*** دلیل این کار آن است که نیرو مقدار ثابتی ندارد، بلکه تغییر می‌کند. بنابراین، ما باید کار انجام شده در جابه‌جایی‌های بسیار کوچک را پیدا و همه‌ی کارهای انجام شده را با هم جمع کنیم. به طور خلاصه، می‌توان گفت «بله، نیرو در هر جابه‌جایی بسیار کوچک تغییر می‌کند، اما این تغییر چنان کوچک است که، به‌تقریب، نیرو را در حین جابه‌جایی می‌توان ثابت در نظر گرفت». واضح است که چنین بیانی دقیق نیست، اما اگر جابه‌جایی‌ها بی‌نهایت کوچک باشند، خطای ما هم بی‌نهایت کوچک می‌شود و نتیجه‌ی به دست آمده دقیق است. اما برای جمع کردن عده‌ای نامتناهی از کارهای انجام شده زمان بسیار زیادی لازم است. بنابراین، کارهای انجام شده را با روش انتگرال‌گیری جمع می‌کنیم و این عملیات را می‌توان در عرض چند دقیقه انجام داد.

نیروی $\vec{F} = (۳x^۲\mathrm{N})\hat{\mathrm{i}} + (۴\mathrm{N})\hat{\mathrm{j}}$، که در آن x برحسب متر است، به ذره‌ای اثر می‌کند و فقط انرژی جنبشی ذره را تغییر می‌دهد. کار انجام شده روی ذره در حین حرکت کردن در دستگاه x و y از مختصات $(۲\mathrm{m}$ و $۳\mathrm{m})$ تا مختصات $(۳\mathrm{m}$ و $۰)$ چقدر است؟ آیا تندی ذره افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

نکته‌ی کلیدی

در اینجا نیرو متغیر است زیرا مؤلفه‌ی x آن به مقدار x بستگی دارد. بنابراین، برای پیدا کردن کار انجام شده نمی‌توان از معادله‌های ۷-۷ و ۷-۸ استفاده کرد. درعوض، برای انتگرال‌گیری از نیرو باید معادله‌ی ۷-۳۶ را به کار برد.

محاسبه: در اینجا دو انتگرال، هر انتگرال برای یکی از محورها، ترتیب می‌دهیم:

$$W = \int_۲^۳ ۳x^۲ dx + \int_۳^۰ ۴dy = ۳\int_۲^۳ x^۲ dx + ۴\int_۳^۰ dy$$

$$W = ۳[\frac{۱}{۳}x^۳]_۲^۳ + ۴[y]_۳^۰ = [۳^۳ - ۲^۳] + ۴[۰ - ۳] \Rightarrow$$

$$W = ۷/۰\,\mathrm{J} \qquad \text{(پاسخ)}$$

علامت مثبت کار به این معنی است که انرژی به وسیله‌ی نیروی $\vec{F}$ به ذره داده شده است. بنابراین، انرژی جنبشی ذره افزایش می‌یابد و چون $K = \frac{۱}{۲}mv^۲$، تندی ذره نیز باید افزایش پیدا کند. اگر کار منفی باشد، انرژی جنبشی و تندی ذره باید کاهش پیدا کنند.

۷-۶ توان

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۷-۱۸ رابطه‌ی میان توان متوسط، کار انجام شده توسط یک نیرو و بازه‌ی زمانی انجام شدن این کار را به کار ببرید.

۷-۱۹ با داشتن کار به صورت تابعی از زمان، توان لحظه‌ای را به‌دست آورید.

۷-۲۰ توان لحظه‌ای را با استفاده کردن از حاصل‌ضرب نقطه‌ای بردار نیرو و بردار سرعت شیء، به صورت نمادگذاری بزرگی ـ زاویه و نمادگذاری بردارهای یکه، معین کنید.

نکته‌های کلیدی

- توان ناشی از یک نیرو، *آهنگ* انجام دادن کار توسط آن نیرو بر روی یک شیء است.
- اگر نیرو کار W را در بازه‌ی زمانی Δt انجام دهد، توان متوسط ناشی از نیرو در آن بازه‌ی زمانی برابر است با

$$P_{\text{avg}} = \frac{W}{\Delta t}$$

- توان لحظه‌ای، آهنگ لحظه‌ای انجام دادن کار است:

$$P = \frac{dW}{\Delta t}$$

- توان لحظه‌ای مربوط به نیروی $\vec{F}$، که تحت زاویه‌ی ϕ نسبت به راستای حرکت جسم با سرعت لحظه‌ای $\vec{v}$ وارد می‌شود، برابر است با

$$P = Fv\cos\phi = \vec{F}.\vec{v}$$

توان

آهنگ زمانی انجام دادن کار به وسیله‌ی یک نیرو را **توان** ناشی از نیرو می‌نامند. اگر مقدار کار W در مدت زمان Δt توسط نیرو انجام شود، **توان متوسط** ناشی از نیرو در این بازه‌ی زمانی برابر است با

$$P_{\text{avg}} = \frac{W}{\Delta t} \quad \text{(توان متوسط)} \qquad (۷-۴۲)$$

توان لحظه‌ای P، آهنگ زمانی لحظه‌ای انجام دادن کار است که معادله‌ی آن چنین است

$$P = \frac{dW}{dt} \quad \text{(توان لحظه‌ای)} \qquad (۷-۴۳)$$

فرض کنید کار انجام شده‌ی $W(t)$، توسط یک نیرو را برحسب زمان بدانیم. برای تعیین توان لحظه‌ای P، مثلاً، در مدت زمان $t = ۳/۰\,\text{s}$، که کار انجام شده است، نخست مشتق زمانی تابع $W(t)$ را پیدا و سپس نتیجه را به ازای $t = ۳/۰\,\text{s}$ حساب می‌کنیم.

یکای توان در SI، **ژول بر ثانیه** (با نماد J/s) است. این یکا آن‌قدر زیاد به کار می‌رود، که به افتخار **جیمز وات**[1] نام خاص **وات** (با نماد W) را به آن داده‌اند. جیمز وات آهنگ انجام دادن کار توسط ماشین‌های بخار را بهبود بخشید. در دستگاه بریتانیایی یکای توان

1. James Watt

فوت ـ پوند بر ثانیه است. برای یکای توان اغلب از **قوه اسب** (با نماد hp) استفاده می‌شود. رابطه‌ی میان این یکاها چنین است

$$\text{یک وات} = ۱\,\mathrm{W} = ۱\,\mathrm{J/s} = ۰/۷۳۸\,\mathrm{ft\cdot lb/s} \qquad (۴۴-۷)$$

$$\text{یک قوه اسب} = ۱\,\mathrm{hp} = ۵۵۰\,\mathrm{ft\cdot lb/s} = ۷۴۶\,\mathrm{W} \qquad (۴۵-۷)$$

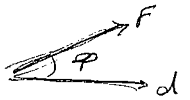
بررسی معادله‌ی ۷-۴۲ نشان می‌دهد که کار را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب توان در زمان، برحسب یکای مرسوم **کیلووات ـ ساعت** (با نماد kW.h) هم بیان کرد:

$$\text{یک کیلووات ـ ساعت} = ۱\,\mathrm{kW.h} = (۱۰^{۳}\,\mathrm{W})(۳۶۰۰\,\mathrm{s})$$

$$۱\,\mathrm{kW.h} = ۳/۶۰\times ۱۰^{۶}\,\mathrm{J} = ۳/۶۰\,\mathrm{MJ} \qquad (۴۶-۷)$$

وات و کیلووات ـ ساعت شاید به این خاطر که در صورت حساب‌های مصرف برق نوشته می‌شوند، به عنوان یکاهای الکتریکی شناخته شده‌اند. این یکاها را مانند یکاهای دیگر توان و کار یا انرژی هم می‌توان به کار برد. بنابراین، اگر کتابی را از زمین بلند کنید و آن را روی میز قرار دهید، کاری را که انجام داده‌اید می‌توانید به صورت $۴\times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{kW.h}$ (یا به صورت ساده‌تر $۴\,\mathrm{mW.h}$) بیان کنید.

آهنگ انجام دادن کار توسط نیرو روی یک ذره (یا شیء ذره مانند) را می‌توان برحسب نیرو و سرعت ذره هم بیان کرد. برای ذره‌ای که در طول یک خط راست (مثلاً، در طول محور x) تحت اثر نیروی ثابت $\vec{F}$ حرکت می‌کند و زاویه‌ی میان نیرو و خط ϕ است، با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۴۳، داریم



$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F\cos\phi\, dx}{dt} = F\cos\phi\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

یا

$$P = Fv\cos\phi \qquad (۴۷-۷)$$

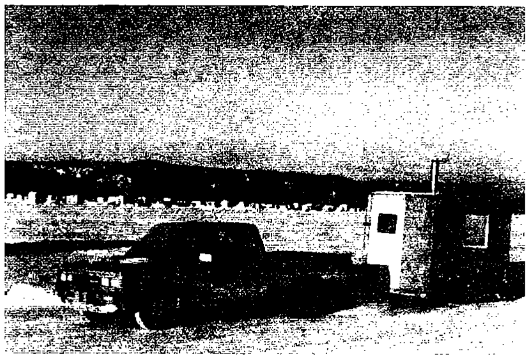
با توجه به اینکه جمله‌ی طرف راست معادله‌ی ۷-۴۷ برابر با حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\vec{F}\cdot\vec{v}$ است، معادله‌ی ۷-۴۷ را می‌توان چنین نوشت

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} \quad \text{(توان لحظه‌ای)} \qquad (۴۸-۷)$$

برای مثال، خودرو وانت شکل ۷-۱۴ نیروی $\vec{F}$ را به اتاق یدک (کاراوان) وارد می‌کند و آن را در لحظه‌ی معینی با سرعت $\vec{v}$ می‌کشد. توان لحظه‌ای ناشی از نیروی $\vec{F}$ برابر با آهنگ کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ در آن لحظه روی اتاق یدک است و از معادله‌های ۷-۴۷ و ۷-۴۸ به دست می‌آید. اگر بگوییم که این توان «توان وانت» است، اغلب پذیرفتنی است، اما باید بدانیم که: توان آهنگی است که با آن ***نیروی وارد شده*** کار انجام می‌دهد.

☑ خودآزمایی ۳

یک جسم متصل به ریسمان حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد زیرا سر دیگر ریسمان به مرکز دایره بسته شده است. آیا توان ناشی از نیروی ریسمان که به جسم وارد می‌شود، مثبت است، منفی است، یا صفر است؟



شکل ۷-۱۴ توان ناشی از نیروی خودرو وانت که به اتاق یدک وارد می‌شود، آهنگی است که با آن نیروی وارد شده روی اتاق یدک کار انجام می‌دهد.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۷-۹ توان، نیرو، و سرعت

در اینجا کار لحظه‌ای، یعنی آهنگ انجام دادن کار در هر لحظه‌ی معین را، به جای آهنگ متوسط انجام دادن کار در یک بازه‌ی زمانی حساب می‌کنیم.

شکل ۷-۱۵، نیروهای ثابت $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ را نشان می‌دهد، که به جعبه‌ای در هنگام لغزیدن بر روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک به‌سمت راست، وارد می‌شوند. نیروی $\vec{F}_1$ افقی به بزرگی ۲٫۰N و نیروی $\vec{F}_2$ که تحت زاویه‌ی ۶۰ درجه نسبت به سطح به بالاسو اثر می‌کند دارای بزرگی ۴٫۰N است. تندی جعبه v، در لحظه‌ی معینی ۳٫۰m/s است. توان ناشی از هر نیرو که در آن لحظه به جعبه اثر می‌کند و هم‌چنین، توان خالص چقدر است؟ آیا توان خالص در آن لحظه تغییر می‌کند؟

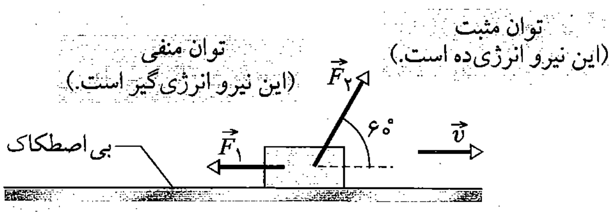
نکته‌ی کلیدی

در اینجا توان لحظه‌ای را می‌خواهیم نه توان متوسط در یک دوره‌ی زمانی را. در ضمن، سرعت ذره (به جای کار انجام شده روی ذره) در دست است. برای هر یک از نیروها معادله‌ی ۷-۴۷ را به کار می‌بریم.

محاسبه: در مورد نیروی $\vec{F}_1$ که با بردار سرعت $\vec{v}$ زاویه‌ی $\phi_1 = 180^\circ$ می‌سازد، داریم

$$P_1 = F_1 v \cos\phi_1 = (۲٫۰\,\mathrm{N})(۳٫۰\,\mathrm{m/s})\cos 180^\circ \Rightarrow$$

$$P_1 = -۶٫۰\,\mathrm{W} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$



شکل ۷-۱۵ دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ به جعبه‌ای که در روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک به سمت راست می‌لغزد، وارد می‌شوند. سرعت جعبه $\vec{v}$ است.

این نتیجه نشان می‌دهد که نیروی $\vec{F}_1$ انرژی را با آهنگ ۶٫۰J/s ***از جعبه می‌گیرد.***

برای نیروی $\vec{F}_2$ که با بردار سرعت $\vec{v}$ زاویه $\phi_2 = 60^\circ$ می‌سازد، داریم

$$P_2 = F_2 v \cos\phi_2 = (۴٫۰\,\mathrm{N})(۳٫۰\,\mathrm{m/s})\cos 60^\circ \Rightarrow$$

$$P_2 = ۶٫۰\,\mathrm{W} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

این نتیجه‌ی مثبت نشان می‌دهد که نیروی $\vec{F}_2$ انرژی را با آهنگ ۶٫۰J/s ***به جعبه می‌دهد.***

توان خالص برابر با مجموع توان‌های فردی است (توان‌ها را با علامت جبری به کار ببرید):

$$P_{\text{net}} = P_1 + P_2 = -۶٫۰\,\mathrm{W} + ۶٫۰\,\mathrm{W} \Rightarrow$$

$$P_{\text{net}} = ۰ \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

این نتیجه نشان می‌دهد که آهنگ خالص دادن انرژی به جعبه یا گرفتن انرژی از آن، صفر است. بنابراین، انرژی جنبشی جعبه ($K=\frac{1}{2}mv^2$) تغییر نمی‌کند و به‌همین دلیل تندی جعبه درهمان مقدار $3/0\,m/s$ باقی می‌ماند. چون نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ و سرعت $\vec{v}$ تغییر نمی‌کنند، با توجه به معادله‌ی ۷-۴۸ معلوم می‌شود که P_1 و P_2 ثابت‌اند و در نتیجه P_{net} نیز ثابت است.

مرور و چکیده‌ی مطالب

انرژی جنبشی انرژی جنبشی K، مربوط به حرکت ذره‌ای به جرم m و با سرعت v، خیلی کمتر از سرعت نور، برابر است با

$$K=\frac{1}{2}mv^2 \quad \text{(انرژی جنبشی)} \qquad (۷-۱)$$

کار کار W، مقدار انرژی‌ای است که با وارد کردن نیرو به یک شیء، به شیء داده یا از آن گرفته می‌شود. کارمربوط به انرژی داده شده به شیء مثبت و کار مربوط به انرژی گرفته شده از شیء منفی است.

کار انجام شده توسط نیروی ثابت کار انجام شده توسط نیروی ثابت $\vec{F}$ روی یک‌ذره درطی جابه‌جایی ذره $\vec{d}$، برابر است با

$$W=Fd\cos\phi=\vec{F}\cdot\vec{d} \quad \text{(کار نیروی ثابت)} \qquad (۷-۷، ۷-۸)$$

که در آن ϕ زاویه‌ی ثابت میان بردارهای $\vec{F}$ و $\vec{d}$ است. فقط مؤلفه‌ای از $\vec{F}$ که در راستای جابه‌جایی $\vec{d}$ است، می‌تواند روی شیء کار انجام دهد. وقتی دو یا چند نیرو به شیئی وارد می‌شوند **کار خالص** انجام شده توسط آن‌ها از مجموع کارهای فردی نیروها به دست می‌آید، که برابر با کار انجام شده روی شیء توسط نیروی برایند این نیروها، $\vec{F}_{net}$، است.

کار و انرژی جنبشی تغییر انرژی جنبشی یک ذره، ΔK، را می‌توان به صورت زیر می‌توان به W، کار خالص انجام شده روی ذره ربط داد

$$\Delta K=K_f-K_i=W \quad \text{(قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی)} \qquad (۷-۱۰)$$

که در آن K_i انرژی جنبشی آغازی شیء و K_f انرژی جنبشی پس از انجام شدن کار است. معادله‌ی ۷-۱۰ را به صورت زیر هم می‌توان نوشت

$$K_f=K_i+W \qquad (۷-۱۱)$$

کار انجام شده توسط نیروی گرانشی کار W_g، که نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ روی یک شیء ذره مانند به جرم m در طی جابه‌جایی $\vec{d}$ انجام می‌دهد، برابر است با

$$W_g=mgd\cos\phi \qquad (۷-۱۲)$$

که در آن ϕ زاویه‌ی میان بردارهای $\vec{F}_g$ و $\vec{d}$ است.

کار انجام‌شده هنگام بالابردن و پایین‌آوردن یک شیء کار W_a، که نیروی یک عامل هنگام بالا بردن یا پایین آوردن یک شیء ذره مانند انجام می‌دهد، با کار W_g، به صورت زیر مربوط است

$$\Delta K=K_f-K_i=W_a+W_g \qquad (۷-۱۵)$$

اگر انرژی جنبشی در آغاز و پایان بلند کردن شیء یکسان باشد، معادله‌ی ۷-۱۵ به صورت زیر ساده می‌شود

$$W_a=-W_g \qquad (۷-۱۶)$$

که نشان می‌دهد نیروی وارد شده همان مقدار انرژی به شیء می‌دهد که نیروی گرانشی از شیء می‌گیرد.

نیروی فنر نیروی $\vec{F}$ ناشی از یک فنر برابر است با

$$\vec{F}=-k\vec{d} \quad \text{(قانون هوک)} \qquad (۷-۲۰)$$

که در آن $\vec{d}$ جابه‌جایی سر آزاد فنر نسبت به **حالت آرامش** آن (فنر متراکم یا کشیده نشده است) و k **ثابت فنر** (معیاری برای سختی فنر) است. اگر محور x در راستای طول فنر و مبداء محور در سر آزاد فنر در حالت آرامش انتخاب شود، معادله‌ی ۷-۲۰ را می‌توان چنین نوشت

$$F=-kx \quad \text{(قانون هوک)} \qquad (۷-۲۱)$$

بنابراین، نیروی فنر متغیر است و برحسب جابه‌جایی سر آزاد فنر تغییر می‌کند.

کار انجام شده توسط نیروی فنر اگر شیئی را به سر آزاد فنری ببندیم، W_s، کار انجام شده توسط نیروی فنر هنگام حرکت کردن شیء از مکان آغازی x_i تا مکان پایانی x_f برابر است با

$$W_s = \frac{۱}{۲}kx_i^۲ - \frac{۱}{۲}kx_f^۲ \qquad (۷-۲۵)$$

به ازای $x_i = ۰$ و $x_f = x$، معادله‌ی ۷-۲۵ به صورت ساده‌ی زیر درمی‌آید

$$W_s = -\frac{۱}{۲}kx^۲ \qquad (۷-۲۶)$$

کار انجام شده توسط یک نیروی متغیر هرگاه نیروی $\vec{F}$ وارد شده به یک شیء ذره مانند به مکان شیء بستگی داشته باشد، کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ در حین حرکت کردن شیء در دستگاه x، y و z از مکان آغازی r_i با مختصات (x_i، y_i و z_i) تا مکان پایانی r_f با مختصات (x_f، y_f و z_f) را باید با انتگرال‌گیری از تابع نیرو حساب کرد. اگر فرض کنیم که مؤلفه‌ی F_x ممکن است به x اما نه به y یا z، مؤلفه‌ی F_y ممکن است به y، اما نه به x و z، و مؤلفه‌ی F_z ممکن است به z، اما نه به x یا y، بستگی داشته باشد، کار انجام شده برابر است با

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz \qquad (۷-۳۶)$$

اگر $\vec{F}$ فقط دارای مؤلفه‌ی x باشد، معادله‌ی ۷-۳۶ به صورت زیر ساده می‌شود

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx \qquad (۷-۳۲)$$

توان توان ناشی از یک نیرو ***آهنگی است*** که با آن نیرو روی شیء کار انجام می‌دهد. اگر نیرو کار W را در بازه‌ی زمانی Δt انجام دهد، ***توان متوسط*** ناشی از نیرو در این بازه‌ی زمانی برابر است با

$$P_{\text{avg}} = \frac{W}{\Delta t} \qquad (۷-۴۲)$$

توان لحظه‌ای، آهنگ لحظه‌ای انجام دادن کار است:

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad (۷-۴۳)$$

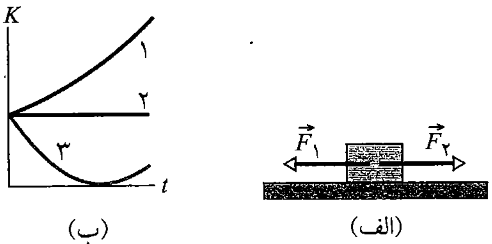
اگر زاویه‌ی میان راستای نیروی $\vec{F}$ و راستای حرکت شیء ϕ باشد، توان لحظه‌ای برابر است با

$$P = Fv\cos\phi = \vec{F}\cdot\vec{v} \qquad (۷-۴۷ ، ۷-۴۸)$$

پرسش‌ها

۱ سرعت‌های زیر را با توجه به انرژی جنبشی یک ذره، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید:
(الف) $\vec{v} = ۴\hat{i} + ۳\hat{j}$، (ب) $\vec{v} = -۴\hat{i} + ۳\hat{j}$
(پ) $\vec{v} = -۳\hat{i} + ۴\hat{j}$، (ت) $\vec{v} = ۳\hat{i} - ۴\hat{j}$
(ث) $\vec{v} = ۵\hat{i}$، و (ج) $v = ۵\,\text{m/s}$، تحت زاویه‌ی ۳۰ درجه نسبت به راستای افقی

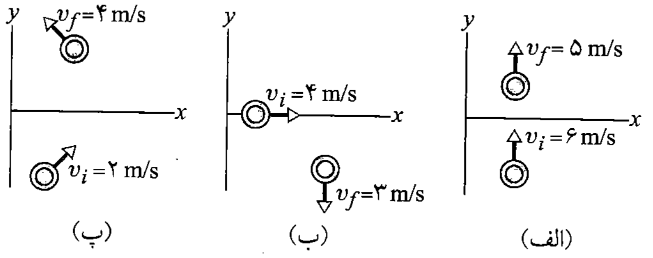
۲ شکل ۷-۱۶ الف دو نیروی افقی را نشان می‌دهد که به یک جسم در حال لغزیدن به سمت راست واقع بر روی یک سطح بی‌اصطکاک، وارد می‌شوند. شکل ۷-۱۶ ب، نشان دهنده‌ی سه نمودار مربوط به انرژی جنبشی این جسم K، برحسب زمان است. کدام یک از نمودارها با سه حالت، (الف) $F_۱ = F_۲$، (ب) $F_۱ > F_۲$ و (پ) $F_۱ < F_۲$، به خوبی سازگارند؟



شکل ۷-۱۶ پرسش ۲.

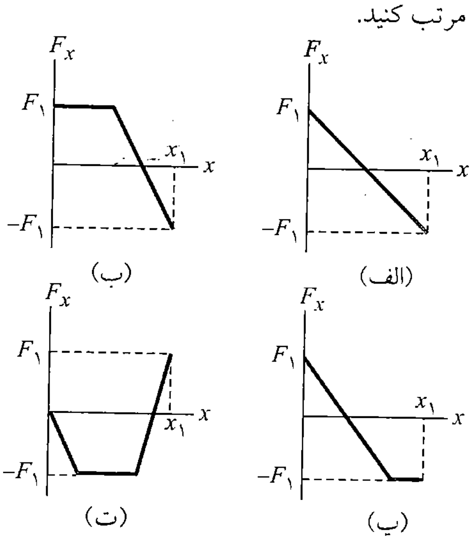
۳ در کدام حالت، کار انجام شده توسط نیروی ثابت $\vec{F}$ روی یک ذره در طی جابه‌جایی راست‌خط $\vec{d}$ مثبت یا منفی است؟ (الف) زاویه‌ی میان $\vec{F}$ و $\vec{d}$ برابر با ۳۰ درجه است؛ (ب) این زاویه ۱۰۰ درجه است؛ (پ) $\vec{F} = ۲\hat{i} - ۳\hat{j}$ و $\vec{d} = -۴\hat{i}$.

۴ یک نیروی افقی کوچک وارد شده به یک قرص هاکی در حال لغزیدن روی یخ بی‌اصطکاک سرعت قرص را در سه حالت تغییر می‌دهد. شکل ۷–۱۷، با دید از بالا، برای هر حالت تندی آغازی قرص v_i، تندی پایانی قرص v_f و جهت بردارهای سرعت متناظر را نشان می‌دهد. این حالت‌ها را با توجه به کار انجام شده توسط نیروی وارد شده روی قرص، از مثبت‌ترین تا منفی‌ترین مقدار، مرتب کنید.



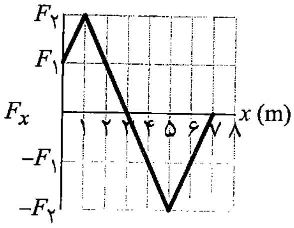
شکل ۷–۱۷ پرسش ۴.

۵ شکل ۷–۱۸ چهار نمودار (ترسیم شده با یک مقیاس) تغییرات F_x، مؤلفه‌ی x (مؤثر در راستای محور x) یک نیروی متغیر وارد شده به یک ذره را برحسب مکان x نشان می‌دهد. نمودارها را با توجه به‌کار انجام شده توسط نیرو روی ذره در طی جابه‌جایی از $x = ۰$ تا $x = x_۱$ از مثبت‌ترین تا منفی‌ترین مقدار، مرتب کنید.



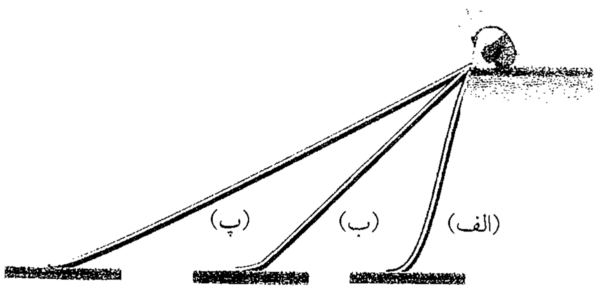
شکل ۷–۱۸ پرسش ۵.

۶ شکل ۷–۱۹ نمودار F_x، مؤلفه‌ی x نیروی وارد شده به یک ذره را نشان می‌دهد. اگر ذره از حال سکون از مکان $x = ۰$ شروع به حرکت کند، مکان ذره در حالت‌هایی که (الف) ذره بیشترین انرژی جنبشی را دارد، (ب) ذره بیشترین تندی را دارد و (پ) سرعت ذره صفر است، کجاست؟ (ت) جهت حرکت ذره پس از رسیدن به مکان $x = ۶\,\text{m}$ چیست؟



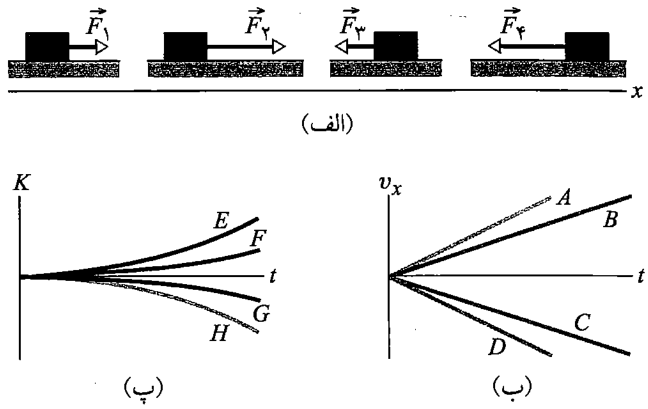
شکل ۷–۱۹ پرسش ۶.

۷ در شکل ۷–۲۰، یک بچه خوک چرب شده، برای لغزیدن و رسیدن به زمین می‌تواند یکی از سه سُرسره‌ی بی‌اصطکاک را انتخاب کند. این سُرسره‌ها را با توجه به کار انجام شده توسط نیروی گرانشی روی بچه خوک در حین پایین آمدن از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۷–۲۰ پرسش ۷.

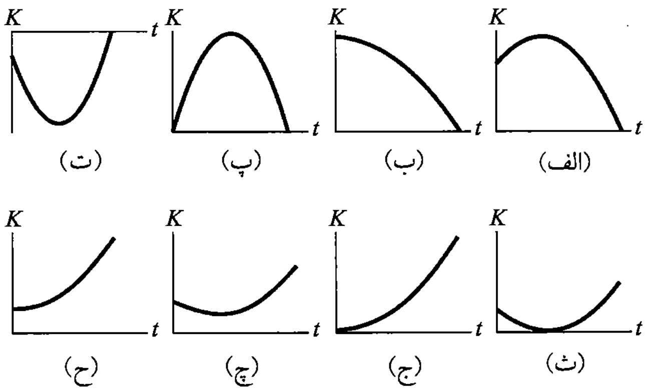
۸ شکل ۷–۲۱ الف چهار حالت را نشان می‌دهد که در آن‌ها یک نیروی افقی به جسمی که در آغاز ساکن است، وارد می‌شود. رابطه‌ی بزرگی این نیروها چنین است: $F_۲ = F_۴ = ۲F_۱ = ۲F_۳$. در شکل ۷–۲۱ ب، نمودارهای مؤلفه‌ی افقی سرعت جسم v_x، برای هر چهار حالت نشان داده شده است. (الف) کدام نمودار شکل ۷–۲۱ ب با کدام نیروی شکل ۷–۲۱ الف سازگارتر است؟ (ب) کدام نمودار شکل ۷–۲۱ پ (نمودار انرژی جنبشی K برحسب زمان t) با کدام نمودار شکل ۷–۲۱ ب به خوبی سازگار است؟



شکل ۷-۲۱ پرسش ۸.

۹ فنر A سخت‌تر از فنر B است؛ یعنی $k_A > k_B$. اگر دو فنر، (الف) تا یک مسافت متراکم شوند، و (ب) با یک نیرو متراکم شوند، نیروی کدام فنر کار بیشتری انجام می‌دهد؟

۱۰ گلوله‌ای از گِل را در نظر بگیرید که از لبه‌ی پرتگاهی پرتاب



شکل ۷-۲۲ پرسش ۱۰.

می‌شود یا می‌افتد. کدام یک از نمودارهای شکل ۷-۲۲ می‌تواند تغییر انرژی جنبشی گلوله را در حین حرکت کردن نشان دهد؟

۱۱ تک نیرویی در سه حالت به یک ذره‌ی در حال حرکت وارد می‌شود. سرعت‌ها (در آن لحظه) و نیروها عبارت‌اند از:

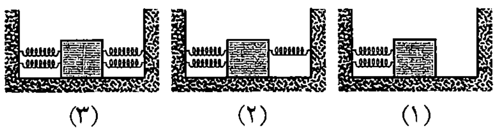
(۱) $\vec{v} = (-4\hat{i})\,m/s$ ، $\vec{F} = (6\hat{i} - 20\hat{j})\,N$؛

(۲) $\vec{v} = (2\hat{i} - 3\hat{j})\,m/s$ ، $\vec{F} = (-2\hat{i} + 7\hat{k})\,N$؛

(۳) $\vec{v} = (-3\hat{i} + \hat{j})\,m/s$ ، $\vec{F} = (2\hat{i} + 6\hat{j})\,N$.

این حالت‌ها را با توجه به آهنگ انتقال انرژی به ذره، از بیشترین تا کمترین مقدار، و آهنگ انتقال انرژی گرفته شده از ذره، از کمترین تا بیشترین مقدار، مرتب کنید.

۱۲ شکل ۷-۲۳ سه آرایش اتصال یک جسم به فنرهای مشابه را نشان می‌دهد. وقتی جسم در وسط واقع است فنرها در حال آرامش قرار دارند. این آرایش‌ها را با توجه به بزرگی نیروی برایند وارد شده به جسم، وقتی که جسم به اندازه‌ی d (الف) به سمت راست و (ب) به سمت چپ جابه‌جا می‌شود، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. این آرایش‌ها را با توجه به کار انجام شده روی جسم توسط نیروهای فنر، وقتی که جسم به اندازه‌ی d (پ) به سمت راست و (ت) به سمت چپ جابه‌جا می‌شود، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۷-۲۳ پرسش ۱۲.

مسئله‌ها

پودمان ۷-۱ انرژی جنبشی

* ۱ پروتونی (به‌جرم $m = 1.67 \times 10^{-27}\,kg$) در یک شتاب‌دهنده در طول یک خط راست با شتاب $3.6 \times 10^{15}\,m/s^2$ حرکت می‌کند. اگر پروتون با تندی آغازی $2.4 \times 10^{7}\,m/s$ مسافت $3.5\,cm$ را بپیماید، (الف) تندی پایانی آن و (ب) افزایش انرژی جنبشی آن، چقدر است؟

* ۲ اگر جرم ترکیب موشک ساتورن ۵[1] و فضاپیمای آپولو[2] متصل به آن $2.9 \times 10^{5}\,kg$ باشد و تندی‌اش به $11.2\,km/s$ برسد، انرژی جنبشی آن چقدر خواهد شد؟

* ۳ در ۱۰ اوت سال ۱۹۷۲ (۱۹ مرداد سال ۱۳۵۱) شهاب سنگ بزرگی از جوّ بالای باختر ایالات متحد آمریکا و کانادا، درست مانند سنگی که در سطح آب سُر بخورد، عبور کرد. سنگ مانند

1. Saturn V 2. Apollo

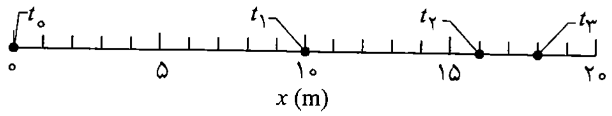
یک گوی آتشین چنان فروزان بود که در روز هم در آسمان دیده می‌شد و از دنباله‌ی شهاب سنگ معمولی روشن‌تر بود. این شهاب سنگ در حدود $۴\times ۱۰^{۶}\,\mathrm{kg}$ جرم داشت و تندی آن در حدود $۱۵\,\mathrm{km/s}$ بود. اگر سنگ در راستای قائم به جوّ زمین وارد می‌شد، تقریباً با همان تندی به سطح زمین برخورد می‌کرد. (الف) مقدار تلف شدن انرژی جنبشی شهاب سنگ (برحسب ژول) را در صورتی که به طور قائم به زمین برخورد می‌کرد حساب کنید. (ب) این انرژی را به صورت مضربی از انرژی انفجار یک مگا تن TNT، که برابر با $۴/۲\times ۱۰^{۱۵}\,\mathrm{J}$ است، بیان کنید. (پ) انرژی حاصل از انفجار بمب اتمی در روی شهر هیروشیما (ژاپن)، هم‌ارز با ۱۳ کیلو تن TNT بود. انرژی برخورد شهاب‌سنگ به زمین هم‌ارز با چند بمب هیروشیما است؟

* ۴ هر انفجاری در سطح زمین صورت گیرد، دهانه‌ای با قطری متناسب با انرژی انفجار به توان $\frac{۱}{۳}$ به جا می‌گذارد؛ قطر دهانه‌ی حاصل از انفجار یک مگاتُن TNT برابر با $۱\,\mathrm{km}$ است. به‌نظر می‌رسد در فرودست دریاچه‌ی هیورن[1] در میشیگان[2] قطر دهانه‌ی انفجار یک برخورد قدیمی $۵۰\,\mathrm{km}$ باشد. انرژی جنبشی مربوط به این برخورد، برحسب (الف) مگاتن TNT (انرژی حاصل از یک مگاتن TNT، $۴/۲\times ۱۰^{۱۵}\,\mathrm{J}$ است) و (ب) انرژی بمب هیروشیما[3] (معادل ۱۳ کیلوتن TNT)، چقدر است؟ (برخورد شهاب‌سنگ‌ها و دنباله‌دارها ممکن است آب و هوای کره‌ی زمین را به مقدار قابل توجهی تغییر داده و به انقراض نسل دایناسورها و شکل‌های دیگر حیات منجر شده باشد).

** ۵ انرژی جنبشی پدر دونده‌ای نصف انرژی جنبشی پسرش با جرمی برابر با نصف جرم پدر است. پدر تندی‌اش را به اندازه‌ی $۱/۰\,\mathrm{m/s}$ افزایش می‌دهد و در نتیجه انرژی جنبشی او با انرژی جنبشی پسرش برابر می‌شود. تندی‌های آغازی (الف) پدر و (ب) پسر، چقدر است؟

** ۶ مُهره‌ای به جرم $۱/۸\times ۱۰^{-۲}\,\mathrm{kg}$ در طول یک سیم و در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. این مُهره که در زمان $t=۰$ حرکت را آغاز می‌کند، در هنگام عبور با تندی $۱۲\,\mathrm{m/s}$

1. Huron 2. Michigan 3. Hiroshima

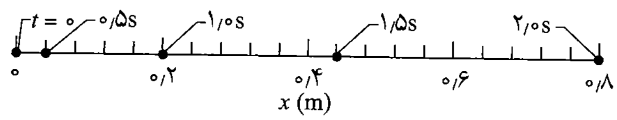


شکل ۷-۲۴ مسئله‌ی ۶.

از مکان $x=۰$ تحت تأثیر یک نیروی ثابت قرار می‌گیرد. شکل ۷-۲۴ مکان مُهره را در چهار زمان $t_۰=۰$، $t_۱=۱/۰\,\mathrm{s}$، $t_۲=۲/۰\,\mathrm{s}$، و $t_۳=۳/۰\,\mathrm{s}$، نشان می‌دهد. مُهره در زمان $t=۳/۰\,\mathrm{s}$ در یک لحظه متوقف می‌شود. انرژی جنبشی مُهره در زمان $t=۱۰\,\mathrm{s}$ چقدر است؟

پودمان ۷-۲ کار و انرژی جنبشی

* ۷ جسمی به جرم $۳/۰\,\mathrm{kg}$، در حالی که روی یک تخت هوای افقی بی‌اصطکاک ساکن است، یک‌نیروی افقی ثابت $\vec{F}$ درجهت مثبت محور x در راستای تخت هوا به آن وارد می‌شود. شکل ۷-۲۵ نمودار چند درخشی مکان جسم را در حال لغزیدن به سمت راست نشان می‌دهد. نیروی $\vec{F}$ در زمان $t=۰$ به جسم وارد شده است و نمودار، مکان جسم را در بازه‌های زمانی ۰/۵۰ ثانیه نمایش می‌دهد. نیروی وارد شده $\vec{F}$، در مدت زمان بین $t=۰$ و $t=۲/۰\,\mathrm{s}$ چقدر کار روی جسم انجام داده است؟



شکل ۷-۲۵ مسئله‌ی ۷.

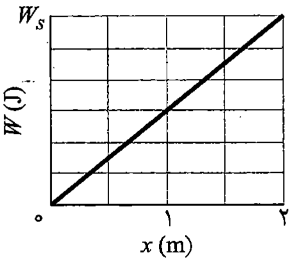
* ۸ قطعه یخ شناوری بر اثر نیروی $\vec{F}=(۲۱۰\,\mathrm{N})\hat{i}-(۱۵۰\,\mathrm{N})\hat{j}$ که به خاطر حرکت سریع آب به آن وارد می‌شود در طول یک خط راست جابه‌جایی $\vec{d}=(۱۵\,\mathrm{m})\hat{i}-(۱۲\,\mathrm{m})\hat{j}$ را انجام می‌دهد. در این جابه‌جایی نیرو روی یخ چه مقدار کار انجام می‌دهد؟

* ۹ بزرگی تنها نیروی وارد شده به یک قوطی ۲/۰ کیلوگرمی، که در صفحه‌ی xy حرکت می‌کند، $۵/۰\,\mathrm{N}$ است. قوطی دارای سرعت آغازی $۴/۰\,\mathrm{m/s}$ در جهت مثبت محور x و چند لحظه بعد، دارای سرعت $۶/۰\,\mathrm{m/s}$ در جهت مثبت محور y است. در این مدت نیروی ۵/۰ نیوتونی چقدر کار روی قوطی انجام می‌دهد؟

* ۱۰ سکه‌ای بر اثر یک نیروی ثابت روی یک سطح بی‌اصطکاک واقع در دستگاه مختصات x و y از مبداء تا نقطه‌ای با مختصات (۳٫۰m و ۴٫۰m) حرکت می‌کند. این نیرو دارای بزرگی ۲٫۰N و زاویه‌ی ۱۰۰ درجه در جهت پادساعت‌گرد نسبت به محور مثبت x است. در این جابه‌جایی چقدر کار توسط این نیرو بر روی سکه انجام می‌شود؟

** ۱۱ یک نیروی ۱۲٫۰ نیوتونی با سمت‌گیری ثابت، بر روی ذره‌ای طی جابه‌جایی $\vec{d} = (۲٫۰۰\hat{i} - ۴٫۰۰\hat{j} + ۳٫۰۰\hat{k})\,m$ در یک دستگاه مختصات سه بعدی، کار انجام می‌دهد. اگر تغییر انرژی جنبشی ذره (الف) ۳۰٫۰J+ و (ب) ۳۰٫۰J−، باشد زاویه‌ی میان نیرو و جابه‌جایی چیست؟

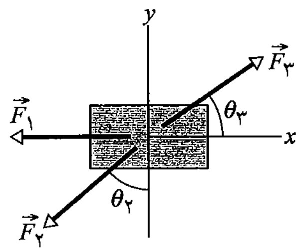
** ۱۲ در تعمیرگاهی، یک قوطی محتوی پیچ و مُهره را با دسته‌ی بلند جارو به اندازه‌ی ۲٫۰۰m در طول محور x بر روی کف چرب (بی‌اصطکاک) تعمیرگاه هُل می‌دهند. شکل ۷–۲۶ تغییرات W، کار انجام شده روی قوطی توسط نیروی افقی ثابت ناشی از دسته‌ی جارو را برحسب مکان x قوطی نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم شکل با مقدار $W_s = ۶٫۰J$ مشخص شده است. (الف) بزرگی نیرو چقدر است؟ (ب) اگر قوطی دارای انرژی جنبشی آغازی ۳٫۰۰J باشد و در جهت مثبت محور x حرکت کند، انرژی جنبشی آن در پایان جابه‌جایی ۲٫۰۰m چقدر است؟



شکل ۷–۲۶ مسئله‌ی ۱۲.

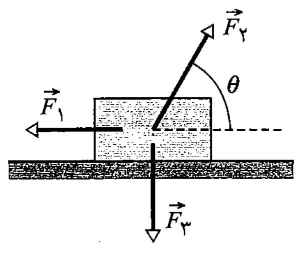
** ۱۳ سورتمه‌ای با سرنشین آن به جرم کل ۸۵kg، از یک سرازیری با تندی آغازی ۳۷m/s به یک مسیر راست افقی وارد می‌شود. اگر سورتمه با شتاب ثابت و کُند کننده‌ی ۲٫۰m/s² متوقف شود، (الف) برای این کار بزرگی نیروی کُند کننده F، چقدر باید باشد، (ب) مسافت پیموده شده d، توسط سورتمه در حرکت با شتاب کُند کننده چقدر است و (پ) کار انجام شده W، توسط این نیروی کُند کننده چیست؟ اگر شتاب کُند کننده ۴٫۰m/s² باشد، (ت) نیروی F، (ث) مسافت d، و (ج) کار W، چقدر است؟

** ۱۴ شکل ۷–۲۷ نمودار سه‌نیروی افقی را، با دید از بالا، نشان می‌دهد که به یک قوطی در حال سکون اثر می‌کنند و قوطی روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک در حال حرکت است. نیروها دارای بزرگی $F_1 = ۳٫۰۰N$ ، $F_2 = ۴٫۰۰N$ و $F_3 = ۱۰٫۰N$ و زاویه‌های نشان داده شده $\theta_2 = ۵۰٫۰°$ و $\theta_3 = ۳۵٫۰°$، هستند. کار خالص انجام شده توسط این نیروها روی قوطی در طی ۴٫۰۰m نخست جابه‌جایی، چیست؟



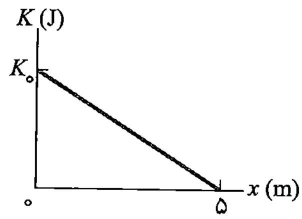
شکل ۷–۲۷ مسئله‌ی ۱۴.

** ۱۵ شکل ۷–۲۸ سه نیرو را نشان می‌دهد که به صندوقی وارد می‌شوند و آن را به اندازه‌ی ۳٫۰۰m روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک به سمت چپ جابه‌جا می‌کنند. این نیروها دارای بزرگی $F_1 = ۵٫۰۰N$ ، $F_2 = ۹٫۰۰N$ و $F_3 = ۳٫۰۰N$ هستند و زاویه‌ی نشان داده شده $\theta = ۶۰٫۰°$ است. در طی این جابه‌جایی، (الف) کار خالص انجام شده توسط سه نیرو روی صندوق چقدر است و (ب) آیا انرژی جنبشی صندوق افزایش می‌یابد یا کاهش؟



شکل ۷–۲۸ مسئله‌ی ۱۵.

** ۱۶ شیئی به جرم ۸٫۰kg در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. این شیء در هنگام عبور از نقطه‌ی $x=$ ۰ تحت تأثیر یک نیروی ثابت در راستای محور قرار می‌گیرد. شکل ۷-۲۹ تغییرات انرژی جنبشی جسم K، را برحسب مکان x از $x=$ ۰ تا $x=$ ۵٫۰m نشان می‌دهد و $K_0=$ ۳۰٫۰J. در حالی که اثر نیرو ادامه دارد، هنگام برگشتن شیء به نقطه‌ی $x=-$۳٫۰m تندی آن v، چقدر است؟



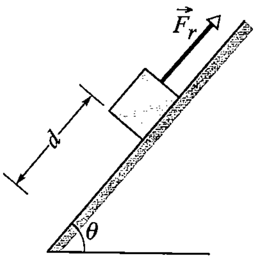
شکل ۷-۲۹ مسئله‌ی ۱۶.

پودمان ۷-۳ کار انجام شده توسط نیروی گرانشی

* ۱۷ هلیکوپتری یک فضانورد به جرم ۷۲kg را به وسیله‌ی یک کابل به طور قائم تا ارتفاع ۱۵ متری سطح دریا به بالا می‌کشد. شتاب فضانورد g/۱۰ است. چه مقدار کار روی فضانورد توسط (الف) هلیکوپتر و (ب) نیروی گرانشی، انجام می‌شود؟ درست پیش از رسیدن به هلیکوپتر، (پ) انرژی جنبشی و (ت) تندی فضانورد، چقدر است؟

* ۱۸ (الف) در سال ۱۹۷۵/۱۳۵۴ سقف سالن دوچرخه‌سواری مونرآل[1] به وزن ۳۶۰kN را به اندازه‌ی ۱۰cm بلند کردند تا مرکز آن تنظیم شود. نیروهای بلند کننده‌ی سقف چقدر کار روی آن انجام دادند؟ (ب) در سال ۱۹۶۰/۱۳۳۹ روزنامه‌ها نوشتند که مادری از شهر تامپا[2] در ایالت فلوریدا، یک طرف ماشین خود را که به علت خرابی جک روی پسرش افتاده بود، بلند کرد. اگر نیروی بالا برنده‌ی همراه با اضطراب او بتواند بار ۴۰۰۰N (در حدود $\frac{1}{4}$ وزن خودرو) را به اندازه‌ی ۵٫۰cm بالا ببرد، او چقدر کار روی خودرو انجام داده است؟

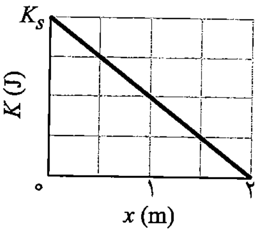
** ۱۹ درشکل ۷-۳۰، قالب یخی از یک شیب‌راهه‌ی بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta=$ °۵۰ به پایین می‌لغزد، در حالی که کارگری با نیروی $\vec{F}_r$ به بزرگی ۵۰N قالب یخ را (به



شکل ۷-۳۰ مسئله‌ی ۱۹.

کمک یک طناب) به سمت بالای شیب‌راهه می‌کشد. وقتی یخ مسافت $d=$ ۰٫۵۰m را بر روی شیب‌راهه می‌پیماید انرژی جنبشی‌اش به اندازه‌ی ۸۰J افزایش می‌یابد. اگر طناب به قالب یخ وصل نمی‌شد انرژی جنبشی یخ چقدر افزایش می‌یافت؟

** ۲۰ جسمی بر روی یک شیب راهه‌ی بی‌اصطکاک که در طول آن محور x به سمت بالا امتداد دارد، به بالا فرستاده می‌شود. شکل ۷-۳۱ نمودار انرژی جنبشی جسم را برحسب مکان x نشان می‌دهد؛ مقیاس محور قائم شکل با مقدار $K_S=$ ۴۰٫۰J مشخص شده است. اگر جسم دارای تندی آغازی ۴٫۰۰m/s باشد، نیروی عمودی وارد شده به آن چقدر است؟



شکل ۷-۳۱ مسئله‌ی ۲۰.

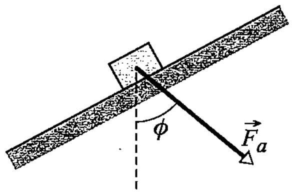
** ۲۱ برای آنکه بتوانیم جسمی به جرم M را در راستای قائم با شتاب ثابت پایین‌سوی g/۴ ببریم، از یک ریسمان استفاده می‌کنیم. پس از پایین آمدن جسم به اندازه‌ی d، مطلوب است تعیین (الف) کار انجام شده توسط ریسمان روی جسم، (ب) کار انجام شده توسط نیروی گرانشی روی جسم، (پ) انرژی جنبشی جسم و (ت) تندی جسم.

** ۲۲ یک گروه نجات، غارنورد مصدومی را با استفاده کردن از کابلی که با موتور کشیده می‌شود، از حفره‌ای یک راست به بالا می‌کشند. عمل کشیدن در سه مرحله و هر مرحله به ارتفاع قائم ۱۰٫۰m اجرا می‌شود: (الف) غارنورد که در آغاز ساکن بود، تا

1. Montreal 2. Tampa

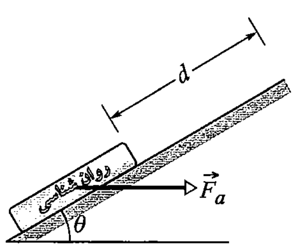
تندی ۵٫۰۰m/s شتاب پیدا می‌کند؛ (ب) سپس او با تندی ثابت ۵٫۰۰m/s به بالا کشیده می‌شود؛ (پ) سرانجام، تندی او با شتاب کُند کننده به صفر می‌رسد. در هر مرحله در حین بالا کشیدن غارنورد مصدوم به جرم ۸۰٫۰kg، چقدر کار روی او انجام می‌شود؟

** ۲۳ در شکل ۷-۳۲، یک نیروی ثابت $\vec{F}_a$ به بزرگی ۸۲٫۰N تحت زاویه‌ی $\phi =$ ۵۳٫۰° به یک جعبه‌ی کفش ۳٫۰۰ کیلوگرمی وارد می‌شود. این نیرو جعبه را با تندی ثابت به سمت بالای یک شیب‌راهه‌ی بی‌اصطکاک حرکت می‌دهد. در حین طی شدن مسافت قائم $h =$ ۰٫۱۵۰m توسط جعبه، $\vec{F}_a$ چقدر کار روی جعبه انجام می‌دهد؟



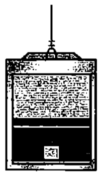
شکل ۷-۳۲ مسئله‌ی ۲۳.

** ۲۴ در شکل ۷-۳۳، نیروی افقی $\vec{F}_a$ به‌بزرگی ۲۰٫۰N به یک کتاب روان‌شناسی ۳٫۰۰ کیلوگرمی وارد می‌شود و کتاب مسافت $d =$ ۰٫۵۰۰m را به سمت بالای یک شیب‌راهه‌ی بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta =$ ۳۰٫۰° می‌پیماید. (الف) درطول این‌جابه‌جایی، کار خالص انجام شده توسط $\vec{F}_a$، نیروی گرانشی و نیروی عمودی بر روی کتاب چقدراست؟ (ب) اگر انرژی جنبشی کتاب درلحظه‌ی آغاز جابه‌جایی صفر باشد تندی آن در پایان جابه‌جایی چقدر است؟



شکل ۷-۳۳ مسئله‌ی ۲۴.

*** ۲۵ در شکل ۷-۳۴، قالب پنیری به جرم ۰٫۲۵۰kg در کف اتاقک آسانسوری به جرم ۹۰۰kg قرار دارد. اتاقک توسط یک



شکل ۷-۳۴ مسئله‌ی ۲۵.

کابل به‌اندازه‌ی $d_1 =$ ۲٫۴۰m و سپس به اندازه‌ی $d_2 =$ ۱۰٫۵m به بالا کشیده می‌شود. (الف) در فاصله‌ی d_1، اگر بزرگی نیروی عمودی وارد شده به پنیر از سوی کف اتاقک مقدار ثابت $F_N =$ ۳٫۰۰N باشد کار انجام شده توسط نیروی کابل بر روی اتاقک چقدر است؟ (ب) در فاصله‌ی d_2، اگر کار انجام شده توسط نیروی (ثابت) کابل بر روی اتاقک ۹۲٫۶۱kJ باشد، بزرگی F_N چقدر است؟

پودمان ۷-۴ کار انجام شده توسط نیروی فنر

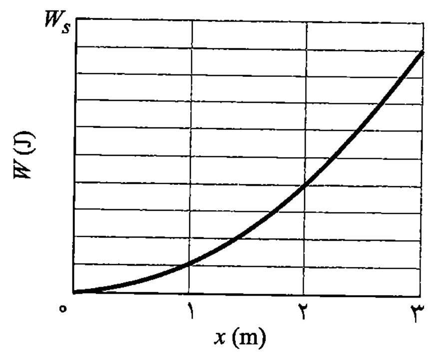
* ۲۶ در شکل ۷-۱۰، باید نیرویی به بزرگی ۸۰N وارد کنیم تا جسم در مکان $x =$ −۲٫۰cm ساکن بماند. جسم را از آن مکان به بعد به آرامی حرکت می‌دهیم تا نیروی وارد شده روی دستگاه جسم ـ فنر کار +۴٫۰J را انجام دهد؛ در این حالت باز هم جسم ساکن است. مکان جسم کجاست؟ (*راهنمایی:* دو پاسخ وجود دارد).

* ۲۷ یک فنر و یک جسم آرایشی مطابق شکل ۷-۱۰ تشکیل می‌دهند. هنگام کشیدن جسم به مکان $x =$ +۴٫۰cm باید نیرویی به بزرگی ۳۶۰N وارد کنیم تا جسم را در آنجا نگه داریم. جسم را به مکان $x =$ ۱۱cm می‌کشیم و سپس رها می‌کنیم. وقتی جسم از مکان $x_i =$ +۵٫۰cm به مکان‌های زیر کشیده می‌شود، فنر روی جسم چقدر کار انجام می‌دهد (الف) $x =$ +۳٫۰cm، (ب) $x =$ −۳٫۰cm، (پ) $x =$ −۵٫۰cm و (ت) $x =$ −۹٫۰cm؟

* ۲۸ در ترم بهاره‌ی دانشگاه MIT، دانشجویان ساختمان‌های موازی در خوابگاه‌های خاوری با تیر و کمان‌های بزرگی که از لوله‌های لاستیکی جراحی متصل به قاب پنجره ساخته شده بودند، با هم مبارزه می‌کردند. برای این کار، بادکنکی پر از آب رنگین را در یک کیسه‌ی متصل به لوله‌ی لاستیکی قرار می‌دادند

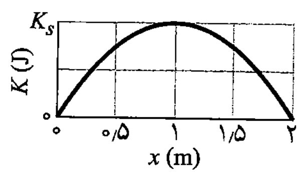
و لوله‌ی لاستیکی را تا حد پهنای اتاق می‌کشیدند. فرض کنید کشش لوله‌ی لاستیکی از قانون هوک پیروی می‌کند و ثابت نیروی لوله ۱۰۰N/m است. اگر لوله‌ی لاستیکی به اندازه‌ی ۵٫۰۰m کشیده و سپس رها شود، تا مدتی که لوله به حالت آرامش خود برمی‌گردد، نیروی آن چقدر کار روی بادکنک درون کیسه انجام می‌دهد؟

** ۲۹ در آرایش شکل ۷-۱۰، جسم را به آرامی از $x = ۰$ تا $x = +۳٫۰\,cm$ می‌کشیم تا در آنجا به حال سکون در آید. شکل ۷-۳۵ نمودار تغییرات کار انجام شده روی جسم توسط نیرو را نشان می‌دهد و مقیاس محور قائم شکل با مقدار $W_s = ۱٫۰\,J$ مشخص شده است. اکنون، جسم را تا $x = +۵٫۰\,cm$ می‌کشیم و آن را از حال سکون رها می‌کنیم. در هنگام کشیدن جسم از $x_i = +۵٫۰\,cm$ تا مکان‌های زیر فنر چقدر کار روی جسم انجام می‌دهد (الف) $x = +۴٫۰\,cm$، (ب) $x = -۲٫۰\,cm$ و (پ) $x = -۵٫۰\,cm$؟



شکل ۷-۳۵ مسئله‌ی ۲۹.

** ۳۰ در شکل ۷-۱۰ الف، جسمی به جرم m روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک قرار دارد. این جسم به یک سر یک فنر افقی (با ثابت فنر k) که سر دیگرش ثابت شده وصل شده است. جسم در حالی که در آغاز در وضعیت فنر کشیده نشده $(x = ۰)$ به حال سکون است، تحت اثر نیروی افقی ثابت $\vec{F}$ در جهت

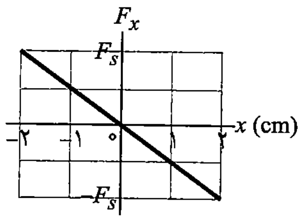


شکل ۷-۳۶ مسئله‌ی ۳۰.

مثبت محور x قرار می‌گیرد. نمودار تغییرات انرژی جنبشی به‌دست آمده توسط جسم برحسب مکان x در شکل ۷-۳۶ نشان داده شده است. مقیاس محور قائم شکل با مقدار $K_S = ۴٫۰\,J$ مشخص شده است. (الف) بزرگی $\vec{F}$ چقدر است؟ (ب) مقدار k چیست؟

** ۳۱ تنها نیروی وارد شده به یک جسم ۲٫۰ کیلوگرمی هنگام حرکت کردن در جهت مثبت محور x دارای مؤلفه‌ی $F_x = -۶x\,N$ است، که در آن x برحسب متر است. سرعت جسم در مکان $x = ۳٫۰\,m$ برابر با ۸٫۰m/s است. (الف) سرعت جسم در مکان $x = ۴٫۰\,m$ چقدر است؟ (ب) به ازای چه مقدار مثبت x، سرعت جسم ۵٫۰m/s خواهد بود؟

** ۳۲ شکل ۷-۳۷ نمودار تغییرات F_x نیروی فنر را برحسب مکان x برای آرایش جسم ـ فنر شکل ۷-۱۰ نشان می‌دهد. مقیاس قائم شکل با مقدار $F_s = ۱۶۰٫۰\,N$ مشخص شده است. جسم را در مکان $x = ۱۲\,cm$ رها می‌کنیم. وقتی جسم از $x_i = +۸٫۰\,cm$ تا مکان‌های زیر حرکت می‌کند، فنر روی آن چقدر کار انجام می‌دهد (الف) $x = +۵٫۰\,cm$، (ب) $x = -۵٫۰\,cm$، (پ) $x = -۸٫۰\,cm$ و (ت) $x = -۱۰٫۰\,cm$.



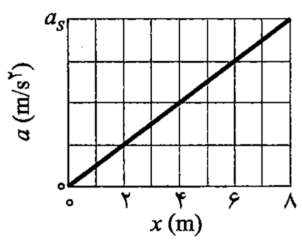
شکل ۷-۳۷ مسئله‌ی ۳۲.

*** ۳۳ در شکل ۷-۱۰ الف، جسمی روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک قرار دارد و ثابت فنر ۵۰N/m است. در آغاز فنر در حالت آرامش خود قرار دارد و جسم در مکان $x = ۰$ ساکن است. سپس، نیرویی به بزرگی ثابت ۳٫۰N وارد می‌شود و جسم را در جهت مثبت محور x می‌کشد. در نتیجه، فنر کشیده می‌شود تا جسم متوقف شود. وقتی جسم به این نقطه‌ی توقف می‌رسد، (الف) مکان جسم کجاست؟ (ب) چه کاری روی جسم توسط نیروی وارد شده انجام شده است؟ (پ) چه کاری روی جسم توسط نیروی فنر انجام شده است؟ در حین

جابه‌جاشدن جسم، (ت) در چه مکانی انرژی جنبشی جسم بیشینه است و (ث) مقدار این انرژی جنبشی بیشینه چقدر است؟

پودمان ۷-۵ کار انجام شده یک توسط نیروی متغیر کلی

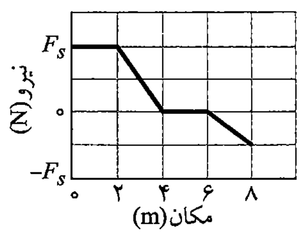
* **۳۴** آجری به جرم ۱۰kg در راستای محور x حرکت می‌کند. در شکل ۷-۳۸، نمودار تغییرات شتاب آجر برحسب مکان آن نشان داده شده و مقیاس محور قائم شکل با مقدار $a_s = ۲۰٫۰\,\text{m/s}^۲$ مشخص شده است. وقتی آجر از $x = ۰$ تا $x = ۸٫۰\,\text{m}$ حرکت می‌کند، کار خالص انجام شده توسط نیروی به وجود آورنده‌ی شتاب چیست؟



شکل ۷-۳۸ مسئله‌ی ۳۴.

* **۳۵** نیرویی که در راستای محور x به یک ذره اثر می‌کند از رابطه‌ی $F = F_۰(\frac{x}{x_۰} - ۱)$ به دست می‌آید. مطلوب است تعیین کار انجام شده توسط این نیرو هنگام حرکت کردن ذره از $x = ۰$ تا $x = ۲x_۰$، (الف) با ترسیم نمودار $F(x)$ و اندازه‌گیری کار از روی نمودار، و (ب) با انتگرال‌گیری از تابع $F(x)$.

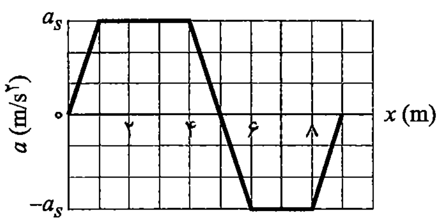
* **۳۶** جسمی به جرم ۵٫۰kg بر اثر نیرویی که نمودار تغییرات آن برحسب مکان مطابق شکل ۷-۳۹ است، روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک در خط راست حرکت می‌کند. مقیاس محور قائم شکل با مقدار $F_s = ۱۰٫۰\,\text{N}$ مشخص شده است. وقتی



شکل ۷-۳۹ مسئله‌ی ۳۶.

جسم از مبداء مختصات تا مکان $x = ۸٫۰\,\text{m}$ حرکت می‌کند، کار انجام شده توسط این نیرو چقدر است؟

** **۳۷** شکل ۷-۴۰ نمودار تغییرات شتاب ذره‌ای به جرم ۲٫۰۰kg را، که از حال سکون تحت اثر نیروی $\vec{F}_a$ در راستای محور x از $x = ۰$ تا $x = ۹٫۰\,\text{m}$ حرکت می‌کند، نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم شکل با مقدار $a_s = ۶٫۰\,\text{m/s}^۲$ مشخص شده است. در هنگام رسیدن ذره به مکان‌های زیر نیرو چقدر کار بر روی ذره انجام داده است (الف) $x = ۴٫۰\,\text{m}$، (ب) $x = ۷٫۰\,\text{m}$، و (پ) $x = ۹٫۰\,\text{m}$؟ در هنگام رسیدن به مکان‌های زیر، تندی ذره و جهت آن چیست (ت) $x = ۴٫۰\,\text{m}$، (ث) $x = ۷٫۰\,\text{m}$، و (ج) $x = ۹٫۰\,\text{m}$؟



شکل ۷-۴۰ مسئله‌ی ۳۷.

** **۳۸** جسمی ۱٫۵ کیلوگرمی در حالی که در آغاز روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک ساکن است، تحت اثر یک نیروی افقی در جهت مثبت محور x قرار می‌گیرد. این نیرو از رابطه‌ی $F(x) = (۲٫۵ - x^۲)\hat{\text{i}}\,\text{N}$ به دست می‌آید، که در آن x برحسب متر و مکان آغازی جسم $x = ۰$ است. (الف) جسم در حین عبور از مکان $x = ۲٫۰\,\text{m}$ انرژی جنبشی‌اش چقدر است؟ (ب) بیشینه‌ی انرژی جنبشی جسم در فاصله‌ی $x = ۰$ تا $x = ۲٫۰\,\text{m}$ چیست؟

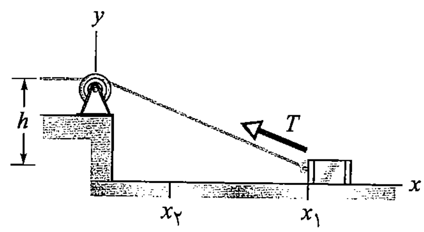
** **۳۹** در هنگام حرکت کردن یک ذره در راستای محور x به آن نیروی $\vec{F} = (cx - ۳٫۰۰x^۲)\hat{\text{i}}$ وارد می‌شود. در این رابطه $\vec{F}$ برحسب نیوتون، x برحسب متر و c یک مقدار ثابت است. انرژی جنبشی ذره در مکان $x = ۰$، برابر با ۲۰٫۰J و در مکان $x = ۳٫۰۰\,\text{m}$، برابر با ۱۱٫۰J است. مقدار c را پیدا کنید.

** **۴۰** یک قوطی ماهی ساردین با نیرویی به بزرگی $F = \exp(-۴x^۲)$، که در آن x برحسب متر و F برحسب نیوتون است، بر روی محور x از $x = ۰٫۲۵\,\text{m}$ تا

$x = ۱٫۲۵\,\mathrm{m}$ حرکت داده می‌شود. (در اینجا exp نماد تابع نمایی است). این نیرو چقدر کار روی قوطی انجام می‌دهد؟

✲✲ ۴۱ تک نیرویی به‌شیئی به‌جرم ۳٫۰kg وارد می‌شود. معادله‌ی تغییرات مکان شیء به صورت $x = ۳٫۰t - ۴٫۰t^{۲} + ۱٫۰t^{۳}$ است، که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. مطلوب است تعیین کار انجام شده توسط نیرو روی شیء در مدت $t = ۰$ تا $t = ۴٫۰\,\mathrm{s}$.

✲✲✲ ۴۲ شکل ۷-۴۱ طناب متصل به صندوقی را نشان می‌دهد که می‌توانند در راستای محور x بر روی یک ریل افقی بی‌اصطکاک بلغزد. انتهای سمت چپ این طناب واقع در ارتفاع $h = ۱٫۲۰\,\mathrm{m}$ از روی قرقره‌ای با جرم و اصطکاک ناچیز طوری کشیده می‌شود که صندوق از $x_۱ = ۳٫۰۰\,\mathrm{m}$ تا $x_۲ = ۱٫۰۰\,\mathrm{m}$ بر روی ریل می‌لغزد. در طول حرکت نیروی کشش طناب دارای مقدار ثابت ۲۵٫۰N است. انرژی جنبشی صندوق در طول حرکت چه تغییری می‌کند؟



شکل ۷-۴۱ مسئله‌ی ۴۲.

پودمان ۷-۶ توان

✲ ۴۳ یک نیروی ۵٫۰ نیوتونی به جسمی به جرم ۱۵kg، که در آغاز ساکن است، وارد می‌شود. مطلوب است محاسبه‌ی کار این نیرو (الف) در ثانیه‌ی اول، (ب) در ثانیه‌ی دوم و (پ) در ثانیه‌ی سوم، هم‌چنین، (ت) توان لحظه‌ای ناشی از این نیرو در پایان ثانیه‌ی سوم.

✲ ۴۴ اسکی‌بازی به وسیله‌ی طنابی روی یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک و با زاویه‌ی شیب ۱۲ درجه نسبت به افق به سمت بالا کشیده می‌شود. طناب با تندی ثابت ۱٫۰m/s به طور موازی با سطح حرکت می‌کند. نیروی طناب برای بالا کشیدن اسکی‌باز روی سطح شیب‌دار به اندازه‌ی ۸٫۰m کاری برابر با ۹۰۰J انجام می‌دهد. (الف) اگر طناب با تندی ثابت ۲٫۰m/s حرکت کند، نیروی طناب برای حرکت دادن اسکی‌باز به اندازه‌ی ۸٫۰m بر روی سطح شیب‌دار، چقدر کار انجام می‌دهد؟ وقتی طناب با تندی (ب) ۱٫۰m/s و (پ) با تندی ۲٫۰m/s حرکت می‌کند، نیروی طناب با چه آهنگی روی اسکی‌باز کار انجام می‌دهد؟

✲ ۴۵ جسمی به جرم ۱۰۰kg به وسیله‌ی یک نیروی ۱۲۲ نیوتونی، که راستایش در بالای افق زاویه‌ی ۳۷ درجه می‌سازد، با تندی ثابت ۵٫۰m/s روی یک سطح افقی کشیده می‌شود. این نیرو با چه آهنگی روی جسم کار انجام می‌دهد؟

✲ ۴۶ جرم اتاقک آسانسوری با بار درون آن $۳٫۰ \times ۱۰^{۳}\,\mathrm{kg}$ است. اتاقک در مدت ۲۳ ثانیه با تندی ثابت به اندازه‌ی ۲۱۰m به سمت بالا حرکت می‌کند. نیروی کشش کابل با چه آهنگ متوسطی روی اتاقک کار انجام می‌دهد؟

✲✲ ۴۷ ماشینی یک بسته‌ی ۴٫۰ کیلوگرمی را از مکان آغازی $\vec{d}_i = (۰٫۵۰\,\mathrm{m})\hat{i} + (۰٫۷۵\,\mathrm{m})\hat{j} + (۰٫۲۰\,\mathrm{m})\hat{k}$ در زمان $t = ۰$ به مکان پایانی $\vec{d}_f = (۷٫۵۰\,\mathrm{m})\hat{i} + (۱۲٫۰\,\mathrm{m})\hat{j} + (۷٫۲۰\,\mathrm{m})\hat{k}$ در زمان $t = ۱۲$ می‌برد. نیروی ثابت وارد شده به بسته از سوی ماشین $\vec{F} = (۲٫۰۰\,\mathrm{N})\hat{i} + (۴٫۰۰\,\mathrm{N})\hat{j} + (۶٫۰۰\,\mathrm{N})\hat{k}$ است. برای انجام دادن این جابه‌جایی، مطلوب است تعیین (الف) کار انجام شده روی بسته توسط نیروی ماشین و (ب) توان متوسط نیروی ماشین وارد شده به بسته.

✲✲ ۴۸ ملاقه‌ای به جرم ۰٫۳۰kg که در حال لغزیدن روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک است، به یک سر فنری افقی (با ثابت فنر $k = ۵۰۰\,\mathrm{N/m}$) وصل شده و سر دیگر فنر ثابت است. وقتی که ملاقه از مکان تعادل خود (نقطه‌ای که در آن نیروی فنر صفر است) می‌گذرد، انرژی جنبشی‌اش ۱۰J است. (الف) هنگام عبور کردن ملاقه از مکان تعادل، فنر با چه آهنگی روی آن کار انجام می‌دهد؟ (ب) وقتی فنر به اندازه‌ی ۰٫۱۰m متراکم و ملاقه از مکان تعادل دور می‌شود، فنر با چه آهنگی روی آن کار انجام می‌دهد؟

✲✲ ۴۹ اتاقک کاملاً بارگیری شده‌ی آسانسوری که به آرامی حرکت می‌کند، با محموله‌ی خود دارای جرم کل ۱۲۰۰kg است. می‌خواهیم آسانسور از حالت سکون در مدت ۳٫۰ دقیقه مسافت ۵۴m را به بالاسو بپیماید و سپس متوقف شود. جرم

وزنه‌ی تعادل آسانسور فقط ۹۵۰kg است. در نتیجه، برای کشیدن آسانسور به بالاسو باید موتور به آن کمک کند. توان متوسطی که لازم است نیروی موتور ازطریق کابل به آسانسور بدهد، چقدر است؟

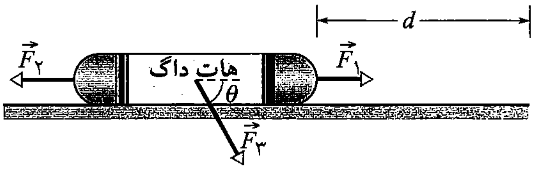
** ۵۰ (الف) یک شیء ذره مانند که در زمان معینی تحت تأثیر نیروی $\vec{F} = (۴/۰\text{N})\hat{\text{i}} - (۲/۰\text{N})\hat{\text{j}} + (۹/۰\text{N})\hat{\text{k}}$ قرار دارد، سرعتش $\vec{v} = -(۲/۰\text{m/s})\hat{\text{i}} + (۴/۰\text{m/s})\hat{\text{k}}$ است. این نیرو با چه آهنگ لحظه‌ای روی شیء کار انجام می‌دهد؟ (ب) در زمان دیگری سرعت شیء فقط دارای مؤلفه‌ی y است. اگر نیرو تغییر نکند و توان لحظه‌ای ۱۲W− باشد، سرعت شیء در آن زمان چیست؟

** ۵۱ نیروی $\vec{F} = (۳/۰۰\text{N})\hat{\text{i}} + (۷/۰۰\text{N})\hat{\text{j}} + (۷/۰۰\text{N})\hat{\text{k}}$ به شیء متحرکی به‌جرم ۲/۰۰kg وارد می‌شود و در مدت ۴/۰۰s از مکان آغازی $\vec{d}_i = (۳/۰۰\text{m})\hat{\text{i}} - (۲/۰۰\text{m})\hat{\text{j}} + (۵/۰۰\text{m})\hat{\text{k}}$ به مکان پایانی $\vec{d}_f = -(۵/۰۰\text{m})\hat{\text{i}} + (۴/۰۰\text{m})\hat{\text{j}} + (۷/۰۰\text{m})\hat{\text{k}}$ حرکت می‌کند. مطلوب است تعیین (الف) کار انجام شده توسط این نیرو در بازه‌ی زمانی ۴/۰۰s بر روی شیء، (ب) توان متوسط ناشی از نیرو در این بازه‌ی زمانی و (پ) زاویه‌ی میان بردارهای $\vec{d}_i$ و $\vec{d}_f$.

*** ۵۲ یک خودرو ویژه از حالت سکون شتاب می‌گیرد و در حالی که موتور آن با توان ثابت P کار می‌کند، مسافت معینی را در زمان T می‌پیماید. اگر راننده بتواند توان موتور خودرو را به مقدار جزئی dP افزایش دهد، مدت پیمودن همان مسافت چقدر تغییر می‌کند؟

مسئله‌های بیشتر

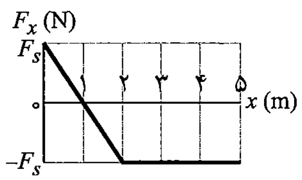
۵۳ شکل ۷-۴۲ یک بسته‌ی سرد هات داگ را نشان می‌دهد که تحت اثر سه نیرو روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک به راست‌سو می‌لغزد و مسافت $d =$ ۲۰/۰cm را می‌پیماید. دو تا از این نیروها افقی و دارای بزرگی $F_1 =$ ۵/۰۰N و $F_2 =$ ۱/۰۰N هستند؛ نیروی سوم تحت زاویه‌ی $\theta =$ °۶۰/۰ به سمت پایین وارد می‌شود و بزرگی‌اش $F_3 =$ ۴/۰۰N است. (الف) در طی این جابه‌جایی ۲۰/۰cm، ***کار خالص*** انجام شده روی بسته



شکل ۷-۴۲ مسئله‌ی ۵۳.

توسط سه نیروی وارد شده، نیروی گرانشی وارد شده به بسته و نیروی عمودی وارد شده به بسته، چیست؟ (ب) اگر بسته دارای جرم ۲/۰kg و انرژی جنبشی آغازی صفر باشد، تندی‌اش در پایان این جابه‌جایی چقدر است؟

۵۴ هنگام حرکت کردن جسمی به جرم ۲/۰kg در راستای محور x، تنها نیروی مؤثر بر آن طبق نمودار شکل ۷-۴۳، تغییر می‌کند. مقیاس محور قائم شکل با مقدار $F_s =$ ۴/۰N مشخص شده است. سرعت جسم در مکان $x =$ ۰ برابر با ۴/۰m/s است. (الف) انرژی جنبشی جسم در مکان $x =$ ۳/۰m چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی جسم به ازای چه مقدار x برابر با ۸/۰J است؟ (پ) بیشینه‌ی انرژی جنبشی جسم در فاصله‌ی $x =$ ۰ تا $x =$ ۵/۰m چیست؟

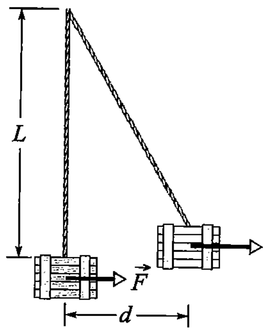


شکل ۷-۴۳ مسئله‌ی ۵۴.

۵۵ اسبی با تندی ۶/۰mi/h حرکت می‌کند و ارابه‌ای را با نیروی ۴۰lb تحت زاویه‌ی ۳۰ درجه بالای راستای افقی می‌کشد. (الف) اسب در مدت ۱۰ دقیقه چقدر کار انجام می‌دهد؟ (ب) توان متوسط این نیرو (برحسب قوه اسب) چقدر است؟

۵۶ شیئی به جرم ۲/۰kg در روی یک سطح افقی از حالت سکون با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند و پس از ۳/۰ ثانیه تندی‌اش به ۱۰m/s می‌رسد. (الف) در بازه‌ی زمانی ۳/۰ ثانیه نیروی شتاب دهنده چقدر کار روی شیء انجام می‌دهد؟ توان لحظه‌ای ناشی از نیرو، (ب) در پایان این بازه‌ی زمانی و (پ) در پایان نیمه‌ی اول این بازه‌ی زمانی، چقدر است؟

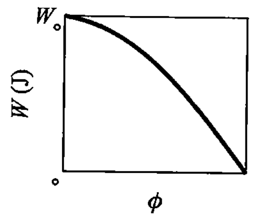
۵۷ صندوقی به جرم ۲۳۰kg به انتهای طنابی به طول $L = ۱۲/۰\text{m}$ آویخته شده است. این صندوق را با نیروی متغیر $\vec{F}$ به‌طور افقی هُل می‌دهیم تا به اندازه‌ی مسافت $d = ۴/۰۰\text{m}$ به یک طرف حرکت کند (شکل ۷-۴۴). (الف) وقتی صندوق در این مکان پایانی قرار می‌گیرد بزرگی نیروی $\vec{F}$ چقدر است؟ در حین جابه‌جا شدن، (ب) کار کل انجام شده روی صندوق، (پ) کار انجام شده روی صندوق توسط نیروی گرانشی و (ت) کار انجام شده روی صندوق توسط نیروی کشش طناب، چقدر است؟ (ث) با دانستن اینکه صندوق پیش و پس از جابه‌جاشدن بی‌حرکت است، از پاسخ‌های قسمت‌های (ب)، (پ) و (ت) استفاده کنید و کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ بر روی صندوق را پیدا کنید. (ج) چرا کار این نیرو برابر با حاصل‌ضرب جابه‌جایی افقی در نیروی پاسخ قسمت (الف) نیست؟



شکل ۷-۴۴ مسئله‌ی ۵۷.

۵۸ کارگری برای کشیدن صندوق ۵۰ کیلوگرمی بر روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک، یک نیروی ۲۱۰ نیوتونی تحت زاویه‌ی ۲۰ درجه در بالای افق، وارد می‌کند. وقتی صندوق به اندازه‌ی ۳/۰m حرکت می‌کند، چه مقدار کار روی صندوق توسط، (الف) نیروی کارگر، (ب) نیروی گرانشی و (پ) نیروی عمودی وارد شده به صندوق از سوی سطح، انجام می‌شود؟ (ت) کار کل انجام شده روی صندوق چقدر است؟

۵۹ مُهره‌ای تحت اثر نیروی $\vec{F_a}$ در طول یک سیم راست به اندازه‌ی $+۵/۰\text{cm}$ جابه‌جا می‌شود. بزرگی $\vec{F_a}$ به مقدار معینی در نظر گرفته می‌شود، اما ϕ، زاویه‌ی میان $\vec{F_a}$ و جابه‌جایی مُهره را می‌توان انتخاب کرد. شکل ۷-۴۵ نمودار W، کار انجام شده توسط $\vec{F_a}$ روی مُهره را برای گستره‌ای از مقادیر ϕ نشان



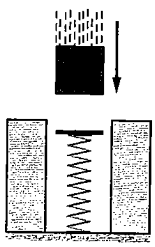
شکل ۷-۴۵ مسئله‌ی ۵۹.

می‌دهد و $W_۰ = ۲۵\text{J}$. کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F_a}$ به ازای (الف) $\phi = ۶۴°$ و (ب) $\phi = ۱۴۷°$، چقدر است؟

۶۰ یک بچه‌ی کم جرئت در حین پایین لغزیدن از یک سُرسُره‌ی بی‌اصطکاک، توسط مادرش مراقبت و مهار می‌شود. اگر نیروی وارد شده به بچه از سوی مادرش ۱۰۰N به سمت بالای سُرسُره باشد، انرژی جنبشی بچه پس از پیمودن مسافت ۱/۸m به‌سمت پایین به‌اندازه‌ی ۳۰J افزایش می‌یابد. (الف) در حین پایین آمدن بچه به اندازه‌ی ۱/۸m، نیروی گرانشی چقدر کار بر روی او انجام می‌دهد؟ (ب) اگر بچه توسط مادرش مراقبت نشود، انرژی جنبشی‌اش در طی همان مسافت ۱/۸m به‌سمت پایین، چقدر افزایش می‌یابد؟

۶۱ کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = (۲x\text{N})\,\hat{i} + (۳\text{N})\,\hat{j}$ (که در آن x برحسب متر است) هنگام حرکت دادن یک ذره از مکان $\vec{r_i} = (۲\text{m})\,\hat{i} + (۳\text{m})\,\hat{j}$، به مکان $\vec{r_f} = -(۴\text{m})\,\hat{i} - (۳\text{m})\,\hat{j}$ چقدر است؟

۶۲ جسمی به جرم ۲۵۰ گرم روی یک فنر قائم در حال آرامش با ثابت فنر $k = ۲/۵\,\text{N/cm}$ می‌افتد (شکل ۷-۴۶). جسم به فنر وصل و پیش از توقف لحظه‌ای به اندازه‌ی ۱۲cm متراکم می‌شود. در حین متراکم شدن فنر، چقدر کار روی جسم توسط، (الف) نیروی گرانشی وارد شده به جسم و (ب) نیروی فنر، انجام می‌شود؟ (پ) تندی جسم درست پیش از برخورد به فنر



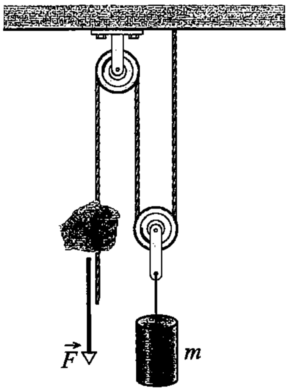
شکل ۷-۴۶ مسئله‌ی ۶۲.

چقدر است؟ (فرض کنید اصطکاک قابل چشم‌پوشی است).
(ت) اگر تندی برخورد جسم به فنر دو برابر شود، بیشینه‌ی تراکم فنر چقدر می‌شود؟

۶۳ برای هُل دادن صندوقی به جرم ۲۵٫۰kg به سمت بالای یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب ۲۵٫۰ درجه نسبت به افق، کارگری نیروی ۲۰۹N را به طور موازی با سطح شیب‌دار به صندوق وارد می‌کند. وقتی صندوق به اندازه‌ی ۱٫۵m به سمت بالا می‌لغزد چقدر کار توسط (الف) نیروی وارد شده از سوی کارگر، (ب) نیروی گرانشی وارد شده به صندوق و (پ) نیروی عمودی وارد شده به صندوق از سوی سطح شیب‌دار، انجام می‌شود؟ (ت) کار کل انجام شده روی صندوق چقدر است؟

۶۴ در انباری برای انتقال جعبه‌ها از جایی به جای دیگر از تسمه نقاله‌ای استفاده می‌شود که با تندی ثابت ۰٫۵۰m/s حرکت می‌کند. تسمه نقاله در یک جا به اندازه‌ی ۲٫۰m از یک شیب ۱۰ درجه نسبت به افق بالا می‌رود، سپس یک فاصله‌ی ۲٫۰ متری را به طور افقی می‌پیماید و، سرانجام، به اندازه‌ی ۲٫۰m متر از یک شیب ۱۰ درجه نسبت به افق پایین می‌رود. فرض کنید جعبه‌ای به جرم ۲٫۰kg بدون لغزیدن روی تسمه قرار گرفته است. در حالت‌های زیر نیروی تسمه با چه آهنگی روی جعبه کار انجام می‌دهد؟ (الف) هنگام بالا رفتن جعبه از شیب ۱۰ درجه، (ب) هنگام حرکت کردن جعبه به طور افقی و (پ) هنگام پایین رفتن جعبه از شیب ۱۰ درجه.

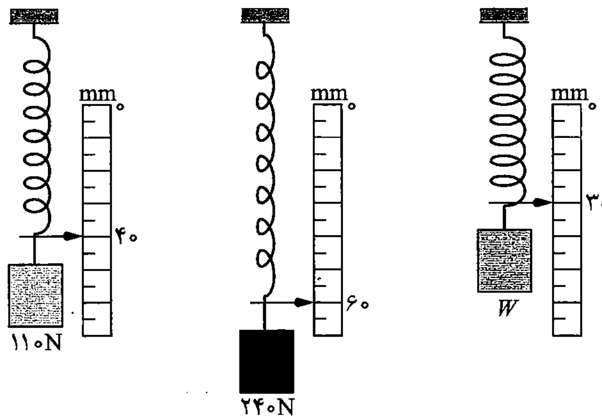
۶۵ در شکل ۷-۴۷، ریسمانی از دو قرقره‌ی بی‌اصطکاک و با جرم ناچیز عبور کرده است. یک قوطی به‌جرم $m = ۲۰\text{kg}$ از قرقره‌ی متحرکی آویزان است و نیروی $\vec{F}$ با دست به سر آزاد ریسمان وارد می‌شود. (الف) اگر بخواهیم قوطی باتندی ثابت بالا کشیده شود، بزرگی نیروی $\vec{F}$ چقدر باید باشد؟ (ب) برای بالا بردن قوطی به‌اندازه‌ی ۲٫۰cm، سر آزاد ریسمان چه‌اندازه باید کشیده شود؟ در حین بلند کردن قوطی کار انجام شده روی آن (پ) توسط نیروی دست (از طریق ریسمان) و (ت) توسط نیروی گرانشی وارد شده به قوطی، چقدر است؟ (*راهنمایی:* وقتی ریسمان مطابق شکل به دور قرقره‌ی متحرک پیچیده می‌شود، قرقره با نیرویی دو برابر نیروی کشش ریسمان به بالا کشیده می‌شود).



شکل ۷-۴۷ مسئله‌ی ۶۵.

۶۶ اگر خودرویی به جرم ۱۲۰۰kg در بزرگ‌راهی با تندی ۱۲۰km/h حرکت کند، انرژی جنبشی‌اش که توسط یک شخص ایستاده در کنار بزرگ‌راه معین می‌شود، چقدر است؟

۶۷ فنری‌که عقربه‌ای به آن وصل‌شده درکنار یک‌مقیاس درجه‌بندی شده بر حسب میلی‌متر آویخته شده است. سه بسته‌ی مختلف را، مطابق شکل ۷-۴۸، به نوبت به این فنر می‌آویزیم. (الف) وقتی هیچ بسته‌ای به فنر آویخته نشده است، عقربه به چه عددی را نشان می‌دهد؟ (ب) وزن بسته‌ی سوم W، چقدر است؟



شکل ۷-۴۸ مسئله‌ی ۶۷.

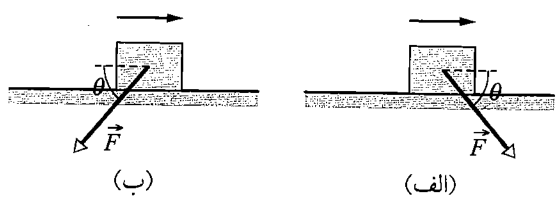
۶۸ یک قایق یخ‌پیما، که بر روی دریاچه‌ی یخ‌زده‌ی بی‌اصطکاکی ساکن است، ناگهان تحت تأثیر نیروی ثابت ۲۰۰N یک باد در حال وزیدن به سوی خاور قرار می‌گیرد. در اثر زاویه‌ی مناسب بادبان، باد قایق را در یک خط راست تحت زاویه‌ی ۲۰ درجه‌ی شمال محور خاوری به اندازه‌ی ۸٫۰m می‌لغزاند. انرژی جنبشی قایق یخ‌پیما در پایان مسافت ۸٫۰m چقدر است؟

۶۹ اگر یک بالابر اسکی ۱۰۰ اسکی‌باز، هر یک با وزن متوسط ۶۶۰N را با تندی ثابت در مدت ۶۰٫۰ ثانیه تا ارتفاع ۱۵۰m بالا ببرد، توان متوسط لازم نیروی بالابرنده چقدر است؟

۷۰ نیروی $\vec{F} = (۴٫۰\,\mathrm{N})\hat{i} + c\hat{j}$ به ذره‌ای در حال جابه‌جا شدن به اندازه‌ی $\vec{d} = (۳٫۰\,\mathrm{m})\hat{i} - (۲٫۰\,\mathrm{m})\hat{j}$ وارد می‌شود. (نیروهای دیگری هم به این ذره وارد می‌شوند). اگر کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ روی ذره (الف) صفر، (ب) ۱۷J و (پ) ۱۸J− باشد، مقدار c چیست؟

۷۱ نیروی ثابتی به بزرگی ۱۰N، که با محور x مثبت زاویه‌ی ۱۵۰ درجه (در جهت پادساعت‌گرد) تشکیل می‌دهد، به جسمی به جرم ۲٫۰kg در حال حرکت کردن در صفحه‌ی xy وارد می‌شود. هرگاه جسم از مبداء مختصات تا نقطه‌ی مشخص شده با بردار مکان $(۲٫۰\,\mathrm{m})\hat{i} - (۴٫۰\,\mathrm{m})\hat{j}$ حرکت کند، این نیرو چقدر کار روی جسم انجام می‌دهد؟

۷۲ در شکل ۷-۴۹ الف، یک نیروی ۲٫۰ نیوتونی تحت زاویه‌ی پایین‌سوی θ به جسمی به جرم ۴٫۰kg وارد می‌شود و جسم را به اندازه‌ی ۱٫۰m بر روی یک سطح بی‌اصطکاک به راست‌سو حرکت می‌دهد. مطلوب است تعیین رابطه‌ی مربوط به تندی پایانی v_f این جسم در انتهای مسافت پیموده شده، به شرط آنکه سرعت آغازی جسم (الف) صفر و (ب) ۱٫۰m/s به سمت راست، باشد. (پ) وضعیت نشان داده شده در شکل ۷-۴۹ ب، مشابه حالتی است که جسم در آغاز با تندی ۱٫۰m/s به سمت راست حرکت می‌کند، اما نیروی ۲٫۰N به سمت چپ و پایین‌سو است. رابطه‌ی مربوط به تندی v_f جسم در انتهای مسافت پیموده شده‌ی ۱٫۰m را به‌دست آورید. (ت) نمودار هر سه رابطه‌ی به دست آمده برای v_f را برحسب زاویه‌ی پایین‌سوی θ از $\theta = ۰°$ تا $\theta = ۹۰°$ رسم کنید. این نمودارها را توضیح دهید.



شکل ۷-۴۹ مسئله‌ی ۷۲.

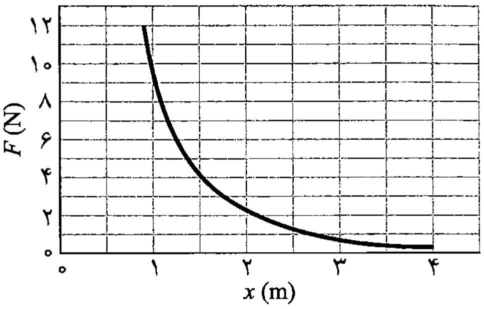
۷۳ نیروی $\vec{F}$ در جهت مثبت محور x به جسمی وارد و آن را در راستای محور حرکت می‌دهد. اگر بزرگی این نیرو $F = ۱۰e^{-x/۲٫۰}\mathrm{N}$ و x برحسب متر باشد، کار انجام شده توسط نیرو روی جسم را در حالتی که جسم از $x = ۰$ تا $x = ۲٫۰\mathrm{m}$ حرکت می‌کند، (الف) با ترسیم نمودار $F(x)$ و برآورد کردن مساحت زیر منحنی و (ب) با انتگرال گرفتن از تابع $F(x)$ برای تعیین کار به روش تحلیلی، پیدا کنید.

۷۴ ذره‌ای تحت تأثیر نیروی $\vec{F} = (۲\mathrm{N})\hat{i} - (۴\mathrm{N})\hat{j}$ در طول یک مسیر راست جابه‌جایی $\vec{d} = (۸\,\mathrm{m})\hat{i} + c\hat{j}$ را انجام می‌دهد. (نیروهای دیگری هم به این ذره وارد می‌شوند). مقدار c را به‌گونه‌ای معین کنید که کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ روی ذره، (الف) صفر، (ب) مثبت و (پ) منفی باشد.

۷۵ اتاقک آسانسوری ۴۵۰۰kg جرم دارد و می‌تواند حداکثر بار ۱۸۰۰kg را حمل کند. اگر این اتاقک با بار کامل با تندی ۳٫۸۰m/s به بالاسو حرکت کند، توان نیروی وارد شده چقدر باید باشد تا این تندی حفظ شود؟

۷۶ قطعه‌ی یخی به جرم ۴۵kg از سطح شیب‌دار بی‌اصطکاکی به طول ۱٫۵m و به ارتفاع ۰٫۹۱m به پایین می‌لغزد. کارگری به طور موازی با سطح شیب‌دار و به سمت بالا به یخ طوری نیرو وارد می‌کند که یخ با تندی ثابت به پایین می‌لغزد. (الف) بزرگی نیروی وارد شده از سوی کارگر را پیدا کنید. چه مقدار کار روی یخ توسط (ب) نیروی کارگر، (پ) نیروی گرانشی، (ت) نیروی عمودی وارد شده به یخ از سوی سطح شیب‌دار و (ث) نیروی برایند وارد شده به یخ، انجام می‌شود؟

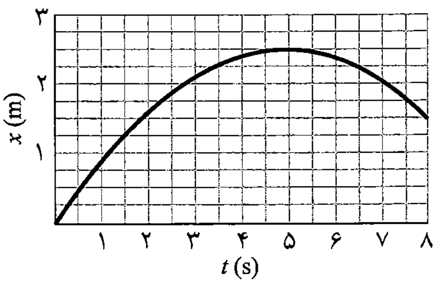
۷۷ ذره‌ای در حال حرکت در طول محور x تحت تأثیر نیرویی در جهت مثبت این محور قرار می‌گیرد. شکل ۷-۵۰، نمودار تغییرات بزرگی نیروی F برحسب مکان ذره x، را نشان می‌دهد. معادله‌ی این نمودار به صورت $F = \dfrac{a}{x^۲}$ به ازای $a = ۹٫۰\,\mathrm{N \cdot m^۲}$ است. کار انجام شده توسط نیرو روی ذره‌ی در حال حرکت از $x = ۱٫۰\mathrm{m}$ تا $x = ۳٫۰\mathrm{m}$ را، (الف) با برآورد کردن کار از روی نمودار و (ب) با انتگرال‌گیری از تابع نیرو، پیدا کنید.



شکل ۷-۵۰ مسئله‌ی ۷۷.

۷۸ یک قاب لوح فشرده (CD[1]) بر روی کف اتاق در جهت مثبت محور x می‌لغزد و نیروی $\vec{F}_a$ به آن وارد می‌شود. این نیرو با معادله‌ی $F_{ax} = ۹x - ۳x^۲$ در طول محور x اثر می‌کند، که در آن x برحسب متر و نیرو برحسب نیوتون است. این قاب از حال سکون و از مکان $x = ۰$ به راه می‌افتد و حرکت می‌کند تا دوباره ساکن شود. (الف) نمودار تغییرات کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}_a$ روی قاب را برحسب x رسم کنید. (ب) در چه مکانی کار انجام شده بیشینه است و (پ) این مقدار کار بیشینه چقدر است؟ (ت) در چه مکانی کار انجام شده به صفر کاهش یافته است؟ (ث) قاب در چه مکانی دوباره در حال سکون است؟

۷۹ یک ظرف غذا به جرم $۲٫۰\,\text{kg}$ بر روی سطح بی‌اصطکاکی در جهت مثبت محور x لغزانده می‌شود. هنگامی که ظرف در زمان $t = ۰$ شروع به حرکت می‌کند وزش باد نیرویی در جهت منفی محور x به آن وارد می‌کند. شکل ۷-۵۱، نمودار تغییرات مکان ظرف غذا x، را برحسب زمان t در هنگامی که توسط باد هُل داده می‌شود، نشان می‌دهد. با استفاده‌کردن از این نمودار



شکل ۷-۵۱ مسئله‌ی ۷۹.

1. compact disc (CD)

انرژی جنبشی ظرف غذا را در زمان (الف) $t = ۱٫۰\,\text{s}$ و (ب) $t = ۵٫۰\,\text{s}$ برآورد کنید. (پ) در بازه‌ی زمانی $t = ۱٫۰\,\text{s}$ تا $t = ۵٫۰\,\text{s}$، نیروی باد چقدر کار روی ظرف غذا انجام می‌دهد؟

۸۰ ***انتگرال‌گیری عددی.*** یک ظرف نان را با وارد کردن نیرویی به بزرگی $F = \exp(-۲x^۲)$ در طول محور x از $x = ۰٫۱۵\,\text{m}$ تا $x = ۱٫۲۰\,\text{m}$ حرکت می‌دهیم. در این رابطه x برحسب متر و F برحسب نیوتون است. (در اینجا exp نماد تابع نمایی است). این نیرو چقدر کار بر روی ظرف نان انجام می‌دهد؟

۸۱ در آرایش جسم ـ فنر شکل ۷-۱۰، جرم جسم $۴٫۰۰\,\text{kg}$ و ثابت فنر $۵۰۰\,\text{N/m}$ است. جسم از مکان $x_i = ۰٫۳۰۰\,\text{m}$ رها می‌شود. (الف) تندی جسم در مکان $x = ۰$، (ب) کار انجام شده توسط فنر وقتی که جسم از $x = ۰$ رها می‌شود، (پ) توان لحظه‌ای ناشی از فنر در نقطه‌ی رها شدن x_i، (ت) توان لحظه‌ای در مکان $x = ۰$ و (ث) مکان جسم در هنگامی که توان بیشینه است، چیست؟

۸۲ یک جسم ۴٫۰۰ کیلوگرمی بر روی یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک با نیروی $۵۰٫۰\,\text{N}$ به طور موازی با سطح، از حال سکون به بالا کشیده می‌شود. بزرگی نیروی عمودی وارد شده به جسم از سوی سطح $۱۳٫۴۱\,\text{N}$ است. تندی جسم پس از پیمودن $۳٫۰۰\,\text{m}$ به سمت بالای سطح شیب‌دار چقدر است؟

۸۳ یک سبد به سر آزاد فنری با ثابت $۱۸٫۰\,\text{N/cm}$ وصل شده است. (الف) وقتی فنر از حالت آرامش به اندازه‌ی $۷٫۶۰\,\text{mm}$ کشیده می‌شود چقدر کار روی سبد انجام می‌دهد؟ (ب) وقتی فنر به اندازه‌ی $۷٫۶۰\,\text{mm}$ بیشتر کشیده می‌شود، چقدر کار اضافی توسط نیروی فنر انجام می‌شود؟

۸۴ نیروی $\vec{F} = (۲٫۰۰\hat{i} + ۹٫۰۰\hat{j} + ۵٫۳۰\hat{k})\text{N}$ روی شیئی ۲٫۹۰ کیلوگرمی وارد می‌شود و شیء در بازه‌ی $۲٫۱۰\,\text{s}$ از مکان آغازی $\vec{r}_۱ = (۲٫۷۰\hat{i} - ۲٫۹۰\hat{j} + ۵٫۵۰\hat{k})\text{m}$ تا مکان پایانی $\vec{r}_۲ = (-۴٫۱۰\hat{i} + ۳٫۳۰\hat{j} + ۵٫۴۰\hat{k})\text{m}$ حرکت می‌کند. مطلوب است تعیین (الف) کار انجام شده روی شیء توسط نیرو در این بازه‌ی زمانی، (ب) توان متوسط ناشی از نیرو در این بازه‌ی زمانی و (پ) زاویه‌ی میان بردارهای $\vec{r}_۱$ و $\vec{r}_۲$.

۸۵ در زمان $t = 0$، نیروی $\vec{F} = (-5/00\hat{i} + 5/00\hat{j} + 4/00\hat{k})N$ شروع به وارد شدن به یک جسم ۲/۰۰ کیلوگرمی می‌کند، که با تندی آغازی $4/00 m/s$ در حال حرکت است. تندی جسم پس از انجام دادن جابه‌جایی $\vec{d} = (2/00\hat{i} + 2/00\hat{j} + 7/00\hat{k})m$ نسبت به نقطه‌ی آغازی چیست؟

فصل ۸

انرژی پتانسیل و پایستگی انرژی

۸–۱ انرژی پتانسیل

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۸–۱ نیروی پایستار را از نیروی ناپایستار تمیز بدهید.

۸–۲ برای یک ذره‌ی در حال حرکت در میان دو نقطه، مشخص کنید که کار انجام شده توسط یک نیروی پایستار به مسیری که ذره می‌پیماید بستگی ندارد.

۸–۳ انرژی پتانسیل گرانشی یک ذره (یا به بیان بهتر، دستگاه ذره ـ زمین) را حساب کنید.

۸–۴ انرژی پتانسیل کشسانی یک دستگاه جسم ـ فنر را حساب کنید.

نکته‌های کلیدی

● یک نیرو به شرطی پایستار است که کار خالص انجام شده روی یک ذره‌ی در حال حرکت در مسیر بسته، از یک نقطه‌ی آغازی تا بازگشت به همان نقطه، صفر باشد. به بیان هم‌ارز، یک نیرو به شرطی پایستار است که کار خالص انجام شده روی یک ذره‌ی در حال حرکت در میان دو نقطه به مسیر پیموده شده توسط ذره بستگی نداشته باشد. نیروی گرانشی و نیروی فنر از جمله‌ی نیروهای پایستار هستند و نیروی اصطکاک جنبشی یک نیروی ناپایستار است.

● انرژی پتانسیل، انرژی وابسته به پیکربندی یک دستگاه است که در آن یک نیروی پایستار اثر می‌کند. وقتی نیروی پایستار روی یک ذره‌ی درون آن دستگاه کار W را انجام می‌دهد، تغییر انرژی پتانسیل دستگاه ΔU، برابر است با

$$\Delta U = -W$$

اگر ذره از نقطه‌ی x_i تا نقطه‌ی x_f حرکت کند، تغییر انرژی پتانسیل دستگاه برابر است با

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$$

● انرژی پتانسیل وابسته به یک دستگاه شامل زمین و یک ذره‌ی نزدیک به آن، از نوع انرژی پتانسیل گرانشی است. اگر این ذره از ارتفاع y_i تا ارتفاع y_f حرکت کند، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه ذره ـ زمین برابر است با

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y$$

● هرگاه نقطه‌ی مرجع ذره در مکان $y_i = 0$ و انرژی پتانسیل گرانشی متناظر دستگاه به صورت $U_i = 0$ انتخاب شود، انرژی پتانسیل گرانشی ذره در هر ارتفاع y برابر است با

$$U(y) = mgy$$

● انرژی پتانسیل کشسانی، انرژی وابسته به حالت تراکم یا کشیدگی

یک شیء کشسان است. برای فنری که با وارد کردن نیروی $F=-kx$، سر آزادش جابه‌جایی x را انجام می‌دهد انرژی پتانسیل کشسانی برابر است با

$$U(x)=\frac{۱}{۲}kx^{۲}$$

● پیکربندی مرجع دارای فنری با طول حالت آرامش است، که در آن $x=۰$ و $U=۰$.

فیزیک در این باره چه می‌گوید؟

یکی از کارهای فیزیک شناسایی انواع گوناگون انرژی در دنیاست، به ویژه انرژی‌هایی که اهمیت فراگیر دارند. یک نوع انرژی فراگیر، **انرژی پتانسیل** U، است. از نظر فنی، انرژی پتانسیل را می‌توان با پیکربندی (آرایش) دستگاه اشیایی که به هم نیرو وارد می‌کنند، وابسته دانست.

این تعریف، یک تعریف صوری قشنگ برای چیزی است که در واقع با آن آشنایی داریم. یک مثال ممکن است بهتر از یک تعریف به ما کمک کند. پرشکاری با طناب بانجی[1] از یک سکوی پرش به پایین شیرجه می‌رود (شکل ۸-۱). در اینجا دستگاه اشیا شامل زمین و پرشکار است. نیروی اعمال شده میان این اشیا نیروی گرانشی است. در این پرش پیکربندی دستگاه اشیا تغییر می‌کند (فاصله‌ی میان پرشکار و زمین کم می‌شود ـ که البته هیجان این پرش در همین است). حرکت پرشکار و افزایش یافتن انرژی جنبشی را می‌توان با معرفی **انرژی پتانسیل گرانشی** U، توجیه کرد، و این، همان انرژی وابسته به حالت جدایی میان دو شیء یعنی پرشکار و زمین، است که یکدیگر را با نیروی گرانشی جذب می‌کنند.

شکل ۸-۱ انرژی جنبشی یک پرشکار با طناب بانجی در حین سقوط آزاد افزایش می‌یابد و سپس طناب شروع به کشیده شدن می‌کند و حرکت پرشکار کُند می‌شود.

وقتی که پرشکار در حال نزدیک شدن به پایان پرش، کشیدن طناب بانجی را آغاز می‌کند، دستگاه اشیا شامل طناب و پرشکار است. نیروی میان این اشیا یک نیروی کشسان (فنر مانند) است و پیکربندی دستگاه تغییر می‌کند (طناب در حال کشیده شدن است). در اینجا کاهش یافتن انرژی جنبشی پرشکار و افزایش یافتن طول طناب را می‌توان با تعریف یک **انرژی پتانسیل کشسانی** U، توجیه کرد. این انرژی همان انرژی وابسته به حالت متراکم شدن یا کشیده شدن یک شیء کشسان، یعنی طناب بانجی، است.

فیزیک چگونگی محاسبه‌ی انرژی پتانسیل یک دستگاه را که باید انرژی ذخیره یا مصرف کند، معین می‌کند. برای مثال، پیش از آنکه پرشکار به پرش با طناب بانجی دست بزند شخصی (که شاید یک مهندس مکانیک باشد) باید با محاسبه‌ی انرژی‌های پتانسیل گرانشی و کشسانی که می‌تواند مورد انتظار باشد، طناب مناسب این کار را مشخص کند. تنها در این صورت است که پرش هیجان‌آور است، نه مرگ‌آور.

کار و انرژی پتانسیل

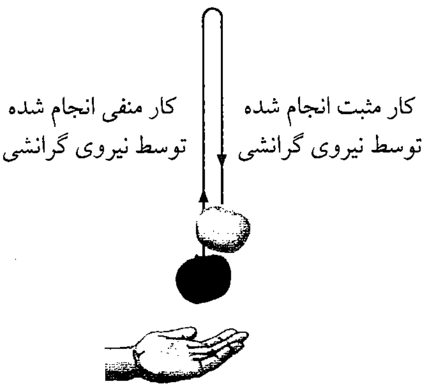
در فصل ۷ درباره‌ی رابطه‌ی میان کار و تغییر انرژی جنبشی بحث کردیم. اکنون می‌خواهیم به

1. bungee-cord

بحث در مورد رابطه‌ی کار و تغییر انرژی پتانسیل بپردازیم.

یک گوجه فرنگی را، به بالاسو پرتاب می‌کنیم (شکل ۸-۲). از پیش می‌دانیم که هنگام بالا رفتن گوجه فرنگی، W_g، کار انجام شده توسط نیروی گرانشی زمین روی آن، منفی است زیرا نیرو انرژی را ***از انرژی جنبشی*** گوجه فرنگی می‌گیرد. پس، می‌توان گفت که این انرژی از نیروی گرانشی ***به انرژی پتانسیل گرانشی*** دستگاه گوجه‌فرنگی ـ زمین منتقل می‌شود.

بر اثر نیروی گرانشی، گوجه فرنگی حرکتش کُند می‌شود، توقف می‌کند و سپس به پایین‌سو برمی‌گردد. در حین پایین آمدن، چگونگی تبدیل انرژی وارون می‌شود. در این حالت W_g، کار انجام شده توسط نیروی گرانشی روی گوجه فرنگی مثبت است. یعنی، نیرو انرژی را ***از انرژی پتانسیل گرانشی*** دستگاه گوجه فرنگی ـ زمین می‌گیرد و ***به انرژی جنبشی*** گوجه فرنگی تبدیل می‌کند.



شکل ۸-۲ تصویر گوجه فرنگی پرتاب شده به‌بالاسو. هنگام بالا رفتن گوجه فرنگی کار نیروی گرانشی روی آن منفی است و انرژی جنبشی آن را کاهش می‌دهد. هنگام پایین آمدن گوجه فرنگی کار نیروی گرانشی روی آن مثبت است و انرژی جنبشی آن را افزایش می‌دهد.

$K + U =$ مقدار ثابت

$\Delta K + \Delta U = 0$

$\Delta U = mgh > 0$

$U_2 - U_1$

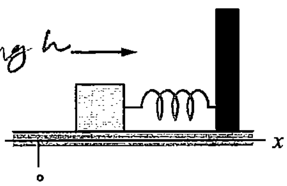
$\Delta U = -mgh$

در حین بالا رفتن، یا پایین آمدن، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی ΔU، برابر با مقدار کار انجام شده روی گوجه فرنگی توسط نیروی گرانشی با علامت منفی تعریف می‌شود. با استفاده کردن از نماد W برای کار، شکل فرمولی این تعریف چنین است

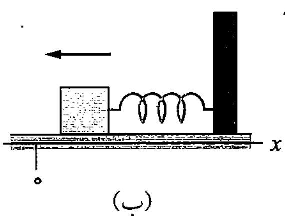
$w = \Delta K = -\Delta U$

$$\Delta U = -W \tag{۸-۱}$$

این معادله در مورد یک **دستگاه جسم ـ فنر**، مانند شکل ۸-۳، نیز به کار می‌رود. اگر جسم را ناگهان به راست‌سو هُل بدهیم، نیروی فنر به سمت چپ اثر می‌کند و روی جسم کار منفی انجام می‌دهد، یعنی انرژی را از انرژی جنبشی جسم می‌گیرد و به انرژی پتانسیل کشسانی جسم ـ فنر تبدیل می‌کند. در نتیجه، جسم حرکتش کند و، سرانجام، متوقف می‌شود و سپس به چپ‌سو شروع به حرکت می‌کند، زیرا نیروی فنر هنوز چپ‌سو است. در این حالت چگونگی تبدیل انرژی وارون می‌شود، یعنی انرژی پتانسیل فنر به انرژی جنبشی جسم تبدیل می‌شود.



(الف)



(ب)

شکل ۸-۳ جسمی که به فنری وصل شده و در آغاز در مکان $x = 0$ ساکن است، به سمت راست حرکت داده می‌شود. (الف) هنگام حرکت‌کردن جسم به راست‌سو (که با پیکان نشان داده شده است) نیروی فنر روی جسم کار منفی انجام می‌دهد. (ب) سپس، هنگامی که جسم به سمت مکان $x = 0$ برمی‌گردد، نیروی فنر روی جسم کار مثبت انجام می‌دهد.

نیروهای پایستار و ناپایستار

conservative force   nonconservative force

اکنون نکات مهم دو وضعیت ذکر شده را به طور خلاصه چنین می‌نویسیم:

۱. ***دستگاه*** شامل دو یا چند شیء است.

۲. در دستگاه، میان شیء ذره مانند (گوجه فرنگی یا جسم دیگر) و بقیه‌ی دستگاه یک ***نیرو*** اثر می‌کند.

۳. وقتی پیکربندی دستگاه تغییر می‌کند، نیرو روی شیء ذره مانند ***کار*** (به نام W_1) ***انجام می‌دهد***، و انرژی جنبشی شیء K، را به شکل دیگری از انرژی دستگاه تبدیل می‌کند.

۴. وقتی پیکربندی دستگاه در جهت عکس تغییر می‌کند، نیرو با انجام دادن کار W_2 چگونگی تبدیل انرژی را وارون می‌کند.

در حالتی که رابطه‌ی $W_1 = -W_2$ همیشه صادق باشد، نوع دیگر انرژی، انرژی پتانسیل است و گفته می‌شود که نیرو یک **نیروی پایستار** است. همان‌طور که گمان می‌کردیم نیروی

گرانشی و نیروی فنر هر دو پایستارند (وگرنه، نمی‌توانستیم از انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی پتانسیل کشسانی سخن بگوییم).

نیرویی را که پایستار نباشد، **نیروی ناپایستار** می‌نامند. نیروی اصطکاک جنبشی و نیروی پسار شاره ناپایستار هستند. برای مثال، فرض کنید جسمی را روی سطحی افقی که بی‌اصطکاک نیست، می‌لغزانیم. در حین لغزیدن جسم نیروی اصطکاک جنبشی ناشی از سطح، روی جسم کار منفی انجام می‌دهد و با تبدیل شدن انرژی جنبشی به نوع دیگری از انرژی به نام ***انرژی گرمایی*** (که حاصل حرکت تصادفی اتم‌ها و مولکول‌هاست) حرکت جسم را کند می‌کند. از لحاظ تجربی می‌دانیم که تبدیل این انرژی نمی‌تواند به طور وارون انجام شود (انرژی گرمایی از طریق نیروی اصطکاک جنبشی نمی‌تواند به انرژی جنبشی جسم تبدیل شود). بنابراین، اگرچه دستگاهی (متشکل از جسم و سطح) وجود دارد که میان بخش‌های آن نیرویی اثر می‌کند و توسط آن نیرو تبدیل انرژی صورت می‌گیرد، نیرو پایستار نیست. بنابراین، انرژی گرمایی یک انرژی پتانسیل نیست.

وقتی به یک شیء ذره مانند فقط نیروهای پایستار اثر می‌کنند مسئله‌های مشکل مربوط به حرکت شیء بسیار ساده می‌شوند. در بخش بعد که روش تشخیص دادن نیروهای پایستار را مورد آزمون قرار می‌دهیم، برای ساده کردن چنین مسئله‌هایی راه‌حل‌هایی ارائه خواهد شد.

وابسته نبودن نیروهای پایستار به مسیر حرکت

نخستین آزمون مربوط به تعیین پایستار یا ناپایستار بودن یک نیرو چنین است: فرض می‌کنیم نیرویی به ذره‌ای اثر می‌کند که در طول یک ***مسیر بسته*** از یک مکان آغازی حرکت می‌کند و در پایان به همان مکان برمی‌گردد (یعنی، ذره یک حرکت ***رفت و برگشت*** با شروع کردن و پایان دادن در مکان آغازی انجام می‌دهد). نیرو تنها به شرطی پایستار است که انرژی کل مبادله شده با ذره در طول مسیر رفت و برگشت یا هر مسیر بسته‌ی دیگر، صفر باشد. به عبارت دیگر می‌توان گفت که:

کار خالص انجام شده توسط نیروی پایستار روی ذره‌ی در حال حرکت در هر مسیر بسته صفر است.

از نظر تجربی می‌دانیم که نیروی گرانشی در این ***آزمون مسیر بسته*** موفق است. یک مثال در این مورد همان مثال گوجه فرنگی پرتاب شده در شکل ۸-۲ است. گوجه فرنگی از نقطه‌ی پرتاب با تندی v_0 و با انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv_0^2$ شروع به حرکت می‌کند. نیروی گرانشی مؤثر بر گوجه‌فرنگی، حرکت آن را کُند و آن را متوقف می‌کند و سپس، موجب می‌شود گوجه‌فرنگی به پایین سقوط کند. وقتی گوجه فرنگی به نقطه‌ی پرتاب برمی‌گردد، دارای همان تندی v_0 و انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv_0^2$ می‌شود. بنابراین، نیروی گرانشی همان انرژی‌ای را که *از*

گوجه فرنگی در هنگام بالا رفتن می‌گیرد، در هنگام برگشتن به پایین *به* گوجه فرنگی می‌دهد. در این حرکت رفت و برگشت، کار خالص انجام شده توسط نیروی گرانشی صفر است.

نتیجه‌ی مهمی که از این آزمون مسیر بسته گرفته می‌شود، چنین است:

کار انجام شده توسط نیروی پایستار روی یک ذره‌ی در حال حرکت در میان دو نقطه، به مسیر حرکت ذره بستگی ندارد.

برای مثال، در شکل ۸-۴ الف، فرض کنید ذره‌ای در طول مسیر ۱ یا مسیر ۲ از نقطه‌ی a تا نقطه‌ی b، حرکت می‌کند. اگر فقط یک نیروی پایستار به ذره اثر کند، کار انجام شده روی ذره در هر دو مسیر یکسان است. این نتیجه را می‌توان به صورت زیر نوشت

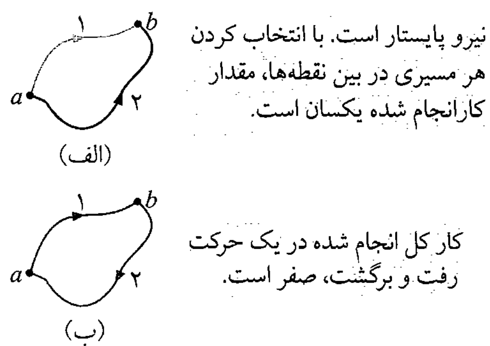
$$W_{ab,۱} = W_{ab,۲} \qquad (۸-۲)$$

که در آن شاخص پایین ab، به ترتیب، نشان دهنده‌ی نقطه‌های آغازی و پایانی مسیر و شاخص‌های ۱ و ۲ نشان دهنده‌ی مسیر هستند.

این نتیجه حائز اهمیت است زیرا اجازه می‌دهد تا مسئله‌های مشکل مربوط به حالتی را که فقط یک نیروی پایستار اثر می‌کند، به سادگی حل کنیم. فرض کنید می‌خواهیم کار یک نیروی پایستار در طول مسیر معین میان دو نقطه را حساب کنیم و بدون داشتن اطلاعات کافی محاسبه مشکل، یا حتی غیرممکن، است. برای پیدا کردن کار، به جای مسیر موجود میان دو نقطه می‌توان مسیر دیگری انتخاب کرد که برای آن محاسبه آسان‌تر و امکان‌پذیر باشد.

اثبات معادله‌ی ۸-۲

شکل ۸-۴ ب مسیر رفت و برگشت اختیاری مربوط به ذره‌ای را نشان می‌دهد که فقط یک نیرو به آن اثر کرده است. ذره از نقطه‌ی آغازی a در طول مسیر ۱ تا نقطه‌ی b حرکت می‌کند و سپس، در طول مسیر ۲ به نقطه‌ی a بر می‌گردد. وقتی ذره در طول هر مسیر حرکت می‌کند نیرو روی آن کار انجام می‌دهد. بدون توجه به اینکه کار انجام شده در کدام مسیر مثبت و در



شکل ۸-۴ (الف) وقتی یک نیروی پایستار به ذره‌ای اثر می‌کند، ذره می‌تواند از نقطه‌ی a تا نقطه‌ی b در طول مسیر ۱ یا ۲ حرکت کند. (ب) ذره در طول مسیر ۱ از نقطه‌ی a به نقطه‌ی b می‌رود و سپس در طول مسیر ۲ به نقطه‌ی a بر می‌گردد.

کدام مسیر منفی است کار انجام شده از a تا b در طول مسیر ۱ را با $W_{ab,1}$ و کار انجام شده از b تا a در طول مسیر ۲ را با $W_{ba,2}$ نمایش می‌دهیم. اگر نیرو پایستار باشد کار خالص انجام شده در این حرکت رفت و برگشت صفر است:

$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0$$

و از آنجا، داریم

$$W_{ab,1} = -W_{ba,2} \tag{۸-۳}$$

یعنی، کار انجام شده در طول مسیر رفت برابر با کار انجام شده در طول مسیر برگشت با علامت منفی است.

اکنون کار $W_{ab,2}$ را در نظر می‌گیریم که، مطابق شکل ۸-۴ الف، هنگام حرکت کردن از a تا b در طول مسیر ۲ توسط نیرو روی ذره انجام می‌شود. اگر نیرو پایستار باشد، این کار با $W_{ba,2}$ با علامت منفی برابر است:

$$W_{ab,2} = -W_{ba,2} \tag{۸-۴}$$

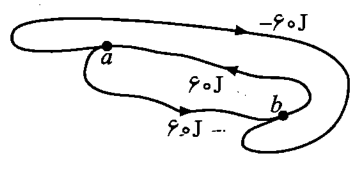
با قرار دادن $W_{ab,2}$ به جای $-W_{ba,2}$ در معادله‌ی ۸-۳، داریم

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}$$

در نتیجه، معادله‌ی ۸-۲ اثبات می‌شود.

خودآزمایی ۱

شکل زیر سه مسیر متصل کننده‌ی نقطه‌ی a به نقطه‌ی b را نشان می‌دهد. وقتی ذره در جهت‌های نشان داده شده حرکت می‌کند، تک نیروی $\vec{F}$ کارهای نوشته شده در کنار هر مسیر را روی ذره انجام می‌دهد. بر مبنای این داده‌ها آیا نیروی $\vec{F}$ پایستار است؟



مسئله‌ی نمونه‌ی ۸-۱ مسیرهای هم‌ارز برای محاسبه‌ی کار، پنیر لغزنده

در این مسئله‌ی نمونه موضوع اصلی چنین است: کار کاملاً درست این است که به جای یک مسیر دشوار مسیری آسان را انتخاب کنیم. شکل ۸-۵ الف یک قالب پنیر ۲٫۰ کیلوگرمی لغزنده را نشان می‌دهد که در طول یک مسیر بی‌اصطکاک از نقطه‌ی a تا نقطه‌ی b می‌لغزد. قالب پنیر در طول مسیر مسافت کل ۲٫۰m را می‌پیماید و مسافت قائم خالص پیموده شده ۰٫۸۰m است. در طول این حرکت لغزشی نیروی گرانشی چقدر کار روی قالب پنیر انجام می‌دهد؟

نکته‌های کلیدی

(۱) کار را با استفاده‌کردن از معادله‌ی ۷-۱۲ ($W_g = mgd\cos\phi$) ***نمی‌توان حساب کرد.*** دلیلش این است که زاویه‌ی ϕ میان نیروی $\vec{F}_g$ و جابه‌جایی $\vec{d}$ در طول مسیر به گونه‌ای نامعلوم تغییر می‌کند. (حتی اگر شکل مسیر را هم بدانیم و بتوانیم ϕ را

در طول آن حساب کنیم، این محاسبه باز هم مشکل خواهد بود).

(۲) چون $\vec{F}_g$ یک نیروی پایستار است، با انتخاب کردن مسیر دیگری در میان a و b، که محاسبه را آسان بکند، می‌توان کار را معین کرد.

محاسبات: برای این کار مسیر خط‌چین در شکل ۸-۵ ب را انتخاب می‌کنیم که از دو پاره‌خط تشکیل شده است. در طول پاره‌خط افقی، زاویه‌ی ϕ ثابت و برابر با ۹۰ درجه است. اگر حتی جابه‌جایی در طول پاره‌خط افقی هم معلوم نباشد معادله‌ی ۷-۱۲ نشان می‌دهد که کار انجام شده W_h، برابر است با

$$W_h = mgd\cos ۹۰^\circ = ۰$$

در طول پاره‌خط قائم، جابه‌جایی d برابر با ۰٫۸۰m، $\vec{F}_g$ و $\vec{d}$ هر دو به پایین‌سو و زاویه‌ی ϕ ثابت و برابر با صفر است. بنابراین، کار W_v در طول پاره‌خط قائم از مسیر خط‌چین، از معادله‌ی ۷-۱۲ به دست می‌آید:

$$W_v = mgd\cos ۰^\circ$$

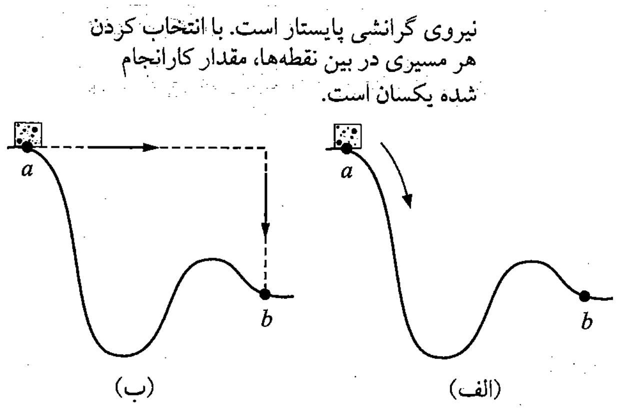
$$W_v = (۲٫۰\,\text{kg})(۹٫۸\,\text{m/s}^۲)(۰٫۸۰\,\text{m})(۱) = ۱۵٫۷\,\text{J}$$

پس، وقتی قالب پنیر در طول مسیر خط‌چین از نقطه‌ی a تا نقطه‌ی b حرکت می‌کند، کار کل انجام شده روی آن توسط $\vec{F}_g$ برابر است با

$$W = W_h + W_v = ۰ + ۱۵٫۷\,\text{J} \Rightarrow$$

$$W \approx ۱۶\,\text{J} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

این همان کاری است که هنگام حرکت کردن قالب پنیر از نقطه‌ی a تا نقطه‌ی b در طول مسیر واقعی روی آن انجام می‌شود.



شکل ۸-۵ (الف) قالب پنیری در طول یک مسیر بی‌اصطکاک از نقطه‌ی a تا نقطه‌ی b می‌لغزد. (ب) پیدا کردن کار انجام شده توسط نیروی گرانشی روی قالب پنیر در طول مسیر خط‌چین نسبت به مسیر واقعی حرکت قالب پنیر آسان‌تر است؛ نتیجه برای هر دو مسیر یکسان است.

تعیین مقادیر انرژی پتانسیل

در اینجا معادله‌هایی را پیدا می‌کنیم که مقدار دو نوع انرژی پتانسیل مورد بحث در این فصل یعنی، انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی پتانسیل کشسانی، را به دست می‌دهند. نخست، باید رابطه‌ی عمومی میان نیروی پایستار و انرژی پتانسیل وابسته را پیدا کنیم.

شیء ذره مانندی را در نظر می‌گیریم که بخشی از یک دستگاه است و نیروی پایستار $\vec{F}$ به آن اثر می‌کند. وقتی این نیرو کار W را روی شیء انجام می‌دهد، ΔU تغییر انرژی پتانسیل وابسته به دستگاه برابر با کار انجام شده با علامت منفی است. پیش‌تر این نتیجه به صورت معادله‌ی ۸-۱ ($\Delta U = -W$) نوشته شد. در حالت کلی‌تر، که ممکن است نیرو برحسب مکان تغییر کند، کار W را می‌توان به صورت معادله‌ی ۷-۳۲ نوشت:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx \qquad (۵\text{–}۸)$$

این معادله کار انجام شده توسط نیرو را در حالت حرکت کردن شیء از نقطه‌ی x_i تا نقطه‌ی x_f و تغییر پیکربندی دستگاه به دست می‌دهد. (چون نیرو پایستار است کار انجام شده در

تمام مسیرهای میان این دو نقطه یکسان است).

با جانشانی معادله‌ی ۸-۵ در معادله‌ی ۸-۱، تغییر انرژی پتانسیل ناشی از تغییر پیکربندی دستگاه در نمادگذاری کلی چنین به دست می‌آید

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx \qquad (۸-۶)$$

انرژی پتانسیل گرانشی

نخست، ذره‌ای به جرم m را، که به طور قائم در راستای محور y حرکت می‌کند، در نظر می‌گیریم. (جهت مثبت محور به سمت بالاست). وقتی ذره از نقطه‌ی y_i تا نقطه‌ی y_f حرکت می‌کند، نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ روی آن کار انجام می‌دهد. برای پیدا کردن تغییر متناظر در انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه ذره ـ زمین، از معادله‌ی ۸-۶ با دو تغییر زیر استفاده می‌کنیم: (۱) به جای راستای محور x، انتگرال‌گیری را در راستای محور y انجام می‌دهیم، زیرا نیروی گرانشی در راستای قائم اثر می‌کند. (۲) به جای نماد F برای نیرو، $-mg$ را قرار می‌دهیم زیرا $\vec{F}_g$ دارای بزرگی mg و جهتش به سمت پایین محور y است. در نتیجه، خواهیم داشت

$$\Delta U = -\int_{y_i}^{y_f} (-mg)dy = mg\int_{y_i}^{y_f} dy = mg\Big[\,y\,\Big]_{y_i}^{y_f}$$

و از آنجا، نتیجه می‌گیریم که

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y \qquad (۸-۷)$$

در انرژی پتانسیل گرانشی (یا هر نوع انرژی پتانسیل دیگر) فقط ***تغییرات*** ΔU است که از نظر فیزیکی معنی‌دار است. اما برای ساده کردن محاسبه یا بحث، گاهی میل داریم از مقدار انرژی پتانسیل گرانشی معین U، که در هنگام قرار داشتن ذره در ارتفاع معین y به دستگاه ذره ـ زمین نسبت داده می‌شود، نام ببریم. برای این منظور، معادله‌ی ۸-۷ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$U - U_i = mg(y - y_i) \qquad (۸-۸)$$

اکنون، فرض می‌کنیم U_i انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه در **پیکربندی مرجع** باشد، که در آن ذره در **نقطه‌ی مرجع** y_i قرار دارد. به طور معمول، فرض می‌کنیم $U_i = ۰$ و $y_i = ۰$. با انجام دادن این تغییرات در معادله‌ی ۸-۸، داریم

$$U(y) = mgy \quad \text{(انرژی پتانسیل گرانشی)} \qquad (۸-۹)$$

این معادله نشان می‌دهد که:

انرژی پتانسیل گرانشی وابسته به دستگاه ذره ـ زمین فقط به مکان قائم y (یا ارتفاع) ذره نسبت به مکان مرجع $y = ۰$، بستگی دارد، نه به مکان افقی آن.

انرژی پتانسیل کشسانی

اکنون، دستگاه جسم ـ فنر نشان داده شده در شکل ۸-۳ را، که در آن جسم در انتهای فنری با ثابت فنر k حرکت می‌کند، در نظر می‌گیریم. وقتی جسم از نقطه‌ی x_i تا نقطه‌ی x_f حرکت می‌کند، نیروی فنر $F = -kx$، روی جسم کار انجام می‌دهد. برای پیدا کردن تغییر انرژی پتانسیل کشسانی دستگاه جسم ـ فنر، به جای $F(x)$، در معادله‌ی ۸-۶ مقدار $-kx$ را قرار می‌دهیم. در نتیجه، داریم

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = \int_{x_i}^{x_f} k\, x dx = \frac{۱}{۲} k \Big[x^۲ \Big]_{x_i}^{x_f}$$

یا

$$-w = \Delta U = \frac{۱}{۲} kx_f^۲ - \frac{۱}{۲} kx_i^۲ \qquad (۸\text{-}۱۰)$$

برای نسبت دادن مقدار انرژی پتانسیل U به جسم در مکان x، پیکربندی مرجع را چنان انتخاب می‌کنیم که فنر در حالت آرامش و جسم در مکان $x_i = ۰$ قرار داشته باشد. بنابراین، انرژی پتانسیل کشسانی U_i صفر است و معادله‌ی ۸-۱۰ چنین نوشته می‌شود

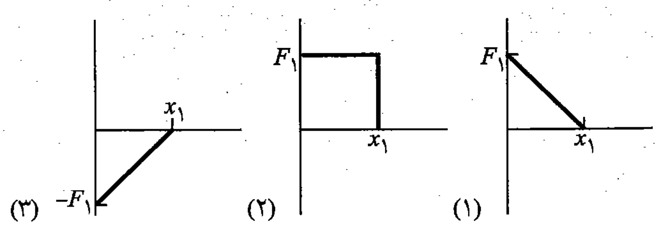
$$U - ۰ = \frac{۱}{۲} kx^۲ - ۰$$

و از آنجا، داریم

$$U(x) = \frac{۱}{۲} kx^۲ \quad \text{(انرژی پتانسیل کشسانی)} \qquad (۸\text{-}۱۱)$$

خودآزمایی ۲

می‌خواهیم ذره‌ای را در راستای محور x از $x = ۰$ تا $x_۱$ در حالتی که یک نیروی پایستار در راستای محور x به آن وارد می‌شود، حرکت دهیم. شکل زیر سه حالت را که در آن مؤلفه‌ی x نیرو برحسب x تغییر می‌کند، نشان می‌دهد. در هر سه حالت بزرگی بیشینه‌ی نیروی پایستار برابر با $F_۱$ است. این سه حالت را با توجه به تغییر انرژی پتانسیل مربوط در حین حرکت کردن ذره از مثبت‌ترین مقدار تا مقادیر دیگر، مرتب کنید.



مسئله‌ی نمونه‌ی ۸-۲ انتخاب کردن سطح تراز مرجع برای انرژی پتانسیل گرانشی، حیوان تنبل

درسی که از این مثال می‌توان گرفت این است که: به طور کلی، شما می‌توانید هر سطح ترازی را به عنوان سطح تراز مرجع انتخاب کنید، اما وقتی سطح ترازی را انتخاب کردید، با آن بمانید. یک حیوان تنبل به‌جرم $۲/۰ \,\text{kg}$ در ارتفاع ۵/۰ متری سطح زمین از شاخه‌ی درختی آویزان شده است (شکل ۸-۶).

(الف) انرژی پتانسیل‌گرانشی دستگاه حیوان ـ زمین U، را بافرض آنکه نقطه‌ی مرجع، یعنی $y = ۰$، (۱) در روی سطح زمین، (۲) در بالکنی به ارتفاع $۳/۰ \,\text{m}$ ازسطح زمین، (۳) در محل شاخه‌ی درخت، و (۴) در ارتفاع $۱/۰ \,\text{m}$ بالاتر از شاخه‌ی درخت، انتخاب شود، حساب کنید. انرژی پتانسیل گرانشی در نقطه‌ی $y = ۰$ را صفر بگیرید.

نکته‌ی کلیدی

چون مرجع در نقطه‌ی $y = ۰$ انتخاب شده است، انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه U، را می‌توان ***نسبت به آن نقطه‌ی مرجع*** و با استفاده کردن از معادله‌ی ۸-۹ حساب کرد.

محاسبات: در انتخاب شماره (۱)، حیوان در نقطه‌ی $y = ۵/۰ \,\text{m}$ قرار دارد و می‌توان نوشت

$$U = mgy = (۲/۰ \,\text{kg})(۹/۸ \,\text{m/s}^۲)(۵/۰ \,\text{m}) \Rightarrow$$

$$U = ۹۸ \,\text{J}$$ **(پاسخ)**

در انتخاب‌های دیگر، پاسخ‌های مربوط به U عبارت‌اند از

$$U = mgy = mg(۲/۰ \,\text{m}) = ۳۹ \,\text{J} \qquad (۲)$$

$$U = mgy = mg(۰) = ۰ \,\text{J} \qquad (۳)$$

$$U = mgy = mg(-۱/۰ \,\text{m}) = -۱۹/۶ \,\text{J} \approx -۲۰ \,\text{J} \qquad (۴)$$

(ب) حیوان به زمین می‌افتد. در هر انتخاب نقطه‌ی مرجع، ΔU، تغییر انرژی پتانسیل دستگاه حیوان ـ زمین بر اثر سقوط، چقدراست؟

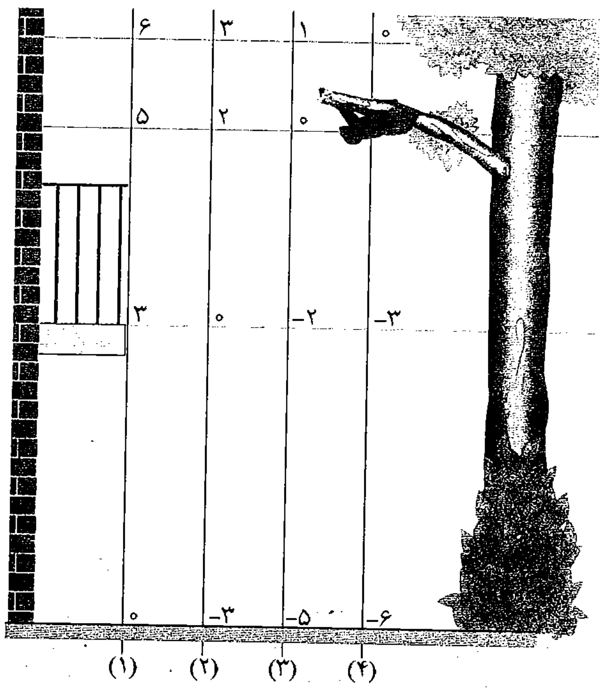
نکته‌ی کلیدی

تغییر انرژی پتانسیل به انتخاب نقطه‌ی مرجع برای $y = ۰$ بستگی ندارد، بلکه به تغییر ارتفاع Δy وابسته است.

محاسبه: در هر چهار حالت تغییر ارتفاع یکسان و برابر با $\Delta y = -۵/۰ \,\text{m}$ است. پس، برای انتخاب‌های (۱) تا (۴) با استفاده کردن از معادله‌ی ۸-۷، داریم

$$\Delta U = mg\Delta y = (۲/۰ \,\text{kg})(۹/۸ \,\text{m/s}^۲)(-۵/۰ \,\text{m}) \Rightarrow$$

$$\Delta U = -۹۸ \,\text{J}$$ **(پاسخ)**



شکل ۸-۶ نمودار چهار انتخاب مربوط به نقطه‌ی مرجع $y = ۰$. محورهای y برحسب متر درجه‌بندی شده‌اند. انتخاب مرجع بر مقدار انرژی پتانسیل دستگاه حیوان ـ زمین U، مؤثر است. اما اگر حیوان حرکت کند، مثلاً سقوط کند، انتخاب مرجع اثری روی تغییر انرژی پتانسیل ΔU، ندارد.

۸-۲ پایستگی انرژی مکانیکی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۸-۵ پس از آنکه به وضوح معین کردید چه اشیایی یک دستگاه را تشکیل می‌دهند، تشخیص دهید که انرژی مکانیکی دستگاه برابر با مجموع انرژی‌های جنبشی و انرژی‌های پتانسیل آن اشیا است.

۸-۶ برای دستگاه منزوی که به آن فقط نیروهای پایستار اثر می‌کنند، اصل پایستگی انرژی مکانیکی را برای ربط دادن انرژی‌های پتانسیل و جنبشی آغازی و انرژی‌های پتانسیل و جنبشی در یک لحظه‌ی بعدی، به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

• انرژی مکانیکی یک دستگاه E_{mec}، برابر با مجموع انرژی جنبشی K و انرژی پتانسیل U آن دستگاه است:

$$E_{mec} = K + U$$

• دستگاه منزوی دستگاهی است که در آن هیچ نیروی خارجی‌ای موجب تغییر کردن انرژی نمی‌شود. اگر در درون دستگاه منزوی تنها نیروهای پایستار کار انجام دهند، در آن صورت انرژی مکانیکی E_{mec} دستگاه نمی‌تواند تغییر کند. این، اصل پایستگی انرژی مکانیکی است، که با معادله‌ی زیر نوشته می‌شود

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1$$

که در آن شاخص‌های پایین معرف لحظه‌های متفاوت در طی یک فرایند تبدیل انرژی است. این اصل پایستگی را با معادله‌ی زیر هم می‌توان نوشت

$$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U = 0$$

پایستگی انرژی مکانیکی

انرژی مکانیکی یک دستگاه E_{mec}، برابر با مجموع انرژی پتانسیل آن U، و انرژی جنبشی اشیای درون آن K، است

$$E_{mec} = K + U \quad \text{(انرژی مکانیکی)} \qquad (8\text{-}12)$$

در این پودمان انرژی مکانیکی را در حالتی مورد بحث قرار می‌دهیم که تنها نیروهای پایستار موجب تبدیل انرژی در دستگاه می‌شوند ـ یعنی حالتی که نیروهای اصطکاک و پسار روی اشیای تشکیل دهنده‌ی دستگاه اثر نمی‌کنند. هم‌چنین، فرض می‌کنیم که دستگاه نسبت به محیط پیرامون **منزوی** است؛ یعنی، هیچ ***نیروی خارجی*** از سوی اشیای خارج دستگاه، انرژی درون دستگاه را تغییر نمی‌دهد.

وقتی نیروی پایستار کار W را روی یک شیء درون دستگاه انجام می‌دهد، انرژی را میان انرژی جنبشی شیء K، و انرژی پتانسیل دستگاه U، مبادله می‌کند. با توجه به معادله‌ی ۷-۱۰، تغییر انرژی جنبشی ΔK، برابر است با

$$\Delta K = W \qquad (8\text{-}13)$$

در ایام گذشته، بومیان آلاسکا شخصی را با پتو به بالا پرتاب می‌کردند تا او بتواند نقاط دوردست دشت را مشاهده کند. امروزه، این کار را فقط برای تفریح انجام می‌دهند. در این عمل شخص وقتی به بالا پرتاب می‌شود، انرژی جنبشی‌اش به انرژی پتانسیل گرانشی تبدیل می‌شود. شخص هنگامی به بالاترین ارتفاع می‌رسد که این تبدیل انرژی به‌طور کامل انجام شود. در هنگام پایین آمدن شخص، جهت تبدیل انرژی وارون می‌شود.

و با توجه به معادله‌ی ۸-۱، تغییر انرژی پتانسیل ΔU، برابر است با

$$\Delta U = -W \qquad (۸-۱۴)$$

از ترکیب کردن معادله‌های ۸-۱۳ و ۸-۱۴، داریم

$$\Delta K = -\Delta U \qquad (۸-۱۵)$$

یعنی، وقتی یکی از این انرژی‌ها افزایش می‌یابد، انرژی دیگر، درست به‌همان اندازه، کاهش پیدا می‌کند.

معادله‌ی ۸-۱۵ را به صورت زیر هم می‌توان نوشت

$$K_۲ - K_۱ = -(U_۲ - U_۱) \qquad (۸-۱۶)$$

که در آن شاخص‌های پایین دو لحظه‌ی متفاوت را نشان می‌دهند و مربوط به دو آرایش متفاوت اشیا در دستگاه هستند. با مرتب کردن معادله‌ی ۸-۱۶ به صورت دیگر، داریم

$$K_۲ + U_۲ = K_۱ + U_۱ \quad \text{(پایستگی انرژی مکانیکی)} \qquad (۸-۱۷)$$

این معادله نشان می‌دهد که وقتی دستگاه منزوی است و فقط نیروهای پایستار بر اشیای درون آن اثر می‌کنند، داریم

$$\left(\begin{array}{c}\text{مجموع } K \text{ و } U\\ \text{در حالت دیگر دستگاه}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{مجموع } K \text{ و } U\\ \text{در یک حالت دستگاه}\end{array}\right)$$

به بیان دیگر:

در یک دستگاه منزوی که فقط نیروهای پایستار عامل تغییر انرژی‌اند، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل می‌توانند تغییر کنند، اما مجموع آن‌ها، انرژی مکانیکی دستگاه E_{mec}، نمی‌تواند تغییر کند.

این نتیجه **اصل پایستگی انرژی مکانیکی** را بیان می‌کند. (اکنون می‌توانید به دلیل نام‌گذاری ***نیروهای پایستار*** پی ببرید). با استفاده کردن از معادله‌ی ۸-۱۵، این اصل را می‌توان به صورت دیگری هم نوشت:

$$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U = ۰ \qquad (۸-۱۸)$$

اصل پایستگی انرژی مکانیکی امکان حل کردن مسئله‌هایی را فراهم می‌کند که در موقع حل کردن آن‌ها تنها با استفاده کردن از قانون‌های نیوتون، دچار مشکل می‌شدیم:

اگر انرژی مکانیکی یک دستگاه پایسته باشد، مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل مربوط به یک لحظه را می‌توان به مجموع آن‌ها در لحظه‌ی دیگر ربط داد، *بدون آنکه به حرکت میانی توجه کنیم و بدون آنکه کار انجام‌شده توسط نیروهای مربوط را پیدا کنیم.*

شکل ۸-۷ نمونه‌ای از کاربرد اصل پایستگی انرژی مکانیکی را نشان می‌دهد. در این شکل، هنگام نوسان کردن آونگ، انرژی دستگاه آونگ ـ زمین در میان انرژی جنبشی K و انرژی

پتانسیل گرانشی U دست به دست می‌شود، اما مجموع $K+U$ ثابت می‌ماند. اگر موقعی که گلوله‌ی آونگ در بالاترین نقطه‌ی مسیر خود قرار دارد (شکل ۸-۷ پ) انرژی پتانسیل گرانشی آن را بدانیم، انرژی جنبشی گلوله را در پایین‌ترین نقطه (شکل ۸-۷ ث)، با استفاده کردن از معادله‌ی ۸-۱۷ می‌توانیم به دست آوریم.

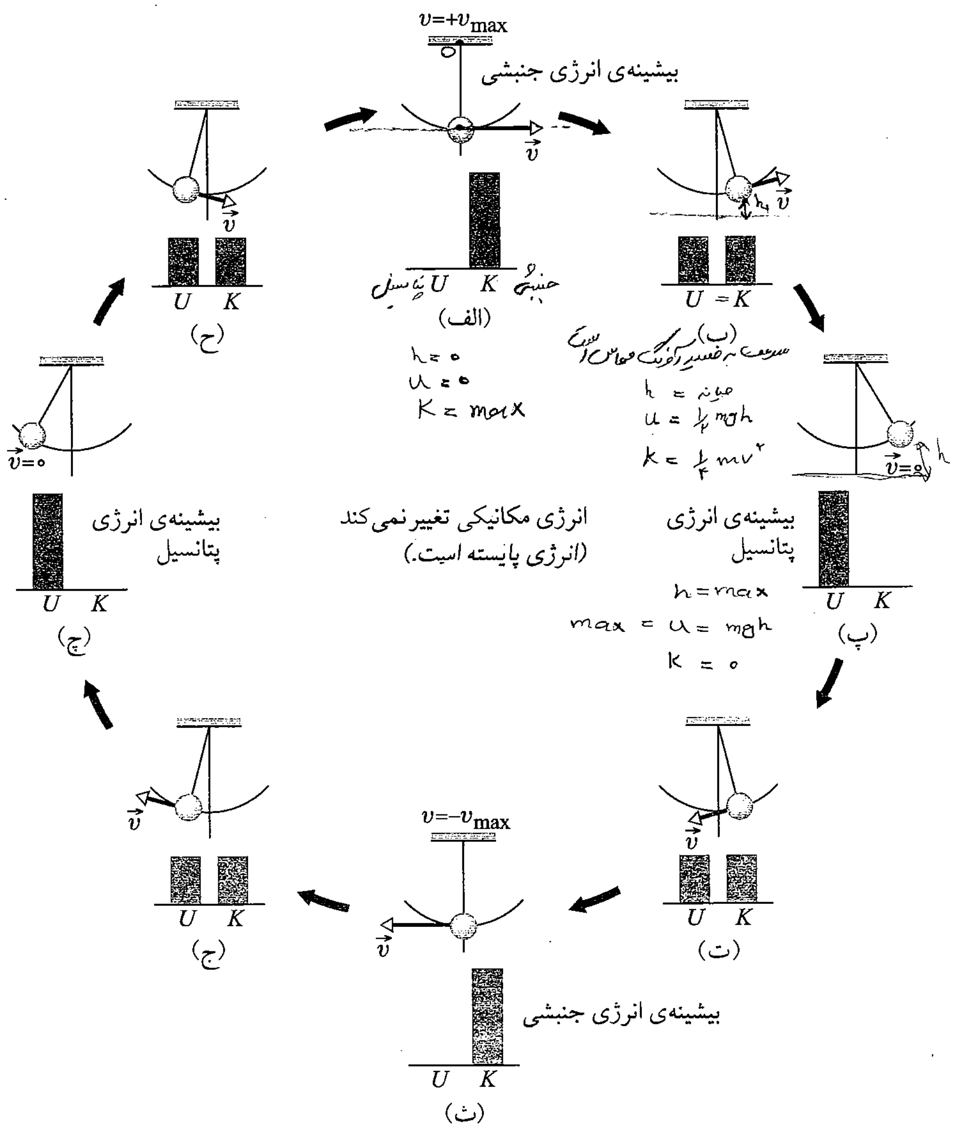
برای مثال، فرض می‌کنیم پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر به عنوان نقطه‌ی مرجع اختیار شود و در آن نقطه انرژی پتانسیل گرانشی برابر باشد با $U_۲ = ۰$. سپس، فرض می‌کنیم در بالاترین نقطه‌ی مسیر انرژی پتانسیل نسبت به نقطه‌ی مرجع برابر باشد با $U_۱ = ۲۰\,\mathrm{J}$. چون در بالاترین نقطه گلوله‌ی آونگ در یک لحظه متوقف می‌شود، در آن نقطه انرژی جنبشی برابر است با $K_۱ = ۰$. با جانشانی این مقادیر در معادله‌ی ۸-۱۷، انرژی جنبشی $K_۲$ در پایین‌ترین نقطه چنین به دست می‌آید:

$$K_۲ + ۰ = ۰ + ۲۰\,\mathrm{J} \Rightarrow$$

$$K_۲ = ۲۰\,\mathrm{J}$$

$T = 2\pi \frac{L}{g}$

به زمان تناوب آونگ

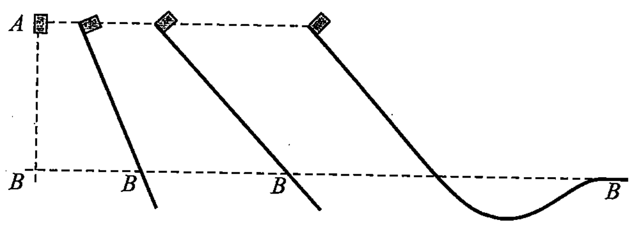


شکل ۸-۷ آونگی که جرم آن در گلوله‌ی واقع در انتهای پایینی آن متمرکز است، نوسان می‌کند. در شکل، یک چرخه‌ی کامل از حرکت آونگ نشان داده شده است. در حین نوسان کردن گلوله به بالا و پایین، مقادیر انرژی‌های پتانسیل و جنبشی دستگاه آونگ ـ زمین تغییر می‌کنند، اما انرژی مکانیکی دستگاه E_{mec}، ثابت می‌ماند. انرژی E_{mec} را می‌توان به صورت دست به دست شدن دائمی انرژی در میان صورت‌های جنبشی و پتانسیل توصیف کرد. در مرحله‌های (الف) و (ث)، تمام انرژی به صورت جنبشی است. در نتیجه، گلوله دارای بیشترین تندی و در پایین‌ترین نقطه واقع است. در مرحله‌های (پ) و (چ)، تمام انرژی به صورت پتانسیل است. در نتیجه، تندی گلوله صفر است و گلوله در بالاترین نقطه قرار دارد. در مرحله‌های (ب)، (ت)، (ج) و (ح)، نیمی از انرژی به‌صورت جنبشی و نیم دیگر به صورت پتانسیل است. اگر در حین نوسان کردن در نقطه‌ی اتصال آونگ به سقف اصطکاک وجود داشته باشد، یا نیروی پسار هوا به گلوله اثر کند، E_{mec} پایسته نخواهد بود، و آونگ، سرانجام، متوقف خواهد شد.

توجه کنید که این نتیجه را بدون توجه به حرکت گلوله در میان بالاترین و پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر (مانند شکل ۸-۷ ت) و بدون پیدا کردن کار انجام شده توسط نیروهای درگیر در حرکت، به دست آوردیم.

خودآزمایی ۳

شکل زیر چهار حالت را نشان می‌دهد که در یکی از حالت‌ها جسم از حالت سکون سقوط کرده و در سه حالت دیگر جسم روی یک شیب‌راهه‌ی بی‌اصطکاک لغزیده است. (الف) این حالت‌ها را با توجه به انرژی جنبشی جسم در نقطه‌ی B، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. (ب) این حالت‌ها را با توجه به تندی جسم در نقطه‌ی B، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



مسئله‌ی نمونه‌ی ۸-۳ پایستگی انرژی مکانیکی، سُرسُره‌ی آبی

مزیت کاربرد بسیار زیاد اصل پایستگی انرژی به جای قانون‌های حرکت نیوتون این است که از حالت آغازی می‌توان به حالت پایانی پرید، بی‌آنکه همه‌ی حرکت‌های میانی در نظر گرفته شوند. در اینجا به مثالی در این مورد توجه می‌کنیم.

در شکل ۸-۸، بچه‌ای به جرم m از حالت سکون از بالای یک سُرسره‌ی آبی به ارتفاع $h = ۸/۵\,\text{m}$ به پایین می‌لغزد. با این فرض که سُرسره به خاطر وجود آب بی‌اصطکاک است، تندی بچه را در پایین سُرسره پیدا کنید.

نکته‌های کلیدی

(۱) تندی بچه را مانند فصل‌های پیش نمی‌توان با استفاده کردن از شتاب او در راستای سُرسره پیدا کرد، زیرا زاویه‌ی شیب سُرسره معلوم نیست. اما چون تندی بچه به انرژی جنبشی او مربوط است، شاید بتوان با استفاده کردن از اصل پایستگی انرژی مکانیکی تندی را به دست آورد. بنابراین نیازی به دانستن شیب سُرسره نیست. (۲) انرژی مکانیکی در یک دستگاه ***به شرطی پایسته می‌ماند*** که دستگاه ***منزوی*** باشد و ***تنها*** نیروهای پایستار باعث تبدیل انرژی بشوند. اکنون، مسئله را حل می‌کنیم.

نیروها: دو نیرو به بچه اثر می‌کنند. یکی نیروی گرانشی، که یک نیروی پایستار است و روی بچه کار انجام می‌دهد. دیگری نیروی عمودی، که از سطح سُرسره به بچه وارد می‌شود و کار انجام نمی‌دهد زیرا در هنگام پایین آمدن بچه راستای آن در هر نقطه بر راستای حرکت عمود است.

دستگاه: چون تنها نیرویی که روی بچه کار انجام می‌دهد نیروی گرانشی است، دستگاه بچه ـ زمین را به عنوان دستگاه انتخاب می‌کنیم و آن را منزوی در نظر می‌گیریم.

بنابراین، فقط یک نیروی پایستار داریم که در یک دستگاه منزوی کار انجام می‌دهد. درنتیجه، اصل پایستگی انرژی مکانیکی را ***می‌توان به کار برد.***

محاسبات: فرض می‌کنیم انرژی مکانیکی بچه در بالای سُرسره

$E_{mec,t}$ و درپایین سُرسره $E_{mec,b}$ باشد. اصل پایستگی ایجاب می‌کند که:

$$E_{mec,b} = E_{mec,t} \qquad (۸-۱۹)$$

با بسط دادن این رابطه برحسب هر دو نوع انرژی مکانیکی، داریم

$$K_b + U_b = K_t + U_t \qquad (۸-۲۰)$$

یا

$$\frac{1}{2}mv_b^2 + mgy_b = \frac{1}{2}mv_t^2 + mgy_t$$

دو طرف معادله را به m تقسیم و حاصل را بازآرایی می‌کنیم:

$$v_b^2 = v_t^2 + 2g(y_t - y_b)$$

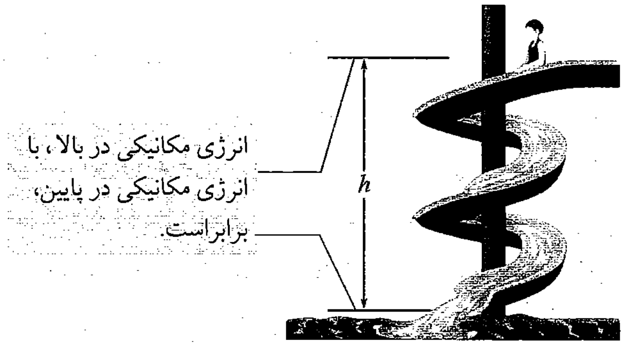
با جانشانی $v_t = 0$ و $y_t - y_b = h$ در معادله‌ی بالا، داریم

$$v_b = \sqrt{2gh} = \sqrt{(2)(9.8\,\mathrm{m/s^2})(8.5\,\mathrm{m})} \Rightarrow$$

$$v_b = 13\,\mathrm{m/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

این، همان تندی‌ای است که اگر بچه از ارتفاع ۸/۵ m می‌افتاد، به دست می‌آورد. در یک سُرسره‌ی واقعی نیروی اصطکاک اثر می‌کند و بچه درست با این تندی به پایین نمی‌رسد.

توضیحات: اگرچه حل کردن این مسئله با استفاده کردن از قانون‌های نیوتون مشکل است، کاربرد اصل پایستگی انرژی مکانیکی، حل مسئله را آسان‌تر می‌کند. با وجود این، اگر بخواهیم زمان رسیدن بچه به پایین سُرسره را پیدا کنیم، کاربرد روش‌های انرژی مفید نخواهند بود؛ در آن صورت نیاز به داشتن اطلاعات درباره‌ی شکل سُرسره داریم و در حل کردن مسئله مشکل خواهیم داشت.



شکل ۸-۸ بچه‌ای از یک سُرسُره‌ی آبی به‌پایین می‌لغزد و به اندازه‌ی ارتفاع h سقوط می‌کند.

۸-۳ خواندن منحنی انرژی پتانسیل

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۸-۷ با داشتن انرژی پتانسیل یک ذره به صورت تابعی از مکان آن x، نیروی وارد شده به ذره را معین کنید.

۸-۸ با داشتن نمودار انرژی پتانسیل برحسب x، نیروی وارد شده به ذره را معین کنید.

۸-۹ بر روی نمودار انرژی پتانسیل برحسب x، برای انرژی مکانیکی ذره خطی منطبق کنید و انرژی جنبشی ذره را به ازای هر مقدار معین x پیدا کنید.

۸-۱۰ اگر ذره‌ای در راستای محور x حرکت کند، نمودار انرژی پتانسیل مربوط به آن محور و پایستگی انرژی مکانیکی را برای ربط دادن مقادیر انرژی در یک مکان به مقادیر انرژی در مکان دیگر، به کار ببرید.

۸-۱۱ در روی نمودار انرژی پتانسیل، نقاط برگشت و ناحیه‌هایی را که ذره به خاطر شرایط انرژی مجاز به وارد شدن در آن‌ها نیست، مشخص کنید.

۸-۱۲ تعادل بی‌تفاوت، تعادل پایدار و تعادل ناپایدار را شرح دهید.

نکته‌های کلیدی

- اگر تابع انرژی پتانسیل یک دستگاه $U(x)$، که در آن به ذره‌ای نیروی یک بعدی $F(x)$ وارد می‌شود، در دست باشد، می‌توان نیرو

را چنین به دست آورد

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

● اگر تابع $U(x)$ بر روی یک نمودار داده شده باشد، به ازای هر مقدار x، نیروی $F(x)$ برابر با مقدار منفی شیب منحنی در آنجاست و انرژی جنبشی ذره از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\boxed{K(x) = E_{mec} - U(x)}$$

هم الکترون و هم پروتون جرم دارند پس جاذبه‌ی گرانشی داریم، و علاوه بر آن پتانسیل الکتریکی داریم و انرژی هسته‌ای هم داریم،

که در آن E_{mec} انرژی مکانیکی دستگاه است.

● نقطه‌ی برگشت، نقطه‌ای مانند x است که در آن نقطه حرکت ذره وارون می‌شود (در آن نقطه، داریم $K = ۰$).

● ذره در نقاطی در حال تعادل است که در آن نقاط شیب منحنی $U(x)$ صفر باشد [در آن نقاط، داریم $F(x) = ۰$].

خواندن منحنی انرژی پتانسیل

بار دیگر ذره‌ای را در نظر می‌گیریم که بخشی از یک دستگاه است و به آن یک نیروی پایستار اثر می‌کند. این بار فرض می‌کنیم که وقتی نیروی پایستار روی ذره کار انجام می‌دهد، حرکت ذره محدود به راستای محور x است. در اینجا می‌خواهیم نمودار انرژی پتانسیل وابسته به آن نیرو، $U(x)$، و کار انجام شده توسط آن نیرو را رسم کنیم. پس از آن می‌خواهیم چگونگی ربط دادن نمودار به نیرو و انرژی جنبشی ذره را بررسی کنیم. اما پیش از بحث کردن درباره‌ی این نمودارها باید رابطه‌ی میان نیرو و انرژی پتانسیل را به دست آوریم.

پیدا کردن نیرو به روش تحلیلی

معادله‌ی ۸-۶ چگونگی تعیین ΔU، تغییر انرژی پتانسیل میان دو نقطه در حالت یک بعدی را با معلوم بودن نیروی $F(x)$ مشخص می‌کند. اکنون، می‌خواهیم از روش دیگری استفاده کنیم؛ به این معنی که با در دست داشتن تابع انرژی پتانسیل $U(x)$، می‌خواهیم نیرو را پیدا کنیم.

در حرکت یک بعدی، W، کار انجام شده توسط نیروی وارد شده به یک ذره در هنگام حرکت کردن آن به اندازه‌ی مسافت Δx، برابر با $F(x)\Delta x$ است. بنابراین، معادله‌ی ۸-۱ را می‌توان چنین نوشت

$w = F.d$

$$\boxed{\Delta U(x) = -W = -F(x)\Delta x} \qquad (۸-۲۱)$$

با حل کردن معادله نسبت به $F(x)$ و نوشتن آن به صورت حد دیفرانسیلی، داریم

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad \text{(حرکت یک بعدی)} \qquad (۸-۲۲)$$

که همان رابطه‌ی مورد نظر است.

با قرار دادن $U(x) = \frac{۱}{۲}kx^۲$، که تابع انرژی پتانسیل کشسانی مربوط به نیروی فنر است، نتیجه‌ی به دست آمده را می‌توان مورد آزمون قرار دارد. با استفاده کردن از معادله‌ی ۸-۲۲، چنان‌که انتظار داریم، معادله‌ی $F(x) = -kx$ به دست می‌آید، که بیان کننده‌ی قانون هوک است. به همین ترتیب، رابطه‌ی $U(x) = mgx$، یعنی تابع انرژی پتانسیل گرانشی مربوط به دستگاه ذره ـ زمین را در هنگامی که ذره‌ی به جرم m در ارتفاع x از سطح زمین واقع است،

در معادله‌ی ۸-۲۲ قراز می‌دهیم. در این صورت، رابطه‌ی $F = -mg$ به دست می‌آید، که همان نیروی گرانشی وارد شده به ذره را نشان می‌دهد.

منحنی انرژی پتانسیل

شکل ۸-۹ الف نمودار تغییرات تابع انرژی پتانسیل $U(x)$ مربوط به دستگاهی است که در آن ذره‌ای دارای حرکت یک بعدی است و نیروی پایستار $F(x)$ روی ذره کار انجام می‌دهد. با تعیین شیب نمودار تابع $U(x)$ در نقطه‌های مختلف، $F(x)$ را به آسانی می‌توان (به طور تُرسیمی) پیدا کرد. [معادله‌ی ۸-۲۲ نشان می‌دهد که $F(x)$ برابر با شیب نمودار $U(x)$ با علامت منفی است]. شکل ۸-۹ ب نشان دهنده‌ی نمودار $F(x)$ است که با این روش به‌دست آمده است.

نقطه‌های برگشت

هنگامی که نیروی ناپایستار وجود ندارد انرژی مکانیکی دستگاه E، ثابت است و چنین به‌دست می‌آید

$$U(x) + K(x) = E_{\text{mec}} \qquad (۸\text{-}۲۳)$$

در اینجا $K(x)$ ***تابع انرژی جنبشی ذره*** است [$K(x)$، انرژی جنبشی را به صورت تابعی از مکان ذره، x، به دست می‌دهد]. معادله‌ی ۸-۲۳ را می‌توان دوباره به صورت زیر نوشت

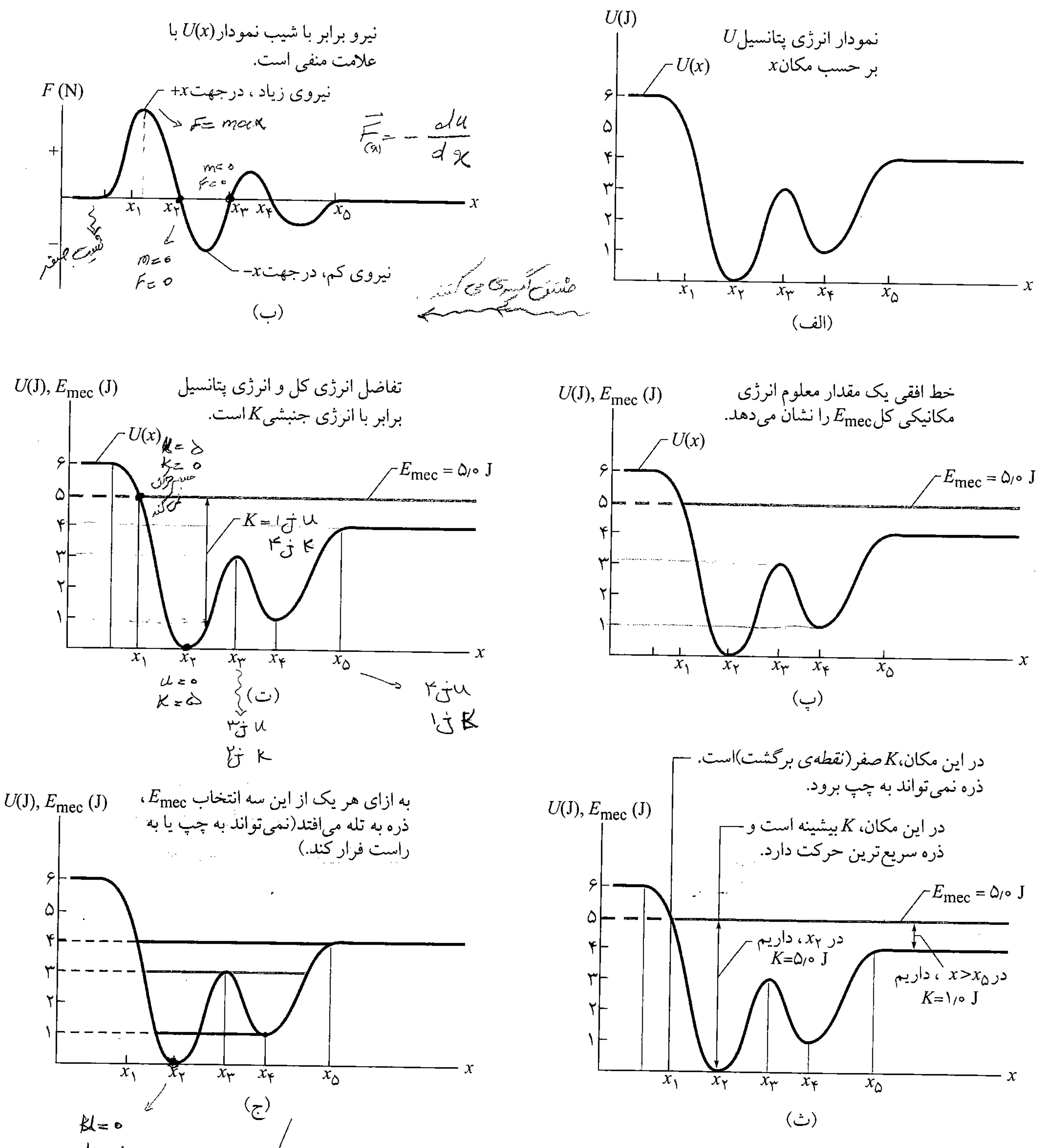
$$K(x) = E_{\text{mec}} - U(x) \qquad (۸\text{-}۲۴)$$

فرض کنید E_{mec} (یادتان باشد که ثابت است)، ۵٫۰ J است. این مقدار در شکل ۸-۹ پ، با خطی افقی که از مقدار ۵٫۰ J روی محور انرژی می‌گذرد، نمایش داده شده است. (در واقع، در آنجا این طور نشان داده شده است).

معادله‌ی ۸-۲۴ و شکل ۸-۹ ت، چگونگی تعیین انرژی جنبشی K را برای هر مکان ذره، x، نشان می‌دهد. برای این کار، در هر مکان x از روی نمودار $U(x)$، U مربوط را پیدا و سپس آن را از E_{mec} کم می‌کنیم. برای مثال، در شکل ۸-۹ ث، اگر ذره در سمت راست x_5 باشد، داریم $K = ۱٫۰\ \text{J}$. انرژی K هنگامی بیشترین مقدار (۵٫۰ J) را دارد که ذره در x_2 و هنگامی کمترین مقدار (صفر ژول) را دارد که ذره در x_1 قرار داشته باشد.

چون K نمی‌تواند منفی باشد (زیرا v^2 همیشه مثبت است)، ذره هرگز نمی‌تواند به سمت چپ x_1 حرکت کند، زیرا در آنجا $E_{\text{mec}} - U$ منفی است. هنگامی که ذره از x_2 به سمت x_1 حرکت می‌کند، K کاهش می‌یابد (تندی ذره کم می‌شود) تا در x_1 به $K = ۰$ می‌رسد (در آنجا ذره متوقف می‌شود).

توجه کنید که وقتی ذره به x_1 می‌رسد نیروی وارد شده به ذره، که از معادله‌ی ۸-۲۲ به‌دست می‌آید، مثبت است (زیرا شیب dU/dx منفی است). منظور این است که ذره در x_1 نمی‌ماند، بلکه به سمت راست، یعنی در خلاف جهت حرکت پیشی شروع به حرکت می‌کند.



حالت تعادل ناپایدار

شکل ۸-۹ (الف) نمودار تغییرات $U(x)$، تابع انرژی پتانسیل یک دستگاه شامل ذره‌ای که حرکتش محدود به راستای محور x است. در اینجا چون اصطکاک وجود ندارد، انرژی مکانیکی پایسته است. (ب) نمودار تغییرات نیروی $F(x)$ مؤثر بر ذره، که با تعیین شیب نمودار تابع انرژی پتانسیل در نقاط مختلف به دست آمده است. (پ) تا (ث) چگونگی تعیین انرژی جنبشی، (ج) نمودار تغییرات $U(x)$ قسمت (الف)، که سه مقدار مختلف E_{mec} را نشان می‌دهد.

بنابراین، x_1 **یک نقطه‌ی برگشت است**، یعنی، نقطه‌ای است که در آن $K = 0$ (زیرا $U = E$) و ذره تغییر جهت می‌دهد. در سمت راست نمودار، نقطه‌ی برگشت (که در آن $K = 0$) وجود ندارد. وقتی ذره به سمت راست می‌رود، تا بی‌نهایت به حرکت خود ادامه می‌دهد.

نقطه‌های تعادل

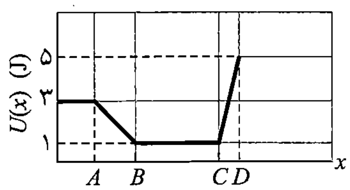
شکل ۸-۹ ج سه مقدار مختلف E_{mec} مربوط به نمودار تابع انرژی پتانسیل $U(x)$ شکل ۸-۹ الف را نشان می‌دهد. در اینجا می‌خواهیم ببینیم که این مقادیر چگونه وضعیت را تغییر می‌دهند. به ازای $E_{mec} = ۴/۰\,J$، نقطه‌ی برگشت از x_1 به نقطه‌ای در میان x_1 و x_2 منتقل می‌شود. هم‌چنین، در هر نقطه‌ی واقع در سمت راست x_5 انرژی مکانیکی دستگاه با انرژی پتانسیل آن برابر است. بنابراین، ذره انرژی جنبشی ندارد و (بنا به معادله‌ی ۸-۲۲) نیرویی به آن وارد نمی‌شود. در نتیجه، ذره باید ساکن باشد. ذره‌ای که در چنین مکانی قرار دارد، گفته می‌شود که در حال **تعادل بی‌تفاوت** است. (گلوله‌ی کوچکی که روی یک میز افقی قرار دارد در چنین حالتی است).

به ازای $E_{mec} = ۳/۰\,J$، دو نقطه‌ی برگشت وجود دارد: یکی در میان x_1 و x_2، و دیگری در میان x_4 و x_5. علاوه بر این، x_3 نقطه‌ای است که در آن $K = 0$. اگر ذره درست در این نقطه باشد، نیروی وارد شده به آن نیز صفر است و ذره ساکن می‌ماند. اما اگر ذره اندکی به یک طرف جابه‌جا شود، یک نیروی ناصفر آن را به همان طرف هُل می‌دهد و حرکت ذره ادامه می‌یابد. ذره‌ای که در چنین مکانی قرار دارد، گفته می‌شود که در حال **تعادل ناپایدار** است (گلوله‌ی کوچکی که روی یک توپ والیبال قرار دارد، نمونه‌ای از تعادل ناپایدار است).

اکنون، به ازای $E_{mec} = ۱/۰\,J$، رفتار ذره را در نظر می‌گیریم. اگر ذره در نقطه‌ی x_4 قرار گیرد، در همان‌جا می‌ماند و نمی‌تواند به خودی خود به راست یا به چپ حرکت کند، زیرا برای انجام دادن این کار نیاز به انرژی جنبشی منفی دارد. اگر ذره را اندکی به راست یا به چپ هُل بدهیم نیروی بازگرداننده‌ای ظاهر می‌شود که آن را به نقطه‌ی x_4 برمی‌گرداند. ذره‌ای که در چنین مکانی قرار دارد، گفته می‌شود که در حال **تعادل پایدار** است. (گلوله‌ی کوچکی که در ته یک جام نیمکره شکل قرار دارد، نمونه‌ای از تعادل پایدار است). اگر ذره در یک ***چاه پتانسیل*** فنجانی شکل به مرکز x_2 قرار گیرد، در میان دو نقطه‌ی برگشت واقع خواهد شد. در این حالت، ذره باز هم می‌تواند حرکت کند، اما فقط تا حد نقطه‌ی x_1 یا نقطه‌ی x_3.

☑ خودآزمایی ۴

شکل مقابل نمودار تابع انرژی پتانسیل $U(x)$ مربوط به دستگاهی را نشان می‌دهد که در آن ذره‌ای حرکت یک بعدی انجام می‌دهد. (الف) ناحیه‌های AB، BC و CD را با توجه به بزرگی نیروی وارد شده به ذره، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. (ب) وقتی ذره در ناحیه‌ی AB قرار دارد، جهت نیرو چگونه است؟



مسئله‌ی نمونه‌ی ۸-۴ خواندن نمودار انرژی پتانسیل

ذره‌ای به جرم $۲٫۰۰\,\mathrm{kg}$، در حالی که یک نیروی پایستار در طول محور x به آن وارد می‌شود، دارای حرکت یک بعدی در راستای محور x است. نمودار انرژی پتانسیل $U(x)$ وابسته به این نیرو در شکل ۸-۱۰ الف، رسم شده است. بنا به این نمودار، اگر ذره را در هر مکانی بین $x=۰$ و $x=۷٫۰۰\,\mathrm{m}$ قرار دهیم، دارای یکی از مقادیر رسم شده‌ی U خواهد بود. در نقطه‌ی $x=۶٫۵\,\mathrm{m}$، سرعت ذره $v_۰=(-۴٫۰۰\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{i}}$ است.

(الف) تندی ذره را درنقطه‌ی $x_۱=۴٫۵\,\mathrm{m}$ مربوط به شکل ۸-۱۰ الف، به دست آورید.

نکته‌های کلیدی

(۱) انرژی جنبشی ذره از معادله‌ی ۷-۱ $(K=\frac{۱}{۲}mv^۲)$ به دست می‌آید. (۲) چون تنها یک نیروی پایستار به ذره وارد می‌شود، در هنگام حرکت کردن ذره انرژی مکانیکی E_{mec} (مساوی با $K+U$) پایسته است. (۳) بنابراین، در روی یک نمودار $U(x)$ مانند شکل ۸-۱۰ الف، انرژی جنبشی برابر با تفاضل E_{mec} و U است.

محاسبات: در نقطه‌ی $x=۶٫۵\,\mathrm{m}$، انرژی جنبشی ذره برابر است با

$$K_۰=\frac{۱}{۲}mv_۰^۲=\frac{۱}{۲}(۲٫۰۰\,\mathrm{kg})(۴٫۰۰\,\mathrm{m/s^۲})=۱۶٫۰\,\mathrm{J}$$

در این نقطه، داریم $U=۰$، انرژی مکانیکی برابر است با

$$E_{\mathrm{mec}}=K_۰+U_۰=۱۶٫۰\,\mathrm{J}+۰=۱۶٫۰\,\mathrm{J}$$

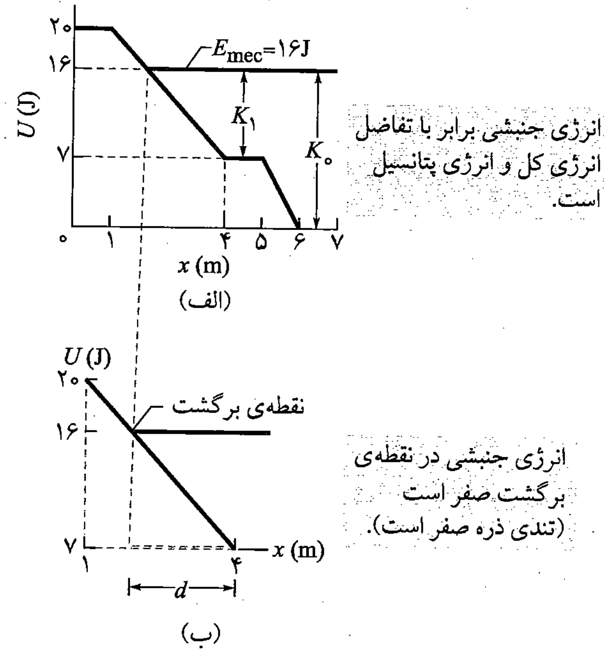
این مقدار E_{mec} در شکل ۸-۱۰ الف، به صورت یک خط افقی رسم شده است. در این شکل می‌بینیم که در نقطه‌ی $x=۴٫۵\,\mathrm{m}$، انرژی پتانسیل برابر است با $U_۱=۷٫۰\,\mathrm{J}$. انرژی جنبشی $K_۱$ برابر با تفاضل E_{mec} و $U_۱$ است:

$$K_۱=E_{\mathrm{mec}}-U_۱=۱۶٫۰\,\mathrm{J}-۷٫۰\,\mathrm{J}=۹٫۰\,\mathrm{J}$$

چون $K_۱=\frac{۱}{۲}mv_۱^۲$، داریم

$$v_۱=۳٫۰\,\mathrm{m/s} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

(ب) مکان نقطه‌ی برگشت ذره کجاست؟



شکل ۸-۱۰ (الف) نمودار انرژی پتانسیل U برحسب مکان x. (ب) بخشی از این نمودار برای پیدا کردن نقطه‌ی برگشت ذره مورد استفاده قرار گرفته است.

نکته‌ی کلیدی

نقطه‌ی برگشت جایی است که در آن نیرو در یک لحظه قطع و از آن پس جهت حرکت ذره وارون می‌شود. یعنی، در نقطه‌ی برگشت، ذره به طور لحظه‌ای دارای $v=۰$ و در نتیجه $K=۰$، است.

محاسبات: چون K برابر با تفاضل E_{mec} و U است، در شکل ۸-۱۰ الف، به دنبال نقطه‌ای می‌گردیم که با بالا رفتن نمودار U تا خط افقی E_{mec}، مطابق شکل ۸-۱۰ ب، به آن برسیم. چون نمودار U در شکل ۸-۱۰ ب، یک خط راست است، می‌توانیم با در نظر گرفتن مثلث‌های راست‌گوشه‌ی مشخص شده در شکل نسبت فاصله‌ها را به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{۱۶-۷٫۰}{d}=\frac{۲۰-۷٫۰}{۴٫۰-۱٫۰}$$

که در نتیجه، داریم $d=۲٫۰۸\,\mathrm{m}$. بنابراین، مکان نقطه‌ی برگشت عبارت است از

$$x=۴٫۰\,\mathrm{m}-d=۱٫۹\,\mathrm{m} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

(پ) نیرویی را که در ناحیه‌ی $۱/۹\,\text{m} < x < ۴/۰\,\text{m}$ بـه ذره وارد می‌شود، حساب کنید.

نکته‌ی کلیدی

نیرو از معادله‌ی ۸-۲۲ $[F(x) = -dU(x)/dx]$ به دست می‌آیـد. این معادله نشان می‌دهد که نیرو برابر با شیب نمـودار $U(x)$ بـا علامت منفی است.

محاسبات: با توجه به نمودار شکل ۸-۱۰ ب، می‌بینیم که نیرو در گستره‌ی $۱/۰\,\text{m} < x < ۴/۰\,\text{m}$ برابر است با

$$F = -\frac{۲۰\,\text{J} - ۷/۰\,\text{J}}{۱/۰\,\text{m} - ۴/۰\,\text{m}} = ۴/۳\,\text{N} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

بنابراین، نیرو دارای بزرگی $۴/۳\,\text{N}$ و در جهت مثبت محـور x است. این نتیجه با این واقعیت سـازگار اسـت کـه نیـرو حرکـت آغـازی چـپ‌سـوی ذره را متوقـف مـی‌کنـد و سـپس آن را بـه راست‌سو حرکت می‌دهد.

۸-۴ کار انجام‌شده روی یک‌دستگاه توسط نیروی خارجی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۸-۱۳ در هنگامی که توسط یک نیروی خارجی روی دستگاهی کار انجام می شود و اصطکاک هم وجود نـدارد، تغییـرات انـرژی جنبشی و انرژی پتانسیل را معین کنید.

۸-۱۴ در هنگامی که توسط یک نیروی خارجی روی دستگاهی کار انجام می‌شود و اصطکاک نیز وجود دارد، آن کار را به تغییرات انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و انرژی گرمایی ربط دهید.

نکته‌های کلیدی

- کار W مقدار انرژی داده شده به دستگاه یا گرفته شده از دستگاه توسط یک نیروی خارجی وارد شده به دستگاه است.
- وقتی به دستگاهی بیش از یک نیرو وارد مـی‌شـود، کـار خـالص نیروها همان انرژی مبادله شده است.
- وقتی اصطکاک وجود ندارد، کار انجام شده روی دستگاه و تغییر انرژی مکانیکی دستگاه، ΔE_{mec}، با هم برابرند:

$$W = \Delta E_{\text{mec}} = \Delta K + \Delta U$$

- وقتی یک نیروی اصطکاک جنبشی به درون دستگاه وارد می‌شود، انرژی گرمایی E_{th} دستگاه تغییر می‌کند. (ایـن انـرژی وابسـته بـه حرکت اتفاقی اتم‌ها و مولکول‌ها در دستگاه است).

در این صورت، کار انجام شده روی دستگاه برابر است با

$$W = \Delta E_{\text{mec}} + E_{\text{th}}$$

- تغییر ΔE_{th} مربوط به بزرگی نیـروی اصـطکاک f_k و بزرگـی جابه‌جایی d تحت اثر نیروی خارجی است:

$$\Delta E_{\text{th}} = f_k d$$

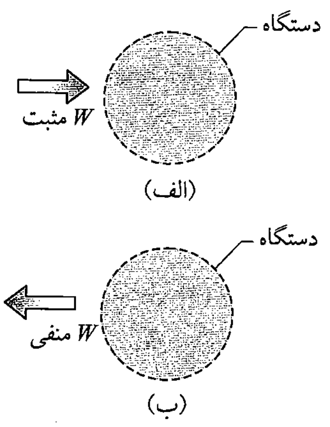
کار انجام شده روی یک دستگاه توسط نیروی خارجی

در فصل ۷ کار به صورت انرژی داده شده به یک شیء یا گرفته شده از آن، به وسیله‌ی نیروی مؤثر بر شیء، تعریف شد. اکنـون ایـن تعریـف را بـرای یـک نیـروی خـارجی وارد شـده بـه دستگاهی از اشیا تعمیم می‌دهیم.

کار، انرژی داده شده به، یا گرفته شده از، یک دستگاه به وسیله‌ی یک نیروی خارجی وارد شده به دستگاه است.

شکل ۸-۱۱ الف نمودار کار مثبت (دادن انرژی *به* دستگاه) و شکل ۸-۱۱ ب، نمودار کار منفی (گرفتن انرژی *از* دستگاه) را نشان می‌دهد. هرگاه بیش از یک نیرو به دستگاه اثر کند، ***کار خالص*** آن‌ها برابر با انرژی داده شده به دستگاه یا گرفته شده از آن است.

این انتقال انرژی مانند انتقال پول از یک حساب بانکی به حساب بانکی دیگر است. وقتی دستگاه شامل یک ذره یا شیء ذره مانند است، چنان‌که در فصل ۷ دیدیم، کار انجام شده توسط نیرو روی دستگاه می‌تواند فقط انرژی جنبشی دستگاه را تغییر دهد. رابطه‌ی انرژی برای این نوع انتقال توسط قضیه‌ی کار - انرژی جنبشی معادله‌ی ۷-۱۰ $(\Delta K = W)$ بیان می‌شود؛ یعنی، تک ذره فقط یک حساب انرژی به نام انرژی جنبشی دارد. نیروهای خارجی می‌توانند انرژی را با این حساب مبادله کنند. اما اگر دستگاه پیچیده‌تر باشد، نیروی خارجی می‌تواند شکل‌های دیگر انرژی (مانند انرژی پتانسیل) را هم تغییر دهد؛ یعنی، دستگاه پیچیده‌تر می‌تواند چند حساب انرژی داشته باشد.



شکل ۸-۱۱ (الف) کارمثبت انجام‌شده‌ی W روی یک دستگاه اختیاری به معنی دادن انرژی به‌دستگاه است. (ب) کار منفی انجام شده‌ی W به معنی گرفتن انرژی از دستگاه است.

اکنون، رابطه‌ی انرژی را برای چنین دستگاه‌هایی بر مبنای حالت بی‌اصطکاک و حالت با اصطکاک، به دست می‌آوریم.

حالت بی‌اصطکاک

در مسابقه‌ی پرتاب توپ در بولینگ، بازیکن نخست دولا می‌شود و دست‌ها را مانند فنجان در زیر توپ روی زمین قرار می‌دهد. سپس، در حین بالا کشیدن دست‌ها به سرعت، بدن خود را راست می‌کند و توپ را از حد صورت خود به بالا پرتاب می‌کند. در این حرکت بالاسو واضح است که نیروی وارد شده از سوی بازیکن روی توپ «کار انجام می‌دهد». در اینجا یک نیروی خارجی انرژی را انتقال می‌دهد، اما به کدام دستگاه؟

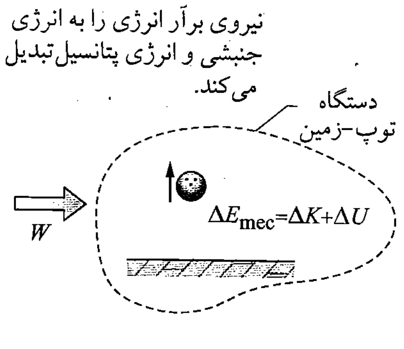
برای پاسخ دادن به این پرسش باید ببینیم چه انرژی‌هایی تغییر می‌کنند. تغییر انرژی جنبشی توپ به اندازه‌ی ΔK است و چون توپ و زمین از هم بیشتر فاصله می‌گیرند، انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه توپ - زمین به اندازه‌ی ΔU تغییر می‌کند. برای توجه به هر دو تغییر باید دستگاه توپ - زمین را در نظر بگیریم. بنابراین، نیروی بازیکن یک نیروی خارجی است که روی دستگاه کار انجام می‌دهد و مقدار این کار برابر است با

$$W = \Delta K + \Delta U \tag{۸-۲۵}$$

یا

$$W = \Delta E_{mec} \quad \text{(کار انجام شده روی دستگاه، حالت بی‌اصطکاک)} \tag{۸-۲۶}$$

در این رابطه ΔE_{mec} تغییر انرژی مکانیکی دستگاه است. این دو معادله، که در شکل ۸-۱۲ نمایش داده شده‌اند، برای بیان کار انجام شده روی دستگاه توسط یک نیروی خارجی در حالت بی‌اصطکاک، هم‌ارزند.



شکل ۸-۱۲ کار مثبت انجام شده‌ی W روی دستگاه توپ و زمین انرژی مکانیکی دستگاه را به اندازه‌ی ΔE_{mec}، انرژی جنبشی توپ را به اندازه‌ی ΔK، و انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه را به اندازه‌ی ΔU، تغییر می‌دهد.

حالت با اصطکاک

اکنون، مثال مربوط به شکل ۸-۱۳ الف را در نظر می‌گیریم. نیروی افقی و ثابت $\vec{F}$ جسمی را در راستای محور x می‌کشد و در طی جابه‌جایی $\vec{d}$، سرعت جسم از $\vec{v}_0$ به $\vec{v}$ افزایش می‌یابد. در حین حرکت کردن جسم روی سطح، نیروی اصطکاک جنبشی ثابت $\vec{f}_k$ از سوی سطح به جسم وارد می‌شود. نخست، جسم را به عنوان دستگاه در نظر می‌گیریم و قانون دوم نیوتون را درباره‌ی آن به کار می‌بریم. این قانون برای مؤلفه‌های مربوط به راستای محور x ($F_{\text{net},x} = ma_x$) چنین نوشته می‌شود

$$F - f_k = ma \qquad (۸-۲۷)$$

چون نیروها ثابت‌اند شتاب $\vec{a}$ نیز ثابت است. بنابراین، با استفاده کردن از معادله‌ی ۲-۱۶ می‌توان نوشت

$$v^2 = v_0^2 + 2ad$$

با حل کردن این معادله نسبت به a، جانشانی نتیجه در معادله‌ی ۸-۲۷، و بازآرایی عبارت حاصل، داریم

$$Fd = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + f_k d \qquad (۸-۲۸)$$

یا، چون برای جسم، داریم $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta K$، می‌توان نوشت

$$Fd = \Delta K + f_k d \qquad (۸-۲۹)$$

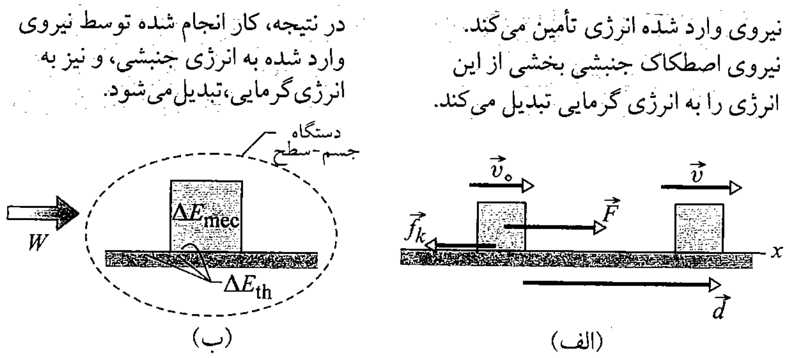
در حالت کلی‌تر (مثلاً در حالتی که جسم از یک شیب‌راهه بالا می‌رود)، انرژی پتانسیل هم می‌تواند تغییر کند. برای در نظر گرفتن تغییر ممکن، معادله‌ی ۸-۲۹ را به صورت کلی‌تر زیر می‌نویسیم

$$Fd = \Delta E_{\text{mec}} + f_k d \qquad (۸-۳۰)$$

بنا به تجربه می‌دانیم که جسم و بخشی از سطحی که جسم روی آن می‌لغزد گرم می‌شود. همان‌طور که در فصل ۱۸ (جلد دوم کتاب) خواهیم دید، دمای یک جسم به انرژی گرمایی جسم E_{th} (انرژی مربوط به حرکت تصادفی اتم‌ها و مولکول‌ها در جسم)، بستگی دارد. در اینجا انرژی گرمایی جسم و سطح افزایش می‌یابد زیرا (۱) در بین آن‌ها اصطکاک وجود دارد، و (۲) لغزش وجود دارد. یادآوری می‌شود که اصطکاک از جوش خوردگی سرد میان دو سطح ناشی می‌شود. وقتی جسم روی سطح می‌لغزد، لغزش باعث گسیختگی مکرر و تشکیل شدن دوباره‌ی جوش خوردگی‌ها در میان جسم و سطح می‌شود، که نتیجه‌ی آن گرم شدن جسم و سطح است. بنابراین، لغزش انرژی گرمایی E_{th} را افزایش می‌دهد.

در حین آزمایش کردن درمی‌یابیم که افزایش یافتن انرژی گرمایی ΔE_{th}، برابر با حاصل‌ضرب بزرگی‌های f_k و d است:

$$\Delta E_{\text{th}} = f_k d \quad \text{(افزایش انرژی گرمایی در اثر لغزش)} \qquad (۸-۳۱)$$



شکل ۸-۱۳ (الف) جسمی با نیروی $\vec{F}$ در روی سطح، در حالی که نیروی اصطکاک جنبشی با حرکت مخالفت می‌کند، کشیده می‌شود. در آغاز انجام دادن جابه‌جایی $\vec{d}$، سرعت جسم $\vec{v}_\circ$ و در پایان جابه‌جایی $\vec{v}$ است. (ب) نیروی $\vec{F}$ کار مثبت W را روی دستگاه جسم ـ سطح انجام می‌دهد و سبب تغییر انرژی مکانیکی جسم ΔE_{mec}، و تغییر انرژی گرمایی جسم و سطح ΔE_{th}، می‌شود.

بنابراین، معادله‌ی ۸-۳۰ را می‌توان دوباره چنین نوشت

$$Fd = \Delta E_{mec} + \Delta E_{th} \qquad (۸\text{-}۳۲)$$

مقدار Fd برابر با W، کار انجام شده توسط نیروی خارجی $\vec{F}$ است (که همان انرژی منتقل شده توسط نیرو است)، اما این کار روی کدام دستگاه انجام می‌شود (انتقال انرژی در کجا صورت می‌گیرد)؟ برای پاسخ دادن به این پرسش باید ببینیم چه انرژی‌هایی تغییر می‌کنند. در اینجا انرژی مکانیکی جسم تغییر می‌کند و انرژی‌های گرمایی جسم و سطح هم تغییر می‌کنند. بنابراین، کار توسط نیروی $\vec{F}$ روی دستگاه جسم ـ سطح انجام می‌شود. این کار برابر است با

$$W = \Delta E_{mec} + \Delta E_{th} \quad \text{(کار انجام‌شده روی دستگاه، حالت با اصطکاک)} \qquad (۸\text{-}۳۳)$$

این معادله، که با شکل ۸-۱۳ ب بیان شده است، رابطه‌ی انرژی مربوط به کاری است که نیروی خارجی در حالت با اصطکاک روی یک دستگاه انجام می‌دهد.

☑ خودآزمایی ۵

در سه آزمایش، جسمی با یک نیروی افقی در راستای یک سطح با اصطکاک، مطابق شکل ۸-۱۳ الف، هُل داده می‌شود. بزرگی نیروی وارد شده‌ی F و تأثیر هُل دادن جسم روی تندی در جدول زیر داده شده است. در هر سه آزمایش جسم در طی مسافت یکسان d هُل داده می‌شود. این سه آزمایش را با توجه به تغییر انرژی گرمایی جسم و سطح در طی مسافت d، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

آزمایش	F	وضع تندی جسم
الف	۵/۰ N	کاهش می‌یابد
ب	۷/۰ N	ثابت می‌ماند
پ	۸/۰ N	افزایش می‌یابد

مسئله‌ی نمونه‌ی ۸-۵ کار، اصطکاک، تغییر انرژی گرمایی، صندوق کلم

شخصی یک صندوق چوبی پر از کلم (به جرم کل $m = ۱۴\,\mathrm{kg}$) را با نیروی افقی و ثابت $\vec{F}$ به بزرگی $۴۰\,\mathrm{N}$ بر روی یک سطح بتونی هُل می‌دهد. در یک جابه‌جایی مستقیم به بزرگی $d = ۰/۵۰\,\mathrm{m}$، تندی صندوق از $v_0 = ۰/۶۰\,\mathrm{m/s}$ به $v = ۰/۲۰\,\mathrm{m/s}$ کاهش می‌یابد.

(الف) بزرگی نیروی $\vec{F}$ چقدر کار انجام می‌دهد و کار روی چه دستگاهی انجام می‌شود؟

نکته‌ی کلیدی

چون نیروی وارد شده‌ی $\vec{F}$ ثابت است، کار انجام شده توسط آن را می‌توان با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۷ $(W = Fd\cos\phi)$ به‌دست آورد.

محاسبه: با جانشانی داده‌های معلوم و در نظر گرفتن این واقعیت که نیروی $\vec{F}$ و جابه‌جایی $\vec{d}$ همسو هستند، داریم

$$W = Fd\cos\phi = (۴۰\,\mathrm{N})(۰/۵۰\,\mathrm{m})\cos ۰^\circ \Rightarrow$$

$$W = ۲۰\,\mathrm{J}$$ **(پاسخ)**

استدلال: در تعیین دستگاهی که کار روی آن انجام می‌شود، باید ببینیم چه انرژی‌هایی تغییر کرده‌اند. چون تندی صندوق تغییر می‌کند، به یقین انرژی جنبشی صندوق هم به اندازه‌ی ΔK تغییر می‌کند. آیا در بین سطح و صندوق اصطکاک وجود دارد و انرژی گرمایی تغییر می‌کند؟ توجه کنید که $\vec{F}$ و سرعت صندوق همسو هستند. پس، اگر اصطکاک نباشد $\vec{F}$ باید صندوق را به تندی ***بالاتر*** برساند. اما چون تندی صندوق ***کم می‌شود***، باید اصطکاک وجود داشته باشد و انرژی گرمایی صندوق و سطح به اندازه‌ی ΔE_{th} تغییر کند. بنابراین، دستگاهی که کار روی آن انجام می‌شود، دستگاه صندوق ـ سطح است زیرا هر دو تغییر انرژی در این دستگاه صورت می‌گیرند.

(ب) افزایش انرژی گرمایی صندوق و سطح ΔE_{th}، چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

برای یک دستگاه با اصطکاک، با استفاده کردن از معادله‌ی انرژی ۸-۳۳، می‌توان ΔE_{th} را به W، کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$، ربط داد:

$$W = \Delta E_{\mathrm{mec}} + \Delta E_{\mathrm{th}}. \qquad (۸\text{-}۳۴)$$

محاسبات: مقدار W در قسمت (الف) به دست آمده است. ΔE_{mec}، تغییر انرژی مکانیکی صندوق درست برابر با تغییر انرژی جنبشی است زیرا هیچ تغییری در انرژی پتانسیل صورت نگرفته است. در نتیجه، داریم

$$\Delta E_{\mathrm{mec}} = \Delta K = \frac{۱}{۲}mv^۲ - \frac{۱}{۲}mv_0^۲$$

با جانشانی این مقدار در معادله‌ی ۸-۳۴ و حل کردن معادله‌ی حاصل نسبت به ΔE_{th}، داریم

$$\Delta E_{\mathrm{th}} = W - (\frac{۱}{۲}mv^۲ - \frac{۱}{۲}mv_0^۲) = W - \frac{۱}{۲}m(v^۲ - v_0^۲)$$

$$\Delta E_{\mathrm{th}} = ۲۰\,\mathrm{J} - \frac{۱}{۲}(۱۴\,\mathrm{kg})[(۰/۲۰\,\mathrm{m/s})^۲ - (۰/۶۰\,\mathrm{m/s})^۲] \Rightarrow$$

$$\Delta E_{\mathrm{th}} = ۲۲/۲\,\mathrm{J} \approx ۲۲\,\mathrm{J}$$ **(پاسخ)**

بدون انجام دادن آزمایش‌های بیشتر نمی‌توان گفت که چه مقدار از این انرژی گرمایی به صندوق و چه مقدار به سطح بتونی داده می‌شود. ما فقط مقدار کل انرژی گرمایی را می‌دانیم.

۸–۵ پایستگی انرژی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۸–۱۵ در مورد یک دستگاه منزوی (بدون نیروی خارجی برایند)، برای ربط دادن انرژی کل آغازی (همه‌ی انواع انرژی) به انرژی کل در یک لحظه‌ی بعدی، اصل پایستگی انرژی را به‌کار ببرید.

۸–۱۶ در مورد یک دستگاه نامنزوی، کار انجام شده روی دستگاه توسط یک نیروی خارجی برایند را به تغییرات انواع مختلف انرژی‌ها در درون دستگاه ربط دهید.

۸–۱۷ رابطه‌ی میان توان متوسط، انتقال انرژی مربوط و بازه‌ی زمانی لازم برای انتقال انرژی را به کار ببرید.

۸–۱۸ با داشتن انرژی به صورت تابعی از زمان (به صورت معادله یا به صورت نمودار)، توان لحظه‌ای (انتقال انرژی در هر لحظه) را معین کنید.

نکته‌های کلیدی

● انرژی کل یک دستگاه، E، (مجموع انرژی مکانیکی و انرژی‌های درونی، از جمله انرژی گرمایی) فقط می‌تواند با مقدار انرژی داده شده به دستگاه یا گرفته شده از آن، تغییر کند. این واقعیت تجربی قانون پایستگی انرژی نامیده می‌شود.

● اگر کار انجام شده روی دستگاه W باشد، داریم

$$W = \Delta E = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}} + \Delta E_{\text{int}}$$

اگر دستگاه منزوی باشد ($W = ۰$)، خواهیم داشت

$$\Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}} + \Delta E_{\text{int}} = ۰$$

و

$$E_{\text{mec},۲} = E_{\text{mec},۱} - \Delta E_{\text{th}} - \Delta E_{\text{int}}$$

که در آن شاخص‌های پایین ۱ و ۲ مربوط به دو لحظه‌ی متفاوت هستند.

● توان ناشی از یک نیرو، ***آهنگ انتقال انرژی*** توسط آن نیرو است. اگر در بازه‌ی زمانی Δt انرژی ΔE توسط یک نیرو به دستگاه منتقل شود، توان متوسط آن نیرو برابر است با

$$P_{\text{avg}} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

● توان لحظه‌ای ناشی از نیرو برابر است با

$$P = \frac{dE}{dt}$$

در هر زمان معین روی نمودار انرژی E برحسب زمان t، توان برابر با شیب نمودار است.

پایستگی انرژی

تاکنون در مورد حالت‌های گوناگونی بحث کردیم که مانند پول مبادله شده در میان حساب‌های بانکی، به اشیا، یا دستگاه‌ها، انرژی داده یا از آن‌ها گرفته می‌شد. در هر حالت فرض کردیم که انرژی درگیر در این مبادلات را همیشه می‌توان به حساب آورد؛ یعنی انرژی به گونه‌ای سحرآمیز نه پدیدار و نه ناپدید می‌شود. به زبان فرمولی فرض کردیم (به درستی) انرژی از قانونی به نام **قانون پایستگی انرژی** پیروی می‌کند، که به **انرژی کل** دستگاه، E، مربوط می‌شود. این انرژی کل برابر با مجموع انرژی مکانیکی، انرژی گرمایی و هر شکل **انرژی درونی** علاوه بر انرژی گرمایی، است. (تاکنون به بحث درباره‌ی انواع دیگر انرژی

درونی نپرداخته‌ایم).

انرژی کل یک دستگاه، E، تنها به اندازه‌ی انرژی داده شده به دستگاه یا گرفته شده از آن می‌تواند تغییر کند.

تنها نوع تبادل انرژی که در نظر گرفتیم، کار انجام شده‌ی W، روی یک دستگاه بود. بنابراین، اکنون می‌توانیم قانون پایستگی انرژی را به صورت زیر بیان کنیم

$$W = \Delta E = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}} + \Delta E_{\text{int}} \qquad (۸\text{-}۳۵)$$

که در آن ΔE_{mec} تغییر انرژی مکانیکی دستگاه، ΔE_{th} هرگونه تغییر انرژی گرمایی دستگاه، و ΔE_{int} هرگونه تغییر مربوط به هر نوعی از انرژی درونی دستگاه است. ΔE_{mec} شامل ΔK، تغییرات انرژی جنبشی و ΔU، تغییرات انرژی پتانسیل (کشسانی، گرانشی، یا هر نوع ممکن دیگر) است.

قانون پایستگی انرژی، چیزی ***نیست*** که از اصول فیزیک پایه به دست آمده باشد. بلکه، قانونی است که مبتنی بر تجربه‌های بی‌شمار است و دانشمندان و مهندسان هیچ‌گاه در آن موارد استثنایی نیافته‌اند. خیلی ساده است، انرژی نمی‌تواند به گونه‌ای سحرآمیز پدیدار، یا ناپدید شود.

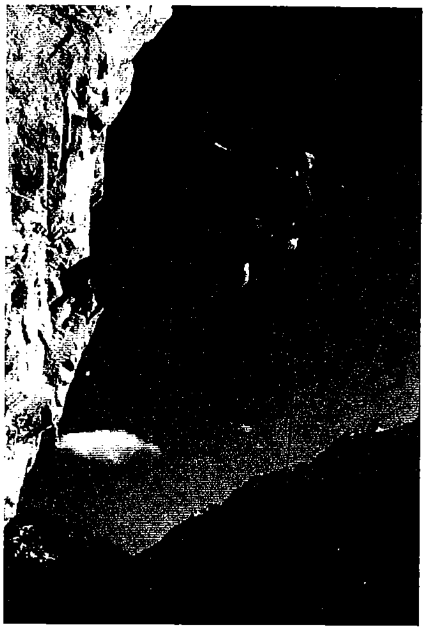
دستگاه منزوی

اگر دستگاهی نسبت به محیط پیرامون خودش منزوی باشد، نمی‌توان انرژی به آن داد یا از آن گرفت. در این صورت، قانون پایستگی انرژی چنین بیان می‌شود:

انرژی کل یک دستگاه منزوی E، نمی‌تواند تغییر کند.

بیشتر تبدیل‌های انرژی ممکن است در ***درون*** دستگاه منزوی، مثلاً بین انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل، یا انرژی‌جنبشی و انرژی گرمایی، صورت گیرند. اما، مجموع تمام انواع انرژی دستگاه نمی‌تواند تغییر کند. در اینجا هم انرژی نمی‌تواند به گونه‌ای سحرآمیز پدیدار، یا ناپدید شود.

به عنوان مثال، در شکل ۸-۱۴ صخره‌نورد، تجهیزات او و زمین را می‌توان به عنوان یک دستگاه منزوی در نظر گرفت. وقتی او از صخره پایین می‌آید، پیکربندی دستگاه تغییر می‌کند و او باید میزان انتقال انرژی از شکل انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه را کنترل کند. (انرژی نمی‌تواند به طور کامل تلف شود). بخشی از انرژی به انرژی جنبشی او تبدیل می‌شود. اما واضح است که او نمی‌خواهد میزان تبدیل انرژی به این نوع زیاد باشد یا سرعتش زیاد شود، به همین جهت، هنگام پایین آمدن طناب را به دور حلقه‌های فلزی می‌پیچد تا در حین حرکت کردن، میان طناب و حلقه اصطکاک به وجود آید. لغزیدن حلقه‌ها روی طناب سبب می‌شود انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه به انرژی گرمایی تبدیل شود تا او بتواند سرعت را کنترل کند.



شکل ۸-۱۴ صخره‌نورد برای پایین آمدن باید انرژی را از انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه شامل خودش، تجهیزات و زمین، بگیرد. او طناب را به دور حلقه‌های فلزی چنان پیچیده است که طناب به حلقه‌ها مالیده می‌شود. این امر سبب می‌شود که انرژی منتقل شده بیشتر به انرژی گرمایی در طناب و حلقه‌ها تبدیل شود، تا به انرژی جنبشی صخره‌نورد.

در هنگام پایین آمدن، انرژی کل دستگاه صخره‌نورد ـ تجهیزات ـ زمین (مجموع انرژی پتانسیل گرانشی، انرژی جنبشی و انرژی گرمایی) تغییر نمی‌کند.

برای یک دستگاه منزوی قانون پایستگی انرژی را به دو طریق می‌توان نوشت. نخست، با قرار دادن $W = ۰$ در معادله‌ی ۸–۳۵، داریم

$$\Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}} + \Delta E_{\text{int}} = ۰ \quad \text{(دستگاه منزوی)} \qquad (۳۶\text{–}۸)$$

هم‌چنین، می‌توان فرض کرد $\Delta E_{\text{mec}} = E_{\text{mec},۲} - E_{\text{mec},۱}$، که در آن شاخص‌های ۱ و ۲ به دو لحظه‌ی مختلف، مثلاً، لحظه‌های پیش و پس از بروز یک فرایند معین، مربوط می‌شوند. بنابراین، معادله‌ی ۸–۳۶ چنین نوشته می‌شود

$$E_{\text{mec},۲} = E_{\text{mec},۱} - \Delta E_{\text{th}} - \Delta E_{\text{int}} \qquad (۳۷\text{–}۸)$$

بنا به معادله‌ی ۸–۳۷ نتیجه می‌گیریم که:

در یک دستگاه منزوی انرژی کل مربوط به یک لحظه را می‌توان به انرژی کل در لحظه‌ی دیگر ربط داد، *بی‌آنکه انرژی‌های مربوط به لحظه‌های میانی را در نظر بگیریم.*

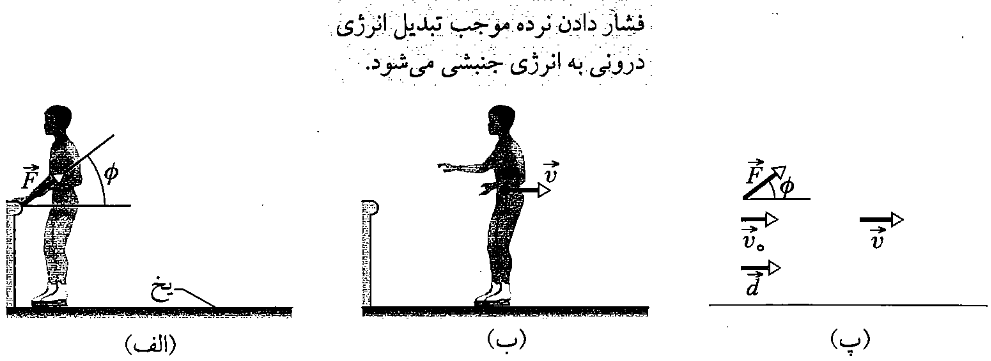
این واقعیت برای حل کردن مسئله‌های مربوط به دستگاه‌های منزوی در موقعی که لازم است انرژی‌های دستگاه پیش و پس از بروز یک فرایند معین در دستگاه به هم ربط داده شوند، وسیله‌ای بسیار مفید است.

در پودمان ۸–۲، حالت خاصی از دستگاه‌های منزوی، یعنی حالتی که در آن نیروهای ناپایستار (مانند نیروی اصطکاک جنبشی) وجود ندارد، مورد بحث قرار گرفت. در آن حالت خاص، ΔE_{th} و ΔE_{int} هر دو صفر بودند. در نتیجه، معادله‌ی ۸–۳۷ به صورت ساده‌ی معادله‌ی ۸–۱۸ نوشته شد. به عبارت دیگر، وقتی که در یک دستگاه منزوی نیروهای ناپایستار وجود نداشته باشند، انرژی مکانیکی دستگاه پایسته می‌ماند.

نیروهای خارجی و تبدیل انرژی درونی

نیروی خارجی می‌تواند انرژی جنبشی یا انرژی پتانسیل یک شیء را بدون انجام دادن کار بر روی آن ـ یعنی بدون انتقال انرژی به آن، تغییر دهد. در عوض، این نیرو مسئول تبدیل انرژی در درون شیء از نوعی به نوع دیگر است.

شکل ۸–۱۵ مثالی را در این باره نشان می‌دهد. یک اسکیت‌باز روی یخ، که در آغاز ساکن است، با فشار دادن خود به یک نرده از نرده دور می‌شود و بر روی یخ سُر می‌خورد (شکل‌های ۸–۱۵ الف و ب). انرژی جنبشی این اسکیت‌باز بر اثر نیروی خارجی $\vec{F}$ که از نرده به او وارد می‌شود، افزایش می‌یابد. اما این نیرو انرژی را از نرده به او منتقل نمی‌کند. بنابراین، نیرو کاری بر روی اسکیت‌باز انجام نمی‌دهد. بلکه، انرژی جنبشی او بر اثر تبدیل‌های درونی ناشی از انرژی زیست شیمیایی در عضله‌های او افزایش می‌یابد.



شکل ۸-۱۵ (الف) هنگامی که اسکیت‌باز خود را به نرده فشار می‌دهد، از نرده نیروی $\vec{F}$ به او وارد می‌شود. (ب) پس از جدا شدن اسکیت‌باز از نرده، سرعت او $\vec{v}$ است. (پ) نیروی خارجی $\vec{F}$ تحت زاویه‌ی ϕ نسبت به محور افقی x به اسکیت‌باز وارد می‌شود. وقتی اسکیت‌باز به اندازه‌ی $\vec{d}$ جابه‌جا می‌شود، سرعت او بر اثر مؤلفه‌ی افقی $\vec{F}$ از $\vec{v}_\circ$ (مساوی با صفر) به $\vec{v}$ تغییر می‌کند.

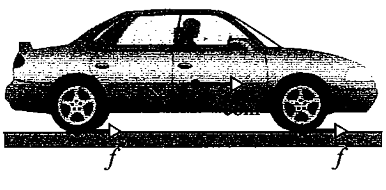
شکل ۸-۱۶ نمونه‌ی دیگری را درباره‌ی این موضوع نشان می‌دهد. موتور یک خودرو تندی خودرو را با چهار چرخ محرک (هر چهار چرخ به کمک موتور می‌چرخند) افزایش می‌دهد. در حین شتاب گرفتن، موتور باعث می‌شود لاستیک‌ها سطح جاده را به پس‌سو هُل بدهند. این هُل دادن، نیروهای اصطکاک $\vec{f}$ را که به هر لاستیک به پیش‌سو وارد می‌شوند، به وجود می‌آورد. نیروی خارجی برایند $\vec{F}$ ناشی از جاده، که برابر با مجموع این نیروهای اصطکاک است، به خودرو شتاب می‌دهد. این عمل انرژی جنبشی خودرو را افزایش می‌دهد. اما نیروی $\vec{F}$ انرژی را از جاده به خودرو منتقل نمی‌کند و در نتیجه هیچ کاری روی خودرو انجام نمی‌دهد. بلکه انرژی جنبشی خودرو بر اثر تبدیل‌های درونی انرژی ذخیره شده در سوخت، افزایش می‌یابد.

در حالت‌هایی مانند دو مورد شرح داده شده اگر بتوانیم شرایط را ساده کنیم، گاهی می‌توانیم نیروی خارجی $\vec{F}$ وارد شده به یک شیء را به تغییر انرژی مکانیکی شیء، ربط دهیم. مثال اسکیت‌باز روی یخ را در نظر بگیرید. در حین هُل دادن در طی مسافت d در شکل ۸-۱۵ پ، به سادگی می‌توان فرض کرد که وقتی تندی او از $v_\circ = \circ$ به v تغییر می‌کند، شتاب ثابت است. (یعنی، فرض می‌کنیم $\vec{F}$ دارای بزرگی ثابت F و زاویه‌ی ϕ است). پس از هُل دادن به سادگی می‌توانیم اسکیت‌باز را به عنوان یک ذره در نظر بگیریم و از این واقعیت که تلاش عضله‌های او انرژی گرمایی در عضله‌هایش را افزایش و خواص فیزیولوژیکی دیگر را تغییر می‌دهد، چشم‌پوشی کنیم. در این صورت، می‌توانیم با استفاده کردن از معادله‌ی ۷-۵ ($\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_\circ^2 = F_x d$) بنویسیم

$$K - K_\circ = (F\cos\phi)d$$

یا

$$\Delta K = Fd\cos\phi \qquad (۸-۳۸)$$



شکل ۸-۱۶ خودرویی با استفاده کردن از چهار چرخ محرک به سمت راست حرکت می‌کند. جاده چهار نیروی اصطکاک به سطح‌های پایین لاستیک‌ها وارد می‌کند (که دو تا از آن نیروها نشان داده شده‌اند). این چهار نیرو با هم نیروی خارجی برایند $\vec{F}$ وارد شده به خودرو را تشکیل می‌دهند.

اگر در مواردی ارتفاع شیء هم تغییر کند، می‌توان تغییر انرژی پتانسیل گرانشی ΔU را هم در نظر گرفت:

$$\Delta U + \Delta K = Fd\cos\phi \qquad (۸\text{-}۳۹)$$

نیروی F در سمت راست این معادله کاری روی شیء انجام نمی‌دهد، بلکه باز هم مسئول تغییرات انرژی نشان داده شده در سمت چپ معادله است.

توان

اکنون که دیدیم چگونه می‌توان انرژی را از نوعی به نوع دیگر تبدیل کرد، می‌توانیم تعریف توان ارائه شده در پودمان ۷-۶ را بسط دهیم. توان آهنگی است که با آن نیرو کار انجام می‌دهد. به طور کلی، توان P آهنگ تبدیل انرژی از نوعی به نوع دیگر توسط یک نیرو است.
اگر مقدار انرژی ΔE در زمان Δt تبدیل شود، **توان متوسط** ناشی از نیرو برابر است با

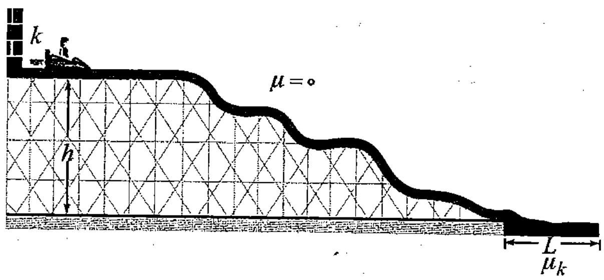
$$P_{\text{avg}} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \qquad (۸\text{-}۴۰)$$

به همین ترتیب، توان لحظه‌ای ناشی از نیرو برابر است با

$$P = \frac{dE}{dt} \qquad (۸\text{-}۴۱)$$

مسئله‌ی نمونه‌ی ۸-۶ مقدار زیاد انرژی در سُرسُره‌ی آبی پارک تفریحی

شکل ۸-۱۷ یک سُرسُره‌ی آبی را نشان می‌دهد که در آن یک بادپَر (گلایدر) در طول مسیری آب خیس (بی‌اصطکاک) به وسیله‌ی فنری پرتاب می‌شود و پس از پیمودن یک بخش افقی تا سطح تراز زمین پایین می‌آید. بادپَر پس از رسیدن به مسیر تراز زمین، بر اثر اصطکاک به تدریج به حال سکون می‌رسد. جرم کل بادپَر و سرنشین آن $m = ۲۰۰\,\text{kg}$، میزان تراکم آغازی فنر $d = ۵/۰۰\,\text{m}$، ثابت فنر $k = ۳/۲۰ \times ۱۰^{۳}\,\text{N/m}$، ارتفاع آغازی $h = ۳۵/۰\,\text{m}$ و ضریب اصطکاک جنبشی مسیر تراز زمین $\mu_k = ۰/۸۰۰$ است. بادپَر در طول مسیر تراز زمین چه مسافت L را می‌لغزد تا متوقف می‌شود؟



شکل ۸-۱۷ یک سُرسُره‌ی آبی پارک تفریحی، که در آن یک بادپَر توسط فنر پرتاب می‌شود.

نکته‌های کلیدی

پیش از دست زدن به ماشین حساب و قرار دادن عددها در معادله‌ها باید همه‌ی نیروها را امتحان کنیم و مشخص کنیم که دستگاه ما کدام است. تنها پس از آن می‌توانیم تصمیم بگیریم که کدام معادله را بنویسیم. آیا ما یک دستگاه منزوی داریم (معادله‌ی ما باید به پایستگی انرژی مربوط باشد) یا دستگاهی که نیروهای خارجی بر روی آن کار انجام می‌دهند (معادله‌ی ما باید کار را به تغییر انرژی دستگاه ربط دهد)؟

نیروها: نیروی عمودی ناشی از مسیر حرکت روی بادپَر کاری انجام نمی‌دهد زیرا این نیرو همیشه بر جابه‌جای بادپَر عمود است. نیروی گرانشی روی بادپَر کار انجام می‌دهد، و چون این

نیرو پایستار است می‌توان به آن یک انرژی پتانسیل نسبت داد. وقتی فنر بادپَر را با فشار دادن به حرکت در می‌آورد، نیروی فنر روی آن کار انجام می‌دهد و انرژی از صورت انرژی پتانسیل کشسانی فنر متراکم شده به انرژی جنبشی بادپَر تبدیل می‌شود. نیروی فنر، دیوار صُلب را هم هُل می‌دهد. چون در بین بادپَر و مسیر تراز زمین اصطکاک وجود دارد، بادپَر در حال لغزیدن در طول مسیر انرژی‌های گرمایی آنها را افزایش می‌دهد.

دستگاه: دستگاه را به گونه‌ای که شامل همه‌ی اشیای برهم کنش کننده، یعنی بادپَر، مسیر، فنر، زمین و دیوار باشد، در نظر می‌گیریم. سپس، چون تمام برهم کنش‌های نیروها در ***درون*** دستگاه صورت می‌گیرند، دستگاه ***منزوی*** است و در نتیجه، انرژی کل آن نمی‌تواند تغییر کند. بنابراین، معادله‌ی مورد استفاده همان معادله‌ی مربوط به نیروی خارجی انجام دهنده‌ی کار روی دستگاه نیست، بلکه یک معادله‌ی پایستگی انرژی است. این معادله به صورت معادله‌ی ۸-۳۷ نوشته می‌شود:

$$E_{\text{mec},2} = E_{\text{mec},1} - \Delta E_{\text{th}} \qquad (۸\text{-}۴۲)$$

این معادله مانند یک معادله‌ی پول است: پول پایانی برابر با پول آغازی ***منهای*** مبلغ دزدیده شده توسط یک دزد است. در اینجا انرژی مکانیکی پایانی برابر با انرژی مکانیکی آغازی ***منهای*** مقدار دزدیده شده توسط اصطکاک است. بنابراین، چیزی به گونه‌ای سحرآمیز پدیدار، یا ناپدید، نمی‌شود.

محاسبات: اکنون که یک معادله در دست داریم، مسافت L را پیدا می‌کنیم. فرض می‌کنیم شاخص پایین ۱ مربوط به حالت آغازی بادپَر (وقتی که هنوز به فنر متراکم شده متصل است) و شاخص پایین ۲ مربوط به حالت پایانی بادپَر (وقتی که بر روی مسیر تراز زمین متوقف می‌شود) باشد. در هر دو حالت، انرژی مکانیکی دستگاه برابر با مجموع هرگونه انرژی پتانسیل و هرگونه انرژی جنبشی است.

در اینجا دو نوع انرژی پتانسیل وجود دارد. انرژی پتانسیل کشسانی $(U_e = \frac{1}{2}kx^2)$ وابسته به فنر متراکم شده و انرژی پتانسیل گرانشی $(U_g = mgy)$ وابسته به ارتفاع بادپَر نسبت به زمین. در مورد انرژی پتانسیل گرانشی، سطح زمین را به عنوان سطح تراز مرجع انتخاب می‌کنیم. منظور این است که بادپَر در آغاز در ارتفاع $y = h$ و در پایان در ارتفاع $y = 0$، قرار دارد.

در حالت آغازی، که بادپَر ساکن و در ارتفاع واقع و فنر متراکم شده است، انرژی برابر است با

$$E_{\text{mec},1} = K_1 + U_{e1} + U_{g1}$$

$$E_{\text{mec},1} = 0 + \frac{1}{2}kd^2 + mgh \qquad (۸\text{-}۴۳)$$

در حالت پایانی، که اکنون فنر در حالت آرامش قرار دارد و بادپَر بار دیگر ساکن است اما در ارتفاع واقع نیست، انرژی مکانیکی پایانی دستگاه برابر است با

$$E_{\text{mec},2} = K_2 + U_{e2} + U_{g2}$$

$$E_{\text{mec},2} = 0 + 0 + 0 \qquad (۸\text{-}۴۴)$$

اکنون، تغییر انرژی گرمایی بادپَر و مسیر تراز زمین را به دست می‌آوریم. با استفاده کردن از معادله‌ی ۸-۳۱، به جای ΔE_{th} می‌توان مقدار $f_k L$ (حاصل‌ضرب بزرگی نیروی اصطکاک و مسافت با اصطکاک) را قرار داد. با توجه به معادله‌ی ۶-۲ می‌دانیم $f_k = \mu_k F_N$، که در آن F_N نیروی عمودی است. چون بادپَر در ناحیه‌ی با اصطکاک به طور افقی حرکت می‌کند، بزرگی F_N برابر است با mg (نیروی بالاسویی که با نیروی پایین‌سو همساز است). بنابراین، مقدار انرژی مکانیکی دزدیده شده توسط اصطکاک برابر است با

$$\Delta E_{\text{th}} = \mu_k mgL \qquad (۸\text{-}۴۵)$$

(به هر حال، بدون انجام دادن آزمایش‌های بیشتر ***نمی‌توان*** گفت که از این انرژی گرمایی چقدر به بادپَر و چقدر به مسیر حرکت مربوط می‌شود. ما فقط مقدار کل انرژی گرمایی را می‌دانیم). با جانشانی معادله‌های ۸-۴۳ تا ۸-۴۵ در معادله‌ی ۸-۴۲، داریم

$$0 = \frac{1}{2}kd^2 + mgh - \mu_k mgL \qquad (۸\text{-}۴۶)$$

و از آنجا

$$L = \frac{kd^2}{2\mu_k mg} + \frac{h}{\mu_k}$$

$$L = \frac{(3/20\times10^3\ \text{N/m})(5/00\ \text{m})^2}{2(0/800)(200\ \text{kg})(9/8\ \text{m/s}^2)} + \frac{35\text{m}}{0/800} \Rightarrow$$

$$L = 69/3\ \text{m} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

اکنون، توجه کنید که راه حل جبری مسئله چقدر ساده بود. با تعریف دقیق یک دستگاه و دانستن این نکته که دستگاه مورد نظر منزوی است، باید از قانون پایستگی انرژی استفاده کنیم. منظور

این است که حالت‌های آغازی و پایانی دستگاه را بدون توجه به حالت‌های میانی، می‌توان به هم ربط داد. به ویژه، به در نظر گرفتن بادپَر در هنگام لغزیدن در مسیر نا هم‌تراز هم نیازی نداشتیم. اگر هم نیازی می‌داشتیم، قانون دوم نیوتون درباره‌ی حرکت را به کار می‌بردیم، که در این حالت باید جزئیات مسیر را می‌دانستیم و با محاسبه‌ی مشکل‌تری روبه‌رو می‌شدیم.

مرور و چکیده‌ی مطالب

نیروهای پایستار **نیروی پایستار** نیرویی است که کار خالص انجام شده توسط آن روی یک ذره‌ی در حال حرکت در یک مسیر بسته از یک نقطه‌ی آغازی و برگشت به همان نقطه، صفر باشد. هم‌ارز با این تعریف، می‌توان گفت نیرو هنگامی پایستار است که کار خالص انجام شده روی یک ذره‌ی متحرک در میان دو نقطه به مسیر پیموده شده توسط ذره بستگی نداشته باشد. نیروی گرانشی و نیروی فنر نیروهایی پایستارند؛ نیروی اصطکاک جنبشی یک **نیروی ناپایستار** است.

انرژی پتانسیل **انرژی پتانسیل** انرژی وابسته به پیکربندی دستگاهی است که در آن نیروی پایستار اثر می‌کند. وقتی نیروی پایستار کار W را روی ذره‌ای در درون دستگاه انجام می‌دهد، ΔU، تغییر انرژی پتانسیل دستگاه برابر است با

$$\Delta U = -W \qquad (۱-۸)$$

اگر ذره از نقطه‌ی x_i تا نقطه‌ی x_f حرکت کند، تغییر انرژی پتانسیل دستگاه برابر است با

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx \qquad (۶-۸)$$

انرژی پتانسیل گرانشی انرژی پتانسیل وابسته به دستگاه شامل زمین و یک ذره‌ی نزدیک آن، **انرژی پتانسیل گرانشی** است. اگر ذره از ارتفاع y_i تا ارتفاع y_f حرکت کند، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه ذره ـ زمین برابر است با

$$\Delta U = mg(y_f - y_i) = mg\Delta y \qquad (۷-۸)$$

اگر **نقطه‌ی مرجع** ذره $y_i = ۰$، و انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه $U_i = ۰$ انتخاب شود، انرژی پتانسیل گرانشی U، وقتی که ذره در ارتفاع y قرار دارد، برابر است با

$$U(y) = mgy \qquad (۹-۸)$$

انرژی پتانسیل کشسانی **انرژی پتانسیل کشسانی** انرژی وابسته به حالت تراکم یا کشیدگی یک شیء کشسان است. برای فنری که در هنگام جابه‌جا شدن سر آزاد آن به اندازه‌ی x نیروی کشسانی $F = -kx$ را وارد می‌کند، انرژی پتانسیل کشسانی برابر است با

$$U(x) = \frac{۱}{۲}kx^{۲} \qquad (۱۱-۸)$$

در **پیکربندی مرجع**، فنر طول حالت آرامش خود را دارد و در این حالت، داریم $x = ۰$ و $U = ۰$.

انرژی مکانیکی **انرژی مکانیکی** یک دستگاه E_{mec}، برابر با مجموع K، انرژی جنبشی و U، انرژی پتانسیل آن است:

$$E_{mec} = K + U \qquad (۱۲-۸)$$

دستگاه منزوی دستگاهی است که در آن هیچ ***نیروی خارجی‌ای***، انرژی دستگاه را تغییر نمی‌دهد. اگر در یک دستگاه منزوی فقط نیروهای پایستار کار انجام دهند، انرژی مکانیکی دستگاه، E_{mec}، نمی‌تواند تغییر کند. این، بیان **اصل پایستگی انرژی مکانیکی** است و از لحاظ فرمولی چنین نوشته می‌شود

$$K_۲ + U_۲ = K_۱ + U_۱ \qquad (۱۷-۸)$$

که در آن شاخص‌ها در فرایند تبدیل انرژی به لحظه‌های مختلف مربوط می‌شوند. فرمول اصل پایستگی انرژی را به صورت زیر هم می‌توان نوشت

$$\Delta E_{mec} = \Delta K + \Delta U = ۰ \qquad (۱۸-۸)$$

منحنی‌های انرژی پتانسیل اگر تابع **انرژی پتانسیل** $U(x)$ مربوط به دستگاهی را که در آن نیروی یک بعدی $F(x)$ به ذره‌ای اثر می‌کند، بدانیم، تابع نیرو را می‌توانیم ازرابطه‌ی زیر به‌دست آوریم

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \qquad (۲۲-۸)$$

اگر $U(x)$ به صورت یک منحنی داده شده باشد، به ازای هر مقدار x، نیروی $F(x)$ برابر با مقدار شیب منحنی در آن نقطه با علامت منفی است و انرژی جنبشی ذره از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$K(x) = E_{\text{mec}} - U(x) \qquad (۸-۲۴)$$

که در آن E_{mec} انرژی مکانیکی دستگاه است. **نقطه‌ی برگشت** نقطه‌ای مانند x است، که در آن جهت حرکت ذره وارون می‌شود (در آن نقطه $K=\circ$). ذره در نقاطی در **حال تعادل** است که شیب منحنی $U(x)$ صفر باشد [در این نقاط، $F(x)=\circ$].

کار انجام شده روی دستگاه توسط نیروی خارجی کار W انرژی‌ای است که از طریق یک نیروی خارجی مؤثر بر دستگاه، به دستگاه داده یا از آن گرفته می‌شود. هرگاه بیش از یک نیرو به دستگاه اثر کند، ***کار خالص*** نیروها همان انرژی منتقل شده است. وقتی اصطکاک وجود ندارد کار انجام شده روی دستگاه برابر با تغییر انرژی مکانیکی دستگاه، ΔE_{mec}، است:

$$W = \Delta E_{\text{mec}} = \Delta K + \Delta U \qquad (۸-۲۵ ، ۸-۲۶)$$

هرگاه یک نیروی اصطکاک جنبشی به دستگاه اثر کند، انرژی گرمایی دستگاه، E_{th}، تغییر می‌کند. (این انرژی وابسته به حرکت تصادفی اتم‌ها و مولکول‌های دستگاه است). پس، کار انجام شده روی دستگاه برابر است با

$$W = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}} \qquad (۸-۳۳)$$

رابطه‌ی تغییر انرژی با بزرگی نیروی اصطکاک f_k، و بزرگی جابه‌جایی d، حاصل از نیروی خارجی چنین است

$$\Delta E_{\text{th}} = f_k d \qquad (۸-۳۱)$$

پایستگی انرژی **انرژی کل** یک دستگاه E، (مجموع انرژی مکانیکی و انرژی‌های درونی، از جمله انرژی گرمایی) فقط به اندازه‌ی انرژی داده شده به دستگاه یا گرفته شده از آن می‌تواند تغییر کند. این واقعیت تجربی را **قانون پایستگی انرژی** می‌نامند. اگر کار W روی دستگاه انجام شود، داریم

$$W = \Delta E = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}} + \Delta E_{\text{int}} \qquad (۸-۳۵)$$

اگر دستگاه منزوی باشد ($W=\circ$) این معادله به صورت زیر ساده می‌شود

$$\Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}} + \Delta E_{\text{int}} = \circ \qquad (۸-۳۶)$$

و

$$E_{\text{mec},۲} = E_{\text{mec},۱} - \Delta E_{\text{th}} - \Delta E_{\text{int}} \qquad (۸-۳۷)$$

که در آن شاخص‌های ۱ و ۲ مربوط به دو لحظه‌ی متفاوت‌اند.

توان **توان** ناشی از یک نیرو، ***آهنگ*** انتقال انرژی توسط آن نیرو است. اگر مقدار انرژی ΔE به وسیله‌ی یک نیرو در زمان Δt منتقل شود، **توان متوسط** نیرو برابر است با

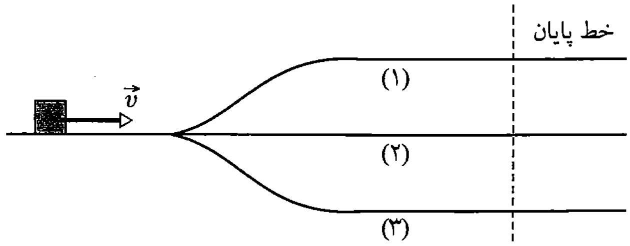
$$P_{\text{avg}} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \qquad (۸-۴۰)$$

توان لحظه‌ای ناشی از نیرو برابر است با

$$P = \frac{dE}{dt} \qquad (۸-۴۱)$$

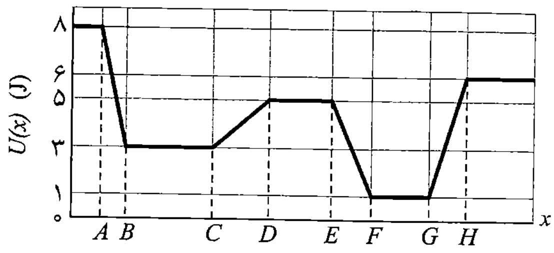
پرسش‌ها

۱ در شکل ۸-۱۸، جسمی که به طور افقی حرکت می‌کند می‌تواند سه مسیر بی‌اصطکاک با ارتفاع‌های متفاوت را اختیار کند تا به خطچین پایان مسیر برسد. این سه مسیر را با توجه به تندی جسم در پایان مسیر و (ب) زمان سپری شده تا پایان مسیر، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۸-۱۸ پرسش ۱.

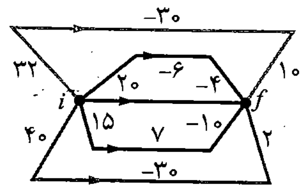
۲ شکل ۸-۱۹ نمودار تابع انرژی پتانسیل یک‌ذره را نشان می‌دهد. (الف) ناحیه‌های AB، BC، CD و DE را با توجه به بزرگی نیروی وارد شده به ذره، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. انرژی مکانیکی ذره E_{mec}، از چه مقدار نباید تجاوز کند تا ذره (ب) در چاه پتانسیل سمت چپ به‌دام بیفتد، (پ) در چاه



شکل ۸-۱۹ پرسش ۲.

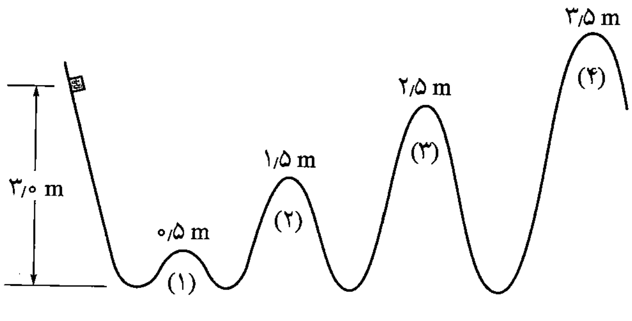
پتانسیل سمت راست به دام بیفتد و (ت) بتواند در بین دو چاه پتانسیل، اما نه در سمت راست نقطه‌ی H، حرکت کند؟ در حالت (ت) در کدام یک از ناحیه‌های BC، DE و FG، ذره دارای (ث) بیشترین انرژی جنبشی و (ج) کمترین تندی، است؟

۳ شکل ۸-۲۰ یک مسیر مستقیم و چهار مسیر غیرمستقیم میان نقطه‌ی i تا نقطه‌ی f را نشان می‌دهد. در طول مسیر مستقیم و سه مسیر غیرمستقیم فقط یک نیروی پایستار F_c روی شیء معینی اثر می‌کند. در طول مسیر غیرمستقیم چهارم، نیروی F_c و یک نیروی ناپایستار F_{nc} روی شیء اثر می‌کند. ΔE_{mec}، تغییر انرژی مکانیکی شیء (برحسب ژول) هنگام رفتن از i تا f روی پاره‌خط‌های غیرمستقیم نوشته شده است. (الف) مقدار ΔE_{mec} در راستای مسیر مستقیم هنگام رفتن شیء از i تا f و (ب) مقدار ΔE_{mec} ناشی از F_{nc} در طول مسیری که نیرو اثر می‌کند، چقدر است؟



شکل ۸-۲۰ پرسش ۳.

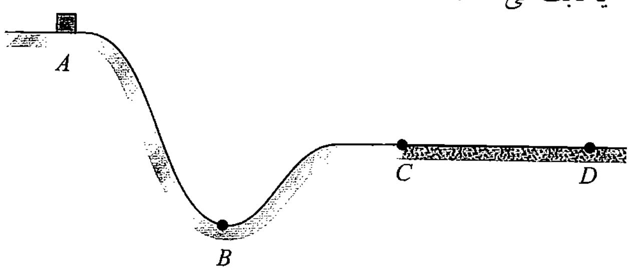
۴ در شکل ۸-۲۱، جسم کوچکی، که در آغاز ساکن است، در روی یک شیب‌راهه‌ی بی‌اصطکاک از ارتفاع ۳/۰ متری رها می‌شود. ارتفاع تپه‌های موجود بر سر راه جسم، در شکل داده شده است. تپه‌ها دارای قله‌های دایره شکل مشابه‌اند و جسم در موقع عبور از قله‌ها به بالا نمی‌پرد. (الف) تپه‌ای که جسم نمی‌تواند از آن بگذرد کدام است؟ (ب) جسم پس از آنکه نتوانست از آن تپه عبور کند، چه می‌کند؟ در بالای کدام تپه



شکل ۸-۲۱ پرسش ۴.

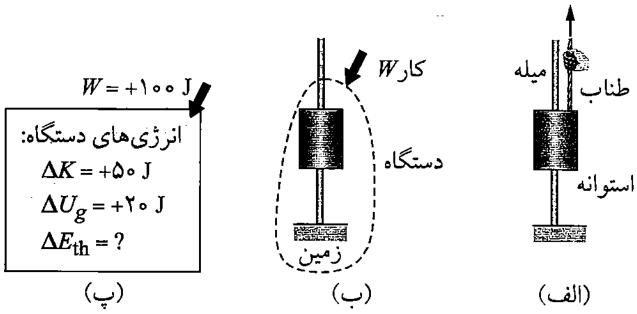
(پ) شتاب مرکزگرای جسم بیشترین مقدار و (ت) نیروی عمودی وارد شده به جسم، کمترین مقدار را دارد؟

۵ در شکل ۸-۲۲، جسمی روی یک شیب‌راهه‌ی بی‌اصطکاک از A تا C می‌لغزد و سپس از ناحیه‌ی افقی CD، که در آنجا نیروی اصطکاک به آن اثر می‌کند، می‌گذرد. آیا انرژی جنبشی جسم در ناحیه‌ی (الف) AB، (ب) BC و (پ) CD، افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟ (ت) آیا انرژی مکانیکی جسم در این ناحیه‌ها افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟



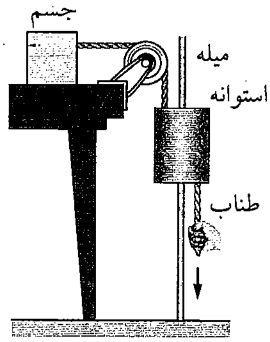
شکل ۸-۲۲ پرسش ۵.

۶ در شکل ۸-۲۳ الف، یک طناب متصل به استوانه‌ی واقع برروی یک میله‌ی قائم به بالا کشیده می‌شود. چون استوانه به طور تنگ روی میله قرار گرفته است با اصطکاکی قابل ملاحظه برروی آن می‌لغزد. کار انجام شده توسط نیروی وارد شده بر روی دستگاه استوانه ـ میله ـ زمین $W = +100\,J$ است (شکل ۸-۲۳ ب). در شکل ۸-۲۳ پ، «ریزحساب انرژی» این دستگاه نشان داده شده است: انرژی جنبشی K به اندازه‌ی $50\,J$ افزایش، و انرژی پتانسیل گرانشی U_g هم به اندازه‌ی $20\,J$ افزایش می‌یابد. تنها تغییر انرژی دیگر در درون دستگاه مربوط به انرژی گرمایی E_{th}، است. مقدار تغییر ΔE_{th} چیست؟



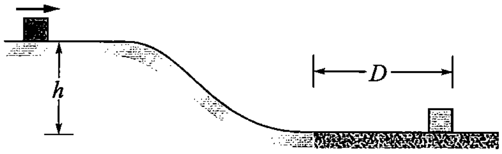
شکل ۸-۲۳ پرسش ۶.

۷ آرایش نشان داده شده در شکل ۸-۲۴، مشابه آرایش مربوط به پرسش ۶ است. در اینجا طناب متصل به استوانه‌ای که تنگ بر روی میله قرار گرفته است به پایین کشیده می‌شود. هم‌چنین، وقتی استوانه پایین می‌رود جسمی را از طریق طناب دیگر می‌کشد و جسم بر روی یک میز آزمایشگاه می‌لغزد. بار دیگر دستگاه استوانه ـ میله ـ زمین مشابه دستگاه نشان داده شده در شکل ۸-۲۳ ب را در نظر می‌گیریم. کاری که روی این دستگاه انجام می‌دهیم ۲۰۰J است و این دستگاه کار ۶۰J را بر روی جسم انجام می‌دهد. در درون دستگاه انرژی جنبشی به اندازه‌ی ۱۳۰J افزایش و انرژی پتانسیل گرانشی به اندازه‌ی ۲۰J کاهش می‌یابد. (الف) برای این دستگاه یک «ریز حساب انرژی» مانند شکل ۸-۲۳ پ، ترتیب دهید. (ب) مقدار تغییر انرژی گرمایی در درون این دستگاه چقدر است؟



شکل ۸-۲۴ پرسش ۷.

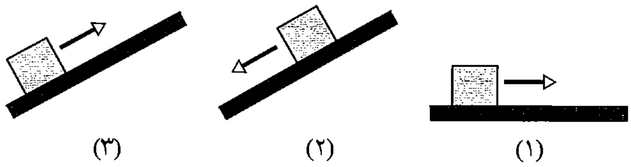
۸ در شکل ۸-۲۵، جسمی روی مسیری می‌لغزد و از ارتفاع h پایین می‌آید. مسیر حرکت به جز در بخش پایینی بی‌اصطکاک است. در بخشی که اصطکاک دارد، جسم پس از پیمودن



شکل ۸-۲۵ پرسش ۸.

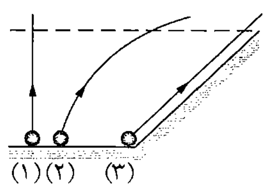
مسافت D متوقف می‌شود. (الف) اگر h را کاهش دهیم، آیا مسافتی که جسم پیش از توقف می‌پیماید نسبت به D بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است؟ (ب) اگر جرم جسم را افزایش دهیم، مسافت پیموده شده‌ی پیش از توقف، نسبت به D بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است؟

۹ شکل ۸-۲۶ سه حالت مربوط به یک سطح با اصطکاک و یک جسم در حال لغزیدن بر روی سطح را نشان می‌دهد. جسم در هر سه حالت با تندی یکسان شروع به حرکت می‌کند و تا هنگامی می‌لغزد که نیروی اصطکاک جنبشی آن را متوقف کند. این سه حالت را با توجه به افزایش یافتن انرژی گرمایی ناشی از لغزیدن از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



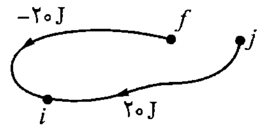
شکل ۸-۲۶ پرسش ۹.

۱۰ شکل ۸-۲۷ سه گلوله را نشان می‌دهد که از یک سطح تراز با تندی‌های یکسان پرتاب شده‌اند. یکی از گلوله‌ها یک راست به بالاسو حرکت می‌کند، گلوله‌ی دیگر تحت زاویه‌ی کوچکی نسبت به راستای قائم پرتاب شده است و گلوله‌ی بعدی در راستای یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک پرتاب شده است. گلوله‌ها را با توجه به تندی آن‌ها در لحظه‌ی رسیدن به سطح تراز خط‌چین، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۸-۲۷ پرسش ۱۰.

۱۱ در هنگام حرکت کردن ذره‌ای از f تا i و از j تا i در طول مسیرها و جهت‌های نشان داده شده در شکل ۸-۲۸، نیروی پایستار $\vec{F}$ مقدار کارهای نشان داده شده در روی شکل را انجام می‌دهد. در هنگام حرکت کردن ذره یک راست از f تا j، چقدر کار توسط $\vec{F}$ بر روی ذره انجام می‌شود؟



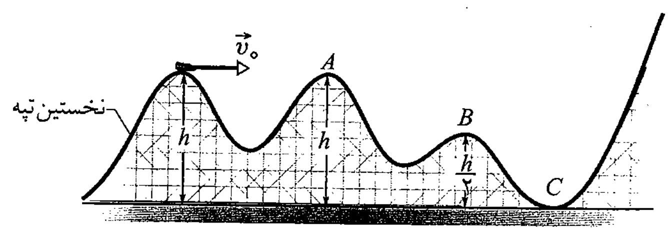
شکل ۸-۲۸ پرسش ۱۱.

مسئله‌ها

پودمان ۸-۱ انرژی پتانسیل

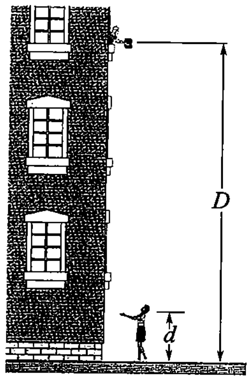
* ۱ هرگاه فنری به اندازه‌ی ۷٫۵ cm نسبت به طول حالت آرامش متراکم شود، ۲۵ J انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره می‌کند. ثابت فنر چیست؟

* ۲ در شکل ۸-۲۹، یک قطار غلتان هوایی به جرم $m = ۸۲۵\,\text{kg}$ در یک مسیر بی‌اصطکاک حرکت می‌کند تا با تندی $v_۰ = ۱۷٫۰\,\text{m/s}$ در ارتفاع $h = ۴۲٫۰\,\text{m}$ به بالای نخستین تپه می‌رسد. نیروی گرانشی از این نقطه تا (الف) نقطه‌ی A، (ب) نقطه‌ی B و (پ) نقطه‌ی C، چه مقدار کار روی قطار انجام می‌دهد؟ اگر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه قطار ـ زمین در نقطه‌ی C صفر گرفته شود، مقدار آن در هنگامی که قطار به، (ت) نقطه‌ی B و (ث) نقطه‌ی A می‌رسد، چقدر است؟ (ج) اگر جرم m دو برابر شود، آیا تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه در میان نقطه‌های A و B، افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟



شکل ۸-۲۹ مسئله‌های ۲ و ۹.

* ۳ کتابی ۲٫۰۰ کیلوگرمی را برای دوست خود که در روی زمین به فاصله‌ی $D = ۱۰٫۰\,\text{m}$ پایین‌تر قرار دارد می‌اندازید. دوست شما برای گرفتن کتاب دست‌های خود را به فاصله‌ی $d = ۱٫۵\,\text{m}$ بالاتر از زمین دراز می‌کند (شکل ۸-۳۰). (الف) تا

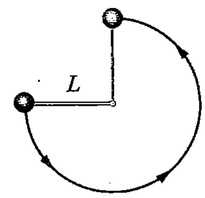


شکل ۸-۳۰ مسئله‌های ۳ و ۱۰.

هنگام رسیدن کتاب به دست‌های او نیروی گرانشی زمین چقدر کار W_g، روی کتاب انجام می‌دهد؟ (ب) در حین افتادن کتاب، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه کتاب ـ زمین چقدر ΔU، است؟ اگر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه U، در سطح زمین صفر فرض شود، مقدار U در نقطه‌ای که کتاب، (پ) رها می‌شود و (ت) به دست‌های دوست شما می‌رسد، چقدر است؟ اکنون، فرض کنید U در سطح زمین ۱۰۰J است و دوباره (ث) W_g، (ج) ΔU، (چ) U را در نقطه‌ی رها شدن کتاب و (ح) U را در نقطه‌ی رسیدن به دست‌های دوست خود، پیدا کنید.

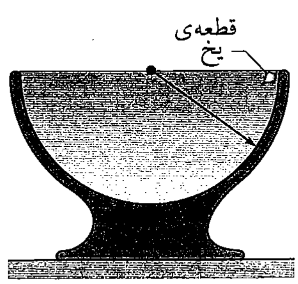
* ۴ شکل ۸-۳۱ گلوله‌ای به جرم $m = ۰٫۳۴۱\,\text{kg}$ را نشان می‌دهد که به انتهای میله‌ای باریک با جرم ناچیز به طول $L = ۰٫۴۵۲\,\text{m}$، وصل شده است. انتهای دیگر میله در نقطه‌ای به لولایی چنان وصل شده است که گلوله می‌تواند در روی دایره‌ای قائم حرکت کند. میله را، مطابق شکل، به طور افقی نگه می‌داریم و آن را به اندازه‌ای به پایین هُل می‌دهیم که گلوله

بچرخد و میله با تندی صفر درست در بالا به وضعیت قائم برسد. چقدر کار روی گلوله توسط نیروی گرانشی از نقطه‌ی آغازی تا (الف) پایین‌ترین نقطه، (ب) بالاترین نقطه و (پ) نقطه‌ی واقع در سمت راست و هم سطح با نقطه‌ی آغازی، انجام می‌شود؟ اگر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلوله ـ زمین در نقطه‌ی آغازی صفر گرفته شود، مقدار این انرژی در هنگامی که گلوله به (ت) پایین‌ترین نقطه، (ث) بالاترین نقطه و (ج) نقطه‌ی واقع در سمت راست و هم سطح با نقطه‌ی آغازی می‌رسد، چقدر است؟ (چ) فرض کنید میله را با شدت بیشتر چنان هُل می‌دهیم که گلوله با تندی ناصفر از بالاترین نقطه بگذرد. آیا تغییر انرژی پتانسیل گرانشی ΔU_g، نسبت به حالتی که گلوله در بالاترین نقطه می‌ایستاد از پایین‌ترین نقطه تا بالاترین نقطه بیشتر می‌شود، کمتر می‌شود، یا ثابت می‌ماند؟



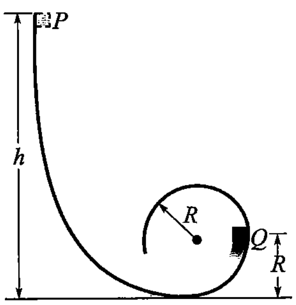
شکل ۸-۳۱ مسئله‌های ۴ و ۱۴.

* **۵** در شکل ۸-۳۲، قطعه یخ کوچکی به جرم ۲٫۰۰ گرم از لبه‌ی ظرف نیمکره شکلی به شعاع ۲۲٫۰ cm رها می‌شود. سطح تماس یخ با ظرف بی‌اصطکاک است. (الف) در حین پایین رفتن قطعه یخ تا ته ظرف نیروی گرانشی چقدر کار روی یخ انجام می‌دهد؟ (ب) تغییر انرژی پتانسیل دستگاه یخ ـ ظرف در حین پایین رفتن یخ چقدر است؟ (پ) اگر انرژی پتانسیل در ته ظرف صفر فرض شود، مقدار این انرژی در نقطه‌ی رها شدن یخ چقدر است؟ (ت) اگر انرژی پتانسیل در نقطه‌ی رها شدن یخ صفر فرض شود، مقدار آن در هنگام رسیدن یخ به ته ظرف چقدر است؟ (ث) اگر جرم یخ دو برابر شود، آیا بزرگی پاسخ‌های قسمت‌های (الف) تا (ت) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟



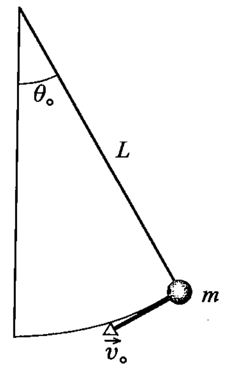
شکل ۸-۳۲ مسئله‌های ۵ و ۱۱.

** **۶** در شکل ۸-۳۳، جسم کوچکی به جرم $m = ۰٫۰۳۲\text{kg}$ می‌تواند روی مسیر حلقه‌ای بی‌اصطکاکی به شعاع $R = ۱۲\text{cm}$ بلغزد. جسم از نقطه‌ی P واقع در ارتفاع $h = ۵٫۰R$ بالاتر از قسمت پایینی حلقه، از حال سکون رها می‌شود. هنگامی که جسم از نقطه‌ی P تا (الف) نقطه‌ی Q و (ب) نقطه‌ی بالای حلقه حرکت می‌کند، نیروی گرانشی چقدر کار روی جسم انجام می‌دهد؟ اگر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه جسم ـ زمین در پایین حلقه صفر فرض شود، انرژی پتانسیل آن هنگامی که جسم در (پ) نقطه‌ی P، (ت) نقطه‌ی Q و (ث) نقطه‌ی بالای حلقه قرار دارد، چقدر است؟ (ج) اگر جسم را به جای رها کردن، با یک تندی آغازی پایین‌سو بلغزانیم، آیا بزرگی پاسخ‌های قسمت‌های (الف) تا (ث) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟



شکل ۸-۳۳ مسئله‌های ۶ و ۱۷.

** **۷** شکل ۸-۳۴ میله‌ی باریکی به طول $L = ۲٫۰۰\text{m}$ و جرم ناچیز را نشان می‌دهد که می‌تواند به دور یک سر خود در روی دایره‌ای قائم بچرخد و به سر دیگر میله گلوله‌ای به جرم $m = ۵٫۰۰\text{kg}$ وصل شده است. میله را تحت زاویه‌ی $\theta_0 = ۳۰٫۰^\circ$ به یک سو می‌کشیم و آن را با سرعت آغازی $\vec{v}_0 = ۰$ رها می‌کنیم. وقتی گلوله به پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر خود می‌رسد، (الف) نیروی گرانشی چقدر کار بر روی آن انجام می‌دهد و (ب) تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلوله ـ زمین



شکل ۸-۳۴ مسئله‌های ۷، ۱۸ و ۲۱.

چقدر است؟ (پ) اگر انرژی پتانسیل گرانشی در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر گلوله صفر انتخاب شود، مقدار این انرژی درست در لحظه‌ی رها شدن چقدر است؟ (ت) اگر زاویه‌ی θ_0 را افزایش دهیم، آیا بزرگی پاسخ‌های قسمت‌های (الف) تا (پ) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند؟

** ۸ گلوله‌ی برفی به جرم ۱٫۵۰ kg از بالای پرتگاهی به ارتفاع ۱۲٫۵ m پرتاب می‌شود. سرعت آغازی گلوله ۱۴٫۰ m/s تحت راستای ۴۱٫۰ درجه‌ی بالای افق است. (الف) در حین پرواز گلوله‌ی برف تا رسیدن به سطح زمین در پایین پرتگاه نیروی گرانشی چقدر کار روی گلوله انجام می‌دهد؟ (ب) تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلوله‌ی برف - زمین در حین پرواز چقدر است؟ (پ) اگر انرژی پتانسیل گرانشی را در بالای پرتگاه صفر بگیریم، مقدار آن در هنگامی که گلوله‌ی برف به زمین می‌رسد، چقدر است؟

پودمان ۸-۲ پایستگی انرژی مکانیکی

* ۹ در مسئله‌ی ۲، تندی قطار در (الف) نقطه‌ی A، (ب) نقطه‌ی B و (پ) نقطه‌ی C، چقدر است؟ (ت) در تپه‌ی آخر که برای عبور به نسبت بلند است، قطار تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ (ث) اگر از قطار دیگری با جرم دو برابر استفاده شود، بزرگی پاسخ‌های قسمت‌های (الف) تا (ت) چه خواهد بود؟

* ۱۰ (الف) در مسئله‌ی ۳، تندی کتاب هنگام رسیدن به دست‌ها چقدر است؟ (ب) اگر از کتاب دیگری با جرم دو برابر استفاده کنیم، تندی آن چقدر خواهد بود؟ (پ) اگر همان کتاب اولی را با یک تندی آغازی به پایین پرتاب کنیم، آیا بزرگی پاسخ قسمت (الف) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

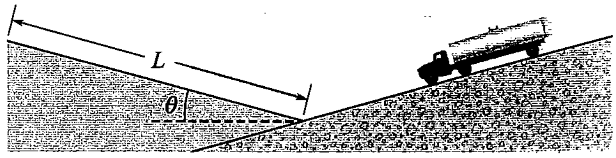
* ۱۱ (الف) در مسئله‌ی ۵، تندی قطعه یخ هنگام رسیدن به ته ظرف چقدر است؟ (ب) اگر از قطعه یخی با جرم دو برابر استفاده کنیم، تندی آن چقدر خواهد بود؟ (پ) اگر همان قطعه یخ را با یک تندی آغازی به پایین‌سو بلغزانیم، آیا بزرگی پاسخ قسمت (الف) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

* ۱۲ (الف) در مسئله‌ی ۸، با استفاده کردن از روش انرژی به جای روش‌های به کار رفته در فصل ۴، تندی گلوله‌ی برف را در هنگام رسیدن به زمین در پایین پرتگاه پیدا کنید. (ب) اگر زاویه‌ی پرتاب به ۴۱٫۰ درجه در *زیر* افق تغییر کند و (پ) اگر جرم گلوله به ۲٫۵۰ kg تغییر کند، تندی گلوله چه خواهد بود؟

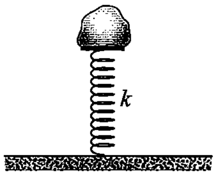
* ۱۳ ساچمه‌ای ۵٫۰ گرمی با استفاده کردن از یک تفنگ فنری به طور قائم به بالاسو پرتاب می‌شود. اگر فنر تفنگ به اندازه‌ی ۸٫۰ cm متراکم شود، ساچمه درست به هدفی که در ۲۰ متری بالای فنر متراکم شده قرار دارد، می‌رسد. (الف) در حین این صعود ۲۰ متری، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه ساچمه - زمین، ΔU_g، چقدر است؟ (ب) تغییر انرژی پتانسیل کشسانی فنر، ΔU_s، در حین پرتاب شدن ساچمه چقدر است؟ (پ) ثابت فنر چقدر است؟

* ۱۴ (الف) در مسئله‌ی ۴، چه تندی آغازی‌ای باید به گلوله داده شود تا با تندی صفر به بالاترین نقطه برسد؟ در این صورت، تندی گلوله در (ب) پایین‌ترین نقطه و (پ) نقطه‌ی واقع در سمت راست و هم سطح با نقطه‌ی آغازی چقدر خواهد بود؟ (ت) اگر جرم گلوله دو برابر شود، آیا بزرگی پاسخ‌های قسمت‌های (الف) تا (پ) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

* ۱۵ در شکل ۸-۳۵، پیش از آنکه راننده کامیون را به بالای شیب‌راهه‌ی فرار اضطراری بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب ۱۵ درجه هدایت کند، کامیون با ترمزهای معیوب با تندی ۱۳۰ km/h به پایین‌سو در حال حرکت است. جرم کامیون ۱٫۲×۱۰^۴ kg است. (الف) کمینه‌ی طول شیب‌راهه‌ی فرار L،



شکل ۸-۳۵ مسئله‌ی ۱۵.



شکل ۸-۳۶ مسئله‌ی ۱۹.

چقدر باید باشد تا کامیون به حال توقف لحظه‌ای برسد؟ (کامیون را یک ذره فرض کنید و این فرض را توجیه کنید). آیا طول کمینه‌ی L (ب) با کاهش یافتن جرم کامیون و (پ) با کاهش یافتن تندی کامیون، افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

**** ۱۶** جسمی ۷۰۰ گرمی از ارتفاع h_0 بالای یک فنر قائم با ثابت فنر $k = ۴۰۰\,N/m$ و جرم ناچیز از حال سکون رها می‌شود. جسم به فنر برخورد می‌کند و پس از متراکم کردن فنر به اندازه‌ی ۱۹٫۰ cm در یک لحظه متوقف می‌شود. چه مقدار کار (الف) توسط جسم روی فنر و (ب) توسط فنر روی جسم، انجام می‌شود؟ (پ) مقدار h_0 چقدر است؟ (ت) اگر جسم از ارتفاع $۲٫۰۰h_0$ بالای فنر رها شود، بیشینه‌ی مقدار تراکم فنر چقدر خواهد بود؟

**** ۱۷** در مسئله‌ی ۶، بزرگی (الف) مؤلفه‌ی افقی و (ب) مؤلفه‌ی قائم ***نیروی برایند*** وارد شده به جسم در نقطه‌ی Q چیست؟ (پ) جسم از چه ارتفاع h باید از حال سکون رها شود تا در بالاترین نقطه‌ی حلقه در آستانه‌ی جدا شدن از حلقه قرار گیرد (***قرار گرفتن جسم در آستانه‌ی جدا شدن***، درست به معنی صفر شدن نیروی عمودی وارد شده به جسم از سوی مسیر است). (ت) نمودار بزرگی نیروی عمودی وارد شده به جسم در بالای حلقه را برحسب ارتفاع آغازی h، در گستره‌ی $h = ۰$ تا $h = ۶R$، رسم کنید.

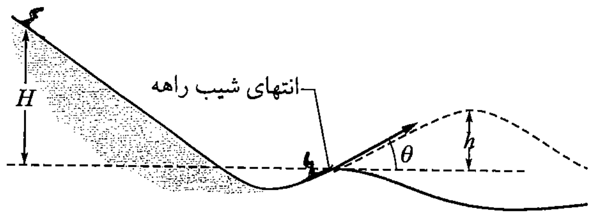
**** ۱۸** (الف) در مسئله‌ی ۷، تندی گلوله در پایین‌ترین نقطه چقدر است؟ (ب) اگر جرم گلوله افزایش یابد، آیا تندی آن افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

**** ۱۹** شکل ۸-۳۶ سنگی به جرم ۸٫۰۰ kg را نشان می‌دهد که روی فنری به حال سکون قرار دارد. فنر به وسیله‌ی سنگ به اندازه‌ی ۱۰٫۰ cm متراکم شده است. (الف) ثابت فنر چقدر است؟ (ب) سنگ را به اندازه‌ی ۳۰٫۰ cm دیگر به پایین فشار می‌دهیم و آن را رها می‌کنیم. انرژی پتانسیل کشسانی فنر متراکم شده، درست پیش از رها شدن سنگ چقدر است؟ (پ) وقتی سنگ از نقطه‌ی رها شدن تا ارتفاع بیشینه حرکت می‌کند، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه سنگ ـ زمین چقدر است؟ (ت) این ارتفاع بیشینه نسبت به نقطه‌ی رها شدن چقدر است؟

**** ۲۰** آونگی شامل یک سنگ ۲٫۰ کیلوگرمی است که در انتهای یک ریسمان ۴٫۰ متری با جرم ناچیز، تاب می‌خورد. تندی سنگ در هنگام عبور از پایین‌ترین نقطه، ۸٫۰ m/s است. (الف) تندی سنگ در لحظه‌ای که ریسمان تحت زاویه‌ی ۶۰ درجه نسبت به راستای قائم قرار دارد، چقدر است؟ (ب) این سنگ در طی حرکتش، تا چه زاویه‌ی بیشینه‌ای نسبت به راستای قائم می‌رسد؟ (پ) اگر انرژی پتانسیل دستگاه آونگ ـ زمین را در پایین‌ترین نقطه‌ی قرار داشتن سنگ صفر انتخاب کنیم، انرژی مکانیکی کل دستگاه چقدر است؟

**** ۲۱** شکل ۸-۳۴ آونگی به‌طول $L = ۱٫۲۵\,m$ را نشان می‌دهد. هنگامی که ریسمان با راستای قائم زاویه‌ی $\theta_0 = ۴۰٫۰^\circ$ می‌سازد، گلوله‌ی آونگ (که تمام جرم آونگ را شامل می‌شود) دارای تندی v_0 است. (الف) به‌ازای $v_0 = ۸٫۰۰\,m/s$، تندی گلوله در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیرش چقدر است؟ کمترین مقدار v_0 چقدر می‌تواند باشد تا آونگ به پایین و سپس به بالا تاب بخورد و ریسمان در حالی که مستقیم است، (ب) به وضعیت افقی، و (پ) به وضعیت قائم، برسد؟ (ت) اگر θ_0 به اندازه‌ی چند درجه افزایش یابد، آیا بزرگی پاسخ‌های قسمت‌های (ب) و (پ) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

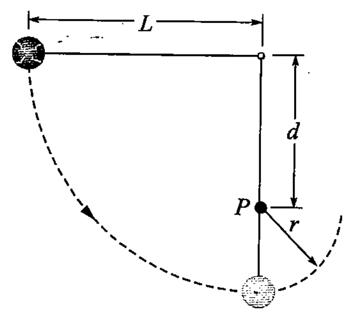
**** ۲۲** اسکی‌بازی به جرم ۶۰ kg از ارتفاع $H = ۲۰\,m$ بالای شیب‌راهه‌ی پرش اسکی (شکل ۸-۳۷) از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و در انتهای شیب‌راهه در راستای زاویه‌ی



شکل ۸–۳۷ مسئله‌ی ۲۲.

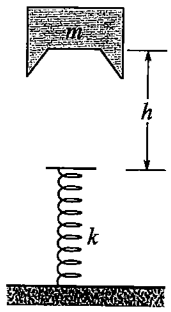
$\theta =$ ۲۸° نسبت به افق شیب را ترک می‌کند. اثر مقاومت هوا را نديده می‌گیریم و فرض می‌کنیم که شیب‌راهه بی‌اصطکاک است. (الف) بیشینه‌ی ارتفاع پرش h در انتهای شیب‌راهه که اسکی‌باز به آن می‌رسد چقدر است؟ (ب) اگر او وزن خود را با حمل کردن یک کوله پشتی افزایش دهد، آیا h بیشتر می‌شود، کمتر می‌شود، یا ثابت می‌ماند؟

⁂ ۲۳ شکل ۸–۳۸ ریسمانی به طول $L =$ ۱۲۰ cm را نشان می‌دهد که به یک سر آن گلوله‌ای وصل شده و سر دیگرش ثابت است. فاصله‌ی انتهای ثابت ریسمان، d، تا میخ کوبیده شده در نقطه‌ی P، ۷۵٫۰ cm است. گلوله از حال سکون و در حالتی که ریسمان افقی است رها می‌شود و روی کمان خط‌چین حرکت می‌کند. تندی گلوله هنگام رسیدن به (الف) پایین‌ترین نقطه و (ب) بالاترین نقطه، پس از گیر کردن ریسمان به میخ، چقدر است؟



شکل ۸–۳۸ مسئله‌های ۲۳ و ۷۰.

⁂ ۲۴ جسمی به جرم $m =$ ۲٫۰ kg از ارتفاع $h =$ ۴۰ cm بر روی فنری با ثابت فنر $k =$ ۱۹۶۰ N/m، رها می‌شود (شکل ۸–۳۹). بیشینه‌ی مقدار تراکم فنر را پیدا کنید.

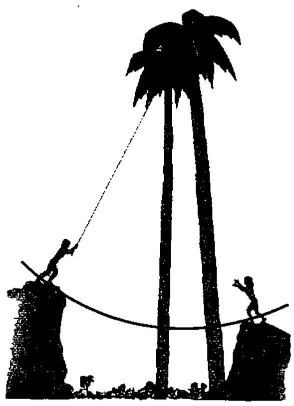


شکل ۸–۳۹ مسئله‌ی ۲۴.

⁂ ۲۵ در زمان $t =$ ۰ گلوله‌ای به جرم ۱٫۰ kg از بالای یک برج بلند باسرعت $\vec{v} = ($۱۸ m/s$)\hat{i} + ($۲۴ m/s$)\hat{j}$ پرتاب می‌شود. مقدار ΔU دستگاه گلوله ـ زمین در بین دو زمان $t =$ ۰ و $t =$ ۶٫۰ s (که گلوله هم‌چنان در حال سقوط آزاد است) چیست؟

⁂ ۲۶ نیروی پایستار $\vec{F} = ($۶٫۰$x -$ ۱۲$)\hat{i}$ N، که در آن x برحسب متر است، به ذره‌ای وارد می‌شود و ذره در راستای محور x حرکت می‌کند. انرژی پتانسیل وابسته به این نیرو U، در نقطه‌ی $x =$ ۰ برابر با ۲۷ J است. (الف) رابطه‌ی مربوط به U برحسب x را، که در آن U برحسب ژول و x برحسب متر است، بنویسید. (ب) انرژی پتانسیل مثبت بیشینه چقدر است؟ به ازای چه مقدار (پ) x منفی و (ت) x مثبت، انرژی پتانسیل صفر است؟

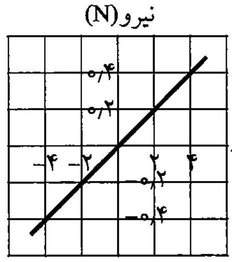
⁂ ۲۷ تارزان، که وزنش ۶۸۸ N است، انتهای شاخه‌ی پیچکی به طول ۱۸ m را می‌گیرد و از لبه‌ی یک پرتگاه تاب می‌خورد (شکل ۸–۴۰). او از لبه‌ی پرتگاه تا پایین‌ترین نقطه‌ی تاب، به اندازه‌ی ۳٫۲ m پایین می‌آید. اگر نیروی وارد شده به شاخه از ۹۵۰ N تجاوز کند شاخه می‌شکند. (الف) آیا شاخه می‌شکند؟



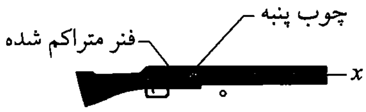
شکل ۸–۴۰ مسئله‌ی ۲۷.

(ب) اگر پاسخ منفی است، بیشترین نیرویی که هنگام تاب خوردن به شاخه وارد می‌شود، چیست؟ اگر پاسخ مثبت است، شاخه تحت چه‌زاویه‌ای نسبت به راستای قائم، می‌شکند؟

** ۲۸ شکل ۸-۴۱ الف نمودار تغییرات نیروی فنر را برحسب کشیدگی یا تراکم فنر یک تفنگ چوب پنبه‌ای (شکل ۸-۴۱ ب) نشان می‌دهد. فنر به اندازه‌ی ۵٫۵ cm متراکم می‌شود و برای پرتاب کردن یک چوب پنبه‌ی ۳٫۸ گرمی توسط تفنگ به کار می‌رود. (الف) اگر چوب پنبه رها شود تندی‌اش در هنگام عبور از وضعیت آرامش فنر چقدر است؟ (ب) حالا فرض کنید چوب پنبه به فنر می‌چسبد و پیش از جدا شدن از آن، فنر را به اندازه‌ی ۱٫۵ cm می‌کشد. در این صورت، تندی چوب پنبه در لحظه‌ی رها شدن چقدر است؟



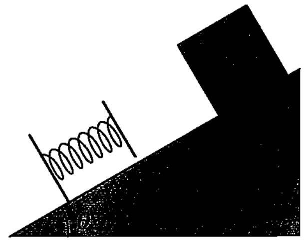
(الف)



(ب)

شکل ۸-۴۱ مسئله‌ی ۲۸.

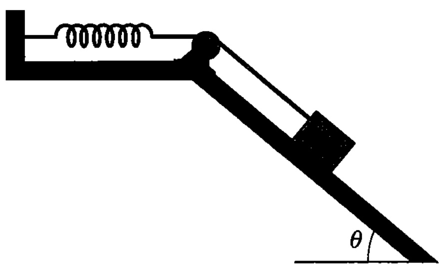
** ۲۹ در شکل ۸-۴۲، جسمی به جرم m = ۱۲ kg از حال سکون از بالای یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب θ = ۳۰° رها می‌شود. در پایین جسم فنری قرار دارد که می‌تواند با نیروی ۲۷۰ N به اندازه‌ی ۲٫۰ cm متراکم شود. جسم



شکل ۸-۴۲ مسئله‌ی ۲۹.

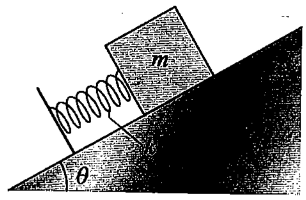
پس از رها شدن و برخورد به فنر و متراکم کردن آن به اندازه‌ی ۵٫۵ cm در یک لحظه متوقف می‌شود. (الف) جسم از نقطه‌ی حالت سکون تا نقطه‌ی توقف چه مسافتی را روی سطح شیب‌دار می‌پیماید؟ (ب) تندی جسم درست در لحظه‌ی تماس با فنر چقدر است؟

** ۳۰ یک جعبه‌ی جای نان به جرم ۲٫۰ kg بر روی یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب θ = ۴۰° درجه از طریق ریسمانی که از روی قرقره‌ای گذشته است، به فنر سبکی با ثابت فنر k = ۱۲۰ N/m، مطابق شکل ۸-۴۳، وصل شده است. در هنگامی که فنر کشیده نشده است جعبه رها می‌شود. فرض کنید قرقره بی‌جرم و بی‌اصطکاک است. (الف) جعبه پس از آنکه به اندازه‌ی ۱۰ cm از سطح پایین می‌رود تندی‌اش چقدر است؟ (ب) این جعبه پیش از توقف لحظه‌ای تا چه مسافتی از نقطه‌ی رها شدنش، بر روی سطح می‌لغزد و (پ) بزرگی و (ت) جهت (بالاسو یا پایین‌سوی سطح شیب‌دار) شتاب جعبه در زمان توقف لحظه‌ای آن چیست؟



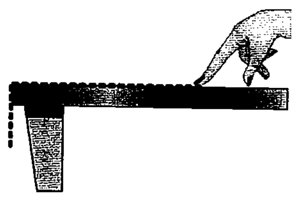
شکل ۸-۴۳ مسئله‌ی ۳۰.

** ۳۱ جسمی به‌جرم m = ۲٫۰۰ kg درمقابل فنری واقع در روی یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب θ = ۳۰٫۰° قرار دارد (شکل ۸-۴۴). (جسم به فنر متصل نیست). فنر که ثابت نیروی آن k = ۱۹٫۶ N/cm است، به اندازه‌ی ۲۰٫۰ cm متراکم و سپس رها می‌شود. (الف) انرژی پتانسیل کشسانی فنر متراکم شده چقدر است؟ (ب) هنگامی که جسم از نقطه‌ی رها شدن تا بالاترین نقطه در روی سطح شیب‌دار حرکت می‌کند، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه جسم ـ زمین چقدر است؟ (پ) فاصله‌ی بالاترین نقطه‌ای که جسم در روی سطح شیب‌دار به آن می‌رسد تا نقطه‌ی رها شدن چقدر است؟



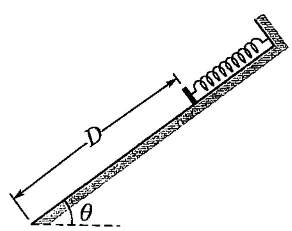
شکل ۸-۴۴ مسئله‌ی ۳۱.

** **۳۲** در شکل ۸-۴۵، زنجیری طوری روی یک میز بی‌اصطکاک قرار گرفته که یک چهارم طول آن از لبه‌ی میز آویخته شده است. اگر طول زنجیر $L = ۲۸\,\text{cm}$ و جرم آن $m = ۰/۰۱۲\,\text{kg}$ باشد، چقدر کار برای بالا کشیدن بخش آویخته شده به روی میز لازم است؟



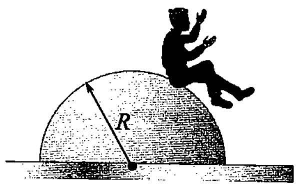
شکل ۸-۴۵ مسئله‌ی ۳۲.

*** **۳۳** در شکل ۸-۴۶، فنری با ثابت نیروی $k = ۱۷۰\,\text{N/m}$ در بالای یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta = ۳۷/۰^\circ$ قرار دارد. پایین سطح شیب‌دار تا انتهای پایینی فنر در حالت آرامش به اندازه‌ی $D = ۱/۰۰\,\text{m}$ فاصله دارد. جعبه‌ای به جرم $۲/۰۰\,\text{kg}$ را به فنر فشار می‌دهیم تا به اندازه‌ی $۰/۲۰۰\,\text{m}$ متراکم شود و سپس جعبه را از حال سکون رها می‌کنیم. (الف) تندی جعبه در لحظه‌ای که فنر به طول حالت آرامش برمی‌گردد، چقدر است (در این حالت تماس جعبه با فنر قطع می‌شود)؟ (ب) تندی جعبه هنگام رسیدن به پایین سطح شیب‌دار چقدر است؟



شکل ۸-۴۶ مسئله‌ی ۳۳.

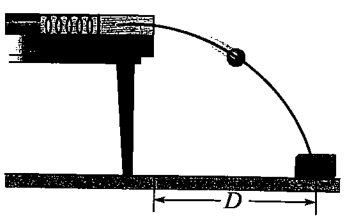
*** **۳۴** پسر بچه‌ای بالای یک تپه‌ی یخی به شکل نیمکره با شعاع $R = ۱۳/۸\,\text{m}$ نشسته است. او با تندی آغازی ناچیز شروع به لغزیدن به پایین می‌کند (شکل ۸-۴۷). فرض کنید، تقریباً، سطح یخ بی‌اصطکاک است. پسر بچه در چه نقطه‌ای از سطح جدا می‌شود؟



شکل ۸-۴۷ مسئله‌ی ۳۴.

*** **۳۵** در شکل ۸-۴۲، جسمی به جرم $m = ۳/۲۰\,\text{kg}$ از حال سکون به اندازه‌ی مسافت d به پایین سطح بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta = ۳۰/۰^\circ$ می‌لغزد و به فنری با ثابت نیروی $۴۳۱\,\text{N/m}$ برخورد می‌کند. جسم وقتی که به طور لحظه‌ای متوقف می‌شود فنر را به اندازه‌ی $۲۱/۰\,\text{cm}$ متراکم می‌کند. (الف) مسافت d و (ب) مسافت بین نقطه‌ی نخستین تماس جسم ـ فنر و نقطه‌ای که تندی جسم بیشترین مقدار را دارد، چیست؟

*** **۳۶** بابک و رضا مشغول بازی‌اند و می‌خواهند با استفاده کردن از یک تفنگ فنری، که به طور افقی روی میزی قرار گرفته است، تیله‌ای به سوی جعبه‌ی کوچک واقع بر روی زمین نشانه‌گیری کنند. فاصله‌ی افقی جعبه‌ی هدف تا لبه‌ی میز $D = ۲/۲۰\,\text{m}$ است؛ شکل ۸-۴۸ را ببینید. بابک فنر را به اندازه‌ی $۱/۱۰\,\text{cm}$ متراکم می‌کند، اما تیله به اندازه‌ی $۲۷/۰\,\text{cm}$ نسبت به مرکز جعبه در فاصله‌ی کوتاه‌تری به زمین می‌افتد. رضا فنر را چقدر باید متراکم کند تا تیله درون جعبه بیفتد؟ فرض کنید برای فنر و تیله‌ی درون تفنگ هیچ اصطکاکی وجود ندارد.

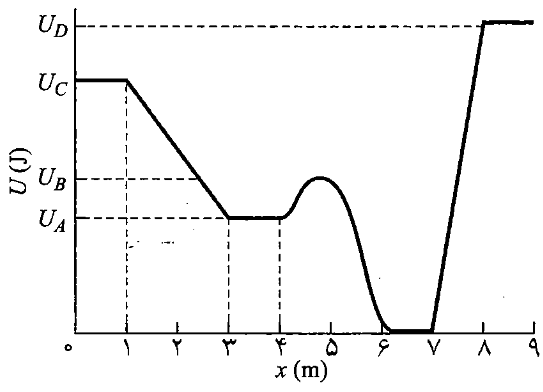


شکل ۸-۴۸ مسئله‌ی ۳۶.

*** ۳۷ ریسمان یکنواختی به طول ۲۵ cm و جرم ۱۵ گرم در آغاز به سقف چسبیده است. سپس، ریسمان به طور قائم از سقف آویزان می‌شود و تنها یک سر آن متصل به سقف می‌ماند. با این تغییر سمت‌گیری، مقدار تغییر انرژی پتانسیل گرانشی ریسمان چقدراست؟ (*راهنمایی:* یک‌جزء دیفرانسیلی از ریسمان را در نظر بگیرید و سپس از حساب انتگرال استفاده کنید).

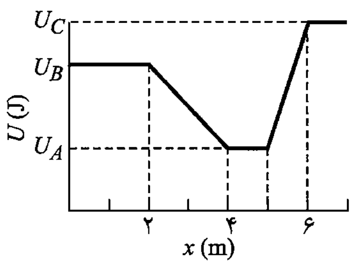
پودمان ۸-۳ خواندن منحنی انرژی پتانسیل

** ۳۸ شکل ۸-۴۹ نمودار تغییرات انرژی پتانسیل U برحسب مکان x ذره‌ای به جرم ۰٫۲۰۰kg را که بر اثر یک نیروی پایستار فقط می‌تواند در راستای محور x حرکت کند، نشان می‌دهد. نمودار شامل این مقادیر است: U_A = ۹٫۰۰ J، U_C = ۲۰٫۰۰ J، و U_D = ۲۴٫۰۰ J. ذره در نقطه‌ای رها می‌شود که در آن U یک «تپه‌ی پتانسیل» به «ارتفاع» U_B = ۱۲٫۰۰ J، تشکیل می‌دهد و انرژی جنبشی ذره ۴٫۰۰ J است. تندی ذره در (الف) x = ۳٫۵ m و (ب) x = ۶٫۵ m، چیست؟ محل نقطه‌ی برگشت در (پ) سمت راست و (ت) سمت چپ نمودار، کجاست؟



شکل ۸-۴۹ مسئله‌ی ۳۸.

** ۳۹ شکل ۸-۵۰ نمودار انرژی پتانسیل U برحسب مکان x ذره‌ای به جرم ۰٫۹۰kg را نشان می‌دهد که می‌تواند فقط در راستای محور x حرکت کند (نیروهای ناپایستار دخالتی ندارند). سه مقدار انرژی پتانسیل مربوط به نمودار عبارت‌اند از: U_A = ۱۵٫۰ J، U_B = ۳۵٫۰ J، و U_C = ۴۵٫۰ J. ذره که در نقطه‌ی x = ۴٫۵ m با تندی آغازی ۷٫۰ m/s رها می‌شود، در جهت منفی محور x پیش می‌رود. (الف) اگر ذره بتواند به نقطه‌ی x = ۱٫۰ m برسد، تندی‌اش در آنجا چیست و اگر نتواند به آن نقطه برسد، نقطه‌ی برگشت آن کدام است؟ (ب) بزرگی و (پ) جهت نیروی وارد شده به ذره در هنگام شروع حرکت به سمت چپ نقطه‌ی x = ۴٫۰ m، چیست؟ اکنون، فرض کنید که وقتی ذره با تندی ۷٫۰ m/s در نقطه‌ی x = ۴٫۵ m رها می‌شود، در جهت مثبت محور x پیش می‌رود. (ت) اگر ذره بتواند به نقطه‌ی x = ۷٫۰ m برسد، تندی‌اش در آنجا چیست و اگر نتواند برسد، نقطه‌ی برگشت آن کدام است؟ (ث) بزرگی و (ج) جهت نیروی وارد شده به ذره در هنگام شروع حرکت به سمت راست نقطه‌ی x = ۵٫۰ m، چیست؟



شکل ۸-۵۰ مسئله‌ی ۳۹.

** ۴۰ انرژی پتانسیل یک مولکول دو اتمی (یک سیستم دو اتمی مانند H_2 یا O_2) برابر است با

$$U = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^{6}}$$

که در آن r فاصله‌ی میان دو اتم مولکول و A و B مقادیری ثابت و مثبت‌اند. این انرژی پتانسیل به نیرویی وابسته است که دو اتم را به یکدیگر پیوند می‌دهد. (الف) مطلوب است تعیین ***فاصله‌ی جدایی تعادل***، یعنی فاصله‌ی میان اتم‌ها که به ازای آن نیروی وارد شده به هر اتم صفر است. اگر فاصله‌ی میان اتم‌ها (ب) کمتر و (پ) بیشتر، از فاصله‌ی جدایی تعادل باشد، آیا این نیرو دافعه است (اتم‌ها از هم دور می‌شوند)، یا جاذبه (اتم‌ها به هم نزدیک می‌شوند)؟

*** ۴۱ نیروی پایستار $F(x)$ به ذره‌ای به جرم ۱٫۰kg، که در راستای محور x حرکت می‌کند، وارد می‌شود. انرژی پتانسیل وابسته به نیروی $F(x)$، برابر است با

$$U(x) = -4xe^{-x/4}\,\mathrm{J}$$

که در آن x برحسب متر است. در مکان $x = ۵/۰\,m$، انرژی جنبشی ذره $۲/۰\,J$ است. (الف) انرژی مکانیکی دستگاه چقدر است؟ (ب) نمودار $U(x)$ برحسب x را به ازای $۰ \leq x \leq ۱۰\,m$ رسم کنید. در روی این نمودار خط نمایشگر انرژی مکانیکی دستگاه را رسم کنید. از قسمت (ب) استفاده کنید و (پ) کمترین مقدار x و (ت) بیشترین مقدار x را، که ذره می‌تواند در میان آن‌ها حرکت کند، به دست آورید. از قسمت (ب) استفاده کنید و (ث) بیشینه‌ی انرژی جنبشی ذره و (ج) مقدار x مربوط به این حالت، را به دست آورید. (چ) معادله‌ی مربوط به تابع $F(x)$ برحسب x را معین کنید. (ح) به ازای چه مقدار (معین) x، داریم $F(x) = ۰$؟

پودمان ۸-۴ کار انجام شده روی یک دستگاه توسط نیروی خارجی

* **۴۲** کارگری جسمی به جرم $۲۷\,kg$ را با نیرویی که در راستای ۳۲ درجه‌ی زیر افق قرار دارد، با تندی ثابت به اندازه‌ی $۹/۲\,m$ روی یک سطح افقی هُل می‌دهد. اگر ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و سطح ۰/۲۰ باشد، (الف) کار انجام شده توسط نیروی کارگر و (ب) افزایش انرژی گرمایی دستگاه جسم ـ سطح، چقدر است؟

* **۴۳** سگی با وارد کردن نیرویی افقی به بزرگی $۸/۰\,N$ جعبه‌ی لانه‌ی خود را روی زمین می‌کشد. نیروی اصطکاک جنبشی وارد شده به جعبه $۵/۰\,N$ است. وقتی جعبه به اندازه‌ی $۰/۷۰\,m$ روی زمین کشیده می‌شود، (الف) کار انجام شده توسط نیروی سگ، و (ب) افزایش انرژی گرمایی جعبه و سطح زمین، چقدر است؟

** **۴۴** یک نیروی افقی به بزرگی $۳۵/۰\,N$ جسمی به جرم $۴/۰۰\,kg$ را روی یک سطح با ضریب اصطکاک ۰/۶۰۰ هُل می‌دهد. (الف) وقتی جسم مسافتی به اندازه‌ی $۳/۰۰\,m$ روی سطح می‌لغزد، این نیرو چقدر کار روی دستگاه جسم ـ سطح انجام می‌دهد؟ (ب) در طی این جابه‌جایی، انرژی گرمایی جسم به اندازه‌ی $۴۰/۰\,J$ افزایش می‌یابد. افزایش انرژی گرمایی سطح چقدر است؟ (پ) افزایش انرژی جنبشی جسم چقدر است؟

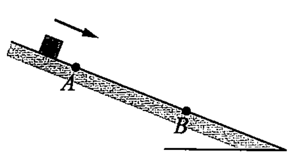
** **۴۵** برای کشیدن جسمی به جرم $۳/۵۷\,kg$ با تندی ثابت به اندازه‌ی $۴/۰۶\,m$ در راستای یک سطح افقی، از طنابی استفاده می‌شود. نیروی وارد شده از سوی طناب به جسم $۷/۶۸\,N$ تحت زاویه‌ی ۱۵/۰ درجه بالای افق است. (الف) کار انجام شده توسط نیروی طناب، (ب) افزایش انرژی گرمایی دستگاه جسم ـ سطح و (پ) ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و سطح چقدر است؟

پودمان ۸-۵ پایستگی انرژی

* **۴۶** یک بازیکن بیرون میدان بیس‌بال گوی را با تندی آغازی $۸۱/۸\,mi/h$ پرتاب می‌کند. درست پیش از آنکه بازیکن میان میدان گوی را در همان ارتفاع بگیرد، تندی گوی $۱۱۰\,ft/s$ است. انرژی مکانیکی دستگاه گوی ـ زمین، برحسب فوت ـ پوند بر اثر نیروی پسار هوا چقدر کاهش یافته است؟ (وزن گوی بیس‌بال ۹/۰ اونس است).

* **۴۷** یک بشقاب پرنده (فریزبی) به جرم ۷۵ گرم از نقطه‌ای به ارتفاع $۱/۱\,m$ از سطح زمین با تندی $۱۲\,m/s$ پرتاب می‌شود. وقتی بشقاب پرنده به ارتفاع ۲/۱ متری می‌رسد، تندی‌اش $۱۰/۵\,m/s$ است. کاهش انرژی مکانیکی E_{mec}، دستگاه بشقاب پرنده ـ زمین بر اثر نیروی پسار هوا چقدر است؟

* **۴۸** در شکل ۸-۵۱، جسمی از یک سطح شیب‌دار به پایین می‌لغزد. در حین حرکت کردن جسم از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی B، به فاصله‌ی $۵/۰\,m$ از یکدیگر نیروی $\vec{F}$ با بزرگی $۲/۰\,N$ در راستای سطح شیب‌دار و به سمت پایین به جسم وارد می‌شود. بزرگی نیروی اصطکاک وارد شده به جسم $۱۰\,N$ است. اگر انرژی جنبشی جسم در فاصله‌ی میان A و B به اندازه‌ی $۳۵\,J$ افزایش پیدا کند، کار انجام شده روی جسم توسط نیروی گرانشی در طی حرکت کردن از A تا B چقدر است؟



شکل ۸-۵۱ مسئله‌های ۴۸ و ۷۱.

* **۴۹** خرسی به جرم $۲۵\,kg$ از حال سکون از یک درخت کاج به اندازه‌ی $۱۲\,m$ به پایین می‌لغزد و تندی‌اش درست پیش از

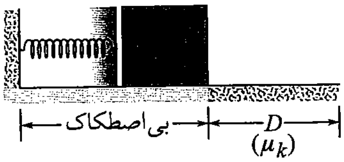
برخورد به زمین ۵/۶m/s است. (الف) در حین لغزیدن، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه خرس ـ زمین چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی خرس درست پیش از برخورد به زمین چقدر است؟ (پ) نیروی اصطکاک متوسط وارد شده به خرس در حال لغزیدن، چقدر است؟

* **۵۰** اسکی‌بازی به جرم ۶۰kg با سرعت ۲۴m/s، که در راستای ۲۵ درجه‌ی بالای افق قرار دارد، انتهای شیب‌راهه‌ی مسیر پرش اسکی را ترک می‌کند. فرض کنید بر اثر نیروی پسار هوا، اسکی‌باز با تندی ۲۲m/s در نقطه‌ای که فاصله‌ی قائم آن تا زیر انتهای شیب‌راهه‌ی مسیر پرش ۱۴m است، به زمین برخورد می‌کند. از لحظه‌ی پرش تا برگشت به زمین، کاهش انرژی مکانیکی دستگاه اسکی‌باز ـ زمین بر اثر نیروی پسار هوا چقدر است؟

* **۵۱** در حین ریزش تخته سنگ‌های یک تپه، تخته سنگی به جرم ۵۲۰kg از حال سکون از دامنه‌ی تپه‌ای به طول ۵۰۰m و به ارتفاع ۳۰۰m به پایین می‌لغزد. ضریب اصطکاک جنبشی میان تخته سنگ و سطح تپه ۰/۲۵ است. (الف) اگر U، انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه تخته سنگ ـ زمین در پایین تپه صفر باشد، مقدار U درست پیش از لغزیدن تخته سنگ چقدر است؟ (ب) در حین لغزیدن تخته سنگ چقدر انرژی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود؟ در لحظه‌ی رسیدن تخته سنگ به پایین تپه، (پ) انرژی جنبشی آن و (ت) تندی آن، چیست؟

** **۵۲** کلوچه‌ی حلقه‌ای بزرگی که روی یک سطح افقی می‌لغزد، به سر یک فنر افقی با ثابت فنر $k = ۴۰۰\,N/m$ وصل شده و سر دیگر فنر در جایی محکم شده است. انرژی جنبشی کلوچه در هنگام عبور از مکان تعادل فنر ۲۰/۰J است. در حین لغزیدن کلوچه یک نیروی اصطکاک به بزرگی ۱۰/۰N به آن وارد می‌شود. (الف) این کلوچه پیش از توقف لحظه‌ای، تا چه فاصله‌ای نسبت به مکان تعادل می‌لغزد. (ب) در هنگام برگشتن به مکان تعادل انرژی جنبشی‌اش چقدر خواهد بود؟

** **۵۳** در شکل ۸-۵۲، جسمی به جرم ۳/۵kg به وسیله‌ی فنری متراکم شده با ثابت فنر ۶۴۰N/m، شتاب می‌گیرد. جسم پس از ترک کردن فنر با طول حالت آرامش، روی یک سطح افقی با ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k = ۰/۲۵$ پیش از

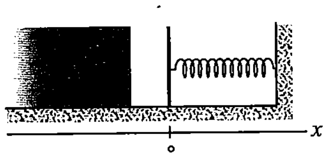


شکل ۸-۵۲ مسئله‌ی ۵۳.

توقف مسافت $D = ۷/۸\,m$ را می‌پیماید. (الف) افزایش انرژی گرمایی دستگاه جسم ـ سطح، (ب) بیشینه‌ی انرژی جنبشی جسم و (پ) مقدار تراکم اولی فنر، چیست؟

** **۵۴** دختر بچه‌ای به وزن ۲۶۷N از سُرسره‌ای که با راستای افقی زاویه‌ی ۲۰ درجه می‌سازد، به اندازه‌ی ۶/۱m به پایین سُر می‌خورد. ضریب اصطکاک جنبشی میان سُرسره و بچه ۰/۱۰ است. (الف) چقدر انرژی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود؟ (ب) اگر دختر بچه از بالای سُرسره با تندی ۰/۴۵۷m/s شروع به لغزیدن کند، تندی‌اش در پایین سُرسره چقدر است؟

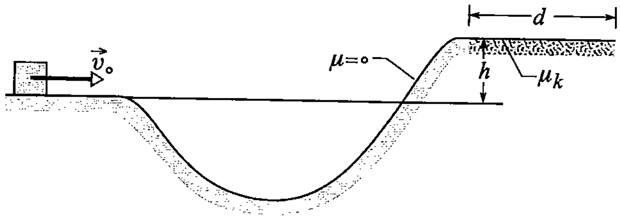
** **۵۵** در شکل ۸-۵۳، جسمی به جرم $m = ۲/۵\,kg$ به سوی فنری با ثابت فنر $k = ۳۲۰\,N/m$ می‌لغزد. وقتی جسم متوقف می‌شود فنر به اندازه‌ی ۷/۵cm متراکم شده است. ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و سطح افقی ۰/۲۵ است. در حین تماس داشتن جسم با فنر تا هنگام توقف، (الف) کار انجام شده توسط نیروی فنر و (ب) افزایش انرژی گرمایی دستگاه جسم ـ سطح، چقدر است؟ (پ) تندی جسم درست در لحظه‌ی برخورد به فنر چیست؟



شکل ۸-۵۳ مسئله‌ی ۵۵.

** **۵۶** جسمی به جرم ۲/۰kg را به فنری افقی، واقع بر روی یک میز، فشار می‌دهیم. در نتیجه، فنر به اندازه‌ی ۱۵cm متراکم می‌شود. آنگاه جسم را رها می‌کنیم تا فنر آن را بر روی سطح میز بلغزاند. جسم در فاصله‌ی ۷۵ سانتی‌متری نقطه‌ی رها شدن متوقف می‌شود. ثابت نیروی فنر ۲۰۰N/m است. ضریب اصطکاک جنبشی جسم ـ سطح میز چقدر است؟

** ۵۷ در شکل ۸-۵۴، جسمی در طول مسیری که از دره‌ای می‌گذرد، از یک سطح افقی تا سطح افقی بالاتر می‌لغزد. مسیر حرکت جسم تا رسیدن به سطح بالاتر بی‌اصطکاک است. در سطح بالاتر نیروی اصطکاک سبب می‌شود جسم پس از پیمودن مسافت d متوقف شود. تندی آغازی جسم $v_0 =$ ۶٫۰ m/s، اختلاف ارتفاع دو سطح افقی $h =$ ۱٫۱ m و ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k =$ ۰٫۶۰ است. مقدار d را پیدا کنید.



شکل ۸-۵۴ مسئله‌ی ۵۷.

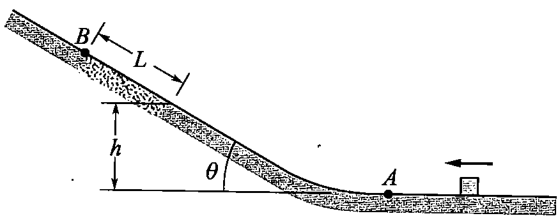
** ۵۸ یک ظرف شیرینی از سطح شیب‌داری با زاویه‌ی شیب ۴۰ درجه به سمت بالا حرکت داده می‌شود. در فاصله‌ی ۵۵ cm از پایین سطح شیب‌دار (که روی سطح اندازه‌گیری می‌شود)، تندی ظرف ۱٫۴ m/s است. ضریب اصطکاک جنبشی میان ظرف و سطح ۰٫۱۵ است. (الف) ظرف تا چه مسافتی بر روی سطح حرکت خواهد کرد؟ (ب) ظرف در موقع برگشتن به سمت پایین با چه سرعتی به پایین سطح می‌رسد؟ (پ) اگر ضریب اصطکاک جنبشی کاهش یابد (اما تندی یا فاصله‌ی داده شده تغییر نکند)، آیا بزرگی پاسخ‌های قسمت‌های (الف) و (ب) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

** ۵۹ سنگی به وزن ۵٫۲۹ N با تندی آغازی ۲۰٫۰ m/s به‌طور قائم از سطح زمین به هوا پرتاب می‌شود. در حین پرواز سنگ، اگر به آن نیروی ثابت پَسار هوا به مقدار ۰٫۲۶۵ N وارد شود، (الف) بیشینه‌ی ارتفاعی که سنگ به آن می‌رسد چقدر است؟ (ب) تندی سنگ درست پیش از برخورد به زمین چیست؟

** ۶۰ بسته‌ای به جرم ۴٫۰ kg با انرژی جنبشی ۱۲۸ J از یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی شیب ۳۰ درجه به سمت بالا شروع به حرکت می‌کند. اگر ضریب اصطکاک جنبشی میان بسته و سطح شیب‌دار ۰٫۳۰ باشد، بسته تا چه مسافتی بر روی سطح به‌سمت بالا می‌لغزد؟

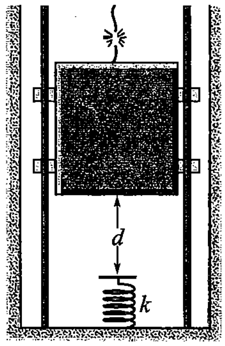
** ۶۱ وقتی یک سوسک صدادار روی زمین به پشت قرار می‌گیرد، با خم کردن ناگهانی پشتش به هوا می‌پرد و انرژی ذخیره شده در عضله‌ی خود را به انرژی مکانیکی تبدیل می‌کند. این ساز و کار به هوا پریدن باعث تولید صدایی می‌شود که قابل شنیدن است و دلیل صدادار نامیدن این سوسک هم همین است. یک نوار تصویری گرفته شده از پرش سوسک صدادار نشان می‌دهد که سوسکی به‌جرم $m =$ ۴٫۰×۱۰$^{-6}$ kg در هنگام پرش به اندازه‌ی ۰٫۷۷ mm خود را به بالا حرکت می‌دهد و سپس تا ارتفاع بیشینه‌ی $h =$ ۰٫۳۰ m به‌هوا می‌پرد. درحین پرش، بزرگی متوسط (الف) نیروی خارجی وارد شده به پشت سوسک از سوی کف زمین، و (ب) شتاب سوسک برحسب g، چقدر است؟

*** ۶۲ در شکل ۸-۵۵، جسمی در طول یک مسیر بی‌اصطکاک می‌لغزد تا به بخشی به طول $L =$ ۰٫۷۵ m می‌رسد، که از ارتفاع $h =$ ۲٫۰ m روی شیب‌راهه‌ی با زاویه‌ی شیب $\theta =$ ۳۰°، شروع می‌شود. در این بخش ضریب اصطکاک جنبشی ۰٫۴۰ است. جسم با تندی ۸٫۰ m/s از نقطه‌ی A می‌گذرد. اگر این جسم بتواند به نقطه‌ی B (محل پایان یافتن اصطکاک) برسد، تندی‌اش در آنجا چیست، و اگر نتواند برسد بیشترین ارتفاعی که به آن می‌رسد نسبت به نقطه‌ی A چقدر است؟



شکل ۸-۵۵ مسئله‌ی ۶۲.

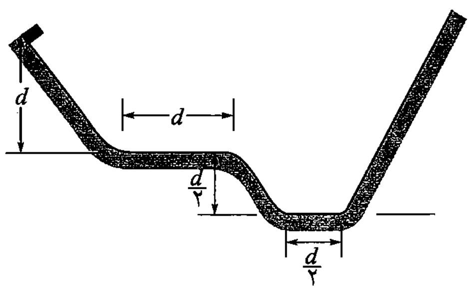
*** ۶۳ کابل اتاقک آسانسور ۱۸۰۰ کیلوگرمی شکل ۸-۵۶، که در طبقه‌ی اول ساختمانی متوقف است، بریده می‌شود. در این موقع فاصله‌ی پایین اتاقک از بالای فنر اطمینان با ثابت فنر $k =$ ۰٫۱۵ MN/m، برابر با $d =$ ۳٫۷ m است. یک وسیله‌ی ایمنی اتاقک را به ریل‌های مسیر فشار می‌دهد تا نیروی اصطکاک ثابت ۴٫۴ kN با حرکت اتاقک مخالفت کند. (الف) تندی اتاقک را درست پیش از برخورد با فنر پیدا کنید. (ب)



شکل ۸–۵۶ مسئله‌ی ۶۳.

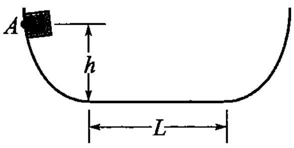
بیشینه‌ی تراکم فنر، x، را پیدا کنید (نیروی اصطکاک در حین متراکم شدن فنر نیز اثر می‌کند). (پ) اتاقک پس از برخورد با فنر چه مقدار به بالا می‌جهد؟ (ت) با استفاده کردن از اصل پایستگی انرژی، کل مسافتی را که اتاقک پیش از متوقف شدن می‌پیماید، به طور تقریبی پیدا کنید. (فرض کنید وقتی اتاقک ساکن است، نیروی اصطکاک قابل چشم‌پوشی است).

*** **۶۴** در شکل ۸–۵۷، جسمی از حال سکون از ارتفاع $d = ۴۰\,\text{cm}$ رها می‌شود، از یک شیب‌راهه‌ی بی‌اصطکاک به پایین می‌لغزد و به بخش تخت اول مسیر به‌طول d، که در آنجا ضریب اصطکاک جنبشی ۰٫۵۰ است، می‌رسد. اگر این جسم هنوز در حال حرکت کردن باشد، از شیب‌راهه‌ی بی‌اصطکاک دوم و از ارتفاع $d/۲$ به پایین می‌لغزد و به بخش تخت پایین‌تر به طول $d/۲$، که در آنجا ضریب اصطکاک جنبشی ۰٫۵۰ است، می‌رسد. اگر این جسم باز هم در حال حرکت کردن باشد، از یک شیب‌راهه‌ی بی‌اصطکاک بالا می‌رود تا (به‌طور لحظه‌ای) متوقف شود. این جسم در کجا متوقف خواهد شد؟ اگر توقف نهایی جسم روی یک بخش تخت مسیر باشد، توضیح دهید در کدام بخش تخت و فاصله‌ی L محل توقف تا لبه‌ی سمت چپ آن بخش را مشخص کنید. اگر جسم به شیب‌راهه برسد، ارتفاع محل توقف لحظه‌ای H، را نسبت به بخش تخت پایین‌تر مسیر پیدا کنید.



شکل ۸–۵۷ مسئله‌ی ۶۴.

*** **۶۵** ذره‌ای در امتداد مسیری که دو سرش بالا آمده و بخش میانی آن تخت است، مطابق شکل ۸–۵۸، می‌لغزد. طول بخش تخت $L = ۴۰\,\text{cm}$ است. بخش‌های خمیده‌ی مسیر بی‌اصطکاک‌اند، اما در بخش تخت ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k = ۰٫۲۰$ است. ذره از نقطه‌ی A، که ارتفاع آن نسبت به بخش تخت مسیر برابر با $h = L/۲$ است، رها می‌شود. این ذره، سرانجام، در کجا متوقف خواهد شد؟

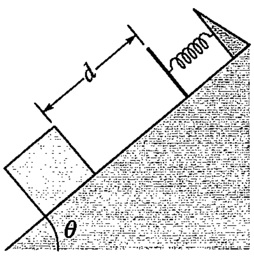


شکل ۸–۵۸ مسئله‌ی ۶۵.

مسئله‌های بیشتر

۶۶ میمونی به جرم ۳٫۲kg از ارتفاع ۳٫۰ متری بالای زمین آویزان است. (الف) اگر نقطه‌ی مرجع در روی زمین را $y = ۰$ در نظر بگیریم، انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه میمون ـ زمین چقدر است؟ اگر میمون روی زمین بیفتد و نیروی پسار هوا ناچیز فرض شود، (ب) انرژی جنبشی و (پ) تندی میمون درست پیش از رسیدن به زمین، چقدر است؟

۶۷ فنری (با ثابت فنر $k = ۲۰۰\,\text{N/m}$) در بالای یک سطح شیب‌دار بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب $\theta = ۴۰^\circ$ (شکل ۸–۵۹) نصب شده است. جسمی ۱٫۰ کیلوگرمی با انرژی جنبشی آغازی ۱۶J ازمکانی واقع درفاصله‌ی $d = ۰٫۶۰\,\text{m}$ از انتهای فنردرحال آرامش به سمت بالای سطح شیب‌دارپرتاب می‌شود. (الف)

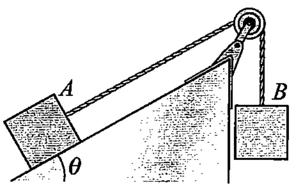


شکل ۸–۵۹ مسئله‌ی ۶۷.

انرژی جنبشی جسم در لحظه‌ای که فنر را به اندازه‌ی ۰/۲۰m متراکم می‌کند، چقدر است؟ (ب) این جسم با چه انرژی جنبشی‌ای باید به سمت بالای سطح پرتاب شود تا موقعی که فنر را به اندازه‌ی ۰/۴۰m متراکم می‌کند، در یک لحظه متوقف شود؟

۶۸ پرتابه‌ای به جرم ۰/۵۵kg با انرژی جنبشی آغازی ۱۵۵۰J از لبه‌ی پرتگاهی پرتاب می‌شود. جابه‌جایی بالاسوی بیشینه‌ی پرتابه نسبت به نقطه‌ی پرتاب، ۱۴۰m+ است. (الف) مؤلفه‌ی افقی و (ب) مؤلفه‌ی قائم سرعت پرتاب چیست؟ (پ) در لحظه‌ای که مؤلفه‌ی قائم سرعت پرتابه ۶۵m/s است، جابه‌جایی قائم آن نسبت به نقطه‌ی پرتاب چیست؟

۶۹ در شکل ۸-۶۰، جرم قرقره ناچیز است و قرقره و سطح شیب‌دار اصطکاک ندارند. جسم A دارای جرم ۱/۰kg، جسم B دارای جرم ۲/۰kg و زاویه‌ی θ برابر با ۳۰ درجه است. اگر دو جسم از حال سکون و به گونه‌ای رها شوند که ریسمان به‌حالت کشیده باشد، در هنگام سقوط کردن جسم B به‌اندازه‌ی ۲۵cm انرژی جنبشی کل دو جسم چقدر است؟

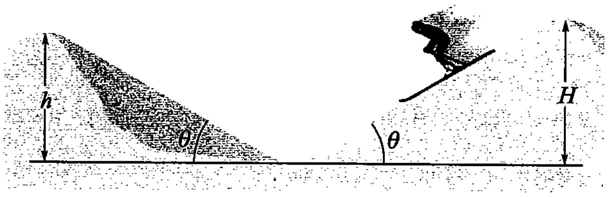


شکل ۸-۶۰ مسئله‌ی ۶۹.

۷۰ در شکل ۸-۳۸، ریسمان دارای طول $L =$ ۱۲۰cm است و به یک سر آن گلوله‌ای وصل شده و سر دیگرش به جایی محکم شده است. یک میخ ثابت در نقطه‌ی P قرار دارد. گلوله پس از رها شدن از حالت سکون به پایین حرکت می‌کند تا ریسمان به میخ برخورد کند؛ سپس گلوله به دور میخ به بالا تاب می‌خورد. اگر بخواهیم گلوله به دور میخ یک دور کامل بزند، فاصله‌ی d را چقدر باید اضافه کنیم؟ (*راهنمایی:* گلوله در بالاترین نقطه‌ی مسیرش باز هم باید در حال حرکت باشد. آیا می‌دانید چرا؟)

۷۱ در شکل ۸-۵۱، جسمی به پایین یک شیب‌راهه‌ی بی‌اصطکاک لغزانده می‌شود. تندی‌های جسم در نقطه‌های A و B به ترتیب ۲/۰۰m/s و ۲/۶۰m/s هستند. بار دیگر، این جسم به پایین شیب‌راهه لغزانده می‌شود اما این بار تندی آن در نقطه‌ی A برابر با ۴/۰۰m/s است. در این حالت تندی جسم در نقطه‌ی B چقدر است؟

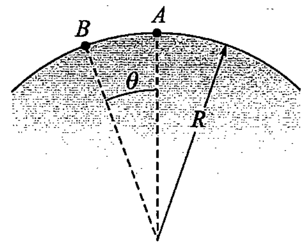
۷۲ دو قله‌ی پوشیده از برف به ارتفاع‌های $H =$ ۸۵۰m و $h =$ ۷۵۰m در دوطرف دره‌ای قرار گرفته‌اند. یک پیست اسکی به‌طول ۳/۲km و شیب متوسط $\theta =$ ۳۰° از نوک قله‌ی بلندتر تا نوک قله‌ی کوتاه‌تر کشیده شده است (شکل ۸-۶۱). (الف) اسکی‌بازی ازحالت سکون از روی قله‌ی بلندتر شروع به‌حرکت می‌کند. اگر او بدون استفاده کردن از چوب دستی حرکت کند، با چه تندی‌ای به بالای قله‌ی کوتاه‌تر می‌رسد؟ از اصطکاک چشم‌پوشی کنید. (ب) ضریب اصطکاک‌جنبشی میان برف‌و اسکی‌ها، به تقریب، چقدر باید باشد تا اسکی‌باز درست دربالای قله‌ی کوتاه‌ترمتوقف شود؟



شکل ۸-۶۱ مسئله‌ی ۷۲.

۷۳ دمای یک مکعب پلاستیکی هنگامی که بر اثر نیروی افقی ۱۵N با تندی ثابت به اندازه‌ی ۳/۰m روی سطحی هُل داده می‌شود، پایشگری می‌شود. این پایشگری نشان می‌دهد که انرژی گرمایی مکعب به اندازه‌ی ۲۰J افزایش می‌یابد. افزایش انرژی گرمایی سطحی که مکعب روی آن می‌لغزد، چقدر است؟

۷۴ اسکی‌بازی به وزن ۶۰۰N از تپه‌ای دایره‌ای بی‌اصطکاک به شعاع $R =$ ۲۰m بالا می‌رود (شکل ۸-۶۲). فرض کنید که اثرهای مقاومت هوا روی اسکی‌باز ناچیز است. اسکی‌باز هنگام بالا رفتن از تپه تحت زاویه‌ی $\theta =$ ۲۰° دارای تندی ۸/۰m/s در نقطه‌ی B است. (الف) تندی او در نوک تپه (نقطه‌ی A) بدون استفاده کردن از چوب دستی چقدر است؟ (ب) تندی کمینه‌ی او در نقطه‌ی B چقدر باید باشد تا او بازهم بتواند به بالای تپه برسد؟ (پ) اگر وزن اسکی‌باز به جای ۶۰۰N برابر با ۷۰۰N باشد، بزرگی پاسخ‌های این دو پرسش افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟



شکل ۸-۶۲ مسئله‌ی ۷۴.

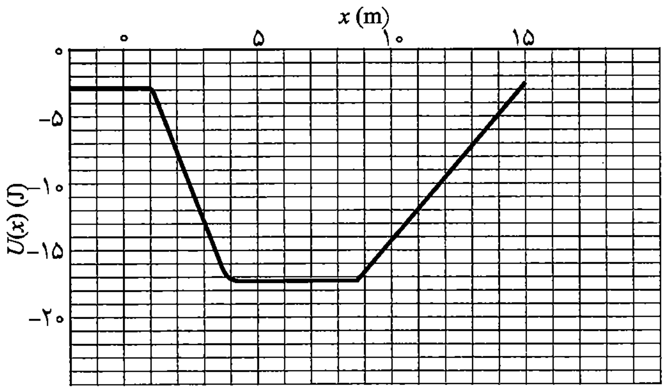
۷۵ برای ساختن یک آونگ گلوله‌ای ۰٫۰۹۲ کیلوگرمی به یک سر میله‌ای به طول ۰٫۶۲m و جرم ناچیز وصل شده و سر دیگر میله روی محور چرخشگاهی سوار شده است. میله را می‌چرخانیم تا به‌صورت قائم قرار گیرد و سپس آن را از حال سکون رها می‌کنیم تا به سمت پایین حرکت کند و به دور محور تاب بخورد. وقتی گلوله به پایین‌ترین نقطه‌ی مسیر خود می‌رسد، (الف) تندی آن و (ب) نیروی کشش در میله چقدر است؟ آنگاه، میله را می‌چرخانیم تا به صورت افقی قرار گیرد و دوباره آن را از حال سکون رها می‌کنیم. (پ) در چه زاویه‌ای نسبت به راستای قائم نیروی کشش در میله برابر با وزن گلوله می‌شود؟ (ت) اگر جرم گلوله را افزایش دهیم، آیا بزرگی پاسخ قسمت (پ) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

۷۶ ذره‌ای را با وارد کردن یک نیروی خارجی ابتدا از $x =$ ۱٫۰ m تا $x =$ ۴٫۰ m به برون‌سو حرکت می‌دهیم و سپس آن را رو به درون به $x =$ ۱٫۰ m برمی‌گردانیم. این نیرو، که در راستای محور x وارد می‌شود برای رفتن برون‌سو و برگشتن به درون‌سو می‌تواند مقادیر متفاوتی داشته باشد. در جدول زیر مقادیر مربوط به چهار حالت نیرو (برحسب نیوتون) نشان داده شده است، که در آن x برحسب متر است:

	رفت (برون‌سو)	برگشت (درون‌سو)
(الف)	+۳٫۰	−۳٫۰
(ب)	+۵٫۰	+۵٫۰
(پ)	+۲٫۰x	−۲٫۰x
(ت)	+۳٫۰x^2	+۳٫۰x^2

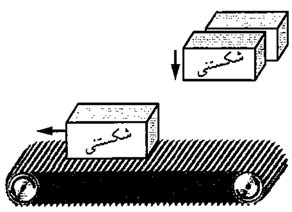
کار خالص انجام شده توسط نیروی خارجی روی ذره را در هر یک ازحالت‌ها ***برای حرکت رفت و برگشت*** پیدا کنید. (ث) در کدام حالت، در صورت وجود، نیروی خارجی پایستار است؟

۷۷ نیروی پایستار $F(x)$ به ذره‌ای به جرم ۲٫۰kg، که در راستای محور x حرکت می‌کند، وارد می‌شود. نمودار انرژی پتانسیل $U(x)$ وابسته به نیروی $F(x)$ در شکل ۸-۶۳، رسم شده است. وقتی ذره در مکان $x =$ ۲٫۰ m قرار دارد، سرعتش ۱٫۵m/s− است. (الف) بزرگی و (ب) جهت $F(x)$ در این مکان چیست؟ ذره در میان چه مکان‌هایی (پ) در سمت چپ و (ت) در سمت راست، حرکت می‌کند؟ (ث) تندی ذره در مکان $x =$ ۷٫۰ m چقدر است؟



شکل ۸-۶۳ مسئله‌ی ۷۷.

۷۸ در کارخانه‌ای صندوق‌های ۳۰۰ کیلوگرمی از یک ماشین بسته‌بندی به طور قائم بر روی تسمه نقاله‌ای که با تندی ۱٫۲۰m/s حرکت می‌کند، می‌افتند (شکل ۸-۶۴). (موتوری تندی تسمه را ثابت نگه می‌دارد). ضریب اصطکاک جنبشی میان تسمه و صندوق ۰٫۴۰۰ است. پس از مدت کوتاهی، لغزیدن صندوق‌ها روی تسمه پایان می‌یابد و صندوق به همراه تسمه حرکت می‌کند. در دوره‌ی زمانی‌ای که طی آن صندوق نسبت به تسمه به حالت سکون می‌سد، (الف) انرژی جنبشی داده شده به صندوق، (ب) بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی وارد شده به

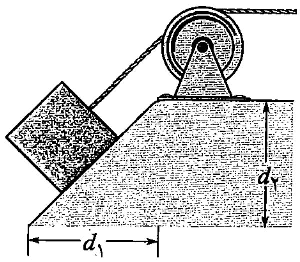


شکل ۸-۶۴ مسئله‌ی ۷۸.

صندوق و (پ) انرژی تولید شده توسط موتور را، در دستگاه مختصات ساکن نسبت به کارخانه، حساب کنید. (ت) توضیح دهید چرا پاسخ‌های (الف) و (پ) متفاوت‌اند.

۷۹ خودرویی به جرم ۱۵۰۰kg با تندی ۳۰km/h از جاده‌ی شیب‌داری با زاویه‌ی شیب ۵٫۰ درجه شروع به لغزیدن به پایین می‌کند. موتور خاموش است و تنها نیروهای وارد شده به خودرو نیروی برایند اصطکاک ناشی از جاده و نیروی گرانشی هستند. تندی خودرو پس از پیمودن مسافت ۵۰m بر روی جاده ۴۰km/h است. (الف) چقدر از انرژی مکانیکی خودرو به خاطر نیروی اصطکاک خالص کم می‌شود؟ (ب) بزرگی نیروی اصطکاک برایند چیست؟

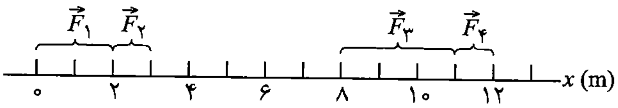
۸۰ در شکل ۸-۶۵، قطعه‌ای گرانیت به جرم ۱۴۰۰kg توسط یک جرثقیل کابلی با تندی ثابت ۱٫۳۴m/s از یک سطح شیب‌دار به بالا کشیده می‌شود. فاصله‌های نشان داده شده عبارت‌اند از $d_1 =$ ۴۰m و $d_2 =$ ۳۰m. ضریب اصطکاک جنبشی میان قطعه و سطح شیب‌دار ۰٫۴۰ است. توان ناشی از نیروی وارد شده به قطعه از سوی کابل چقدر است؟



شکل ۸-۶۵ مسئله‌ی ۸۰.

۸۱ ذره‌ای بر اثر نیروهای پایستار وارد شده فقط می‌تواند در راستای محور x حرکت کند (شکل ۸-۶۶ وجدول زیررا ببینید). این ذره درنقطه‌ی $x =$ ۵٫۰۰m با انرژی جنبشی $K =$ ۱۴٫۰J و انرژی پتانسیل $U =$ ۰ رها می‌شود. اگرحرکت ذره درجهت منفی محور x باشد، (الف) K و (ب) U در نقطه‌ی $x =$ ۲٫۰۰m، (پ) K و (ت) U درنقطه‌ی $x =$ ۰، چیست؟ اگرحرکت ذره در جهت مثبت محور x باشد، (ث) K و (ج) U در نقطه‌ی $x =$ ۱۱٫۰m، (چ) K و (ح) U در نقطه‌ی $x =$ ۱۲٫۰m، و (خ) K و (د) U درنقطه‌ی $x =$ ۱۳٫۰m، چیست؟ (ذ) نمودار $U(x)$ برحسب x را در گستره‌ی $x =$ ۰ تا $x =$ ۱۳٫۰m رسم کنید.

بار دیگر، ذره را از حال سکون در نقطه‌ی $x =$ ۰ رها می‌کنیم. (ر) انرژی جنبشی ذره در نقطه‌ی $x =$ ۵٫۰m چقدر است و (ز) مکان بیشینه‌ی ذره x_{max}، در کجاست؟ (ژ) ذره پس از رسیدن به x_{max} چه می‌کند؟



شکل ۸-۶۶ مسئله‌های ۸۱ و ۸۲.

گستره	نیرو
صفر تا ۲٫۰۰m	$\vec{F}_1 = +(۳٫۰۰\,\mathrm{N})\hat{i}$
۲٫۰۰m تا ۳٫۰۰m	$\vec{F}_2 = +(۵٫۰۰\,\mathrm{N})\hat{i}$
۳٫۰۰m تا ۸٫۰۰m	$F = ۰$
۸٫۰۰m تا ۱۱٫۰۰m	$\vec{F}_3 = -(۴٫۰۰\,\mathrm{N})\hat{i}$
۱۱٫۰۰m تا ۱۲٫۰۰m	$\vec{F}_4 = -(۱٫۰۰\,\mathrm{N})\hat{i}$
۱۲٫۰۰m تا ۱۵٫۰۰m	$F = ۰$

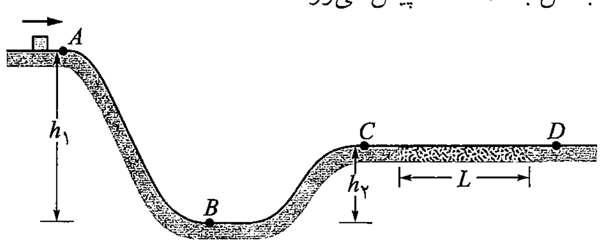
۸۲ برای آرایش نیروها در مسئله‌ی ۸۱، ذره‌ای ۲٫۰۰ کیلوگرمی را در نقطه‌ی $x =$ ۵٫۰۰m با سرعت آغازی ۳٫۴۵m/s در جهت منفی محور x رها می‌کنیم. (الف) اگر این ذره بتواند به نقطه‌ی $x =$ ۰m برسد در آنجا تندی‌اش چیست، و اگر نتواند به آنجا برسد، نقطه‌ی برگشت آن کجاست؟ اکنون، فرض کنید که وقتی ذره با تندی ۳٫۴۵m/s در نقطه‌ی $x =$ ۵٫۰۰m رها می‌شود، در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. (ب) اگر ذره بتواند به نقطه‌ی $x =$ ۱۳٫۰m برسد، در آنجا تندی‌اش چیست، و اگر نتواند به آنجا برسد، نقطه‌ی برگشت ذره کجاست؟

۸۳ جسمی ۱۵ کیلوگرمی با شتاب ۲٫۰m/s² در راستای یک سطح افقی بی‌اصطکاک حرکت می‌کند و تندی‌اش از ۱۰m/s به ۳۰m/s، می‌رسد. (الف) تغییر انرژی مکانیکی جسم و (ب) آهنگ متوسط انرژی داده شده به جسم، چقدر است؟ آهنگ لحظه‌ای انرژی داده شده به جسم وقتی که تندی‌اش (پ) ۱۰m/s و (ت) ۳۰m/s، است، چیست؟

۸۴ نوعی فنر از قانون هوک ***پیروی نمی‌کند***. بزرگی نیرویی که (برحسب نیوتون) فنر هنگام کشیده شدن به اندازه‌ی x (برحسب متر) برخلاف جهت کشش وارد می‌کند، از رابطه‌ی $F = ۵۲٫۸\,x + ۳۸٫۴\,x^{۲}$ به دست می‌آید. (الف) کار لازم برای کشیده شدن فنر به اندازه‌ی $x = ۰٫۵۰۰\,\mathrm{m}$ تا $x = ۱٫۰۰\,\mathrm{m}$ را حساب کنید. (ب) در حالی که یک سر فنر ثابت نگه داشته شده است، سر دیگر را به جسمی به جرم $۲٫۱۷\,\mathrm{kg}$ وصل می‌کنیم و آن را به اندازه‌ی $x = ۱٫۰۰\,\mathrm{m}$ می‌کشیم. اگر جسم از حالت سکون رها شود، تندی‌اش در لحظه‌ای که فنر به اندازه‌ی $x = ۰٫۵۰۰\,\mathrm{m}$ کشیده می‌شود، چقدر است؟ (پ) نیرویی که فنر وارد می‌کند پایستار است یا ناپایستار؟ توضیح دهید.

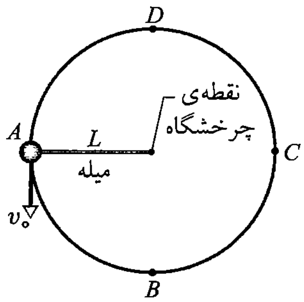
۸۵ در هر ثانیه از آبشاری به ارتفاع $۱۰۰\,\mathrm{m}$ مقدار $۱۲۰۰\,\mathrm{m}^{۳}$ آب فرو می‌ریزد. سه چهارم انرژی جنبشی حاصل از سقوط آب به‌وسیله‌ی یک مولد برق آبی به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. این مولد انرژی الکتریکی را با چه آهنگی تولید می‌کند؟ (جرم یک متر مکعب آب $۱۰۰۰\,\mathrm{kg}$ است).

۸۶ در شکل ۸-۶۷، جسم کوچکی از نقطه‌ی A با تندی $۷٫۰\,\mathrm{m/s}$ به حرکت در می‌آید. مسیر حرکت جسم بی‌اصطکاک است تا آنکه به بخشی با طول $L = ۱۲\,\mathrm{m}$ برسد، که در آنجا ضریب اصطکاک جنبشی $۰٫۷۰$ است. ارتفاع‌های نشان داده شده عبارت‌اند از: $h_۱ = ۶٫۰\,\mathrm{m}$ و $h_۲ = ۲٫۰\,\mathrm{m}$. تندی جسم در (الف) نقطه‌ی B و (ب) نقطه‌ی C، چقدر است؟ (پ) آیا این جسم به نقطه‌ی D می‌رسد؟ اگر می‌رسد، تندی‌اش در آنجا چیست؛ اگر نمی‌رسد، تا چه فاصله‌ای در بخش با اصطکاک پیش می‌رود؟



شکل ۸-۶۷ مسئله‌ی ۸۶.

۸۷ میله‌ای صُلب با جرم ناچیز و به طول L، در یک سرش دارای گلوله‌ای به جرم m است (شکل ۸-۶۸). سر دیگر این میله به یک نقطه‌ی چرخشگاه طوری متصل است که گلوله می‌تواند در روی دایره‌ی قائمی حرکت کند. نخست فرض کنید که در نقطه‌ی چرخشگاه اصطکاکی وجود ندارد. دستگاه را از وضعیت افقی A با تندی آغازی $v_۰$ به پایین‌سو پرتاب می‌کنیم. گلوله درست به نقطه‌ی D می‌رسد و در آنجا متوقف می‌شود. (الف) رابطه‌ی مربوط به $v_۰$ برحسب L، m و g را به دست آورید. (ب) هنگام گذشتن گلوله از نقطه‌ی B نیروی کشش در میله چقدر است؟ (پ) در نقطه‌ی چرخشگاه سنگ‌ریزه‌ی کوچکی قرار داده می‌شود تا اصطکاک افزایش یابد. در این صورت، گلوله پس از پرتاب شدن از نقطه‌ی A به سمت پایین با همان تندی پیشی، درست به نقطه‌ی C می‌رسد. کاهش انرژی مکانیکی در این حرکت چقدر است؟ (ت) کاهش انرژی مکانیکی در مدتی که گلوله پس از انجام دادن چند نوسان، در نهایت، در نقطه‌ی B متوقف می‌شود، چیست؟



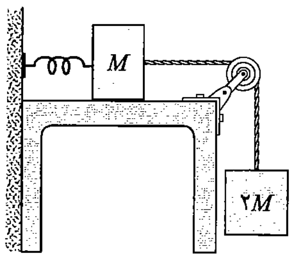
شکل ۸-۶۸ مسئله‌ی ۸۷.

۸۸ یک بالون محتوی آب به جرم $۱٫۵۰\,\mathrm{kg}$ را با تندی آغازی $۳٫۰۰\,\mathrm{m/s}$ یک راست به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. (الف) انرژی جنبشی بالون درست در لحظه‌ی پرتاب شدن چقدر است؟ (ب) در زمان بالا رفتن بالون به طور کامل نیروی گرانشی چقدر کار روی آن انجام می‌دهد؟ (پ) در زمان بالا رفتن بالون به طور کامل تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه بالون ـ زمین چقدر است؟ (ت) اگر انرژی پتانسیل گرانشی را در نقطه‌ی پرتاب صفر بگیریم، مقدار آن در هنگام رسیدن بالون به ارتفاع بیشینه‌ی خود چقدر است؟ (ث) حال اگر انرژی پتانسیل گرانشی را در ارتفاع بیشینه صفر بگیریم، مقدار آن در نقطه‌ی پرتاب چقدر است؟ (ج) ارتفاع بیشینه چقدر است؟

۸۹ یک قوطی نوشابه به جرم $2{,}50\,\mathrm{kg}$ را با تندی آغازی $3{,}00\,\mathrm{m/s}$ از ارتفاع $4{,}00\,\mathrm{m}$ یک راست به پایین‌سو پرتاب می‌کنیم. نیروی پسار هوا روی قوطی ناچیز است. انرژی جنبشی قوطی (الف) در هنگام رسیدن به زمین در پایان سقوط و (ب) در نیمه‌راه رسیدن به زمین، چقدر است؟ (پ) انرژی جنبشی قوطی و (ت) انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه قوطی ـ زمین، $0{,}200\,\mathrm{s}$ پیش از رسیدن قوطی به زمین، چقدر است؟ در حالت اخیر، نقطه‌ی مرجع $y=0$ را روی زمین انتخاب کنید.

۹۰ یک نیروی افقی ثابت تنه‌ی درختی به جرم $50\,\mathrm{kg}$ را با تندی ثابت به اندازه‌ی $6{,}0\,\mathrm{m}$ در روی یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی شیب ۳۰ درجه به بالا حرکت می‌دهد. ضریب اصطکاک جنبشی میان تنه‌ی درخت و سطح شیب‌دار $0{,}20$ است. (الف) کار انجام شده توسط این نیرو و (ب) افزایش انرژی گرمایی تنه‌ی درخت و سطح شیب‌دار، چیست؟

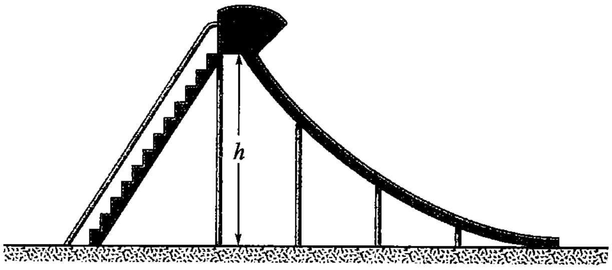
۹۱ دو جسم به جرم‌های $M=2{,}0\,\mathrm{kg}$ و $2M$، به فنری با ثابت فنر $k=200\,\mathrm{N/m}$ وصل شده‌اند و یک سر فنر، مطابق شکل ۸-۶۹، به دیوار ثابت شده است. سطح افقی و قرقره اصطکاک ندارند و جرم قرقره ناچیز است. در حالی که فنر طول حالت آرامش خود را دارد، دو جسم را از حال سکون رها می‌کنیم. (الف) انرژی جنبشی ترکیب دو جسم در حالی که جسم آویخته به اندازه‌ی $0{,}090\,\mathrm{m}$ پایین می‌آید، چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی جسم آویخته هنگام پایین آمدن به اندازه‌ی $0{,}090\,\mathrm{m}$، چقدر است؟ (پ) مسافت پیموده شده‌ی بیشینه توسط جسم آویخته پیش از توقف لحظه‌ای، چقدر است؟



شکل ۸-۶۹ مسئله‌ی ۹۱.

۹۲ جریانی از خاکستر آتش‌فشانی در حال عبور از روی یک زمین افقی به یک سر بالایی بالا شیب ۱۰ درجه می‌رسد. بخش جلویی این جریان پیش از توقف به‌اندازه‌ی $920\,\mathrm{m}$ از شیب بالا می‌رود. فرض کنید که گازهای محبوس در این جریان آن را به سمت بالا بلند و نیروی اصطکاک ناشی از زمین را بی‌اثر می‌کنند؛ هم‌چنین، فرض کنید که انرژی مکانیکی بخش جلویی جریان پایسته است. تندی آغازی بخش جلویی جریان چقدر بوده است؟

۹۳ سُرسره‌ای به شکل کمانی از دایره به شعاع $12\,\mathrm{m}$ است. ارتفاع بیشینه‌ی این سُرسره $h=4{,}0\,\mathrm{m}$ و سطح زمین بر دایره مماس است (شکل ۸-۷۰). کودکی به جرم $25\,\mathrm{kg}$ از حال سکون از بالای سُرسره شروع به لغزیدن می‌کند و تندی‌اش در پایین سُرسره $6{,}2\,\mathrm{m/s}$ است. (الف) طول سُرسره چقدر است؟ (ب) در طی این مسافت نیروی اصطکاک متوسط وارد شده به کودک چقدر است؟ اگر به جای سطح زمین، یک خط قائم گذرنده از ***بالای سُرسره*** بر دایره مماس باشد، (پ) طول سُرسره و (ت) نیروی اصطکاک متوسط وارد شده به کودک، چقدر است؟



شکل ۸-۷۰ مسئله‌ی ۹۳.

۹۴ کشتی مجلل ***ملکه الیزابت ۲***، که دارای یک نیروگاه برق دیزلی با توان بیشینه‌ی $92\,\mathrm{MW}$ است، با تندی ثابت $32{,}5$ گره حرکت می‌کند. نیروی پیش‌سوی وارد شده به کشتی در این تندی چقدر است؟ (1 گره $=1{,}852\,\mathrm{km/h}$)

۹۵ کارگر کارخانه‌ای صندوقی به جرم $180\,\mathrm{kg}$ را که به حال سکون در بالای شیب‌راهه‌ای به طول $3{,}7\,\mathrm{m}$ و زاویه‌ی شیب ۳۹ درجه نسبت به راستای افقی نگه داشته شده است، ناگهان رها می‌کند. ضریب اصطکاک جنبشی میان صندوق و شیب‌راهه و نیز میان صندوق و کف کارخانه $0{,}28$ است. (الف) تندی حرکت صندوق در موقع رسیدن به پایین شیب‌راهه چقدر است؟ (ب) صندوق تا چه مسافتی بر روی کف کارخانه

می‌لغزد؟ (فرض کنید که انرژی جنبشی صندوق در هنگام انتقال از شیب‌راهه به کف کارخانه تغییر نمی‌کند). (پ) اگر جرم صندوق نصف شود، آیا بزرگی پاسخ‌های قسمت‌های (الف) و (ب) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند؟

۹۶ اگر یک بازیکن بیس‌بال به جرم $۷۰\,kg$، با سُر خوردن با تندی آغازی $۱۰\,m/s$ گوی را درست در حین برخورد به زمین برباید، (الف) کاهش انرژی جنبشی بازیکن و (ب) افزایش انرژی گرمایی بدن بازیکن و زمین در مدتی که او سُر می‌خورد، چقدر است؟

۹۷ یک دانه‌ی موز به جرم $۰/۵۰\,kg$ با تندی آغازی $۴/۰۰\,m/s$ یک راست به بالاسو پرتاب می‌شود و به ارتفاع بیشینه‌ی $۰/۸۰\,m$ می‌رسد. در حین بالا رفتن موز نیروی پَسار هوا در انرژی مکانیکی دستگاه موز ـ زمین چه تغییری ایجاد می‌کند؟

۹۸ یک ابزار فلزی با نگهداشته شدن در مقابل کناره‌ی چرخ ماشین چاقو تیزکنی با نیروی $۱۸۰\,N$، تیز می‌شود. نیروهای اصطکاک بین کناره‌ی چرخ و ابزار باعث می‌شوند که قطعه‌های ریزی از ابزار به بیرون پرتاب شوند. چرخ دارای شعاع $۲۰/۰\,cm$ است و با سرعت زاویه‌ای $۲/۵۰\,rev/s$ می‌چرخد. ضریب اصطکاک جنبشی میان چرخ و ابزار $۰/۳۲۰$ است. انرژی با چه آهنگی از موتور راه‌انداز ماشین به انرژی گرمایی چرخ و ابزار و انرژی جنبشی قطعه‌های ریز پرتاب شده منتقل می‌شود؟

۹۹ شناگری با تندی متوسط $۰/۲۲\,m/s$ در آب حرکت می‌کند. نیروی متوسط پسار آب $۱۱۰\,N$ است. توان متوسط مورد نیاز شناگر چقدر است؟

۱۰۰ وزن یک خودرو با سرنشینان آن $۱۶۴۰۰\,N$ است. این خودرو در حال حرکت با تندی $۱۱۳\,km/h$ ترمز می‌کند تا متوقف شود. بزرگی نیروی اصطکاک وارد شده به چرخ‌ها از سوی جاده $۸۲۳۰\,N$ است. مسافت پیموده شده تا توقف خودرو را پیدا کنید.

۱۰۱ گلوله‌ای به جرم $۰/۶۳\,kg$ با تندی آغازی $۱۴\,m/s$ یک راست به بالاسو پرتاب می‌شود و به ارتفاع بیشینه‌ی $۸/۱\,m$ می‌رسد. در حین بالا رفتن گلوله تا رسیدن به ارتفاع بیشینه، تغییر انرژی مکانیکی دستگاه گلوله ـ زمین چقدر است؟

۱۰۲ ارتفاع قله‌ی اورست[1] از سطح دریا $۸۸۵۰\,m$ است. (الف) کوه‌نوردی به جرم $۹۰\,kg$ برای صعود کردن به قله از سطح دریا در برابر نیروی گرانشی وارد شده به خودش چقدر انرژی باید صرف کند؟ (ب) این انرژی با خوردن چند تخته شکلات تأمین می‌شود؟ انرژی هم‌ارز هر تخته شکلات $۱/۲۵\,MJ$ است پاسخ این مسئله باید نشان دهد که کار انجام شده در برابر نیروی گرانشی تنها بخش کوچکی از انرژی صرف شده در بالا رفتن از کوه است.

۱۰۳ یک دونده‌ی سرعتی به وزن $۶۷۰\,N$ مسافت $۷/۰\,m$ اول مسیر مسابقه را با شروع کردن از حال سکون و با شتاب یکنواخت، در مدت $۱/۶$ ثانیه می‌پیماید. (الف) تندی و (ب) انرژی جنبشی دونده در پایان $۱/۶$ ثانیه چقدر است؟ (پ) دونده در این مدت $۱/۶$ ثانیه چه توان متوسطی را تولید می‌کند؟

۱۰۴ نیروی پایستاری به معادله‌ی $F = -۳/۰x - ۵/۰x^۲$، که در آن F برحسب نیوتون و x برحسب متر است، به شیئی ۲۰ کیلوگرمی وارد می‌شود. انرژی پتانسیل وابسته به این نیرو را در نقطه‌ی $x = ۰$ صفر بگیرید. (الف) انرژی پتانسیل دستگاه وابسته به این نیرو وقتی که جسم در نقطه‌ی $x = ۲/۰\,m$ قرار دارد، چقدر است؟ (ب) اگر جسم دارای تندی $۴/۰\,m/s$ در جهت منفی محور x در نقطه‌ی $x = ۵/۰\,m$ باشد، تندی‌اش در هنگام عبور از مبداء چقدر است؟ اگر انرژی پتانسیل دستگاه در نقطه‌ی $x = ۰$ برابر با $-۸/۰\,J$ در نظر گرفته شود، پاسخ‌های قسمت‌های (الف) و (ب) چه خواهند بود؟

۱۰۵ ماشینی تنه‌ی درختی به جرم $۴۰\,kg$ را با سرعت ثابت در روی شیب‌راهه‌ای با زاویه‌ی شیب ۴۰ درجه به اندازه‌ی $۲/۰\,m$ بالا می‌کشد و نیروی ماشین موازی با سطح شیب‌راهه است. ضریب اصطکاک جنبشی میان تنه‌ی درخت و شیب‌راهه $۰/۴۰$ است. (الف) کار انجام شده روی تنه‌ی درخت توسط نیروی ماشین و (ب) افزایش انرژی گرمایی تنه‌ی درخت و سطح شیب‌راهه، چقدر است؟

۱۰۶ ثابت نیروی فنر یک تفنگ فنری بچگانه $۷۰۰\,N/m$ است. برای پرتاب کردن یک گلوله با این تفنگ نخست فنر را متراکم

1. Everest

می‌کنند و سپس گلوله را بر روی آن قرار می‌دهند. با فشار دادن ماشه‌ی تفنگ فنر رها می‌شود و گلوله را در درون لوله به جلو می‌راند. گلوله هنگام خارج شدن از دهانه‌ی لوله‌ی تفنگ از فنر جدا می‌شود. تفنگ تحت زاویه‌ی ۳۰ درجه نسبت به افق به بالاسو گرفته می‌شود و گلوله‌ای به جرم ۵۷ گرم پرتاب می‌کند، که به ارتفاع بیشینه‌ی ۱٫۸۳ m بالای دهانه می‌رسد. نیروی پسار هوا روی گلوله را ناچیز فرض کنید. (الف) فنر گلوله را با چه تندی‌ای پرتاب می‌کند؟ (ب) با این فرض که اصطکاک میان گلوله و لوله‌ی تفنگ ناچیز باشد، مقدار تراکم آغازی فنر را پیدا کنید.

۱۰۷ تنها نیروی وارد شده به یک ذره نیروی پایستار $\vec{F}$ است. اگر این ذره در نقطه‌ی A باشد، انرژی پتانسیل دستگاه وابسته به $\vec{F}$ و ذره ۴۰ J است. اگر ذره از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B حرکت کند، کار انجام شده توسط $\vec{F}$ روی ذره ۲۵ J+ است. انرژی پتانسیل دستگاه شامل ذره در نقطه‌ی B چقدر است؟

۱۰۸ در سال ۱۹۸۱/۱۳۶۰، دانیل گودوین[1] با استفاده کردن از فنجان‌های مکشی و گیره‌های فلزی از ***نمای بیرونی*** ساختمان سیرز[2] در شیکاگو تا ارتفاع ۴۴۳ متر بالا رفت. (الف) جرم او را به تقریب در نظر بگیرید و سپس مقدار انرژی‌ای را که او از انرژی زیست مکانیکی (درونی) خود به انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه زمین ـ گودوین تبدیل کرده است تا بتواند خود را تا آن ارتفاع بالا ببرد، حساب کنید. (ب) اگر او، به جای این کار، از پله‌های درون ساختمان (تا همان ارتفاع) بالا می‌رفت، چه مقدار انرژی را باید تبدیل می‌کرد؟

۱۰۹ سیرک‌بازی به‌جرم ۶۰٫۰ kg از بالای تیری به‌ارتفاع ۴٫۰۰ m از حال سکون به پایین سُر می‌خورد. انرژی جنبشی سیرک باز در هنگام رسیدن به کف زمین در حالتی که نیروی اصطکاک میان او و تیر (الف) ناچیز است (که در نتیجه او آسیب خواهد دید) و (ب) دارای بزرگی ۵۰۰ N است، چیست؟

۱۱۰ جسمی به جرم ۵٫۰ kg را با تندی ۵٫۰ m/s در طول یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی شیب ۳۰ درجه نسبت به افق به بالا پرتاب می‌کنیم. جسم در این حالت‌ها بر روی سطح شیب‌دار چه مسافتی می‌پیماید، (الف) سطح بی‌اصطکاک است و (ب) ضریب اصطکاک جنبشی میان جسم و سطح ۰٫۴۰ است؟ (پ) در حالت اخیر، افزایش انرژی گرمایی جسم و سطح در حین بالا رفتن جسم چقدر است؟ (ت) اگر جسم با وجود نیروی اصطکاک به پایین برگردد تندی‌اش در هنگام رسیدن به نقطه‌ی پرتاب اولی چقدر است؟

۱۱۱ پرتابه‌ای به جرم ۹٫۴۰ kg به طور قائم به بالاسو پرتاب می‌شود. در حین بالا رفتن پرتابه نیروی پَسار هوا انرژی مکانیکی دستگاه پرتابه ـ زمین را به اندازه‌ی ۶۸٫۰ kJ کاهش می‌دهد. اگر نیروی پسار هوا ناچیز می‌بود پرتابه چه مقدار بالاتر می‌رفت؟

۱۱۲ مردی به جرم ۷۰٫۰ kg، که از پنجره‌ی ساختمانی به پایین می‌پرد، درون یک تور نجات واقع در ۱۱٫۰ m پایین‌تر از پنجره فرود می‌آید. وقتی که او تور نجات را به اندازه‌ی ۱٫۵۰ m به پایین می‌کشد در یک لحظه متوقف می‌شود. با این فرض که در این فرایند انرژی مکانیکی پایسته است و تور مانند یک فنر آرمانی عمل می‌کند، انرژی پتانسیل کشسانی تور را در هنگام کشیده شدن به اندازه‌ی ۱٫۵۰ m پیدا کنید.

۱۱۳ گلوله‌ای به جرم ۳۰ گرم که با سرعت افقی ۵۰۰ m/s حرکت می‌کند، پس از پیمودن مسافت ۱۲ cm در درون یک دیوار متوقف می‌شود. (الف) تغییر انرژی مکانیکی گلوله چقدر است؟ (ب) بزرگی نیروی متوسطی که از سوی دیوار به گلوله وارد می‌شود، چیست؟

۱۱۴ خودرویی به جرم ۱۵۰۰ kg از حال سکون روی جاده‌ای افقی شروع به حرکت می‌کند و در مدت ۳۰ s به تندی ۷۲ km/h می‌رسد. (الف) انرژی جنبشی خودرو در پایان این ۳۰ s چقدر است؟ (ب) توان متوسط لازم برای خودرو در این بازه‌ی زمانی ۳۰ s چقدر است؟ (پ) با فرض ثابت بودن شتاب، توان لحظه‌ای در پایان این بازه‌ی زمانی ۳۰ s چیست؟

۱۱۵ گلوله‌ای برفی به جرم ۱٫۵۰ kg با تندی آغازی ۲۰٫۰ m/s تحت زاویه‌ی ۳۴٫۰ درجه نسبت به افق به بالاسو پرتاب می‌شود. (الف) انرژی جنبشی آغازی گلوله چقدر است؟ (ب) در مدتی که گلوله‌ی برفی از نقطه‌ی پرتاب تا ارتفاع بیشینه حرکت می‌کند انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلوله‌ی برفی ـ زمین

---

1. Daniel Goodwin 2. Sears Building

چقدر تغییر می‌کند؟ (پ) ارتفاع بیشینه چقدر است؟

۱۱۶ یک چترباز شیرجه‌رو در هوا، که $68\,\mathrm{kg}$ جرم دارد، با تندی حد ثابت $59\,\mathrm{m/s}$ سقوط می‌کند. (الف) انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه زمین ـ چترباز با چه آهنگی کاهش می‌یابد؟ (ب) انرژی مکانیکی این دستگاه با چه آهنگی کاهش می‌یابد؟

۱۱۷ جسمی به جرم $20\,\mathrm{kg}$ بر روی یک سطح افقی به فنری افقی با ثابت فنر $k = 4{,}0\,\mathrm{kN/m}$ وصل شده است. جسم را به گونه‌ای به سمت راست می‌کشیم که فنر نسبت به طول آرامش خود به اندازه‌ی $10\,\mathrm{cm}$ کشیده شود، و سپس آن را از حال سکون رها می‌کنیم. بزرگی نیروی اصطکاک میان جسم لغزان و سطح $80\,\mathrm{N}$ است. (الف) انرژی‌جنبشی جسم پس از پیمودن $2{,}0\,\mathrm{cm}$ نسبت به نقطه‌ی رها شدن، چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی جسم در هنگام نخستین برگشت به نقطه‌ای که فنر دارای طول آرامش است، چیست؟ انرژی جنبشی بیشینه‌ی کسب‌شده توسط جسم در هنگام لغزیدن از نقطه‌ی رها شدن تا نقطه‌ای که فنر دارای طول آرامش است، چقدر است؟

۱۱۸ مقاومت در برابر حرکت یک خودرو شامل اصطکاک جاده، که، به تقریب، مستقل ازتندی است، و نیروی پَسار هوا، که با مجذور تندی متناسب است، می‌شود. برای خودرویی با وزن $12000\,\mathrm{N}$ نیروی مقاومت کل F با رابطه‌ی $F = 300 + 1{,}8v^2$ داده می‌شود، که F برحسب نیوتون و v برحسب متر بر ثانیه است. توان لازم (برحسب قوه اسب) در تندی $80\,\mathrm{km/h}$ را برای آنکه به خودرو شتاب $0{,}92\,\mathrm{m/s^2}$ بدهد، حساب کنید.

۱۱۹ گلوله‌ای به جرم ۵۰ گرم با سرعت آغازی $8{,}0\,\mathrm{m/s}$ تحت زاویه‌ی ۳۰ درجه‌ی بالای افق از پنجره‌ای پرتاب می‌شود. با استفاده کردن از روش‌های انرژی، مطلوب است تعیین (الف) انرژی جنبشی گلوله در بالاترین نقطه‌ی مسیر پرواز و (ب) تندی گلوله وقتی که به $3{,}0\,\mathrm{m}$ پایین‌تر از پنجره رسیده است. آیا پاسخ قسمت (ب) به (پ) جرم گلوله یا (ت) زاویه‌ی پرتاب آغازی، بستگی دارد؟

۱۲۰ فنری با ثابت نیروی $3200\,\mathrm{N/m}$ در آغاز چنان کشیده شده که دارای انرژی پتانسیل کشسانی $1{,}44\,\mathrm{J}$ شده است (برای فنر در حال آرامش، داریم $U = 0$). اگر کشیدگی آغازی به (الف) یک کشیدگی $2{,}0\,\mathrm{cm}$، (ب) یک تراکم $2{,}0\,\mathrm{cm}$ و (پ) یک تراکم $4{,}0\,\mathrm{cm}$ تغییر کند، ΔU چقدر خواهد شد؟

۱۲۱ لوکوموتیوی با قابلیت توان $1{,}5\,\mathrm{MW}$ می‌تواند در مدت $6{,}0\,\mathrm{min}$ تندی یک قطار را از $10\,\mathrm{m/s}$ به $25\,\mathrm{m/s}$ برساند. (الف) جرم قطار را حساب کنید. (ب) تندی قطار و (پ) نیروی شتاب دهنده‌ی قطار برحسب زمان (به ثانیه) در بازه‌ی زمانی $6{,}0\,\mathrm{min}$ را پیدا کنید. (ت) مسافت پیموده شده توسط قطار را در این بازه‌ی زمانی به دست آورید.

۱۲۲ یک قرص شافل بورد[1] به جرم $0{,}42\,\mathrm{kg}$ در آغاز ساکن است و بازیکن با ضربه‌ی یک چوب و با شتاب ثابت تندی آن را به $4{,}2\,\mathrm{m/s}$ می‌رساند. عمل شتاب دادن در طول مسافت $2{,}0\,\mathrm{m}$ صورت می‌گیرد و در پایان آن تماس چوب با قرص قطع می‌شود. پس از آن، قرص تا پیش از توقف به اندازه‌ی مسافت اضافی $12\,\mathrm{m}$ دیگر می‌لغزد. فرض کنید زمین بازی تراز است و نیروی اصطکاک وارد شده به قرص ثابت است. افزایش انرژی گرمایی دستگاه قرص ـ زمین بازی (الف) در $12\,\mathrm{m}$ اضافی و (ب) در کل مسافت $14\,\mathrm{m}$، چقدر است؟ (پ) چقدر کار توسط چوب روی قرص انجام می‌شود؟

۱۲۳ آب از آبشاری به ارتفاع $15\,\mathrm{m}$ فرو می‌ریزد. تندی آب در شروع شدن سقوط $3{,}2\,\mathrm{m/s}$ و در پایان سقوط $13\,\mathrm{m/s}$ است. چند درصد از انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه آب ـ زمین به انرژی جنبشی آب در حال سقوط تبدیل می‌شود؟ (***راهنمایی:*** جرم آب در حال سقوط را، مثلاً، $10\,\mathrm{kg}$ در نظر بگیرید).

۱۲۴ بزرگی نیروی گرانشی میان ذره‌ای به جرم m_1، و ذره‌ی دیگری به جرم m_2 برابر است با

$$F(x) = G\frac{m_1 m_2}{x^2}$$

که در آن G ثابت گرانش و x فاصله‌ی میان دو ذره است. (الف) تابع انرژی پتانسیل متناظر $U(x)$، چیست؟ فرض کنید به ازای $x \to \infty$، داریم $U(x) \to 0$ و x مثبت است. (ب) برای افزایش یافتن فاصله‌ی دو ذره از $x = x_1$ تا $x = x_1 + d$ چقدر کار لازم است؟

۱۲۵ از آبشار نیاگارا در هر ثانیه از ارتفاع ۵۰ متری به طور تقریبی $5{,}5 \times 10^6\,\mathrm{kg}$ آب فرو می‌ریزد. (الف) کاهش انرژی پتانسیل

1. shuffleboard

گرانشی دستگاه آب ـ زمین در هر ثانیه چقدر است؟ (ب) اگر همه‌ی این انرژی بتواند به انرژی الکتریکی تبدیل شود (که نمی‌تواند)، آهنگ انرژی الکتریکی تولید شده چقدر است؟ (جرم $1 m^3$ آب $1000 kg$ است). (پ) اگر بهای انرژی الکتریکی $300 / kW.h$ ریال، باشد، درآمد سالانه‌ی حاصل چه خواهد بود؟

۱۲۶ برای ساختن یک آونگ، گلوله‌ای به جرم $300 g$ را به یک سر ریسمانی به طول $1/4 m$ و جرم ناچیز وصل می‌کنیم (سر دیگر ریسمان ثابت است). این گلوله را به یک طرف می‌کشیم تا با راستای قائم زاویه‌ی $30/0$ درجه تشکیل دهد؛ آنگاه (در حالی که ریسمان به حالت کشیده شده است) گلوله را از حال سکون رها می‌کنیم. مطلوب است تعیین (الف) تندی گلوله در هنگامی که زاویه‌ی ریسمان با راستای قائم $20/0$ درجه است و (ب) تندی بیشینه‌ی گلوله. (پ) وقتی تندی گلوله به اندازه‌ی یک سوم مقدار بیشینه است، زاویه‌ی ریسمان با راستای قائم چیست؟

۱۲۷ در عملیات سیرک بازی، بازیگری به جرم $60 kg$ از یک توپ با تندی آغازی $16 m/s$ تحت یک زاویه‌ی نامعلوم نسبت به بالای افق پرتاب می‌شود. اندکی بعد، بازیگر روی یک تور واقع در ارتفاع $3/9 m$ بالاتر از مکان آغازی توپ فرود می‌آید. بدون در نظر گرفتن نیروی پَسار هوا، انرژی جنبشی بازیگر در لحظه‌ی فرود آمدن روی تور چیست؟

۱۲۸ آتش‌نشانی به جرم $70 kg$ از حال سکون از تیر قائمی به ارتفاع $4/3 m$ به پایین سُر می‌خورد. (الف) اگر آتش‌نشان تیر را به صورت شُل بغل کرده باشد، به گونه‌ای که نیروی اصطکاک تیر ناچیز فرض شود، تندی او درست پیش از رسیدن به زمین چقدر است؟ (ب) اگر آتش‌نشان در هنگام سُر خوردن به پایین، تیر را محکم‌تر بغل کند، به گونه‌ای که نیروی اصطکاک متوسط وارد شده به او از سوی تیر $500 N$ به بالاسو باشد، تندی او درست پیش از رسیدن به زمین چیست؟

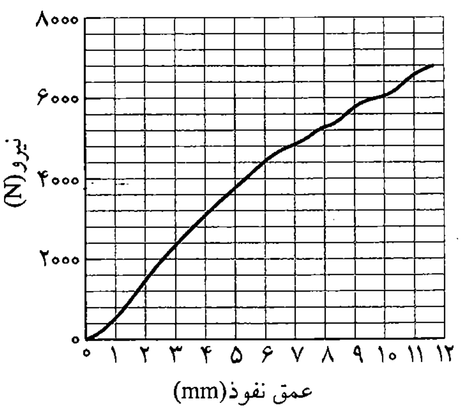
۱۲۹ مساحت ایالت متحد امریکا در حدود $8 \times 10^6 km^2$ و ارتفاع متوسط آن (از سطح دریا) در حدود $500 m$ است. میزان بارش سالانه‌ی باران به طور متوسط $75 cm$ است. از این بارش کسری به اندازه‌ی $\frac{2}{3}$ بر اثر تبخیر به جوّ برمی‌گردد، و بقیه سرانجام، به اقیانوس وارد می‌شود. اگر کاهش انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه آب ـ زمین وابسته به آب وارد شده را بتوان به انرژی الکتریکی تبدیل کرد، توان متوسط چه خواهد بود؟ (جرم $1 m^3$ آب $1000 kg$ است)

۱۳۰ فنری با ثابت نیروی $k = 200 N/m$ به طور قائم از سر بالایی‌اش، که به سقف وصل شده است آویخته می‌شود و سر پایینی‌اش در مکان $y = 0$ واقع است. جسمی به وزن $20 N$ را که به پایین فنر وصل شده است برای لحظه‌ای ساکن نگه می‌داریم و سپس رها می‌کنیم. (الف) انرژی جنبشی K، (ب) تغییر انرژی پتانسیل گرانشی ΔU_g (نسبت به مقدار آغازی) و (پ) تغییر انرژی پتانسیل کشسانی ΔU_e دستگاه فنر ـ جسم در لحظه‌ای که جسم در مکان $y = -5/0 cm$ قرار دارد، چیست؟ مطلوب است تعیین (ت) K، (ث) ΔU_g و (ج) ΔU_e، وقتی که داریم $y = -10 cm$، (چ) K، (ح) ΔU_g، و (خ) ΔU_e، وقتی که داریم $y = -15 cm$، و (د) K، (ذ) ΔU_g، و (ر) ΔU_e، وقتی که داریم $y = -20 cm$.

۱۳۱ یک سر فنر قائمی را به سقف وصل کنید، به سر دیگر فنر یک عدد کلم ببندید، و سپس کلم را به آرامی پایین بیاورید تا نیروی بالاسوی وارد شده به کلم از سوی فنر با نیروی گرانشی وارد شده به آن متوازن شود. نشان دهید که کاهش انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه کلم ـ زمین مساوی دو برابر انرژی پتانسیل فنر است.

۱۳۲ بیشینه‌ی نیرویی که با یکی از دندان‌های آسیا به شیئی می‌توان وارد کرد، در حدود $750 N$ است. فرض کنید در حال گاز زدن تدریجی یک شاخه‌ی گیاه شیرین بیان کشسان، شاخه‌ی شیرین بیان در مقابل متراکم شدن به وسیله‌ی یکی از دندان‌ها به گونه‌ای فنر مانند، با ثابت فنر $k = 2/5 \times 10^5 N/m$ مقاومت می‌کند. مطلوب است تعیین (الف) مقدار متراکم شدن شاخه‌ی شیرین بیان به وسیله‌ی دندان، (ب) کار انجام شده توسط دندان در حین متراکم شدن شیرین بیان. (پ) نمودار تغییرات بزرگی نیروی دندان برحسب مقدار تراکم را رسم کنید. (ت) اگر با این تراکم یک انرژی پتانسیل وابسته وجود داشته باشد، تغییرات آن

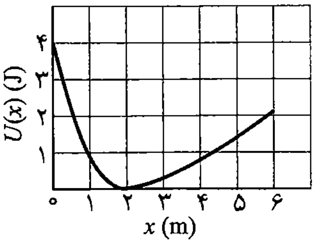
را برحسب مقدار تراکم رسم کنید. در دهه‌ی ۱۳۷۰/۱۹۹۰ استخوان لگن نوعی دایناسور ***سه شاخ***[1] پیدا شد که جای گاز گرفتن در آن مشهود بود. شکل جای دندان نشان می‌داد که این اثر مربوط به دندان‌های دایناسور گوشت‌خوار رکس[2] است. برای بررسی این موضوع، پژوهشگران نمونه‌ای از دندان دایناسور گوشت‌خوار را از برنز و آلومینیوم ساختند و برای متراکم کردن تدریجی آن به استخوان گاو تا عمقی که در استخوان دایناسور سه شاخ مشاهده شده بود، از یک منگنه‌ی آبی استفاده کردند. شکل ۸-۷۱ نمودار نیروی لازم برای نفوذ کردن دندان برحسب عمق نفوذ در یک آزمایش را نشان می‌دهد. چنان‌که می‌بینیم، نیروی لازم برحسب عمق افزایش می‌یابد، زیرا تقریباً هر چه دندان مخروطی در استخوان بیشتر نفوذ می‌کند تماس دندان با استخوان بیشتر می‌شود. (ث) در چنین مقدار نفوذی، چقدر کار توسط منگنه‌ی آبی ـ یعنی بنا به فرض توسط ***دایناسور گوشت‌خوار رکس***، انجام شده است؟ (ج) آیا با این مقدار نفوذ انرژی پتانسیل وابسته‌ای وجود دارد؟ (در این پژوهش، نیروی زیاد در گاز گرفتن و انرژی صرف شده توسط دایناسور گوشت‌خوار نشان می‌دهد که این حیوان طعمه‌خوار بوده است نه مردارخوار).



شکل ۸-۷۱ مسئله‌ی ۱۳۲.

۱۳۳ نیروی پایستار $F(x)$ به ذره‌ای که در راستای محور x حرکت می‌کند، وارد می‌شود. شکل ۸-۷۲ نشان می‌دهد که $U(x)$، انرژی پتانسیل وابسته به نیروی $F(x)$، چگونه با مکان

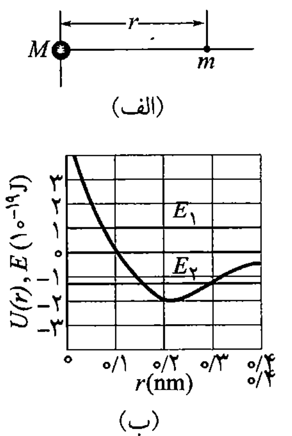
1. Triceratops 2. Tyrannosaurus rex



شکل ۸-۷۲ مسئله‌ی ۱۳۳.

ذره تغییر می‌کند. (الف) نمودار تغییرات $F(x)$ را برای گستره‌ی $0 < x < 6\,\text{m}$ رسم کنید. (ب) انرژی مکانیکی دستگاه E، برابر با $4{,}0\,\text{J}$ است. نمودار تغییرات $K(x)$، انرژی جنبشی ذره را بر روی شکل ۸-۷۲ رسم کنید.

۱۳۴ شکل ۸-۷۳ الف یک مولکول شامل دو اتم با جرم‌های m و M (با شرط $m << M$) و فاصله‌ی جدایی r را نشان می‌دهد. شکل ۸-۷۳ ب نشانگر تغییرات انرژی پتانسیل این مولکول $U(r)$، به صورت تابعی از r است حرکت این اتم‌ها را در حالتی توصیف کنید که (الف) انرژی مکانیکی کل دستگاه دو اتمی E، از صفر بزرگ‌تر (که E_1 است) و (ب) از صفر کوچک‌تر (که E_2 است) باشد. به ازای $E_1 = 1\times10^{-19}\,\text{J}$ و $r = 0{,}3\,\text{nm}$، مطلوب است تعیین (پ) انرژی پتانسیل دستگاه، (ت) انرژی جنبشی کل اتم‌ها و (ث) نیروی وارد شده به هر اتم (بزرگی و جهت). به ازای چه مقدار r، نیرو (ج) دافعه، (چ) جاذبه و (ح) صفر، است؟



شکل ۸-۷۳ مسئله‌ی ۱۳۴.

۱۳۵ مسئله‌ی ۸۳ را تکرار کنید، اما این بار جسم در روی سطح

شیب‌دار بی‌اصطکاک با زاویه‌ی شیب ۵٫۰ درجه نسبت به افق، به سمت بالا شتاب می‌گیرد.

۱۳۶ فنری با ثابت نیروی $k = ۶۲۰\,\mathrm{N/m}$ در راستای قائم قرار گرفته و سر پایینی آن توسط یک سطح افقی نگه داشته شده است. سر بالایی فنر را به‌اندازه ۲۵ cm متراکم می‌کنیم و جسمی به وزن ۵۰ N را بر روی فنر متراکم شده (بدون اتصال) قرار می‌دهیم. سپس این دستگاه را از حال سکون رها می‌کنیم. فرض کنید انرژی پتانسیل گرانشی جسم U_g، در نقطه‌ی رها شدن صفر است $(y = ۰)$ و انرژی جنبشی جسم K، را به ازای y مساوی با (الف) صفر، (ب) ۰٫۰۵۰ m، (پ) ۰٫۱۰ m، (ت) ۰٫۱۵ m و (ث) ۰٫۲۰ m، حساب کنید. هم‌چنین، (ج) این جسم نسبت به نقطه‌ی رها شدن تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

ب

فصل ۹

مرکز جرم و تکانه‌ی خطی

۹-۱ مرکز جرم

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۹-۱ با داشتن مکان‌های چند ذره در راستای محور x، یا در یک صفحه، مکان مرکز جرم ذره‌ها را معین کنید.

۹-۲ محل مرکز جرم یک شیء گسترده‌ی متقارن را با استفاده کردن از تقارن معین کنید.

۹-۳ برای یک شیء گسترده‌ی دو بعدی، یا سه بعدی، با توزیع یکنواخت جرم، مرکز جرم را (الف) با تقسیم کردن شیء به شکل‌های هندسی ساده به طور ذهنی، که هر کدام بتوانند جانشین یک ذره در مرکز خودش بشوند و (ب) با پیدا کردن مرکز جرم آن ذره‌ها، معین کنید.

نکته‌های کلیدی

- مرکز جرم یک دستگاه n ذره‌ای به صورت نقطه‌ای معرفی می‌شود که مختصات آن عبارت‌اند از:

$$x_{com}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad y_{com}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

$$z_{com}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

یا

$$\vec{r}_{com}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

که در آن M جرم کل دستگاه است.

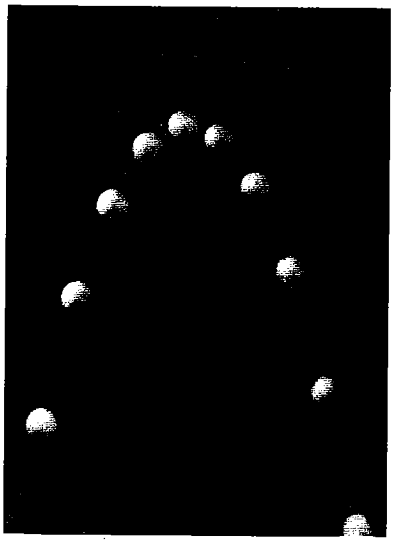
فیزیک در این باره چه می‌گوید؟

هر مهندس مکانیک، که به عنوان یک کارشناس ماهر برای بازسازی صحنه‌ی تصادف جاده‌ای فراخوانده می‌شود، از فیزیک استفاده می‌کند. هر مربی باله، که چگونگی پرش را به هنرآموز خود می‌آموزد، از فیزیک استفاده می‌کند. در واقع، برای تحلیل هر نوع حرکت پیچیده‌ای نیاز

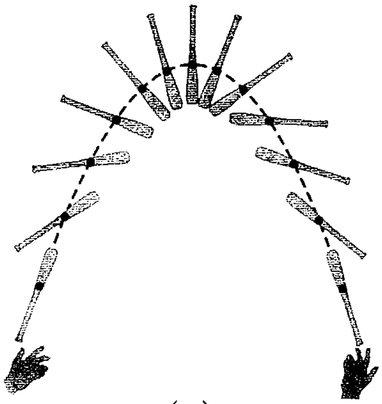
به ساده‌سازی از طریق درک فیزیک آن حرکت داریم. در این فصل، در مورد ساده‌سازی حرکت پیچیده‌ی دستگاه اشیا، مانند یک خودرو، یا یک باله کار (بالرین)، با تعیین نقطه‌ی ویژه‌ای از دستگاه به نام **مرکز جرم** آن دستگاه بحث می‌کنیم.

در اینجا به یک مثال ساده توجه کنید. اگر توپی را بدون چرخش زیاد به هوا پرتاب کنیم (شکل ۹-۱ الف)، حرکتش ساده است ـ همان‌طور که در فصل ۴ بحث شد، این توپ مسیری سهمی شکل را می‌پیماید و آن را می‌توان به عنوان یک ذره در نظر گرفت. اما اگر یک چوب بیس‌بال را به هوا پرتاب کنیم (شکل ۹-۱ ب)، حرکتش در هوا پیچیده است. چون هر بخش از چوب بیس‌بال به گونه‌ای متفاوت حرکت می‌کند، در مسیرهای با شکل‌های مختلف نمی‌توان نشان داد که چوب بیس‌بال به صورت یک ذره است. در اینجا چوب بیس‌بال دستگاهی از ذرات است که هر یک از آن ذرات مسیر ویژه‌ی خود را در هوا دنبال می‌کنند. اما در چوب بیس‌بال نقطه‌ی ویژه‌ای به نام **مرکز جرم** وجود دارد که در یک مسیر سهمی شکل ساده ***حرکت می‌کند*** و بخش‌های دیگر چوب در پیرامون این مرکز جرم حرکت می‌کنند (برای تعیین مکان مرکز جرم، چوب بیس‌بال را روی یک انگشت کشیده‌ی خود به حال توازن نگه دارید؛ مرکز جرم چوب درست در بالای انگشت شما و روی محور مرکزی آن قرار می‌گیرد).

شما نمی‌توانید پرتاب کردن چوب‌های بیس‌بال در هوا را به عنوان یک حرفه در نظر بگیرید، اما مشورت دادن به ورزشکاران پرش طول، یا باله کارها، برای پرش مناسب در هوا را، درباره‌ی چگونگی حرکت دست‌ها و پاهای‌شان یا چرخش نیم‌تنه‌های‌شان، می‌توان یک حرفه تلقی کرد. نقطه‌ی شروع این کار مرکز جرم شخص به خاطر حرکت ساده‌اش است.



(الف)



(ب)

شکل ۹-۱ (الف) توپ پرتاب شده به هوا مسیری سهمی شکل می‌پیماید. (ب) مرکز جرم (خال سیاه) یک چوب بیس‌بال پرتاب شده به هوا نیز مسیری سهمی شکل می‌پیماید، اما تمام نقاط دیگر چوب مسیرهای خمیده‌ی پیچیده‌ای را طی می‌کنند.

مرکز جرم

مرکز جرم (com[1]) دستگاهی از ذرات (مانند یک شخص) را به منظور پیشگویی حرکت ممکن دستگاه تعریف می‌کنیم.

مرکز جرم دستگاهی از ذرات، نقطه‌ای است که در موقع حرکت کردن گویی (۱) تمام جرم دستگاه در آنجا متمرکز شده است و (۲) تمام نیروهای خارجی به آن نقطه اثر می‌کنند.

در این بخش، چگونگی تعیین مکان مرکز جرم دستگاهی از ذرات را مورد بحث قرار می‌دهیم. ابتدا کار را با دستگاهی که تنها چند ذره دارد آغاز می‌کنیم و سپس دستگاهی متشکل از عده‌ی زیادی ذره (یک جسم صُلب، مانند چوب بیس‌بال) را در نظر می‌گیریم. در بخش‌های بعدی این فصل به مطالعه‌ی چگونگی حرکت مرکز جرم دستگاهی که تحت اثر نیروهای خارجی قرار دارد، می‌پردازیم.

1. center of mass (com)

دستگاه‌های ذرات

دستگاه دو ذره‌ای. شکل ۹-۲ الف دو ذره به جرم‌های m_1 و m_2 و به فاصله‌ی d از یکدیگر را نشان می‌دهد. مبداء محور x به طور اختیاری در محل ذره‌ی با جرم m_1 در نظر گرفته شده است. مکان مرکز جرم (com) این دستگاه دو ذره‌ای را به صورت زیر ***تعریف می‌کنیم***

$$x_{com} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d \tag{۹-۱}$$

به عنوان مثال، فرض می‌کنیم $m_2 = 0$. در این صورت، فقط یک ذره به جرم m_1 داریم که مرکز جرمش در محل این ذره است و معادله‌ی ۹-۱ به صورت $x_{com} = 0$، ساده می‌شود. به‌ازای $m_1 = 0$، باز هم فقط یک ذره (به جرم m_2) داریم، و چنان‌که انتظار داریم، $x_{com} = d$. به ازای $m_1 = m_2$ جرم‌های ذره‌ها یکسان و مرکز جرم در وسط فاصله‌ی میان آن‌هاست. در این حالت، چنان‌که انتظار داریم، معادله‌ی ۹-۱ به شکل $x_{com} = \frac{1}{2}d$ ساده می‌شود. سرانجام، معادله‌ی ۹-۱ نشان می‌دهد که اگر m_1 و m_2 هیچ یک صفر نباشند، x_{com} مقداری در میان صفر و d خواهد بود، یعنی مرکز جرم در محلی واقع در میان دو ذره است.

نیازی نیست که مبدأ مختصات را روی یکی از دو ذره قرار دهیم. شکل ۹-۲ ب، یک وضعیت عمومی‌تر را نشان می‌دهد که در آن دستگاه مختصات به چپ‌سو جابه‌جا شده است. در این حالت، مکان مرکز جرم چنین به دست می‌آید

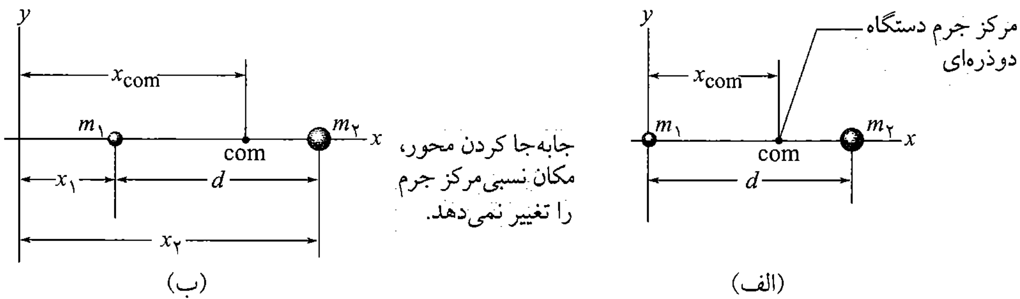
$$x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \tag{۹-۲}$$

توجه کنید که به ازای $x_1 = 0$، x_2 برابر با d و معادله‌ی ۹-۲، چنان‌که باید، به معادله‌ی ۹-۱ تبدیل می‌شود. هم‌چنین، توجه کنید که با وجود جابه‌جا شدن دستگاه مختصات، فاصله‌ی مرکز جرم از ذره‌ها همان فاصله‌ی پیشی است.

معادله‌ی ۹-۲ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$x_{com} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} \tag{۹-۳}$$

که در آن M جرم کل دستگاه است (در اینجا $M = m_1 + m_2$).



شکل ۹-۲ (الف) دو ذره به جرم‌های m_1 و m_2 به فاصله‌ی d از یکدیگر قرار دارند. خال مشخص شده با com مکان مرکز جرم حساب شده از معادله‌ی ۹-۱ را نشان می‌دهد. (ب) همان شکل (الف) است، با این تفاوت که مبداء مختصات از ذره‌ها دورتر شده است. در این حالت، مکان مرکز جرم از معادله‌ی ۹-۲ به دست می‌آید. مکان مرکز جرم (نسبت به ذره‌ها) در هر دو حالت یکی است.

دستگاه چند ذره‌ای. این معادله را می‌توان برای حالت عمومی‌تر، که در آن n ذره در راستای محور x قرار داشته باشند، تعمیم داد. در این حالت، جرم کل $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ است و مکان مرکز جرم چنین به دست می‌آید

$$x_{\text{com}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{M} \Rightarrow$$

$$x_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \qquad (۴\text{–}۹)$$

در اینجا شاخص پایین i تمام مقادیر درست از ۱ تا n را می‌پذیرد.

دستگاه سه بعدی. اگر ذره‌ها در سه بعد توزیع شده باشند، مرکز جرم باید با سه مختصه مشخص شود. با تعمیم دادن معادله‌ی ۹–۴، این مختصات عبارت‌اند از

$$x_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \text{ ،} \quad y_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \text{ و } z_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i \qquad (۵\text{–}۹)$$

مرکز جرم را با زبان برداری نیز می‌توان تعریف کرد. نخست باید یادآوری کرد که مکان یک ذره در مختصات x_i، y_i و z_i با بردار مکان زیر مشخص می‌شود (این بردار از مبدأ به سوی ذره است):

$$\vec{r}_i = x_i \hat{\mathrm{i}} + y_i \hat{\mathrm{j}} + z_i \hat{\mathrm{k}} \qquad (۶\text{–}۹)$$

در اینجا شاخص پایین i معرف ذره است و $\hat{\mathrm{i}}$، $\hat{\mathrm{j}}$ و $\hat{\mathrm{k}}$ بردارهای یکه‌اند، که به ترتیب، در جهت محورهای x، y و z قرار دارند. به همین ترتیب، مکان مرکز جرم دستگاه ذرات با بردار مکان زیر معین می‌شود

$$\vec{r}_{\text{com}} = x_{\text{com}} \hat{\mathrm{i}} + y_{\text{com}} \hat{\mathrm{j}} + z_{\text{com}} \hat{\mathrm{k}} \qquad (۷\text{–}۹)$$

اگر به نمادگذاری فشرده علاقه‌مند هستید، اکنون، سه معادله‌ی نرده‌ای ۹–۵ را می‌توانید با معادله‌ی برداری زیر جانشین کنید

$$\vec{r}_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \qquad (۸\text{–}۹)$$

که در آن M جرم کل دستگاه است. با جانشانی معادله‌های ۹–۶ و ۹–۷ در معادله‌ی ۹–۸ و سپس جدا کردن مؤلفه‌های x، y و z، درستی این معادله را می‌توان امتحان کرد و در نتیجه، رابطه‌های نرده‌ای معادله‌ی ۹–۵ را به دست آورد.

اجسام صُلب

یک شیء عادی، مانند چوب بیس‌بال، شامل عده‌ی بسیار زیادی ذره (اتم) است و به خوبی می‌توان آن را توزیع پیوسته‌ای از ماده در نظر گرفت. در این صورت، «ذرات» همان عنصرهای جرم دیفرانسیلی dm هستند و عبارت مجموع در معادله‌ی ۹–۵ به انتگرال تبدیل و مختصات

مرکز جرم چنین تعریف می‌شود

$$x_{com} = \frac{1}{M}\int x dm \text{ ،} \quad y_{com} = \frac{1}{M}\int y dm \quad \text{و} \quad z_{com} = \frac{1}{M}\int z dm \qquad (۹-۹)$$

که در آن‌ها M جرم شیء است. این انتگرال‌ها اجازه می‌دهند معادله‌ی ۹-۵ را برای عده‌ی بسیار زیادی از ذرات به کار ببریم، وگرنه محاسبات ما سال‌ها طول خواهد کشید.

محاسبه‌ی این انتگرال‌ها برای اشیای معمولی (مانند یک تلویزیون یا یک گاو) بسیار مشکل است. بدین جهت، در اینجا ***تنها اشیای یکنواخت*** را در نظر می‌گیریم. چنین شیئی دارای ***چگالی***، یا جرم یکای حجم، یکنواخت است؛ یعنی چگالی ρ (حرف یونانی رو) برای هر عنصر از شیء و در نتیجه برای تمام آن، یکسان است. با استفاده کردن از معادله‌ی ۱-۸ داریم

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{V} \qquad (۹-۱۰)$$

که در آن dV حجم اشغال شده توسط عنصر جرمی dm، و V حجم کل شیء است. اگر $dm = \frac{M}{V}dV$ از معادله‌ی ۹-۱۰ را در معادله‌ی ۹-۹ قرار دهیم، داریم

$$x_{com} = \frac{1}{V}\int x dV \text{ ،} \quad y_{com} = \frac{1}{V}\int y dV \quad \text{و} \quad z_{com} = \frac{1}{V}\int z dV \qquad (۹-۱۱)$$

کاربرد تقارن به عنوان راهی میان‌بر. اگر شیء یک نقطه، یک خط یا یک صفحه‌ی تقارن، داشته باشد، یک یا دو تا از این انتگرال‌ها را می‌توان حذف کرد. در این صورت، مرکز جرم چنین شیئی در آن نقطه، روی آن خط یا در آن صفحه واقع است. برای مثال، مرکز جرم یک کره‌ی یکنواخت (که یک نقطه‌ی تقارن دارد) در مرکز کره (یعنی، همان نقطه‌ی تقارن) واقع است. مرکز جرم یک مخروط یکنواخت (که محور آن خط تقارن است) روی محور مخروط واقع است. مرکز جرم یک موز (که یک صفحه‌ی تقارن دارد و آن را به دو بخش مساوی تقسیم می‌کند) در جایی از صفحه‌ی تقارن واقع است.

مرکز جرم یک شیء لازم نیست درون شیء واقع شده باشد. در مرکز جرم یک نان شیرینی حلقه‌ای ماده‌ی شیرینی و در مرکز جرم یک نعل اسب آهنی ماده‌ی آهن، وجود ندارد.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۹-۱ مرکز جرم سه ذره

سه ذره به جرم‌های $m_1 = ۱/۲\text{kg}$ ، $m_2 = ۲/۵\text{kg}$ و $m_3 = ۳/۴\text{kg}$ یک مثلث سه ضلع برابر به ضلع $a = ۱۴۰\text{cm}$ تشکیل می‌دهند. مرکز جرم این دستگاه سه ذره‌ای در کجا قرار دارد؟

نکته‌ی کلیدی

در اینجا به جای جسم صُلب گسترده با چند ذره سر و کار داریم. بنابراین، برای تعیین محل مرکز جرم می‌توانیم معادله‌ی ۹-۵ را به‌کار ببریم. چون ذره‌ها در صفحه‌ی مثلث سه ضلع برابر قرار دارند فقط به دو رابطه‌ی اول این معادله نیاز داریم.

محاسبات: محورهای x و y را می‌توان طوری انتخاب کرد که یکی از ذره‌ها در مبداء مختصات و محور x در راستای یکی از ضلع‌های مثلث باشد (شکل ۹-۳). در نتیجه، مختصات سه ذره مطابق جدول زیر خواهند بود:

ذره	جرم (kg)	x(cm)	y(cm)
۱	۱/۲	۰	۰
۲	۲/۵	۱۴۰	۰
۳	۳/۴	۷۰	۱۲۰

جرم کل دستگاه M، برابر با $۷/۱\text{kg}$ است.

مختصات مرکز جرم با استفاده کردن از معادله‌ی ۹-۵، عبارت‌اند از

$$x_{com} = \frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{۳} m_i x_i = \frac{m_۱x_۱ + m_۲x_۲ + m_۳x_۳}{M}$$

$$x_{com} = \frac{(۱/۲\text{ kg})(۰) + (۲/۵\text{ kg})(۱۴۰\text{ cm}) + (۳/۴\text{kg})(۷۰\text{ cm})}{۷/۱\text{kg}}$$

$$\Rightarrow \quad x_{com} = ۸۳\text{ cm} \qquad \text{(پاسخ)}$$

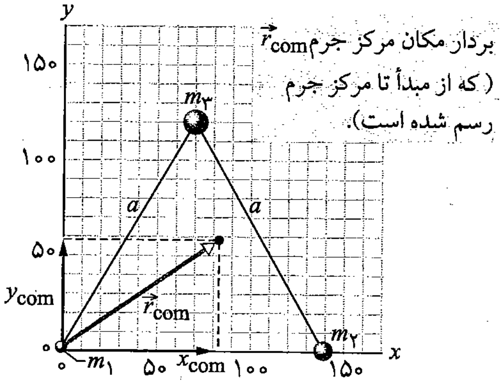
و

$$y_{com} = \frac{۱}{M}\sum_{i=۱}^{۳} m_i y_i = \frac{m_۱y_۱ + m_۲y_۲ + m_۳y_۳}{M}$$

$$y_{com} = \frac{(۱/۲\text{ kg})(۰) + (۲/۵\text{ kg})(۰) + (۳/۴\text{kg})(۱۲۰\text{ cm})}{۷/۱\text{kg}} \Rightarrow$$

$$y_{com} = ۵۸\text{ cm} \qquad \text{(پاسخ)}$$

در شکل ۹-۳، مرکز جرم با بردار مکان $\vec{r}_{com}$ مشخص شده، که دارای مؤلفه‌های x_{com} و y_{com} است. اگر سمت‌گیری دیگری از دستگاه مختصات را انتخاب می‌کردیم، این مختصه‌ها تفاوت می‌کردند، اما محل مرکز جرم نسبت به ذره‌ها همان می‌شد.



شکل ۹-۳ سه ذره یک مثلث سه ضلع برابر به ضلع a تشکیل می‌دهند. محل مرکز جرم با بردار مکان $\vec{r}_{com}$ مشخص شده است.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۹-۲ مرکز جرم ورقی با یک بخش برداشته شده

این مسئله‌ی نمونه مطالب خواندنی زیادی دارد، که به شما اجازه می‌دهند مرکز جرم را با استفاده کردن از محاسبات جبری آسان، به‌جای محاسبات انتگرال چالش برانگیز، پیدا کنید. شکل ۹-۴ الف ورق فلزی یکنواخت P به شعاع $۲R$ را نشان می‌دهد، که از آن قرصی به شعاع R برداشته شده است. این قرص در شکل ۹-۴ ب نشان داده شده است. با استفاده کردن از دستگاه مختصات x و y نشان داده شده در شکل، محل مرکز جرم ورق باقی‌مانده، com_P، را مشخص کنید.

نکته‌های کلیدی

(۱) مرکز جرم ورق P را با استفاده کردن از تقارن، به طور تقریبی، مشخص می‌کنیم. می‌دانیم که این ورق نسبت به محور x متقارن است (با چرخاندن بخش بالایی ورق حول محور x بخش پایینی محور x به‌دست می‌آید). بنابراین، com_P باید روی محور x قرارداشته باشد. این ورق (که قرصی از آن برداشته شده است) نسبت به محور y متقارن نیست. اما چون در قسمت راست محور y جرم بیشتری وجود دارد، com_P باید اندکی به سمت راست این محور جابه‌جا شده باشد. پس، محل com_P می‌تواند تقریباً درنقطه‌ی نشان داده شده در شکل ۹-۴ الف باشد.

(۲) ورق P یک جسم صُلب گسترده است و در اصل برای پیدا کردن مختصات واقعی مرکز جرم ورق P می‌توان معادله‌ی ۹-۱۱ را به کار برد. در اینجا در جست‌وجوی مختصات x و y مرکز جرم هستیم زیرا ورق نازک و یکنواخت است. اگر ورق ضخامتش زیاد باشد، می‌توان گفت که مرکز جرم آن در وسط بُعد ضخامت قرار دارد. باز هم، حتی اگر از ضخامت ورق چشم‌پوشی کنیم، استفاده کردن از معادله‌ی ۹-۱۱ چالش‌برانگیز است زیرا ما باید برای شکل ورق با سوراخ آن تابعی داشته باشیم و آنگاه لازم است از این تابع در دو بُعد انتگرال بگیریم.

(۳) در این حالت روش ساده‌تری وجود دارد: در هنگام پیداکردن مرکز جرم‌ها، می‌توان فرض کرد که جرم یک شیء یکنواخت (مانند شیئی که در اینجا داریم) در ذره‌ای واقع درمرکز جرم شیء متمرکز شده است. بنابراین، شیء را می‌توان به‌عنوان یک ذره در نظر گرفت و از انتگرال‌گیری دوبعدی پرهیز کرد.

محاسبات: نخست، قرص برداشته شده را (که S می‌نامیم) در جای خود (شکل ۹-۴ پ) قرار می‌دهیم تا ورق مرکب اصلی (که آن را C می‌نامیم) به دست آید. با توجه به تقارن دایره‌ای این ورق، com_S، مرکز جرم قرص S در مرکز S یعنی در نقطه‌ی $x=-R$ (چنان‌که شکل نشان می‌دهد) قرار دارد. به همین ترتیب، com_C، مرکز جرم ورقه‌ی مرکب C در مرکز C، یعنی در مبداء مختصات (چنان‌که شکل نشان می‌دهد) واقع است. در نتیجه، مختصات به دست آمده مطابق جدول زیر خواهند بود:

ورق	مرکز جرم	محل com	جرم
P	com_P	$x_P=?$	m_P
S	com_S	$x_S=-R$	m_S
C	com_C	$x_C=0$	$m_C=m_S+m_P$

فرض کنیم m_S، جرم قرص S در یک ذره‌ی واقع شده در $x_S=-R$، و جرم m_P در یک ذره‌ی واقع شده در x_P (شکل ۹-۴ ت) متمرکز شده است. سپس، این دو ذره را به صورت یک دستگاه دو ذره‌ای در نظر می‌گیریم و با استفاده کردن از معادله‌ی ۹-۲ مرکز جرم آن‌ها، x_{S+P}، را پیدا می‌کنیم. در نتیجه، داریم

$$x_{S+P}=\frac{m_Sx_S+m_Px_P}{m_S+m_P} \qquad (۹\text{-}۱۲)$$

اکنون می‌دانیم که از ترکیب قرص S و ورق P، ورق مرکب C به دست می‌آید. بنابراین، مکان x_{S+P} مربوط به com_{S+P} باید بر مکان x_C مربوط به com_C، که در مبداء قرار دارد، منطبق باشد؛ پس، $x_{S+P}=x_C=0$. با جانشانی این مقدار در معادله‌ی ۹-۱۲، داریم

$$x_P=-x_S\frac{m_S}{m_P} \qquad (۹\text{-}۱۳)$$

جرم‌ها را می‌توان به مساحت‌های S و P ربط داد. می‌دانیم که

حجم × چگالی = جرم

مساحت × ضخامت × چگالی = جرم

و از آنجا، داریم

$$\frac{m_S}{m_P}=\frac{\text{چگالی } S}{\text{چگالی } P}\times\frac{\text{ضخامت } S}{\text{ضخامت } P}\times\frac{\text{مساحت } S}{\text{مساحت } P}$$

چون ورق یکنواخت است چگالی‌ها و ضخامت‌ها مساوی‌اند؛ در نتیجه، داریم

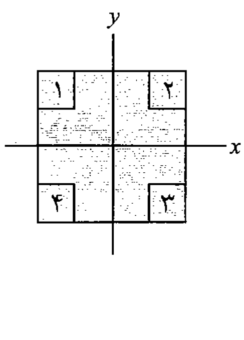
$$\frac{m_S}{m_P}=\frac{\text{مساحت } S}{\text{مساحت } P}=\frac{\text{مساحت } S}{\text{مساحت } C-\text{مساحت } S}$$

$$\frac{m_S}{m_P}=\frac{\pi R^2}{\pi(2R)^2-\pi R^2}=\frac{1}{3}$$

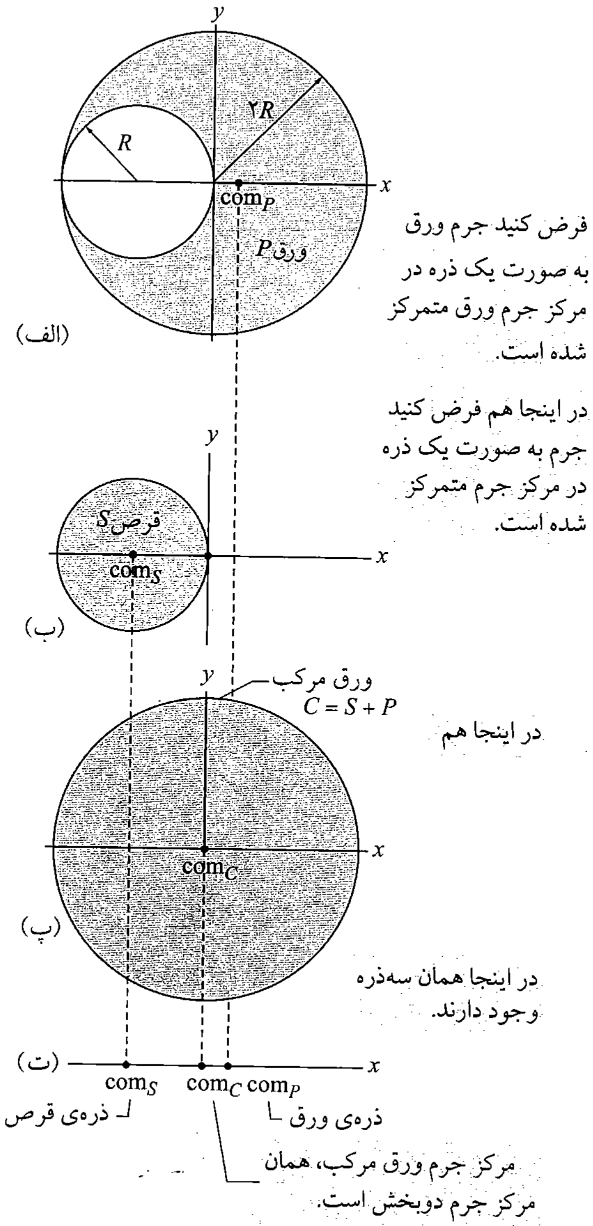
با جانشانی این مقدار و استفاده کردن از رابطه‌ی $x_S=-R$ در معادله‌ی ۹-۱۳، خواهیم داشت

$$x_P=\frac{1}{3}R \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

خودآزمایی ۱



شکل مقابل یک ورق مربع شکل یکنواخت را نشان می‌دهد که چهار مربع مشابه از گوشه‌های آن برداشته شده است. (الف) مرکز جرم ورق اصلی در کجا واقع است؟ پس از برداشتن (ب) مربع ۱: (پ) مربع‌های ۱ و ۲؛ (ت) مربع‌های ۱ و ۳، (ث) مربع‌های ۱، ۲ و ۳؛ (ج) هر چهار مربع، مرکز جرم ورق در کجا واقع است؟ پاسخ را برحسب ربع‌های دستگاه مختصات، محورها یا نقطه‌ها (البته بدون محاسبه) بیان کنید.



شکل ۹-۴ (الف) ورق P یک ورق فلزی به شعاع $2R$ است که در آن سوراخی دایره‌ای به شعاع R ایجاد شده است. مرکز جرم P در نقطه‌ی com_P واقع است. (ب) قرص S. (پ) قرص S در جای خود قرار داده شده است تا ورق مرکب C حاصل شود. com_S مرکز جرم قرص S، و com_C مرکز جرم ورق C، نشان داده شده است. (ت) com_{S+P} مرکز جرم ترکیب S و P بر com_C منطبق است، که در $x = 0$ واقع است.

۹-۲ قانون دوم نیوتون درباره‌ی دستگاه ذرات

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۹-۴ قانون دوم نیوتون درباره‌ی دستگاه ذرات را، با ربط دادن نیروی برایند (نیروهای وارد شده به ذرات) به شتاب مرکز جرم دستگاه، به کار ببرید.

۹-۵ معادله‌های شتاب ثابت را درباره‌ی حرکت ذرات فردی در دستگاه و حرکت مرکز جرم دستگاه به کار ببرید.

۹-۶ با داشتن جرم و سرعت ذرات در یک دستگاه، سرعت مرکز

جرم دستگاه را حساب کنید.

۹-۷ با داشتن جرم و شتاب ذرات در یک دستگاه، شتاب مرکز جرم دستگاه را حساب کنید.

۹-۸ با داشتن مکان مرکز جرم یک دستگاه به صورت تابعی از زمان، سرعت مرکز جرم را معین کنید.

۹-۹ با داشتن سرعت مرکز جرم دستگاه به صورت تابعی از زمان، شتاب مرکز جرم را معین کنید.

۹-۱۰ تغییر سرعت مرکز جرم را با انتگرال‌گیری از تابع شتاب مرکز جرم نسبت به زمان، حساب کنید.

۹-۱۱ جابه‌جایی مرکز جرم را با انتگرال‌گیری از تابع سرعت مرکز جرم نسبت به زمان، حساب کنید.

۹-۱۲ وقتی در یک دستگاه دوبعدی ذرات حرکت می‌کنند، در حالی که مرکز جرم دستگاه حرکت نمی‌کند، جابه‌جایی‌ها و سرعت‌های ذرات را به یکدیگر ربط دهید.

نکته‌های کلیدی

● حرکت مرکز جرم هر دستگاه ذرات از قانون دوم نیوتون مربوط به یک دستگاه ذرات پیروی می‌کند، که به صورت زیر است

$$\vec{F}_{\text{net}} = M\vec{a}_{\text{com}}$$

که در آن $\vec{F}_{\text{net}}$ نیروی برایند ***تمام نیروهای خارجی*** وارد شده به دستگاه، M جرم کل دستگاه و $\vec{a}_{\text{com}}$ شتاب مرکز جرم دستگاه است.

قانون دوم نیوتون درباره‌ی دستگاه ذرات

اکنون، که چگونگی تعیین محل مرکز جرم دستگاهی از ذرات را می‌دانیم می‌توانیم درباره‌ی چگونگی حرکت مرکز جرم توسط نیروهای خارجی بحث کنیم. برای شروع کار دستگاه ساده‌ی شامل دو گوی بیلیارد را در نظر می‌گیریم.

وقتی یک گوی بیلیارد را با چوب به سوی گوی دیگری که ساکن است می‌غلتانید، انتظار دارید این دستگاه دو ذره‌ای پس از برخورد، به پیش سو به حرکت ادامه دهد. اما اگر هر دو گوی، به سوی شما برگردند، یا به راست‌سو یا به چپ‌سو حرکت کنند، تعجب خواهید کرد. شما از پیش این احساس ذاتی را داشتید که ***چیزی*** به حرکت خود به پیش سو ادامه می‌دهد.

آنچه به پیش‌سو به حرکت ادامه می‌دهد و حرکت پایای آن کاملاً از برخورد مستقل است، مرکز جرم دستگاه دو گوی است. اگر توجه خود را به این نقطه ـ که همیشه به خاطر مساوی بودن جرم دو گوی این مرکز در وسط فاصله‌ی میان آن‌ها قرار دارد ـ معطوف کنیم، با انجام دادن آزمایش بر روی میز بیلیارد به آسانی می‌توانیم بپذیریم که چنین است. بدون توجه به اینکه برخورد دو گوی **پهلو به پهلو**، **شاخ به شاخ**، یا بینابینی باشد، مرکز جرم به پیش‌سو به حرکت ادامه می‌دهد، چنان‌که گویی هرگز برخوردی صورت نگرفته است. اینک، حرکت مرکز جرم را با دقت بیشتری بررسی می‌کنیم.

حرکت مرکز جرم دستگاه. برای انجام دادن این کار، به جای دو گوی بیلیارد، مجموعه‌ای از n ذره با جرم‌های گوناگون (تا حد ممکن) در نظر می‌گیریم. در اینجا حرکت تک تک ذره‌ها مورد نظر نیست، بلکه ***فقط*** به حرکت مرکز جرم ذره‌ها توجه می‌کنیم. مرکز جرم اگرچه تنها یک نقطه است، مانند ذره‌ای حرکت می‌کند که جرمش برابر با جرم کل دستگاه است و به

این ذره می‌توان مکان، سرعت و شتاب نسبت داد. اکنون، چنین می‌گوییم (و بعد ثابت خواهیم کرد) که معادله‌ی برداری حاکم بر حرکت مرکز جرم این دستگاه ذرات به صورت زیر است

$$\vec{F}_{\text{net}} = M\vec{a}_{\text{com}} \quad \text{(دستگاه ذرات)} \qquad (۱۴\text{-}۹)$$

این معادله، بیان کننده‌ی قانون دوم نیوتون درباره‌ی حرکت مرکز جرم دستگاه ذرات است. توجه کنید که این معادله به همان شکل $(\vec{F}_{\text{net}} = M\vec{a})$ است که برای حرکت تک ذره هم معتبر است. اما، سه کمیت ظاهر شده در معادله‌ی ۹-۱۴ را باید با دقت مورد توجه قرار داد.

۱. $\vec{F}_{\text{net}}$، نیروی برایند ***تمام نیروهای خارجی*** است که به دستگاه وارد می‌شوند. در معادله‌ی ۹-۱۴ نیروهای وارد شده به بخشی از دستگاه از سوی بخش‌های دیگر (***نیروهای درونی***) در نظر گرفته نشده‌اند.

۲. M، ***جرم کل*** دستگاه است. فرض می‌کنیم که در حین حرکت کردن دستگاه هیچ جرمی به آن وارد یا از آن خارج نمی‌شود، به گونه‌ای که M ثابت می‌ماند. در این حالت، گفته می‌شود که دستگاه یک **دستگاه بسته** است.

۳. $\vec{a}_{\text{com}}$، ***شتاب مرکز جرم*** دستگاه است و معادله‌ی ۹-۱۴ هیچ گونه اطلاعاتی درباره‌ی شتاب نقطه‌های مختلف دستگاه به دست نمی‌دهد.

معادله‌ی ۹-۱۴ با سه معادله‌ی مربوط به مؤلفه‌های $\vec{F}_{\text{net}}$ و $\vec{a}_{\text{com}}$ در راستای سه محور مختصات هم‌ارز است. این معادله‌ها عبارت‌اند از

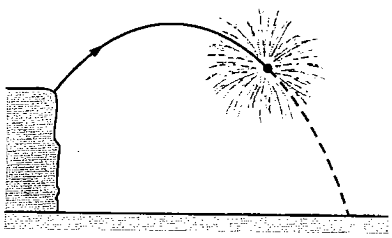
$$F_{\text{net},x} = Ma_{\text{com},x} \text{ ، } F_{\text{net},y} = Ma_{\text{com},y} \text{ و } F_{\text{net},z} = Ma_{\text{com},z} \qquad (۱۵\text{-}۹)$$

گوی‌های بیلیارد. اکنون، می‌توانیم به موضوع رفتار گوی‌های بیلیارد برگردیم. از لحظه‌ای که گوی بیلیارد شروع به حرکت می‌کند هیچ نیروی خارجی‌ای به دستگاه (دو گوی) وارد نمی‌شود. بنابراین، به ازای $\vec{F}_{\text{net}} = ۰$، معادله‌ی ۹-۱۴ نشان می‌دهد که $\vec{a}_{\text{com}} = ۰$. چون شتاب آهنگ زمانی تغییر سرعت است، نتیجه می‌گیریم که سرعت مرکز جرم دستگاه دو گوی تغییر نمی‌کند. در هنگام برخورد دو گوی به هم، نیروهای مؤثر و ***نیروهای درونی*** هستند که از یک گوی به گوی دیگر وارد می‌شوند. این نیروها در نیروی برایند $\vec{F}_{\text{net}}$ که صفر می‌ماند، دخالتی ندارند. پس، مرکز جرم دستگاه، که پیش از برخورد به پیش سو حرکت می‌کرد، پس از برخورد نیز باید با همان تندی و در همان راستا به پیش سو حرکت کند.

جسم صُلب. معادله‌ی ۹-۱۴ نه تنها در مورد دستگاه ذرات، بلکه در مورد یک جسم صُلب، مانند چوب بیس‌بال در شکل ۹-۱ ب، هم صادق است. در آن حالت، M در معادله‌ی ۹-۱۴ جرم چوب بیس‌بال و F_{net} نیروی گرانشی وارد شده به چوب است. پس، معادله‌ی ۹-۱۴ نشان می‌دهد که $\vec{a}_{\text{com}} = \vec{g}$. به عبارت دیگر، مرکز جرم چوب بیس‌بال چنان حرکت می‌کند که گویی نیروی $\vec{F}_g$ به تک ذره‌ای به جرم M وارد شده است.

اجسام در حال انفجار. شکل ۹-۵ حالت جالب دیگری را نشان می‌دهد. فرض کنید در یک نمایش آتش‌بازی، موشکی در یک مسیر سهمی شکل حرکت می‌کند. در نقطه‌ی معینی

نیروهای درونی ناشی از انفجار نمی‌توانند مسیر مرکز جرم را تغییر دهند.



شکل ۹-۵ نمایش انفجار موشک در حین پرواز در مراسم آتش‌بازی. در نبود نیروی پسار هوا مرکز جرم پاره‌های حاصل از انفجار در همان مسیر سهمی شکل اولی حرکت می‌کند تا سرانجام پاره‌ها به زمین برخورد می‌کنند.

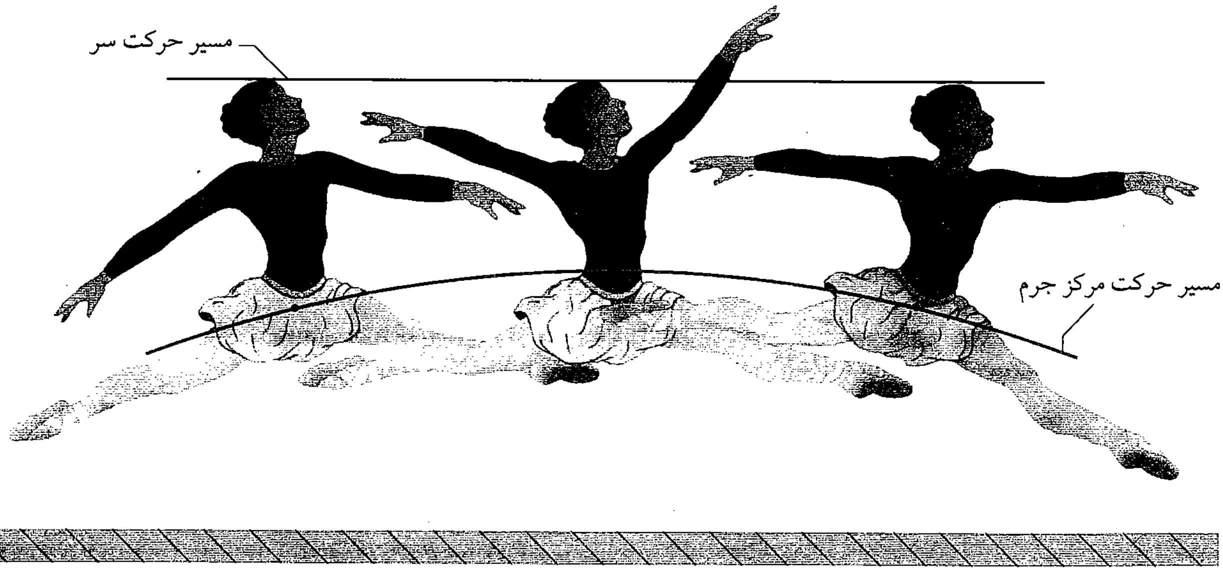
موشک منفجر و به پاره‌هایی تقسیم می‌شود. اگر انفجار رخ نمی‌داد، موشک در مسیر نشان داده شده در شکل به حرکت خود ادامه می‌داد. نیروهای مربوط به انفجار ***نیروهای درونی*** دستگاه (ابتدا موشک و سپس پاره‌های آن) به شمار می‌آیند؛ یعنی، نیروهایی هستند که از سوی برخی بخش‌های دستگاه به بخش‌های دیگر وارد می‌شوند. اگر از نیروی پسار هوا چشم‌پوشی شود، ***نیروی خارجی برایند*** $\vec{F}_{\text{net}}$، وارد شده به دستگاه همان نیروی گرانشی است، صرفنظر از اینکه موشک منجر شود، یا نشود. بنابراین، با توجه به معادله‌ی ۹-۱۴، $\vec{a}_{\text{com}}$ شتاب مرکز جرم پاره‌ها (وقتی در حال پروازند) برابر با $\vec{g}$ است. یعنی، مرکز جرم پاره‌ها همان مسیری (سهمی شکل) را دنبال می‌کند، که اگر موشک منفجر نمی‌شد دنبال می‌کرد.

جَست زدن باله کار. وقتی یک باله کار در عرض صحنه‌ی نمایش حرکت جَست بزرگ[1] را اجرا می‌کند، دست‌هایش را بالا می‌برد و پاهایش را به محض جدا شدن از صحنه به صورت افقی و کشیده در می‌آورد (شکل ۹-۶). این حرکت‌ها سبب جابه‌جا شدن مرکز جرم او در راستای بدنش به بالاسو می‌شوند. اگرچه مرکز جرم در عرض صحنه یک مسیر سهمی شکل را دنبال می‌کند، حرکت آن نسبت به بدن باله کار ارتفاعی را که سر و نیم‌تنه در یک پرش عادی پیدا می‌کردند، کاهش می‌دهد. نتیجه این که، سر و نیم‌تنه‌ی باله کار، به تقریب، یک مسیر افقی را دنبال می‌کنند و به نظر می‌رسد که او در هوا شناور است.

اثبات معادله‌ی ۹-۱۴

اکنون، این معادله‌ی مهم را اثبات می‌کنیم. برای یک دستگاه n ذره‌ای با استفاده کردن از معادله‌ی ۹-۸، داریم

$$M\vec{r}_{\text{com}} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \cdots + m_n\vec{r}_n \qquad (۹-۱۶)$$



شکل ۹-۶ نمایش حرکت جَست بزرگ*.

1. grand jeté

* برگرفته شده از کتاب: *The Physics of Dance,* by Kenneth Laws, Schirmer Books, 1984.

که در آن M جرم کل دستگاه و $\vec{r}_{com}$ معرف بردار مکان مرکز جرم دستگاه است.

با مشتق گرفتن از معادله‌ی ۹-۱۶ نسبت به زمان، داریم

$$M\vec{v}_{com} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n \tag{۹-۱۷}$$

در این معادله $\vec{v}_i$ (مساوی با $d\vec{r}_i / dt$) سرعت ذره‌ی iاُم، و $\vec{v}_{com}$ (مساوی با $d\vec{r}_{com} / dt$) سرعت مرکز جرم است. با مشتق گرفتن از معادله‌ی ۹-۱۷ نسبت به زمان، خواهیم داشت

$$M\vec{a}_{com} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \cdots + m_n\vec{a}_n \tag{۹-۱۸}$$

در اینجا $\vec{a}_i$ (مساوی با $d\vec{v}_i / dt$) شتاب ذره‌ی iاُم، و $\vec{a}_{com}$ (مساوی با $d\vec{v}_{com} / dt$) شتاب مرکز جرم است. اگرچه مرکز جرم فقط یک نقطه‌ی هندسی است، مانند یک ذره دارای مکان، سرعت و شتاب است.

بنا به قانون دوم نیوتون $m_i\vec{a}_i$ برابر با نیروی برایند $\vec{F}_i$ است که به ذره‌ی iاُم اثر می‌کند. بنابراین، معادله‌ی ۹-۱۸ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$M\vec{a}_{com} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots + \vec{F}_n \tag{۹-۱۹}$$

در میان نیروهای طرف راست معادله‌ی ۹-۱۹، نیروهایی که ذرات مختلف دستگاه به هم وارد می‌کنند (نیروهای درونی) و نیروهایی که از خارج دستگاه به ذرات وارد می‌شوند (نیروهای خارجی)، وجود دارند. بنا به قانون سوم نیوتون نیروهای درونی زوج نیروهای کنش ـ واکنش تشکیل می‌دهند و حاصل آن‌ها در مجموع طرف راست معادله‌ی ۹-۱۹، صفر است. آنچه باقی می‌ماند، مجموع برداری تمام ***نیروهای خارجی*** است که به دستگاه وارد می‌شوند. در نتیجه، معادله‌ی ۹-۱۹ به صورت معادله‌ی ۹-۱۴ ساده می‌شود که همان رابطه‌ی مورد نظر برای اثبات کردن است.

خودآزمایی ۲

دو اسکیت‌باز بر روی سطح یخ زده‌ی بی‌اصطکاکی دو سر یک تیر چوبی به جرم ناچیز را گرفته‌اند. محوری را در راستای تیر و مبدأ محور را در مرکز جرم دستگاه دو اسکیت‌باز در نظر بگیرید. وزن یکی از اسکیت‌بازها، به نام فرید (F)، دو برابر وزن اسکیت‌باز دیگر، به نام احسان (E) است. اگر، (الف) فرید تیر را با دست به سمت خود بکشد تا به سوی احسان حرکت کند، (ب) احسان تیر را با دست بکشد تا به سوی فرید حرکت کند، و (پ) هر دو اسکیت‌باز تیر را با دست بکشند، اسکیت‌بازها در کجا به یکدیگر می‌رسند؟

مسئله‌ی نمونه‌ی ۹-۳ حرکت مرکز جرم سه ذره

اگر در یک دستگاه همه‌ی ذرات با هم حرکت کنند، مرکز جرم هم بی‌شک با آن‌ها حرکت می‌کند. اما اگر ذرات با شتاب‌های مختلف در جهت‌های متفاوت حرکت کنند، چه می‌شود؟ در این مورد مثالی بیان می‌کنیم.

سه ذره‌ی شکل ۹-۷ الف در آغاز به حال سکون قرار دارند. هر کدام از سه ذره از سوی اجسام بیرون این دستگاه تحت اثر

یک ***نیروی خارجی*** قرار می‌گیرند. جهت نیروها در شکل نشان داده شده و بزرگی آن‌ها $F_1 = 6.0\,N$، $F_2 = 12\,N$ و $F_3 = 14\,N$ است. مرکز جرم این دستگاه چه شتابی دارد و در چه جهتی حرکت می‌کند؟

نکته‌های کلیدی

در شکل مکان مرکز جرم با یک خال مشخص شده است. مرکز جرم را می‌توان چنان انگاشت که گویی یک ذره‌ی واقعی است و جرمش برابر با جرم کل دستگاه، $M = 16\,kg$، است. در ضمن، سه نیروی خارجی را می‌توان چنان تصور کرد که گویی به مرکز جرم دستگاه وارد می‌شوند (شکل ۹-۷ ب).

محاسبات: اکنون، می‌توان قانون دوم نیوتون را درباره‌ی مرکز جرم به کار برد و چنین نوشت

$$\vec{F}_{net} = M\vec{a}_{com} \qquad (9\text{-}20)$$

یا

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = M\vec{a}_{com}$$

و از آنجا، داریم

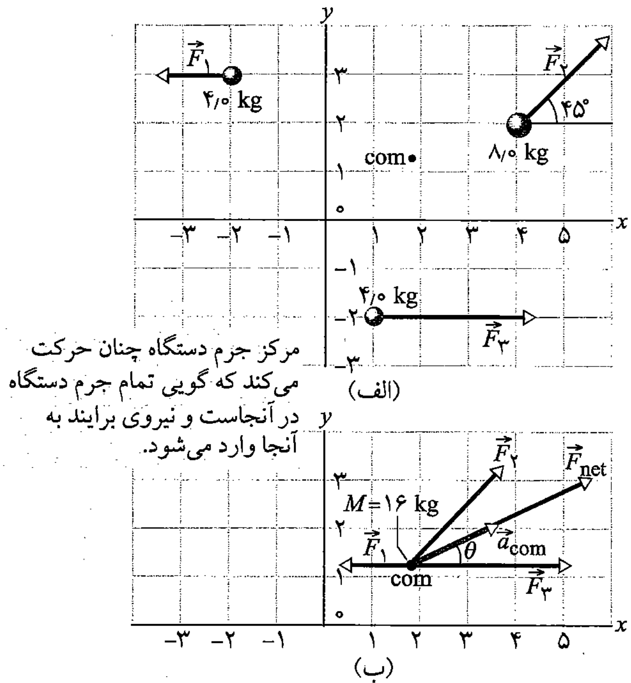
$$\vec{a}_{com} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3}{M} \qquad (9\text{-}21)$$

معادله‌ی ۹-۲۰ نشان می‌دهدکه شتاب مرکزجرم $\vec{a}_{com}$، همسو با نیروی خارجی برایند $\vec{F}_{net}$، وارد شده به دستگاه است (شکل ۹-۷ ب). چون ذره‌ها در آغاز ساکن‌اند، مرکز جرم هم باید در حال سکون باشد. همین که مرکز جرم شروع به شتاب گرفتن کرد، حرکتش باید در جهت مشترک $\vec{a}_{com}$ و $\vec{F}_{net}$ باشد.

طرف راست معادله‌ی ۹-۲۱ را می‌توان با ماشین‌های ویژه‌ی محاسبه‌های برداری به طور مستقیم حساب کرد. هم‌چنین، معادله‌ی ۹-۲۱ را می‌توان دوباره برحسب مؤلفه‌های $\vec{a}_{com}$ نوشت و پس از تعیین مؤلفه‌ها، $\vec{a}_{com}$ را به دست آورد. در این صورت، برای مؤلفه‌های مربوط به محور x، داریم

$$a_{com,x} = \frac{F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}}{M}$$

$$a_{com,x} = \frac{-6.0\,N + (12\,N)\cos 45^\circ + 14\,N}{16\,kg} = 1.03\,m/s^2$$



شکل ۹-۷ (الف) سه ذره در آغاز در مکان‌های نشان داده شده در حال سکون‌اند و تحت اثر نیروهای خارجی قرار دارند. مرکز جرم دستگاه (com) با یک خال مشخص شده است. (ب) در این شکل بردارهای نیرو به مرکز جرم دستگاه، که مانند ذره‌ای به جرم M (مساوی با جرم کل دستگاه) رفتار می‌کند، منتقل شده‌اند. بردارهای نیروی برایند خارجی $\vec{F}_{net}$، و شتاب مرکز جرم $\vec{a}_{com}$، نیز نشان داده شده‌اند.

هم‌چنین، برای مؤلفه‌های مربوط به محور y، داریم

$$a_{com,y} = \frac{F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}}{M}$$

$$a_{com,y} = \frac{0 + (12\,N)\sin 45^\circ + 0}{16\,kg} = 0.530\,m/s^2$$

با استفاده کردن از این مؤلفه‌ها بزرگی شتاب $\vec{a}_{com}$ چنین به‌دست می‌آید

$$a_{com} = \sqrt{(a_{com,x})^2 + (a_{com,y})^2} \Rightarrow$$

$$a_{com} = 1.16\,m/s^2 \approx 1.2\,m/s^2 \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

زاویه‌ی بردار شتاب (نسبت به محور x مثبت) برابر است با

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_{com,y}}{a_{com,x}} \Rightarrow$$

$$\theta = 27^\circ \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

۹-۳ تکانه‌ی خطی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۹-۱۳ مشخص کنید که تکانه کمیتی برداری است و از این رو، دارای بزرگی و جهت، هر دو، است و نیز مؤلفه‌هایی دارد.

۹-۱۴ تکانه‌ی (خطی) یک ذره را به صورت حاصل‌ضرب جرم ذره و سرعت آن حساب کنید.

۹-۱۵ تغییر تکانه را (از لحاظ بزرگی و جهت) در هنگام تغییر تندی و جهت حرکت ذره حساب کنید.

۹-۱۶ رابطه‌ی میان تکانه‌ی یک ذره و نیروی (برایند) وارد شده به ذره را به کار ببرید.

۹-۱۷ تکانه یک دستگاه ذرات را به صورت حاصل‌ضرب جرم کل دستگاه و سرعت مرکز جرم، حساب کنید.

۹-۱۸ رابطه‌ی میان تکانه‌ی مرکز جرم یک دستگاه و نیروی برایند وارد شده به دستگاه را به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

- در مورد یک تک ذره، کمیت $\vec{p}$ به نام تکانه‌ی خطی ذره را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

که یک کمیت برداری است و همان جهت سرعت ذره را دارد.
قانون دوم نیوتون را برحسب این تکانه می‌توان چنین نوشت:

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

- برای یک دستگاه ذرات، این رابطه به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{و} \quad \vec{P} = M\vec{v}_{\text{com}}$$

تکانه‌ی خطی

در اینجا، به جای دستگاه ذرات، فقط به بحث درباره‌ی یک تک ذره می‌پردازیم تا دو کمیت مهم را تعریف کنیم. سپس، این تعریف‌ها را در مورد دستگاه‌های چند ذره‌ای تعمیم خواهیم داد.

تعریف اول مربوط به واژه‌ی آشنای ***تکانه*** است، که دارای معنی‌های گوناگونی است اما در فیزیک و مهندسی فقط تک معنی دقیقی دارد. **تکانه‌ی خطی** یک ذره برداری مانند $\vec{p}$ است که چنین تعریف می‌شود

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \text{(تکانه‌ی خطی ذره)} \qquad (۹\text{-}۲۲)$$

در این معادله m جرم و $\vec{v}$ سرعت ذره است. (در این اصطلاح صفت ***خطی*** را اغلب حذف می‌کنند، اما وجود آن سبب می‌شود $\vec{p}$ با ***تکانه‌ی زاویه‌ای***، که در فصل ۱۱ معرفی خواهد شد و به دوران مربوط است، اشتباه نشود). چون m همیشه کمیتی نرده‌ای و مثبت است، معادله‌ی ۹-۱۲ نشان می‌دهد که $\vec{p}$ و $\vec{v}$ همسوی‌اند. با توجه به معادله‌ی ۹-۲۲ نتیجه می‌گیریم که یکای تکانه در دستگاه یکاهای SI، **کیلوگرم متر بر ثانیه** $(\text{kg}\cdot\text{m/s})$ است.

نیرو و تکانه. در واقع، نیوتون قانون دوم حرکت را برحسب تکانه چنین بیان کرده است:

آهنگ زمانی تغییرات تکانه‌ی یک ذره برابر با نیروی برایند وارد شده به ذره و همسو با نیرو است.

شکل فرمولی این تعریف به صورت معادله‌ی زیر است

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (۹-۲۳)$$

به عبارت دیگر، بنا به معادله‌ی ۹-۲۳ نیروی خارجی برایند $\vec{F}_{\text{net}}$ وارد شده بـه ذره، تکانـه‌ی خطی ذره $\vec{p}$، را تغییر می‌دهد. برعکس، تکانه‌ی خطی تنها می‌تواند بـا یـک نیـروی خـارجی برایند تغییر کند. اگر نیروی خارجی برایند وجود نداشـته باشـد، $\vec{p}$ ***نمـی‌توانـد تغییـر کنـد.*** چنان‌که در پودمان ۹-۵ خواهیم دید، مطلب اخیر می‌تواند ابـزار بسـیار توانمنـدی بـرای حـل کردن مسئله‌ها باشد.

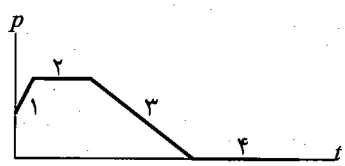
با جانشانی $\vec{p}$ از معادله‌ی ۹-۲۲ در معادله‌ی ۹-۲۳ به ازای جرم ثابت m، داریم

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

بنابراین، رابطه‌های $\vec{F}_{\text{net}} = d\vec{p}/dt$ و $\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$ عبارت‌های هم‌ارزی از قانون دوم حرکت نیوتون برای یک ذره‌اند.

خودآزمایی ۳

شکل زیر، نمودار تغییرات بزرگی تکانه‌ی خطی p برحسب زمان t را برای ذره‌ای کـه در راستای یک محور حرکت می‌کند، نشان می‌دهد. این ذره تحت اثر نیرویی در راستای محور قرار می‌گیرد. (الف) چهار ناحیه‌ی نشان داده شده را با توجه به بزرگی نیرو، از بیشترین تـا کمترین مقدار، مرتب کنید. (ب) حرکت ذره در کدام ناحیه کُند می‌شود؟



تکانه‌ی خطی دستگاه ذرات

اکنون، تعریف تکانه‌ی خطی مربوط به دستگاه ذرات را بسط می‌دهیم. دستگاهی شامل n ذره را در نظر بگیرید که هر ذره جرم، سرعت و تکانـه‌ی خطـی خـاص خـود را دارد. ایـن ذرات ممکن است با یکدیگر برهم کنش داشته باشـند و بـه آن‌هـا نیـروی خـارجی هـم وارد شـود. تکانه‌ی خطی کل دستگاه، $\vec{P}$، برابر با جمع برداری تکانه‌های خطی فـردی ذره‌هاسـت. پـس،

می‌توان نوشت

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \cdots + \vec{p}_n$$

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \cdots + m_n\vec{v}_n \qquad (۹-۲۴)$$

اگر این معادله را با معادله‌ی ۹-۱۷ مقایسه کنیم، نتیجه می‌گیریم که

$$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{com}} \quad \text{(تکانه‌ی خطی، دستگاه ذرات)} \qquad (۹-۲۵)$$

این معادله راه دیگری را برای تعریف تکانه‌ی خطی دستگاه ذرات نشان می‌دهد:

تکانه‌ی خطی دستگاه ذرات برابر با حاصل‌ضرب جرم کل دستگاه M، در سرعت مرکز جرم است.

نیرو و تکانه. اگر از معادله‌ی ۹-۲۵ نسبت به زمان مشتق بگیریم (سرعت می‌تواند تغییر کند، اما جرم نمی‌تواند)، داریم

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{\text{com}}}{dt} = M\vec{a}_{\text{com}} \qquad (۹-۲۶)$$

مقایسه‌ی معادله‌های ۹-۱۴ و ۹-۲۶ به ما امکان می‌دهد که قانون دوم نیوتون را برای دستگاه ذرات به صورت معادله‌ی زیر بنویسیم

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{(دستگاه ذرات)} \qquad (۹-۲۷)$$

که در آن $\vec{F}_{\text{net}}$ نیروی خارجی برایند وارد شده به دستگاه است. این معادله تعمیمی از معادله‌ی تک ذره، $\vec{F}_{\text{net}} = d\vec{p}/dt$، برای یک دستگاه چند ذره‌ای است. به عبارت دیگر، بنا به این معادله نیروی خارجی برایند $\vec{F}_{\text{net}}$ وارد شده به دستگاه ذرات، تکانه‌ی خطی دستگاه $\vec{P}$، را تغییر می‌دهد. برعکس، تکانه‌ی خطی فقط می‌تواند توسط یک نیروی خارجی برایند تغییر کند. اگر نیروی خارجی برایند وجود نداشته باشد، $\vec{P}$ ***نمی‌تواند تغییر کند***. باز هم، این واقعیت برای حل کردن مسئله‌ها ابزار بسیار توانمندی را در اختیار ما قرار می‌دهد.

۹-۴ برخورد و ضربه

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۹-۱۹ مشخص کنید که ضربه کمیتی برداری است و از این رو، دارای بزرگی و جهت، هر دو، است و نیز مؤلفه‌هایی دارد.

۹-۲۰ رابطه‌ی میان ضربه و تغییر تکانه را به کار ببرید.

۹-۲۱ رابطه‌ی میان ضربه، نیروی متوسط و بازه‌ی زمانی سپری شده برای ضربه را به کار ببرید.

۹-۲۲ معادله‌های شتاب ثابت را برای ربط دادن ضربه به نیروی متوسط به کار ببرید.

۹-۲۳ با داشتن نیرو به صورت تابعی از زمان، ضربه (و نیز تغییر تکانه) را با انتگرال‌گیری از آن تابع، حساب کنید.

۹-۲۴ با داشتن نمودار نیرو برحسب زمان، ضربه (و نیز تغییر تکانه)

را با انتگرال‌گیری ترسیمی، حساب کنید.

۹-۲۵ در رشته‌ای از برخوردهای پیوسته توسط پرتابه‌ها، نیروی متوسط وارد شده به هدف برخورد را با ربط دادن آن به آهنگ برخوردهای جرم و تغییر سرعت هر پرتابه، حساب کنید.

نکته‌های کلیدی

- با به کار بردن قانون دوم نیوتون به شکل تکانه برای یک جسم ذره مانند در حین انجام دادن برخورد، قضیه‌ی ضربه ـ تکانه‌ی خطی به صورت فرمولی زیر به دست می‌آید

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} = \vec{J}$$

که در آن $\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$ تغییر تکانه‌ی خطی جسم و $\vec{J}$ ضربه‌ی ناشی از نیروی وارد شده به جسم $\vec{F}(t)$، توسط جسم دیگر در برخورد است:

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt$$

- اگر F_{avg} بزرگی متوسط نیروی $\vec{F}(t)$ در حین برخورد و Δt مدت زمان برخورد باشد، در آن صورت، برای حرکت یک بعدی، داریم

$$J = F_{avg}\Delta t$$

- وقتی جریان پایایی از اجسام، هر یک به جرم m و تندی v، با جسم ثابتی برخورد کنند، نیروی متوسط وارد شده به جسم ثابت برابر است با

$$F_{avg} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t}m\Delta v$$

که در آن $n / \Delta t$ آهنگ برخورد اجسام با جسم ثابت و Δv تغییر سرعت هر جسم برخورد کننده است. این نیروی متوسط را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$F_{avg} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v$$

که در آن $\Delta m / \Delta t$ آهنگ برخوردهای جرم با جسم ثابت است. پس از برخورد اگر اجسام متوقف شوند تغییر سرعت $\Delta v = -v$، و اگر اجسام بدون تغییر تندی به عقب وابجهند، $\Delta v = -۲v$ است.

برخورد و ضربه

تکانه‌ی خطی $\vec{p}$ مربوط به هر جسم ذره مانند نمی‌تواند تغییر کند مگر آنکه یک نیروی خارجی برایند، آن را تغییر دهد. برای مثال، ما می‌توانیم جسم را هُل بدهیم تا تکانه‌ی آن تغییر کند، یا می‌توانیم به نحوی جالب ترتیبی بدهیم تا جسم با یک چوب بیس‌بال برخورد کند. در این ***برخورد*** (یا ***تصادم***) نیروی خارجی وارد شده به جسم در کوتاه مدت اثر می‌کند اما بزرگ است و به طور ناگهانی تکانه‌ی جسم را تغییر می‌دهد. در دنیای ما رخ دادن برخوردها امری معمولی است، اما پیش از پرداختن به آن‌ها، لازم است برخورد ساده‌ای را در نظر بگیریم که در آن جسمی ذره مانند (به نام ***پرتابه***) با جسم دیگری (به نام ***هدف***) برخورد می‌کند.

برخورد یک گوی با چوب بیس‌بال باعث تغییر شکل بخشی از گوی می‌شود.

تک برخورد

فرض می‌کنیم پرتابه یک گوی و هدف یک چوب بیس‌بال است. برخورد کوتاه مدت است و نیروی وارد شده به گوی به حدی زیاد است، که حرکت گوی را کُند، متوقف، یا حتی وارون، می‌کند. شکل ۹-۸ وضعیت برخورد را در یک لحظه نشان می‌دهد. نیروی $\vec{F}(t)$ وارد شده به گوی در حین برخورد تغییر می‌کند و تکانه‌ی خطی گوی $\vec{p}$، را تغییر می‌دهد. این تغییر، بنا

به قانون دوم نیوتون، از لحاظ فرمولی به صورت $\vec{F} = d\vec{p} / dt$ نوشته می‌شود. بنـابراین، تغییـر تکانه‌ی گوی در بازه‌ی زمانی dt برابر است با

$$d\vec{p} = \vec{F}(t)\, dt \qquad (۹-۲۸)$$

اگر از دو طرف معادله‌ی ۹-۲۸ از زمان t_i، درسـت پـیش از برخـورد، تـا زمـان t_f پـس از برخورد، انتگرال بگیریم، می‌توانیم تغییر خالص تکانه‌ی گوی را در حـین برخـورد بـه دسـت آوریم:

$$\int_{t_i}^{t_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt \qquad (۹-۲۹)$$

طرف چپ این معادله تغییر تکانه $\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$، را به دست می‌دهد. عبارت طرف راسـت معادله، که معیاری از بزرگی و زمان تأثیر نیرو است، **ضربه‌ی برخورد** $\vec{J}$، نامیده می‌شود:

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt \quad \text{(تعریف ضربه)} \qquad (۹-۳۰)$$

بنابراین، تغییر تکانه‌ی یک جسم برابر با ضربه‌ی وارد شده به آن جسم است:

$$\Delta\vec{p} = \vec{J} \quad \text{(قضیه‌ی تکانه‌ی خطی ـ ضربه)} \qquad (۹-۳۱)$$

این رابطه را می‌توان به صورت برداری زیر

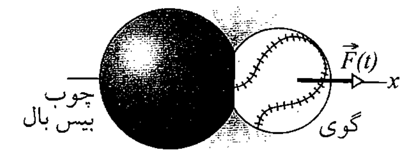
$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{J} \qquad (۹-۳۲)$$

و به صورت مؤلفه‌ای زیر، نوشت

$$\Delta p_x = J_x \qquad (۹-۳۳)$$

و

$$p_{fx} - p_{ix} = \int_{t_i}^{t_f} F_x dt \qquad (۹-۳۴)$$

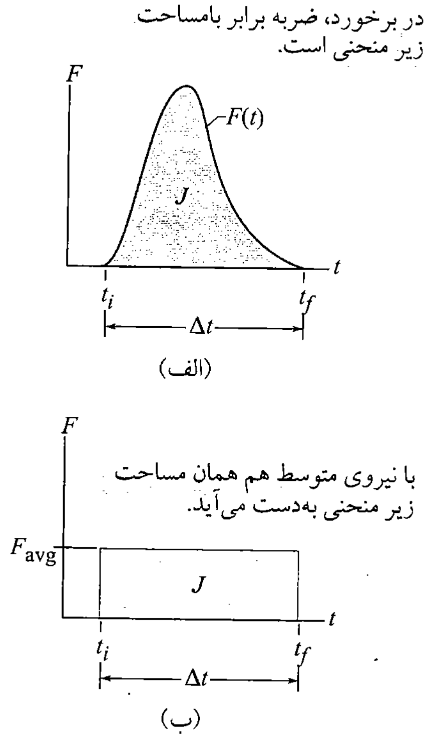


شکل ۹-۸ در حین برخورد گوی بـا چـوب بیس‌بال نیروی $\vec{F}(t)$ به گوی وارد می‌شود.

انتگرال‌گیری از نیرو. اگر تابع مربوط به $\vec{F}(t)$ در دست باشد، با انتگرال‌گیری از این تـابع می‌توان $\vec{J}$ (و در نتیجه تغییر تکانه) را به دسـت آورد. اگـر نمـودار $\vec{F}$ برحسـب زمـان t را داشته باشیم، با پیدا کردن مساحت میان منحنی و محور t، مطابق شکل ۹-۹ الف، مـی‌تـوانیم $\vec{J}$ را حساب کنیم. در بیشتر موارد چگونگی تغییرات نیرو برحسـب زمـان را نمـی‌دانـیم، امـا بزرگی متوسط F_{avg} نیـرو و مـدت زمـان برخـورد $\Delta t(= t_f - t_i)$، را مـی‌دانـیم. در نتیجـه، می‌توانیم بزرگی ضربه را به‌صورت زیر بنویسیم

$$J = F_{avg}\Delta t \qquad (۹-۳۵)$$

منحنی نیروی متوسط برحسب زمان در شکل ۹-۹ ب رسـم شـده اسـت. مسـاحت زیـر ایـن منحنی برابر با مساحت زیر منحنی نیروی واقعی $F(t)$ در شکل ۹-۹ الف اسـت زیـرا هـر دو مساحت برابر با بزرگی ضربه J، هستند.



شکل ۹-۹ (الـف) منحنـی نشـان دهنـده‌ی تغییرات بزرگی نیروی $F(t)$، برحسب زمان که در حین برخورد در شکل ۹-۸ بـه گـوی وارد می‌شود. نمودار مساحت زیر منحنی، کـه برابـر با بزرگی ضربه‌ی $\vec{J}$ وارد شده به گوی در این برخورد است. (ب) ارتفاع مربع مستطیل نیروی متوسط وارد شده به گوی F_{avg}، را در بـازه‌ی زمانی Δt نشان می‌دهـد. مسـاحت ایـن مربـع مستطیل برابر با مساحت زیر منحنـی در شـکل (الف)، و در نتیجه، برابر با بزرگـی ضـربه‌ی $\vec{J}$ دربرخورد است.

در شکل ۹-۸، به جای گوی، توجه خود را به چوب بیس‌بال معطوف کردیم. بنا به قانون سوم نیوتون، در هر لحظه نیروی وارد شده به چوب بیس‌بال از نظر بزرگی مسـاوی و از نظـر

جهت مخالف با نیروی وارد شده به گوی است. منظور این است که با توجه به معادله‌ی ۹-۳۰ ضربه‌ی وارد شده به چوب بیس‌بال از نظر بزرگی مساوی و از نظر جهت مخالف با ضربه‌ی وارد شده به گوی است.

☑ خودآزمایی ۴

چترباز به خاطر باز نشدن چترش به زمین پوشیده از برف برخورد می‌کند و اندکی آسیب می‌بیند. اگر او به زمین بدون برف برخورد می‌کرد، مدت زمان برخورد تا رسیدن به حالت سکون ۱۰ برابر کوتاه‌تر، اما برخورد مرگ‌آور می‌شد. آیا وجود برف سبب افزایش یافتن، کاهش یافتن، یا بی‌تغییر ماندن مقادیر (الف) تغییر تکانه‌ی چترباز، (ب) ضربه‌ی متوقف کننده‌ی چترباز و (پ) نیروی متوقف کننده‌ی چترباز، می‌شود؟

رشته‌ای از برخوردها

اکنون، نیروی وارد شده به جسمی را در نظر می‌گیریم که تحت تأثیر یک رشته از برخوردهای مشابه و تکرارشونده قرار می‌گیرد. مثلاً، به عنوان شیطنت و شوخی یکی از ماشین‌های توپ پرتاب کن را وادار می‌کنیم که توپ‌های تنیس را با آهنگی سریع یک راست به سوی دیواری پرتاب کند. هر برخورد به دیوار نیرویی وارد می‌کند، اما این نیرو مورد نظر ما نیست. ما می‌خواهیم نیروی متوسط وارد شده به دیوار $\vec{F}_{avg}$، را در حین بمباران ـ یعنی نیروی متوسط وارد شده به دیوار را در حین برخورد عده‌ی زیادی توپ ـ بدانیم.

در شکل ۹-۱۰، جریان پایایی از پرتابه‌های با جرم یکسان و برابر با m و تکانه‌ی خطی برابر با $m\vec{v}$، در راستای محور x حرکت و به یک هدف محکم شده در جای خود برخورد می‌کند. فرض می‌کنیم n عده‌ی پرتابه‌هایی باشد که در بازه‌ی زمانی Δt به هدف برخورد می‌کنند. چون حرکت فقط در راستای محور x انجام می‌شود، می‌توان از مؤلفه‌های تکانه‌ها در راستای این محور استفاده کرد. بنابراین، هر پرتابه دارای تکانه‌ی آغازی mv است و بر اثر برخورد تکانه‌ی خطی به اندازه‌ی Δp تغییر می‌کند. تغییر کل تکانه‌ی خطی برای n پرتابه در بازه‌ی زمانی Δt برابر با $n\Delta p$ است. ضربه‌ی حاصل روی هدف $\vec{J}$، در بازه‌ی زمانی Δt، در راستای محور x و دارای بزرگی $n\Delta p$، اما در جهت مخالف است. رابطه‌ی مربوط را در راستای محور x می‌توان چنین نوشت

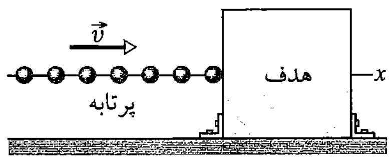
$$J = -n\Delta p \qquad (۹-۳۶)$$

در اینجا علامت منفی نشان می‌دهد که J و Δp جهت‌های مخالف دارند.

نیروی متوسط. با بازآرایی معادله‌ی ۹-۳۵ و جانشانی معادله‌ی ۹-۳۶ نیروی متوسط F_{avg} وارد شده به هدف در حین برخورد چنین به دست می‌آید:

$$F_{avg} = \frac{J}{\Delta t} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t} m\Delta v \qquad (۹-۳۷)$$

این معادله F_{avg} را برحسب $n/\Delta t$، آهنگ برخورد پرتابه‌ها به هدف، و Δv، تغییر سرعت



شکل ۹-۱۰ جریان پایایی از پرتابه‌ها با تکانه‌های مشابه به هدف ساکنی برخورد می‌کند. نیروی متوسط وارد شده به هدف، F_{avg}، به سمت راست است و بزرگی‌اش به آهنگ برخورد پرتابه‌ها، یا آهنگ برخورد جرم با هدف، بستگی دارد.

پرتابه‌ها، به دست می‌دهد.

تغییر سرعت. اگر پرتابه‌ها بر اثر برخورد متوقف شوند، در معادله‌ی ۹-۳۷ به جای Δv می‌توان مقدار زیر را قرار داد

$$\Delta v = v_f - v_i = 0 - v = -v \qquad (۹\text{-}۳۸)$$

که در آن v_i (مساوی با v) و v_f (مساوی با صفر)، به ترتیب، سرعت‌های پیش و پس از برخورد هستند. اما اگر پرتابه‌ها به طور مستقیم و بدون تغییر تندی به سمت عقب برگردند (وابجهند) داریم $v_f = -v$ و می‌توان چنین نوشت

$$\Delta v = v_f - v_i = -v - v = -2v \qquad (۹\text{-}۳۹)$$

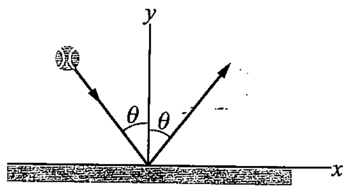
در بازه‌ی زمانی Δt، مقدار جرم برخورد کننده به هدف برابر است با $\Delta m = nm$. بنابراین، معادله‌ی ۹-۳۷ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$F_{avg} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v \qquad (۹\text{-}۴۰)$$

این معادله نیروی متوسط F_{avg} را برحسب $\Delta m / \Delta t$، آهنگ برخورد جرم به هدف، به دست می‌دهد. در اینجا، باز هم مقدار Δv را می‌توان از معادله‌ی ۹-۳۸، یا معادله‌ی ۹-۳۹، بسته به چگونگی برخورد و برگشت پرتابه‌ها، جانشانی کرد.

خودآزمایی ۵

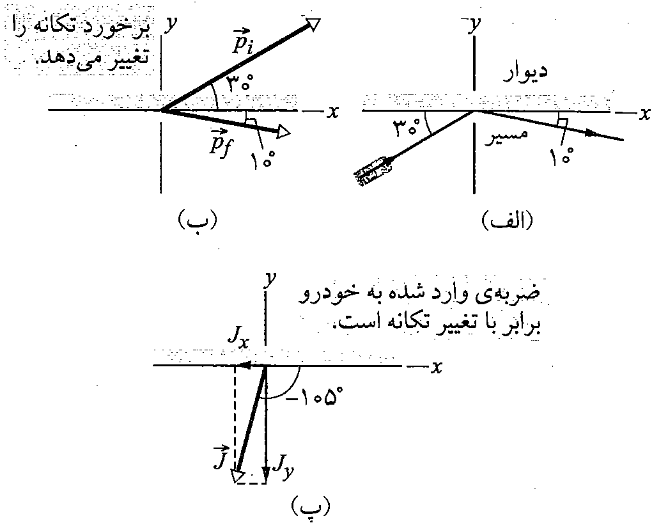
شکل زیر، با دید از بالا، تصویر توپی را که به دیوار قائمی برخورد کرده و بدون تغییر تندی واجهیده است، نشان می‌دهد. تغییر تکانه‌ی خطی توپ را $\Delta\vec{p}$ می‌گیریم. (الف) آیا Δp_x مثبت است، منفی است، یا صفر است؟ (ب) آیا Δp_y مثبت است، منفی است، یا صفر است؟ (پ) جهت $\Delta\vec{p}$ چیست؟



مسئله‌ی نمونه‌ی ۹-۴ ضربه‌ی دوبعدی، برخورد خودرو مسابقه ـ دیوار

برخورد خودرو مسابقه ـ دیوار. شکل ۹-۱۱ الف نمای مسیر یک خودرو مسابقه را در هنگام برخورد با دیوار کنار مسیر، با دید از بالا، نشان می‌دهد. درست پیش از برخورد خودرو با تندی $v_i = 70\,m/s$ در مسیر خط راستی تحت زاویه‌ی ۳۰ درجه نسبت به دیوار حرکت می‌کند. درست پس از برخورد خودرو با تندی $v_f = 50\,m/s$ در مسیر خط راستی تحت زاویه‌ی ۱۰ درجه نسبت به دیوار به حرکت ادامه می‌دهد. جرم راننده m، برابر با $80\,kg$ است.

(الف) در این برخورد ضربه‌ی وارد شده به راننده $\vec{J}$، چیست؟



شکل ۹-۱۱ (الف) نمای مسیر یک خودرو مسابقه و راننده‌اش در هنگام برخورد با دیوار، با دید از بالا. (ب) نمودار تکانه‌ی آغازی $\vec{p}_i$ و تکانه‌ی پایانی $\vec{p}_f$ راننده. (پ) نمودار ضربه‌ی وارد شده به راننده $\vec{J}$، در حین برخورد.

نکته‌های کلیدی

راننده را می‌توان به عنوان جسمی ذره مانند درنظر گرفت و آنگاه فیزیک توصیف شده در این پودمان را درباره‌اش به کار برد. اما $\vec{J}$ را نمی‌توان به طور مستقیم با استفاده کردن از معادله‌ی ۹-۳۰ حساب کرد زیرا ما درباره‌ی نیروی وارد شده به راننده در حین برخورد $\vec{F}(t)$، چیزی نمی‌دانیم. یعنی، ما تابع $\vec{F}(t)$ یا نمودار آن را در اختیار نداریم تا بتوانیم برای پیدا کردن $\vec{J}$ از آن تابع انتگرال بگیریم. با وجود این، ما می‌توانیم $\vec{J}$ را از تغییر تکانه‌ی خطی راننده $\vec{p}$، به‌کمک معادله‌ی ۹-۳۲ ($\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$) به‌دست آوریم.

محاسبات: شکل ۹-۱۱ ب تکانه‌ی راننده $\vec{p}_i$، پیش از برخورد (تحت زاویه‌ی ۳۰ درجه نسبت به محور x مثبت) و تکانه‌ی او $\vec{p}_f$، پس از برخورد (تحت زاویه‌ی ۱۰- درجه) را نشان می‌دهد. با استفاده کردن از معادله‌های ۹-۳۲ و ۹-۲۲ ($\vec{p} = m\vec{v}$)، داریم

$$\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i) \quad (۹\text{-}۴۱)$$

طرف راست این معادله را می‌توان با استفاده کردن از یک ماشین حساب ویژه‌ی محاسبات برداری به دست آورد زیرا می‌دانیم که $m = 80\,\text{kg}$، $v_f = 50\,\text{m/s}$ تحت زاویه‌ی ۱۰- درجه و $v_i = 70\,\text{m/s}$ تحت زاویه‌ی ۳۰ درجه است. اما در اینجا معادله‌ی ۹-۴۱ را به صورت مؤلفه‌ای حساب می‌کنیم.

مؤلفه‌ی x: در راستای محور x، داریم

$$J_x = m(v_{fx} - v_{ix})$$
$$J_x = (80\,\text{kg})[(50\,\text{m/s})\cos(-10^\circ) - (70\,\text{m/s})\cos 30^\circ]$$
$$J_x = -910\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

مؤلفه‌ی y: در راستای محور y، داریم

$$J_y = m(v_{fy} - v_{iy})$$
$$J_y = (80\,\text{kg})[(50\,\text{m/s})\sin(-10^\circ) - (70\,\text{m/s})\sin 30^\circ]$$
$$J_y = -3495\,\text{kg}\cdot\text{m/s} \approx -3500\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

ضربه: بنابراین، ضربه برابر است با

$$\vec{J} = (-910\hat{\text{i}} - 3500\hat{\text{j}})\,\text{kg}\cdot\text{m/s} \qquad \text{(پاسخ)}$$

و بزرگی ضربه چنین به دست می‌آید

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = 3616\,\text{kg}\cdot\text{m/s} \approx 3600\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

زاویه‌ی $\vec{J}$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\theta = \tan^{-1}\frac{J_y}{J_x} \qquad \text{(پاسخ)}$$

ماشین حساب این زاویه را ۷۵/۴ درجه حساب می‌کند. یادآوری می‌شود که نتیجه‌ی درست فیزیکی یک تانژانت معکوس باید از جمع کردن زاویه با ۱۸۰ درجه به دست آید. برای مشخص کردن نتیجه‌ی درست مؤلفه‌های $\vec{J}$ رارسم می‌کنیم (شکل ۹-۱۱ پ). نتیجه می‌گیریم مقدار واقعی θ برابراست با $75/4^\circ + 180^\circ = 255/4^\circ$، که آن را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\theta = -105^\circ \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) این برخورد $14\,\text{ms}$ طول می‌کشد. بزرگی نیروی متوسط وارد شده به راننده در این برخورد چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

با توجه به معادله‌ی ۹-۳۵ ($J = F_{\text{avg}}\Delta t$)، بزرگی نیروی متوسط F_{avg}، از نسبت بزرگی ضربه‌ی J، به مدت زمان برخورد Δt، به دست می‌آید.

محاسبات: داریم

$$F_{\text{avg}} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{۳۶۱۶\,\text{kg}\cdot\text{m/s}}{۰/۰۱۴\,\text{s}} \Rightarrow$$

$$F_{\text{avg}} = ۲/۵۸۳ \times ۱۰^{۵}\,\text{N} \approx ۲/۶ \times ۱۰^{۵}\,\text{N} \quad \text{(پاسخ)}$$

با استفاده کردن از معادله‌ی $F = ma$ به‌ازای $m = ۸۰\,\text{kg}$ می‌توان نشان داد که بزرگی شتاب متوسط راننـده در حـین برخـورد در حدود $۳/۲۲ \times ۱۰^{۳}\,\text{m/s}^{۲} = ۳۲۹\,g$ است، که‌شتابی مرگ‌بار است.

نجات‌یابی: مهندسان مکانیک تلاش مـی‌کننـد احتمـال مـرگ‌بـار بودن برخورد را با طراحی و ساختن دیوارهای بـا «ضـربه‌گیـری» بیشتر کنار مسیر مسابقه کاهش دهند تا برخـورد در مـدت زمـان بیشتری صورت گیرد. برای مثال، اگر در این مسـئله مـدت زمـان برخورد ۱۰ برابر می‌شد و داده‌های دیگر ثابت می‌ماندند. بزرگـی نیروی متوسط و بزرگی شتاب متوسط ۱۰ برابر کمتـر و احتمـال نجات یافتن بیشتر می‌شد.

۹–۵ پایستگی تکانه‌ی خطی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۹–۲۶ پایستگی تکانه‌های خطـی مربـوط بـه دسـتگاهی منـزوی از ذرات را برای ربط دادن تکانه‌های آغازی ذرات به تکانـه‌هـای آن‌ها در یک لحظه‌ی بعدی، به کار ببرید.

۹–۲۷ مشخص کنید که پایستگی تکانه‌ی خطـی را در راسـتای هـر محور فردی با استفاده کردن از مؤلفه‌ها در راسـتای آن محـور می‌توان بـه کـار بـرد، ***بـه شـرطی*** کـه هـیچ مؤلفـه‌ی نیـروی خارجی‌ای در راستای آن محور وارد نشود.

نکته‌های کلیدی

- اگر دستگاهی بسته و منزوی باشد، بـه گونـه‌ای کـه بـه آن هـیچ نیروی خارجی وارد نشود، در آن صورت، تکانـه‌ی خطـی $\vec{P}$ بایـد ثابت باشد، حتی اگر تغییرات درونی وجود داشته باشند:

$$\vec{P} = \text{ثابت} \quad \text{(دستگاه بسته، منزوی)}$$

- این پایستگی تکانه‌ی خطی را می‌توان برحسـب تکانـه‌ی آغـازی دستگاه و تکانه‌ی آن در یک لحظه‌ی بعدی نوشت:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad \text{(دستگاه بسته، منزوی)}$$

پایستگی تکانه‌ی خطی

فرض کنید نیروی خارجی برایند $\vec{F}_{\text{net}}$ (و در نتیجه ضربه‌ی $\vec{J}$) وارد شـده بـه یـک دسـتگاه ذرات صفر است (دستگاه منزوی است) و هـیچ ذره‌ای بـه ایـن دسـتگاه وارد یـا از آن خـارج نمی‌شود (دستگاه بسته است). با قرار دادن $\vec{F}_{\text{net}} = ۰$ در معادله‌ی ۹–۲۷، داریم $d\vec{P}/dt = ۰$، یا

$$\vec{P} = \text{ثابت} \quad \text{(دستگاه بسته، منزوی)} \qquad (۹\text{–}۴۲)$$

به عبارت دیگر:

هرگاه هیچ نیروی خارجی‌ای به دستگاه ذرات وارد نشود، تکانه‌ی خطی کل دستگاه $\vec{P}$، نمی‌تواند تغییر کند.

این نتیجه را **قانون پایستگی تکانه‌ی خطی** می‌نامند و آن را به صورت فرمولی زیر هم می‌توان نوشت

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \qquad \text{(دستگاه بسته، منزوی)} \qquad (۹-۴۳)$$

به عبارت دیگر، این معادله در مورد یک دستگاه بسته و منزوی نشان می‌دهد که:

(تکانه‌ی خطی کل در زمان بعدی t_f) = (تکانه‌ی خطی کل در زمان آغازی t_i)

هشدار: تکانه را نباید با انرژی اشتباه کرد. در مسئله‌های نمونه‌ی این پودمان، تکانه پایسته است اما انرژی به طور قطع پایسته نیست.

معادله‌های ۹-۴۲ و ۹-۴۳ شکل برداری دارند و هر یک هم‌ارز با سه معادله‌ی مربوط به پایستگی تکانه‌ی خطی در سه راستای عمود بر هم دستگاه مختصات x، y و z، هستند. تکانه‌ی خطی، بسته به نیروهای مؤثر به یک دستگاه، ممکن است در یک یا دو راستا، و نه در همه‌ی راستاها، پایسته باشد. به هر حال:

هرگاه مؤلفه‌ی *نیروی خارجی* برایند وارد شده به یک دستگاه بسته در راستای محوری صفر باشد، مؤلفه‌ی تکانه‌ی خطی دستگاه در راستای آن محور نمی‌تواند تغییر کند.

در هنگام حل کردن یک مسئله، چگونه می‌توان فهمید که تکانه‌ی خطی، مثلاً در راستای محور x، می‌تواند پایسته باشد؟ مؤلفه‌های نیرو در راستای آن محور را بازبینی کنید. هرگاه برایند این مؤلفه‌ها صفر باشد، در آن صورت پایستگی برقرار است. به عنوان مثال، فرض کنید پرتقالی را در فضای اتاق پرتاب می‌کنیم. در حین پرواز کردن، تنها نیروی خارجی مؤثر به پرتقال (که آن را به عنوان دستگاه در نظر می‌گیریم)، نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ است، که در راستای قائم و به پایین‌سو است. بنابراین، مؤلفه‌ی قائم تکانه‌ی خطی پرتقال تغییر می‌کند، اما چون هیچ نیروی خارجی افقی‌ای به پرتقال وارد نمی‌شود، مؤلفه‌ی افقی تکانه‌ی خطی نمی‌تواند تغییر کند.

توجه کنید که نظر ما معطوف به نیروی خارجی مؤثر به یک دستگاه بسته است. اگرچه نیروهای درونی می‌توانند تکانه‌ی خطی برخی بخش‌های دستگاه را تغییر دهند، این نیروها نمی‌توانند تکانه‌ی خطی کل تمام دستگاه را تغییر بدهند. برای مثال، عده‌ی زیادی نیرو در میان اندام‌های بدن ما اثر می‌کنند، اما آن‌ها (خوشبختانه) ما را به جایی پرتاب نمی‌کنند.

مسئله‌های نمونه‌ی این پودمان به انفجارهای یک بعدی (یعنی، حرکت‌هایی که پیش و پس

از انفجار در راستای یک تک محور صورت می‌گیرند) یا دو بعدی (یعنی، حرکت‌هایی که در یک صفحه‌ی شامل دو محور انجام می‌شوند) مربوط هستند. در پودمان‌های بعدی برخوردها را بررسی خواهیم کرد.

خودآزمایی ۶

وسیله‌ای که در آغاز روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک قرار دارد، منفجر و به دو پاره تقسیم می‌شود و این پاره‌ها بر روی سطح می‌لغزند. یکی از پاره‌ها در جهت مثبت محور x می‌لغزد. (الف) مجموع تکانه‌های خطی دو پاره پس از انفجار چیست؟ (ب) آیا پاره‌ی دوم می‌تواند تحت زاویه‌ای نسبت به محور x حرکت کند؟ (پ) جهت تکانه‌ی خطی پاره‌ی دوم چیست؟

مسئله‌ی نمونه‌ی ۹-۵ انفجار یک بعدی، سرعت نسبی، سفینه‌ی فضایی

انفجار یک بعدی: شکل ۹-۱۲ الف یک سفینه‌ی فضایی با مدول بار آن به جرم کل M را نشان می‌دهد، که در فضا در راستای محور x حرکت می‌کند. سرعت آغازی آن‌ها نسبت به خورشید $\vec{v}_i$، دارای بزرگی ۲۱۰۰km/h است. سفینه با یک انفجار کوچک، مدول بار به‌جرم $۰/۲۰M$ را پرتاب می‌کند (شکل ۹-۱۲ ب). پس از آن سفینه با تندی‌ای به اندازه‌ی ۵۰۰km/h بیشتر از تندی مدول بار در راستای محور x حرکت می‌کند؛ یعنی تندی نسبی v_{rel}، میان سفینه و مدول ۵۰۰km/h است. در این صورت، $\vec{v}_{HS}$، سرعت سفینه نسبت به خورشید چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

چون دستگاه سفینه ـ مدول بار بسته و منزوی است، تکانه‌ی خطی کل آن پایسته است، یعنی

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \qquad (۹-۴۴)$$

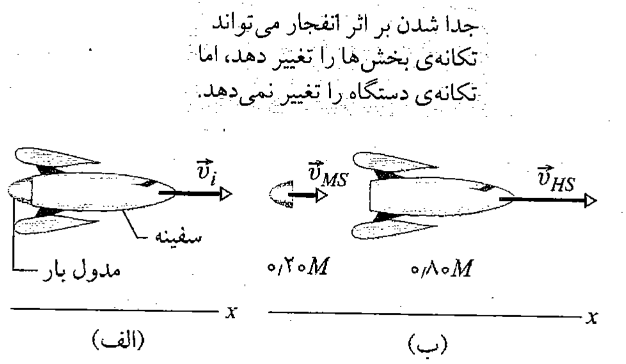
که در آن شاخص‌های پایین i و f، به ترتیب، مربوط به مقادیر پیش و پس از جدا شدن مدول هستند. (در اینجا به دقت نیاز داریم. اگرچه تکانه‌ی دستگاه تغییر نمی‌کند، تکانه‌های سفینه و مدول بار، به طور مسلم، تغییر می‌کنند).

محاسبات: چون حرکت در راستای یک تک محور صورت می‌گیرد، تکانه‌ها و سرعت‌ها را با استفاده کردن از یک علامت برای مشخص کردن جهت، می‌توان برحسب مؤلفه‌های x آن‌ها نوشت. پیش از پرتاب شدن مدول بار، داریم

$$P_i = Mv_i \qquad (۹-۴۵)$$

سرعت پرتاب شدن مدول نسبت به خورشید را v_{MS} می‌گیریم. در این صورت تکانه‌ی خطی کل دستگاه پس از پرتاب شدن برابر است با

$$P_f = (۰/۲۰M)v_{MS} + (۰/۸۰M)v_{HS} \qquad (۹-۴۶)$$



شکل ۹-۱۲ (الف) یک سفینه‌ی فضایی با یک مدول بار با سرعت آغازی $\vec{v}_i$ در حال حرکت است. (ب) سفینه مدول بار را پرتاب کرده است. اکنون، سرعت‌ها نسبت به خورشید، $\vec{v}_{MS}$ برای مدول و $\vec{v}_{HS}$ برای سفینه، هستند.

که در آن جمله‌ی اول طرف راست معادله، تکانه‌ی خطی مدول و جمله‌ی دوم تکانه‌ی خطی سفینه است. v_{MS} را به صورت زیر می‌توان به سرعت‌های معلوم ربط داد

$$\left(\begin{array}{c}\text{سرعت مدول بار}\\\text{نسبت به خورشید}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{سرعت سفینه}\\\text{نسبت به مدول بار}\end{array}\right)+\left(\begin{array}{c}\text{سرعت سفینه}\\\text{نسبت به خورشید}\end{array}\right)$$

این رابطه برحسب نمادهای سرعت‌ها چنین نوشته می‌شود

$$v_{HS} = v_{\text{rel}} + v_{MS} \qquad (۴۷\text{–}۹)$$

یا

$$v_{MS} = v_{HS} - v_{\text{rel}}$$

با جانشانی رابطه‌ی v_{MS} در معادله‌ی ۹-۴۶، و سپس جانشانی معادله‌های ۹-۴۵ و ۹-۴۶ در معادله‌ی ۹-۴۴، داریم

$$M v_i = ۰٫۲۰ M (v_{HS} - v_{\text{rel}}) + ۰٫۸۰ M v_{HS}$$

که از آنجا، خواهیم داشت

$$v_{HS} = v_i + ۰٫۲۰ v_{\text{rel}}$$

یا

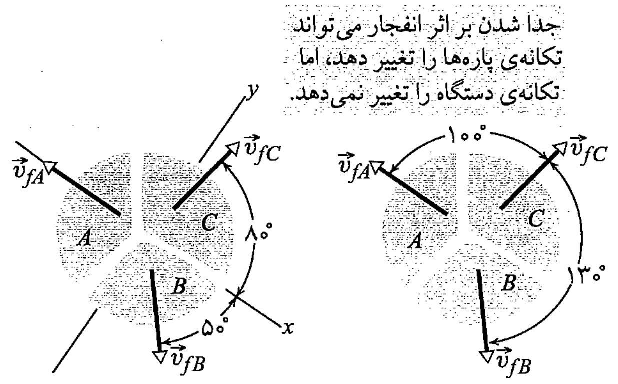
$$v_{HS} = ۲۱۰۰\,\text{km/h} + (۰٫۲۰)(۵۰۰\,\text{km/h}) \Rightarrow$$

$$v_{HS} = ۲۲۰۰\,\text{km/h}$$ **(پاسخ)**

مسئله‌ی نمونه‌ی ۹-۶ انفجار دو بعدی، تکانه‌ی خطی، نارگیل

انفجار دوبعدی: ترقه‌ای درون نارگیلی به جرم M قرار دارد. ترقه منفجر می‌شود و نارگیل را که در آغاز بر روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک ساکن است، به سه پاره تقسیم می‌کند و پاره‌ها بر روی سطح می‌لغزند. شکل ۹-۱۳ الف تصویر این رویداد را، با دید از بالا، نشان می‌دهد. پاره‌ی C به جرم $۰٫۳۰M$، دارای تندی پایانی $v_{fC} = ۵٫۰\,\text{m/s}$ است.

(الف) تندی پاره‌ی B به جرم $۰٫۲۰M$ چیست؟



(ب) (الف)

شکل ۹-۱۳ سه پاره‌ی یک نارگیل منفجر شده در سه جهت در روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک از هم دور می‌شوند. (الف) نمودار تصویر این رویداد با دید از بالا. (ب) همان نمودار همراه با دستگاه محورهای دو بعدی منطبق بر آن.

نکته‌ی کلیدی

نخست باید بدانیم که تکانه‌ی خطی پایسته می‌ماند یا نه. توجه کنید که (۱) نارگیل و پاره‌های آن یک دستگاه بسته تشکیل می‌دهند، (۲) نیروهای حاصل از انفجار برای دستگاه، نیروهای درونی به حساب می‌آیند و (۳) هیچ نیروی خارجی برایندی به دستگاه وارد نمی‌شود. بنابراین، تکانه‌ی خطی دستگاه پایسته است. (در اینجا به دقت نیاز داریم: اگرچه تکانه‌ی دستگاه تغییر نمی‌کند، تکانه‌های پاره‌ها، به طور مسلم، تغییر می‌کنند).

محاسبات: برای آغاز کردن، دستگاه مختصات xy را، مطابق شکل ۹-۱۳ ب، روی نارگیل به‌گونه‌ای قرار می‌دهیم که محور x منفی بر راستای $\vec{v}_{fA}$ منطبق باشد. محور x با راستای $\vec{v}_{fC}$ زاویه‌ی ۸۰ درجه و با راستای $\vec{v}_{fB}$ زاویه‌ی ۵۰ درجه تشکیل می‌دهد.

تکانه‌ی خطی در راستای هر یک از محورهای x و y پایسته است. با استفاده کردن از محور y می‌توان نوشت

$$P_{iy} = P_{fy} \qquad (۴۸\text{–}۹)$$

که در آن شاخص پایین i مربوط به مقدار آغازی (پیش از انفجار) و شاخص پایین y مربوط به مؤلفه‌ی y تکانه‌ی $\vec{P}_i$ یا $\vec{P}_f$ است.

مؤلفه‌ی P_{iy} تکانه‌ی خطی آغازی صفر است، زیرا نارگیل در آغاز ساکن است. برای پیدا کردن رابطه‌ی مربوط به P_{fy}،

مؤلفه‌ی y تکانه‌ی خطی پایانی هر پاره را با استفاده کردن از معادله‌ی ۹-۲۲ برای مؤلفه‌ی y $(P_y = mv_y)$، پیدا می‌کنیم:

$$p_{fA,y} = 0$$
$$p_{fB,y} = -0/20\,M\,v_{fB,y} = -0/20\,M\,v_{fB}\sin 50°$$
$$p_{fC,y} = 0/30\,M\,v_{fC,y} = 0/30\,M\,v_{fC}\sin 80°$$

(توجه کنید که به خاطر چگونگی انتخاب محورها، داریم $p_{fA,y} = 0$). اکنون، معادله‌ی ۹-۴۸ را می‌توان چنین نوشت

$$P_{iy} = P_{fy} = p_{fA,y} + p_{fB,y} + p_{fC,y}$$

پس، به ازای $v_{fC} = 5/0\,m/s$، داریم

$$0 = 0 - 0/20\,M\,v_{fB}\sin 50° + (0/30\,M)(5/0\,m/s)\sin 80°$$

که از آنجا، خواهیم داشت

(پاسخ) $$v_{fB} = 9/64\,m/s \approx 9/6\,m/s$$

(ب) تندی پاره‌ی A چقدر است؟

محاسبات: تکانه‌ی خطی در راستای محور x هم پایسته است زیرا در راستای آن محور هیچ نیروی خارجی‌ای به نارگیل و بازه‌ها وارد نمی‌شود. در نتیجه، داریم

$$P_{ix} = P_{fx} \qquad (۹\text{-}۴۹)$$

که در آن $P_{ix} = 0$، زیرا نارگیل در آغاز در حال سکون بوده است. برای پیدا کردن P_{fx}، مؤلفه‌های x تکانه‌های پایانی را با استفاده کردن از این واقعیت که پاره‌ی A باید دارای جرم $0/50\,M$ (مساوی با $M - 0/20\,M - 0/30\,M$) باشد، به دست می‌آوریم:

$$p_{fA,x} = -0/50\,M\,v_{fA}$$
$$p_{fB,x} = 0/20\,M\,v_{fB,x} = 0/20\,M\,v_{fB}\cos 50°$$
$$p_{fC,x} = 0/30\,M\,v_{fC,x} = 0/30\,M\,v_{fC}\cos 80°$$

اکنون، معادله‌ی ۹-۴۹ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$P_{ix} = P_{fx} = p_{fA,x} + p_{fB,x} + p_{fC,x}$$

پس، به ازای $v_{fC} = 5/0\,m/s$ و $v_{fB} = 9/64\,m/s$، داریم

$$0 = -0/50\,M\,v_{fA} + 0/20\,M(9/64\,m/s)\cos 50° + 0/30\,M(5/0\,m/s)\cos 80°$$

که از آنجا، داریم

(پاسخ) $$v_{fA} = 3/0\,m/s$$

۹-۶ تکانه و انرژی جنبشی در برخوردها

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۹-۲۸ تفاوت میان برخوردهای کشسان، برخوردهای ناکشسان، و برخوردهای ناکشسان کامل را تشخیص دهید.

۹-۲۹ برخورد یک بعدی را به گونه‌ای مشخص کنید که اشیا پیش و پس از برخورد در راستای یک تک محور حرکت می‌کنند.

۹-۳۰ قانون پایستگی تکانه‌ی مربوط به برخورد یک بعدی منزوی را برای ربط دادن تکانه‌های آغازی اشیا به تکانه‌های پس از برخورد، به کار ببرید.

۹-۳۱ مشخص کنید که در یک دستگاه منزوی، حتی اگر اشیا هم با هم برخورد کنند، تکانه و سرعت مرکز جرم تغییر نمی‌کند.

نکته‌های کلیدی

- در برخورد ناکشسان دو جسم، انرژی جنبشی دستگاه دو جسمی پایسته نیست. اگر دستگاه بسته و منزوی باشد، تکانه‌ی خطی کل دستگاه ***باید*** پایسته باشد، که بیان فرمولی آن می‌تواند به شکل برداری زیر باشد

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

که در آن شاخص‌های پایین i و f، به ترتیب، نشانگر مقادیر

درست پیش و درست پس از، برخورد هستند.

- هرگاه حرکت اجسام در راستای یک تک محور انجام شود، برخورد یک بعدی است و معادله را می‌توان برحسب مؤلفه‌های سرعت در راستای آن محور نوشت:

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f}$$

- هرگاه اجسام به هم بچسبند، برخورد ناکشسان کامل است و اجسام دارای سرعت پایانی یکسان V هستند (چون آن‌ها به هم چسبیده‌اند).
- مرکز جرم یک دستگاه بسته و منزوی شامل دو جسم برخورد کننده بر اثر برخورد تغییر نمی‌کند. به ویژه، سرعت مرکز جرم $\vec{v}_{com}$، نمی‌تواند بر اثر برخورد تغییر کند.

تکانه و انرژی جنبشی در برخوردها

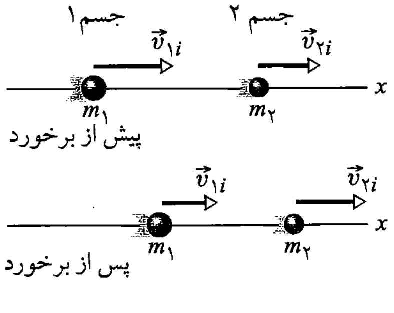
در پودمان ۹-۴، برخورد دو جسم ذره مانند را در نظر گرفتیم، اما در هر لحظه تنها به یکی از آن‌ها توجه کردیم. در چند پودمان بعد توجه خود را به خود دستگاه معطوف، و فرض می‌کنیم که دستگاه بسته و منزوی است. در پودمان ۹-۵، درباره‌ی چنین دستگاهی قاعده‌ای را مورد بحث قرار دادیم: تکانه‌ی خطی کل دستگاه $\vec{P}$، نمی‌تواند تغییر کند زیرا هیچ نیروی خارجی برایندی آن را تغییر نمی‌دهد. این قاعده بسیار توانمند است زیرا به ما اجازه می‌دهد نتیجه‌های یک برخورد را ***بدون*** دانستن جزئیات برخورد (نظیر میزان آسیب وارد شده) معین کنیم.

در اینجا انرژی جنبشی کل دستگاه دو جسم برخورد کننده را نیز مورد توجه قرار خواهیم داد. اگر در یک برخورد تمام کمیت‌ها بی‌تغییر بمانند، در آن صورت، ***انرژی جنبشی دستگاه پایسته است*** (مقدار آن پیش و پس از برخورد یکسان است). چنین برخوردی را **برخورد کشسان** می‌نامند. در برخوردهای میان اجسام معمولی، مانند دو خودرو، یا گوی و چوب بیس‌بال، همیشه مقداری انرژی جنبشی به صورت‌های دیگر، مانند انرژی گرمایی یا انرژی صوتی، تبدیل می‌شود. بنابراین، ***انرژی جنبشی دستگاه پایسته نیست***. چنین برخوردی را **برخورد ناکشسان** می‌نامند.

با وجود این، در چنین حالت‌هایی برخورد اجسام معمولی را، به تقریب، می‌توان کشسان در نظر گرفت. فرض کنید توپ بزرگی را از بالا روی یک سطح سفت رها می‌کنیم. اگر برخورد میان توپ و سطح (یا زمین) کشسان باشد، توپ در اثر برخورد انرژی جنبشی از دست نمی‌دهد و تا ارتفاع اولی خود به بالا وامی‌جهد. اما، ارتفاع واقعی برگشت توپ اندکی کمتر است، و این، نشان می‌دهد که در حین برخورد مقداری انرژی جنبشی تلف شده است. از این رو، برخورد تا حدی ناکشسان است. فعلاً از این اتلاف کم انرژی جنبشی چشم‌پوشی می‌کنیم تا بتوانیم برخورد را به تقریب کشسان بگیریم.

برخورد ناکشسان دو جسم همیشه با اتلاف انرژی جنبشی دستگاه همراه است. بیشترین اتلاف هنگامی به‌وجود می‌آید که اجسام به یکدیگر بچسبند، این حالت برخورد را **برخورد ناکشسان کامل** می‌نامند. برخورد گوی با چوب بیس‌بال ناکشسان است. اما برخورد یک گلوله‌ی گِلی خیس با یک چوب بیس‌بال ناکشسان کامل است زیرا گِل به چوب بیس‌بال می‌چسبد.

آرایش نوعی مربوط به برخورد ناکشسان



شکل ۹-۱۴ دو جسم ۱ و ۲، پیش و پس از یک برخورد ناکشسان، در راستای محور x حرکت می‌کنند.

برخوردهای ناکشسان یک بعدی

برخورد ناکشسان یک بعدی

شکل ۹-۱۴ دو جسم را درست پیش و پس از برخورد یک بعدی نشان می‌دهد. در این شکل سرعت‌های پیش از برخورد (با شاخص پایین i) و پس از برخورد (با شاخص پایین f) نشان داده شده‌اند. این دو جسم دستگاهی تشکیل می‌دهند، که بسته و منزوی است. قانون پایستگی تکانه‌ی خطی مربوط به این دستگاه دو جسمی را می‌توان چنین نوشت

(تکانه‌ی کل $\vec{P}_f$ پس از برخورد) = (تکانه‌ی کل $\vec{P}_i$ پیش از برخورد)

این معادله با استفاده کردن از نمادها چنین نوشته می‌شود

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \quad \text{(پایستگی تکانه‌ی خطی)} \qquad (۹-۵۰)$$

چون حرکت یک بعدی است، پیکان‌های مربوط به بردارها را می‌توان حذف و فقط از مؤلفه‌ها در راستای محور و نشان دادن جهت با علامت، استفاده کرد. در نتیجه، با توجه به معادله‌ی $p = mv$، معادله‌ی ۹-۵۰ را می‌توان چنین نوشت

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad (۹-۵۱)$$

اگر، مثلاً، مقادیر مربوط به جرم‌ها، سرعت‌های آغازی و یکی از سرعت‌های پایانی دو جسم معلوم باشند، سرعت پایانی جسم دیگر را می‌توان با استفاده کردن از معادله‌ی ۹-۵۱ به دست آورد.

برخورد ناکشسان کامل یک بعدی

در برخورد ناکشسان کامل دوجسم به هم می چسبند.

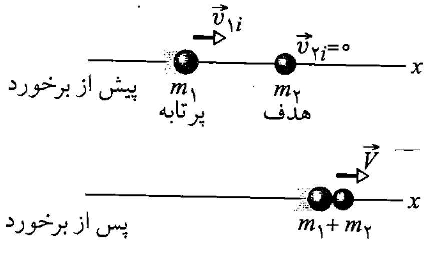
شکل ۹-۱۵ دو جسم را پیش و پس از برخورد ناکشسان کامل (به معنی به هم چسبیدن پس از برخورد) نشان می‌دهد. جسم به جرم m_2 در آغاز به حال سکون است ($v_{2i} = 0$). این جسم را می‌توان **هدف** و جسم نزدیک شونده را **پرتابه** نامید. پس از برخورد، دو جسم به هم می‌چسبند و با سرعت V حرکت می‌کنند. برای این حالت، معادله‌ی ۹-۵۱ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2)V \qquad (۹-۵۲)$$

و از آنجا، داریم

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \qquad (۹-۵۳)$$

اگر مقادیر جرم‌ها و سرعت آغازی پرتابه v_{1i}، معلوم باشند، سرعت پایانی V را با استفاده کردن از معادله‌ی ۹-۵۳ می‌توان به دست آورد. توجه کنید که V باید کمتر از v_{1i} باشد، چون نسبت $m_1/(m_1 + m_2)$ کمتر از واحد است.



شکل ۹-۱۵ نمودار برخورد ناکشسان کامل میان دو جسم. پیش از برخورد، جسم با جرم m_2 ساکن است و جسم با جرم m_1 یک راست به سوی آن حرکت می‌کند. پس از برخورد، دو جسم به هم می‌چسبند و با سرعت یکسان $\vec{V}$ حرکت می‌کنند.

سرعت مرکز جرم

در یک دستگاه بسته و منزوی، سرعت مرکز جرم دستگاه، $\vec{v}_{com}$، بر اثر برخورد تغییر نمی‌کند، زیرا به خاطر منزوی بودن دستگاه هیچ نیروی برایند خارجی‌ای برای تغییر دادن آن وجود ندارد. برای پیدا کردن رابطه‌ی مربوط به $\vec{v}_{com}$ دوباره دستگاه دو جسمی و برخورد یک بعدی شکل ۹-۱۴ را درنظر می‌گیریم. با استفاده کردن از معادله‌ی ۹-۲۵ $(\vec{P} = M\vec{v}_{com})$ می‌توان $\vec{v}_{com}$ را به تکانه‌ی خطی کل دستگاه دو جسمی ربط داد و چنین نوشت

$$\vec{P} = M\vec{v}_{com} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{com} \qquad (۹-۵۴)$$

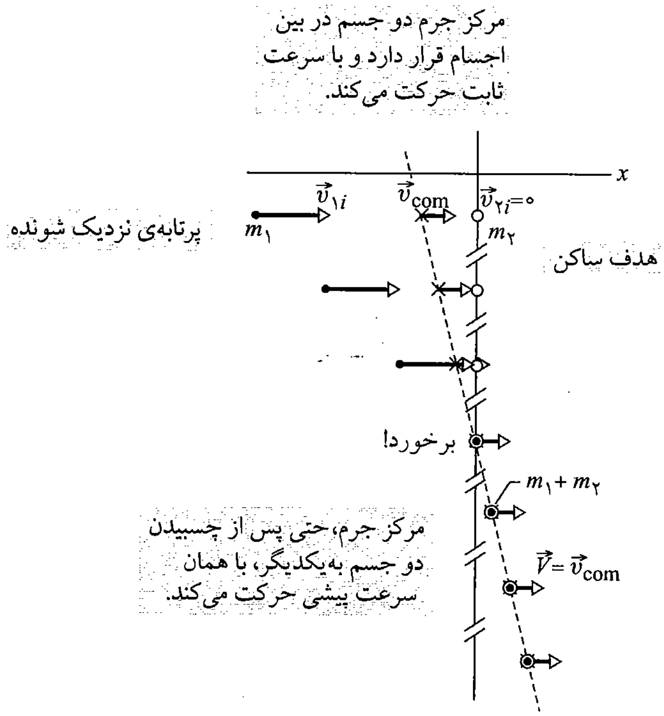
تکانه‌ی خطی کل $\vec{P}$ درحین برخورد پایسته می‌ماند. بنابراین، مقدار آن می‌تواند از هریک از دو طرف معادله‌ی ۹-۵۰ به‌دست آید. با استفاده کردن از جمله‌ی طرف چپ این معادله چنین می‌نویسیم

$$\vec{P} = \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} \qquad (۹-۵۵)$$

با جانشانی این مقدار $\vec{P}$ در معادله‌ی ۹-۵۴، و حل کردن معادله نسبت به $\vec{v}_{com}$، داریم

$$\vec{v}_{com} = \frac{\vec{P}}{m_1 + m_2} = \frac{\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i}}{m_1 + m_2} \qquad (۹-۵۶)$$

جمله‌ی طرف راست این معادله مقداری ثابت است و مقدار $\vec{v}_{com}$ نیز پیش و پس از برخورد یکسان است.



شکل ۹-۱۶ رشته‌ای از تک تصویرهای ثابت شده‌ی دستگاه دو جسمی شکل ۹-۱۵، که در آن برخورد ناکشسان کامل انجام می‌شود. در هر تصویر مرکز جرم دستگاه نشان داده شده است. سرعت مرکز جرم $\vec{v}_{com}$، بر اثر برخورد تغییر نکرده است. چون دو جسم پس از برخورد به هم می‌چسبند، سرعت مشترک آن‌ها $\vec{V}$، برابر است با $\vec{v}_{com}$.

برای مثال، شکل ۹-۱۶ در یک رشته از تک تصویرهای ثابت شده، حرکت مرکز جرم مربوط به برخورد ناکشسان کامل شکل ۹-۱۵ را نشان می‌دهد. جسم ۲ هدف است و تکانه‌ی خطی آغازی آن در معادله‌ی ۹-۵۶ برابر است با $\vec{p}_{2i} = m_2\vec{v}_{2i} = 0$. جسم ۱ پرتابه است و تکانه‌ی خطی آغازی آن در معادله‌ی ۹-۵۶ برابر است با $\vec{p}_{1i} = m_1\vec{v}_{1i}$. توجه کنید که درحین پیشروی رشته‌ی تک تصویرها به‌سمت هدف و هم‌چنین، پس از برخورد، مرکز جرم با سرعت ثابت به سمت راست حرکت می‌کند. پس از برخورد سرعت پایانی مشترک دو جسم $\vec{V}$، برابر با $\vec{v}_{com}$ است، زیرا پس از آن مرکز جرم همراه با اجسام چسبیده به هم حرکت می‌کند.

خودآزمایی ۷

جسم ۱ و جسم ۲ یک برخورد یک بعدی ناکشسان کامل انجام می‌دهند. اگر تکانه‌های آغازی هر جسم، به‌ترتیب، (الف) $10\,kg\cdot m/s$ و صفر؛ (ب) $10\,kg\cdot m/s$ و $4\,kg\cdot m/s$؛ (پ) $10\,kg\cdot m/s$ و $-4\,kg\cdot m/s$ باشد، تکانه‌ی پایانی آن‌ها چقدر است؟

مسئله‌ی نمونه‌ی ۹-۷ پایستگی تکانه، آونگ بالیستیک

اکنون یک مثال مربوط به روشی مرسوم در فیزیک را بیان می‌کنیم. آزمایش ارائه شده در اینجا را نمی‌توان به طور کامل بررسی کرد (چون معادله‌ی قابل استفاده‌ای را برای آن نداریم). بنابراین، آن را به دو مرحله تقسیم می‌کنیم تا بتواند به طور جدا جدا بررسی شود (چون برای آن‌ها معادله‌هایی داریم).

آونگ بالیستیک وسیله‌ای بود که پیش از ساخته شدن وسایل اندازه‌گیری الکترونیکی برای اندازه‌گیری تندی گلوله‌ها مورد استفاده قرار می‌گرفت. آونگ نشان داده شده در شکل ۹-۱۷ شامل یک قطعه چوب بزرگ به جرم $M = 5.4\,kg$ است که از دو ریسمان دراز آویخته شده است. گلوله‌ای به جرم $m = 9.5\,g$ به سمت قطعه چوب شلیک و در آن متوقف می‌شود. در نتیجه، ***دستگاه قطعه ـ گلوله*** به بالاسو تاب می‌خورد و تا پیش از رسیدن آونگ به انتهای کمان مسیر و توقف لحظه‌ای آن، مرکز جرم دستگاه تا ارتفاع $h = 6.3\,cm$ بالا می‌رود. تندی گلوله درست در لحظه‌ی برخورد به قطعه چوب چقدر بوده است؟

نکته‌های کلیدی

در اینجا می‌توان دید که تندی گلوله v، ارتفاع h را معین می‌کند. اما برای پیدا کردن رابطه‌ی میان این دو کمیت نمی‌توان از قانون پایستگی انرژی مکانیکی استفاده کرد، زیرا وقتی گلوله در چوب فرو می‌رود، به‌طور قطع انرژی از صورت مکانیکی به‌صورت‌های دیگر (مانند انرژی گرمایی و انرژی شکاف‌دهنده‌ی چوب) تبدیل می‌شود. با این حال، این حرکت پیچیده را می‌توان به دو مرحله تقسیم و هریک را به طور جداگانه تحلیل کرد: (۱) مرحله‌ی برخورد گلوله ـ قطعه چوب و (۲) مرحله‌ی بالا رفتن دستگاه گلوله ـ قطعه چوب، که درضمن آن ***انرژی مکانیکی پایسته است***.

مرحله‌ی استدلال ۱: چون زمان برخورد در درون دستگاه گلوله ـ قطعه چوب بسیار کوتاه است، دو فرض مهم را می‌توان در نظر گرفت: (۱) در حین برخورد نیروی گرانشی وارد شده به قطعه چوب و نیروی وارد شده به قطعه چوب از سوی ریسمان‌ها هنوز در حال توازن‌اند. پس، در حین برخورد ضربه‌ی خارجی برایند وارد شده به دستگاه گلوله ـ قطعه چوب صفر است. بنابراین، دستگاه منزوی و تکانه‌ی خطی کل آن پایسته است:

$$\begin{pmatrix}\text{تکانه‌ی کل}\\ \text{پس از برخورد}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{تکانه‌ی کل}\\ \text{پیش از برخورد}\end{pmatrix} \qquad (۹-۵۷)$$

(۲) این برخورد یک بعدی است، بدین معنی که راستای حرکت گلوله و چوب ***درست پس از برخورد***، همان راستای حرکت اولی در گلوله است.

چون برخورد یک بعدی است، قطعه چوب در آغاز ساکن است و گلوله در چوب گیر می‌کند. در اینجا برای بیان کردن قانون پایستگی تکانه‌ی خطی می‌توان از معادله‌ی ۹-۵۳ استفاده کرد. با جانشانی نمادهای مناسب این مسئله در آن معادله، داریم

$$V = \frac{m}{m+M} v \qquad (۹-۵۸)$$

مرحله‌ی استدلال ۲: وقتی گلوله و قطعه چوب با هم به سمت بالا می‌روند، انرژی مکانیکی دستگاه گلوله ـ قطعه ـ زمین پایسته است:

$$\begin{pmatrix}\text{انرژی مکانیکی}\\ \text{در بالا}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{انرژی مکانیکی}\\ \text{در پایین}\end{pmatrix} \qquad (۹-۵۹)$$

(این انرژی مکانیکی تحت اثر نیروی وارد شده به قطعه چوب از سوی ریسمان‌ها تغییر نمی‌کند، زیرا این نیرو همیشه بر راستای حرکت عمود است). سطح تراز اولی قطعه چوب را به عنوان سطح مرجع با انرژی پتانسیل گرانشی صفر در نظر می‌گیریم. پایسته بودن انرژی مکانیکی به این معنی است که انرژی جنبشی دستگاه در آغاز حرکت برابر با انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه در بالاترین نقطه است. چون تندی گلوله و قطعه چوب در آغاز حرکت و بی‌درنگ پس از برخورد V است، قانون پایستگی انرژی مکانیکی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{1}{۲}(m+M)V^{۲} = (m+M)gh \qquad (۹-۶۰)$$

ترکیب مرحله‌ها: باجانشانی V از معادله‌ی ۹-۵۸، خواهیم داشت

$$v = \frac{m+M}{m}\sqrt{۲gh} \qquad (۹-۶۱)$$

$$v = \left(\frac{۰/۰۰۹۵\,\text{kg} + ۵/۴\,\text{kg}}{۰/۰۰۹۵\,\text{kg}}\right)\sqrt{(۲)(۹/۸\,\text{m/s}^{۲})(۰/۰۶۳\,\text{m})} \Rightarrow$$

$$v = ۶۳۰\,\text{m/s} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

آونگ بالیستیک، نوعی «مبدل» است که تندی زیاد یک شیء سبک (گلوله) را به تندی کم و قابل اندازه‌گیری یک شیء سنگین (قطعه چوب) تبدیل می‌کند.

شکل ۹-۱۷ آونگ بالیستیک مورد استفاده برای اندازه‌گیری تندی گلوله‌ها.

۹-۷ برخوردهای کشسان یک بعدی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۹-۳۲ برای برخوردهای کشسان منزوی یک بعدی، قانون‌های پایستگی مربوط به انرژی کل و تکانه‌ی برایند اجسام برخورد کننده، هر دو، را برای ربط دادن مقادیر آغازی به مقادیر پس از برخورد، به کار ببرید.

۹-۳۳ برای پرتابه‌ای که به یک هدف ساکن برخورد می‌کند، حرکت حاصل مربوط به سه حالت کلی، جرم‌های مساوی، هدف سنگین‌تر از پرتابه و پرتابه‌ی سنگین‌تر از هدف، را مشخص کنید.

نکته‌های کلیدی

● برخورد کشسان نوع ویژه‌ای از برخورد است که در آن انرژی جنبشی دستگاه اجسام برخورد کننده پایسته است. هرگاه این دستگاه بسته و منزوی باشد، تکانه‌ی خطی آن نیز پایسته است. در برخورد یک بعدی که در آن جسم ۲ هدف و جسم ۱ پرتابه است، پایستگی انرژی جنبشی و تکانه‌ی خطی، رابطه‌های زیر را برای سرعت‌های بی‌درنگ پس از برخورد به دست می‌دهند

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

و

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

برخوردهای کشسان یک بعدی

چنان‌که در پودمان ۹-۶ دیدیم، برخوردهایی که در زندگی عادی با آن‌ها سر و کار داریم، ناکشسان هستند، اما برخی از آن‌ها را به طور تقریبی می‌توان کشسان در نظر گرفت؛ یعنی، می‌توان فرض کرد که انرژی جنبشی کل اجسام برخورد کننده به تقریب پایسته می‌ماند و به صورت‌های دیگر انرژی تبدیل نمی‌شود. پس، می‌توان نوشت

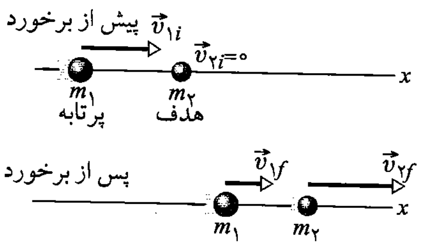
(۹-۶۲) (انرژی جنبشی کل پس از برخورد) = (انرژی جنبشی کل پیش از برخورد)

منظور این است که:

در برخورد کشسان، انرژی جنبشی هر جسم برخورد کننده ممکن است تغییر کند، اما انرژی جنبشی کل دستگاه تغییر نمی‌کند.

به عنوان مثال، در بازی بیلیارد برخورد گوی نشانه روی با گوی هدف را می‌توان به تقریب کشسان در نظر گرفت. اگر برخورد شاخ به شاخ باشد (گوی نشانه روی به طور مستقیم به گوی هدف برخورد کند) تقریباً تمام انرژی جنبشی گوی نشانه روی می‌تواند به گوی هدف منتقل شود. (صدای تولید شده در هنگام برخورد گوی‌ها به این معنی است که اندکی از انرژی جنبشی به انرژی صوتی تبدیل می‌شود).

آرایش نوعی مربوط به برخورد کشسان با هدف ساکن



شکل ۹-۱۸ جسم ۱ پیش از برخورد کشسان با جسم ۲، که ساکن است، در راستای محور x حرکت می‌کند. پس از برخورد هر دو جسم در راستای همان محور حرکت می‌کنند.

هدف ساکن

شکل ۹-۱۸ دو جسم را پیش و پس از روی دادن برخورد یک بعدی، مانند برخورد شاخ به شاخ میان گوی‌های بیلیارد، نشان می‌دهد. در اینجا جسم پرتابه با جرم m_1 و سرعت آغازی v_{1i} به سوی جسم هدف به جرم m_2، که در آغاز ساکن است ($v_{2i} = 0$)، حرکت می‌کند. فرض می‌کنیم که این دستگاه دو جسمی بسته و منزوی است. پس، تکانه‌ی خطی خالص دستگاه پایسته است و شرط این پایستگی با توجه به معادله‌ی ۹-۵۱ چنین نوشته می‌شود

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad \text{(تکانه‌ی خطی)} \qquad (۹-۶۳)$$

اگر برخورد کشسان باشد، انرژی جنبشی کل هم پایسته است و شرط پایستگی را می‌توان

چنین نوشت

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \qquad \text{(انرژی جنبشی)} \qquad (۹-۶۴)$$

در هر یک از دو معادله‌ی بالا شاخص پایین i معرف سرعت‌های آغازی و شاخص پایین f معرف سرعت‌های پایانی اجسام است. اگر جرم‌های اجسام و نیز سرعت آغازی جسم ۱، v_{1i}، معلوم باشند، تنها کمیت‌های نامعلوم، v_{1f} و v_{2f}، سرعت‌های پایانی دو جسم، خواهند بود. با استفاده کردن از دو معادله‌ای که در اختیار داریم، این دو کمیت نامعلوم را می‌توان معین کرد.

برای انجام دادن این کار، معادله‌ی ۹-۶۳ را به صورت زیر

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2v_{2f} \qquad (۹-۶۵)$$

و معادله‌ی ۹-۶۴ را به صورت زیر، می‌نویسیم□

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2v_{2f}^2 \qquad (۹-۶۶)$$

پس از تقسیم کردن معادله‌ی ۹-۶۶ به معادله‌ی ۹-۶۵ و انجام دادن عملیات جبری مناسب، خواهیم داشت

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} \qquad (۹-۶۷)$$

و

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} \qquad (۹-۶۸)$$

توجه کنید که v_{2f} همیشه مثبت است (جسم هدف با جرم m_2 همیشه به پیش‌سو حرکت می‌کند). معادله‌ی ۹-۶۷ نیز نشان می‌دهد که v_{1f} می‌تواند هر علامتی داشته باشد (جسم پرتابه با جرم m_1 به ازای $m_1 > m_2$، به پیش‌سو حرکت می‌کند و به ازای $m_1 < m_2$، به پس‌سو برمی‌گردد).

اکنون چند حالت ویژه را بررسی می‌کنیم:

۱. ***جرم‌های مساوی*** به ازای $m_1 = m_2$، معادله‌های ۹-۶۷ و ۹-۶۸ به صورت زیر ساده می‌شوند

$$v_{2f} = v_{1i} \quad \text{و} \quad v_{1f} = 0$$

این نتیجه را می‌توان نتیجه‌ی بازیکن بیلیارد نامید. این رابطه‌ها نشان می‌دهند که در برخورد شاخ به شاخ میان دو جسم با جرم‌های مساوی، جسم ۱ (که در آغاز در حال حرکت است) در محل برخورد متوقف می‌شود و جسم ۲ (که در آغاز ساکن است) با تندی آغازی جسم ۱، شروع به حرکت می‌کند. به بیان ساده‌تر، در برخوردهای شاخ‌به‌شاخ، دو جسم با جرم مساوی سرعت‌های‌شان را مبادله می‌کنند. حتی اگر ذره‌ی هدف (جسم ۲)

□ در اینجا از اتحاد $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ استفاده شده است. این کار سبب می‌شود که عملیات جبری لازم برای حل کردن معادله‌های ۹-۶۵ و ۹-۶۶ به طور هم‌زمان، کاهش پیدا کنند.

در آغاز ساکن نباشد، باز هم این عمل صورت می‌گیرد.

۲. ***هدف سنگین*** در شکل ۹-۱۸، هدف سنگین است، یعنی $m_2 >> m_1$. برای مثال، اگر توپ گلف را به سمت یک گلوله‌ی سنگین توپ پرتاب کنیم چنین حالتی پیش می‌آید. در نتیجه، معادله‌های ۹-۶۷ و ۹-۶۸ به صورت زیر ساده می‌شوند

$$v_{2f} \approx \left(\frac{2m_1}{m_2}\right) v_{1i} \quad \text{و} \quad v_{1f} \approx -v_{1i} \qquad (۹-۶۹)$$

این معادله‌ها نشان می‌دهند که جسم ۱ (توپ گلف) در همان مسیر رفت بدون تغییر محسوسی در تندی به پس برمی‌گردد. جسم ۲ (گلوله‌ی سنگین توپ) با تندی کم به پیش‌سو حرکت می‌کند، زیرا کمیت درون پرانتز در معادله‌ی ۹-۶۹ از واحد خیلی کمتر است. همه‌ی آنچه گفته شد مورد انتظار است.

۳. ***پرتابه‌ی سنگین*** این حالت عکس حالت پیش است، یعنی $m_1 >> m_2$. این بار یک گلوله سنگین توپ را به سمت یک توپ گلف پرتاب می‌کنیم. در نتیجه، معادله‌های ۹-۶۷ و ۹-۶۸ به صورت زیر ساده می‌شوند

$$v_{2f} \approx 2v_{1i} \quad \text{و} \quad v_{1f} \approx v_{1i} \qquad (۹-۷۰)$$

معادله‌ی ۹-۷۰ نشان می‌دهد که جسم ۱ (گلوله‌ی سنگین توپ) در همان مسیر خود به حرکتش ادامه می‌دهد اما بر اثر برخورد تندی‌اش اندکی کاهش می‌یابد. جسم ۲ (توپ گلف) با تندی‌ای دو برابر تندی گلوله‌ی سنگین توپ به سمت جلو پیش می‌رود. «چرا تندی دو برابر می‌شود؟» برای پاسخ دادن به این پرسش یادآوری می‌شود که در برخورد توصیف شده با معادله‌ی ۹-۶۹، سرعت جسم سبک برخورد کننده (توپ گلف) از $+v$ به $-v$ یعنی به اندازه‌ی $2v$ ***تغییر کرد***. در این مثال هم همان ***تغییر سرعت*** (اما این بار از صفر تا $2v$) صورت می‌گیرد.

هدف متحرک

حال که برخورد کشسان یک پرتابه و یک هدف ساکن را بررسی کردیم، حالتی را در نظر می‌گیریم که هر دو جسم پیش از برخورد در حال حرکت‌اند.

معادله‌ی پایستگی تکانه‌ی خطی در مورد شرایط مربوط به شکل ۹-۱۹، چنین نوشته می‌شود

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \qquad (۹-۷۱)$$

و معادله‌ی پایستگی انرژی جنبشی عبارت است از

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \qquad (۹-۷۲)$$

برای پیدا کردن هم‌زمان v_{1f} و v_{2f} با استفاده کردن از این معادله‌ها، نخست معادله‌ی ۹-۷۱ را به صورت زیر

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = -m_2(v_{2i} - v_{2f}) \qquad (۹-۷۳)$$

و معادله‌ی ۹-۷۲ را نیز به صورت زیر، می‌نویسیم

$$m_1(v_{1i}-v_{1f})(v_{1i}+v_{1f})=-m_2(v_{2i}-v_{2f})(v_{2i}+v_{2f}) \qquad (۹\text{-}۷۴)$$

پس از تقسیم کردن معادله‌ی ۹-۷۴ به معادله‌ی ۹-۷۳ و انجام دادن عملیات جبری مناسب، خواهیم داشت

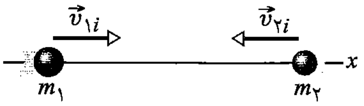
$$v_{1f}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{1i}+\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_{2i} \qquad (۹\text{-}۷۵)$$

و

$$v_{2f}=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{1i}+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_{2i} \qquad (۹\text{-}۷۶)$$

توجه کنید که نسبت دادن شاخص‌های پایین ۱ و ۲ به دو جسم اختیاری است. اگر این شاخص‌های پایین را در شکل ۹-۱۹ و در معادله‌های ۹-۷۵ و ۹-۷۶ با هم عوض کنیم به همان معادله‌ها خواهیم رسید. هم‌چنین، توجه کنید که به ازای $v_{2i}=0$، جسم ۲ همان هدف ساکن شکل ۹-۱۸ خواهد بود، و معادله‌های ۹-۷۵ و ۹-۷۶ به ترتیب، به معادله‌های ۹-۶۷ و ۹-۶۸ تبدیل خواهند شد.

آرایش نوعی مربوط به برخورد کشسان با هدف متحرک



شکل ۹-۱۹ دو جسم به سوی هم حرکت می‌کنند تا یک برخورد کشسان یک‌بعدی انجام دهند.

خودآزمایی ۸

در شکل ۹-۱۸، اگر تکانه‌ی خطی آغازی پرتابه $6\,\mathrm{kg\cdot m/s}$ و تکانه‌ی خطی پایانی پرتابه، (الف) $2\,\mathrm{kg\cdot m/s}$ و (ب) $-2\,\mathrm{kg\cdot m/s}$ باشد، تکانه‌ی خطی پایانی هدف چقدر است؟ (پ) اگر انرژی‌های جنبشی آغازی و پایانی پرتابه، به ترتیب، $5\,\mathrm{J}$ و $2\,\mathrm{J}$ باشند، انرژی جنبشی پایانی هدف چیست؟

مسئله‌ی نمونه‌ی ۹-۸ واکنش زنجیری برخوردهای کشسان

در شکل ۹-۲۰ الف، جسم ۱ با سرعت $v_{1i}=10\,\mathrm{m/s}$ به خط مشترک دو جسم ساکن نزدیک می‌شود. این جسم با جسم ۲ برخورد می‌کند، که آن هم با جسم ۳ به جرم $m_3=6{,}0\,\mathrm{kg}$ برخورد می‌کند. پس از برخورد دوم، جسم ۲ باز هم ساکن می‌ماند و جسم ۳ دارای سرعت $v_{3f}=5{,}0\,\mathrm{m/s}$ می‌شود (شکل ۹-۲۰ ب). فرض کنید برخوردها کشسان‌اند. جرم‌های اجسام ۱ و ۲ چقدر است؟ سرعت پایانی v_{1f} جسم ۱ چیست؟

نکته‌های کلیدی

چون فرض می‌کنیم برخوردها کشسان‌اند، باید انرژی مکانیکی پایسته باشد (بنابراین، اتلاف انرژی به صورت صوت، گرما، و نوسان‌های اجسام قابل چشم‌پوشی است). چون هیچ نیروی خارجی‌ای به اجسام وارد نمی‌شود، باید تکانه‌ی خطی در راستای محور x هم پایسته باشد. به این دو دلیل، معادله‌های ۹-۶۷ و ۹-۶۸ را برای هر برخورد می‌توان به کار برد.

محاسبات: اگر از برخورد اول شروع کنیم، عده‌ی زیادی مجهول داریم که باید به دست آوریم: ما جرم‌ها یا سرعت‌های پایانی اجسام را نمی‌دانیم. بنابراین، از برخورد دوم شروع می‌کنیم که در آن جسم ۲ به خاطر برخورد با جسم ۳ متوقف می‌شود. با به کار بردن معادله‌ی ۹-۶۷ برای این برخورد همراه با تغییرات نمادگذاری، داریم

$$v_{2f}=\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}v_{2i}$$

که در آن v_{2i} سرعت جسم ۲ درست پیش از برخورد و v_{2f} سرعت آن پس از برخورد است. با جانشانی $v_{2f}=0$ (چون

جسم ۲ متوقف می‌شود) و سپس $m_3 = 6.0\,\text{kg}$، داریم

(پاسخ) $$m_2 = m_3 = 6.00\,\text{kg}$$

با تغییرات نمادگذاری مشابه، معادله‌ی ۹-۶۸ را می‌توان برای برخورد دوم چنین بازنویسی کرد

$$v_{3f} = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} v_{2i}$$

که در آن v_{3f} سرعت پایانی جسم ۳ است. با جانشانی $m_2 = m_3$ و معلوم بودن $v_{3f} = 5.0\,\text{m/s}$، داریم

$$v_{2i} = v_{3f} = 5.0\,\text{m/s}$$

اکنون، برخورد اول را در نظر می‌گیریم، اما باید مواظب نمادگذاری مربوط به جسم ۲ باشیم. سرعت این جسم v_2، درست پس از برخورد اول، برابر با سرعت v_{2i} (مساوی با $5.0\,\text{m/s}$) درست پیش از برخورد دوم است. با به کار بردن معادله‌ی ۹-۶۸ برای برخورد اول و استفاده کردن از مقدار معلوم $v_{1i} = 10\,\text{m/s}$، داریم

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$5.0\,\text{m/s} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(10\,\text{m/s})$$

که از آنجا مقدار زیر به دست می‌آید

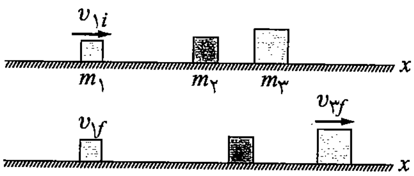
(پاسخ) $$m_1 = \frac{1}{3} m_2 = \frac{1}{3}(6.0\,\text{kg}) = 2.0\,\text{kg}$$

سرانجام، با استفاده کردن از معادله‌ی ۹-۶۷ برای برخورد اول با این نتیجه و مقدار معلوم v_{1i}، می‌توان نوشت

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

$$v_{1f} = \frac{\frac{1}{3} m_2 - m_2}{\frac{1}{3} m_2 + m_2}(10\,\text{m/s}) \Rightarrow$$

(پاسخ) $$v_{1f} = -5.0\,\text{m/s}$$



شکل ۹-۲۰ جسم ۱ با جسم ساکن ۲ برخورد می‌کند، که آن هم با جسم ساکن ۳ برخورد می‌کند.

۹-۸ برخوردهای دو بعدی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۹-۳۴ برای یک دستگاه منزوی که در آن برخورد دو بعدی صورت می‌گیرد، پایستگی تکانه‌ی مربوط به راستای هر یک از محورهای دستگاه مختصات را برای ربط دادن مؤلفه‌های تکانه در راستای یک محور پیش از برخورد به مؤلفه‌های تکانه ***در راستای همان محور*** پس از برخورد، به کار ببرید.

۹-۳۵ برای یک دستگاه منزوی که در آن برخورد دو بعدی کشسان صورت می‌گیرد، (الف) قانون پایستگی تکانه‌ی مربوط به راستای هر یک از محورهای دستگاه مختصات را برای ربط دادن مؤلفه‌های تکانه در راستای یک محور پیش از برخورد به مؤلفه‌های تکانه ***در راستای همان محور*** پس از برخورد به کار ببرید و (ب) قانون پایستگی انرژی جنبشی کل را برای ربط‌دادن انرژی‌های جنبشی پیش و پس از برخورد، به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

- هرگاه دو جسم با هم برخورد کنند و حرکت‌شان در راستای یک تک محور نباشد (برخورد شاخ به شاخ نباشد)، این برخورد دو بعدی است. هرگاه دستگاه دو جسمی بسته و منزوی باشد، قانون پایستگی تکانه در مورد این برخورد صدق می‌کند و بیان فرمولی آن را می‌توان چنین نوشت

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}$$

این قانون از لحاظ مؤلفه‌ای دو معادله به دست می‌دهد که برخورد را (یک معادله برای هر یک از دو بعد) توصیف می‌کنند. اگر این برخورد کشسان هم باشد (در حالتی خاص)، پایستگی انرژی جنبشی در حین برخورد، معادله‌ی سومی را به دست می‌دهد:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f}$$

برخوردهای دو بعدی

هنگام برخورد کردن دو جسم ضربه‌های وارد شده به آنها از سوی یکدیگر جهت حرکت اجسام را پس از برخورد معین می‌کنند. در حالت خاصی که برخورد شاخ به شاخ نیست، اجسام در راستای محور آغازی به حرکت ادامه نمی‌دهند. در این نوع برخوردهای دو بعدی، در یک دستگاه بسته و منزوی تکانه‌ی خطی کل باز هم پایسته می‌ماند:

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \qquad (۹-۷۷)$$

اگر برخورد (در حالتی خاص) کشسان هم باشد، انرژی جنبشی کل نیز پایسته است:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \qquad (۹-۷۸)$$

اگر معادله‌ی ۹-۷۷ را برحسب مؤلفه‌های کمیت‌ها در دستگاه مختصات xy بنویسیم، تحلیل برخورد دو بعدی آسان‌تر می‌شود. برای مثال، شکل ۹-۲۱ ***برخورد پهلو به پهلو*** (غیر شاخ به شاخ) میان یک جسم پرتابه و یک جسم هدف را که در آغاز ساکن است، نشان می‌دهد. ضربه‌های میان اجسام سبب می‌شوند که دو جسم پس از برخورد در راستاهای با زاویه‌های θ_1 و θ_2 نسبت به محور x، راستای حرکت آغازی پرتابه، حرکت کنند. در این شرایط، معادله‌ی ۹-۷۷ برای مؤلفه‌های مربوط به محور x به صورت زیر نوشته می‌شود

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2 \qquad (۹-۷۹)$$

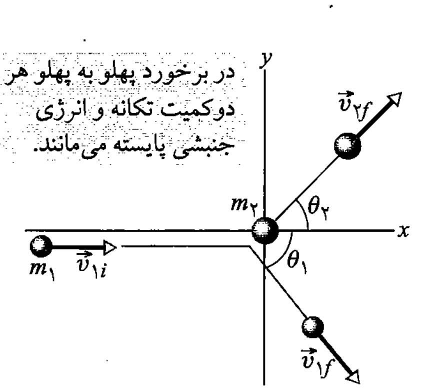
و برای مؤلفه‌های مربوط به محور y، داریم

$$0 = -m_1 v_{1f} \sin\theta_1 + m_2 v_{2f} \sin\theta_2 \qquad (۹-۸۰)$$

معادله‌ی ۹-۷۸ را برحسب تندی‌ها (برای حالت خاص برخورد کشسان) هم می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \qquad \text{(انرژی جنبشی)} \qquad (۹-۸۱)$$

معادله‌های ۹-۷۹ تا ۹-۸۱ شامل هفت متغیرند: دو جرم m_1 و m_2؛ سه تندی v_{1i}، v_{1f}، v_{2f}؛ و دو زاویه‌ی θ_1 و θ_2. اگر چهار تا از این کمیت‌ها معلوم باشند، سه کمیت دیگر را با حل کردن این سه معادله می‌توان به دست آورد.



شکل ۹-۲۱ نمودار برخورد کشسان میان دو جسم که در آن برخورد شاخ به شاخ نیست. جسم (هدف) به جرم m_2 در آغاز ساکن است.

خودآزمایی ۹

در شکل ۹-۲۱، فرض کنید تکانه‌ی پرتابه $6\,\mathrm{kg\cdot m/s}$، و مؤلفه‌ی x تکانه‌ی پایانی $4\,\mathrm{kg\cdot m/s}$ و سرانجام، مؤلفه‌ی y تکانه‌ی پایانی $-3\,\mathrm{kg\cdot m/s}$ است. در این صورت، (الف) مؤلفه‌ی x و (ب) مؤلفه‌ی y، تکانه‌ی پایانی هدف چیست؟

۹–۹ دستگاه‌های با جرم متغیر: موشک

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۹–۳۶ معادله‌ی اول موشک را برای ربط دادن آهنگ کاهش یافتن جرم موشک، تندی محصولات خارج شده از موشک نسبت به موشک، جرم موشک، و شتاب موشک، به کار ببرید.

۹–۳۷ معادله‌ی دوم موشک را برای ربط دادن تغییر تندی موشک به تندی نسبی محصولات خارج شده و جرم آغازی و پایانی موشک به کار ببرید.

۹–۳۸ برای یک دستگاه در حال حرکت که جرمش با آهنگ معینی تغییر می‌کند، این آهنگ را به تغییر تکانه ربط دهید.

نکته‌های کلیدی

- در نبود نیروهای خارجی، یک موشک با آهنگی لحظه‌ای شتاب می‌گیرد که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$Rv_{\rm rel} = Ma \quad \text{(معادله‌ی اول موشک)}$$

که در آن M جرم لحظه‌ای موشک (شامل سوخت مصرف نشده)، R آهنگ مصرف شدن سوخت و $v_{\rm rel}$ تندی خروج سوخت نسبت به موشک است. جمله‌ی $Rv_{\rm rel}$ پیش‌ران موتور موشک است.

- برای موشکی با R و $v_{\rm rel}$ ثابت، که تندی‌اش از v_i تا v_f و جرمش از M_i تا M_f تغییر می‌کند، داریم

$$v_f - v_i = v_{\rm rel} \ln \frac{M_i}{M_f} \quad \text{(معادله‌ی دوم موشک)}$$

دستگاه‌های با جرم متغیر: موشک

تا اینجا فرض کردیم که جرم کل دستگاه ثابت می‌ماند. اما دستگاه‌هایی مانند موشک وجود دارند که در آن‌ها جرم ثابت نمی‌ماند. بخش بزرگی از جرم موشک روی سکوی پرتاب را سوخت موشک تشکیل می‌دهد که تمام آن در حین پرواز به‌تدریج می‌سوزد و از خروجی موتور موشک خارج می‌شود. در اینجا نه تنها تغییرات جرم موشک هنگام شتاب پیدا کردن آن بنا به قانون دوم نیوتون بررسی می‌شود، بلکه موشک و محصولات احتراق خارج شده از آن نیز در نظر گرفته می‌شوند. ***جرم این دستگاه*** هنگام شتاب گرفتن موشک ***تغییر نمی‌کند.***

پیدا کردن شتاب

فرض کنید نسبت به یک چارچوب مرجع لَخت ساکن هستیم و موشکی را نظاره می‌کنیم که در اعماق فضا بدون تأثیر نیروهای گرانشی یا نیروی پسار جوّی، شتاب پیدا می‌کند. در این حرکت یک بعدی جرم موشک را M و سرعت آن را در زمان اختیاری t برابر با v می‌گیریم (شکل ۹–۲۲ الف را ببینید).

شکل ۹–۲۲ ب نشان می‌دهد که پس از بازه‌ی زمانی dt چه وضعیتی پیش آمده است. در این لحظه سرعت موشک $v+dv$ و جرم آن $M+dM$ است، که در آن تغییر جرم dM

کمیتی منفی است. محصولات خارج شده از موشک در بازه‌ی زمانی dt دارای جرم $-dM$ و سرعت U نسبت به چارچوب مرجع لَخت هستند.

تکانه را پایسته بگیرید. دستگاه، شامل موشک و محصولات خارج شده از لوله‌ی خروجی در بازه‌ی زمانی dt است. این دستگاه بسته و منزوی است، بنابراین تکانه‌ی خطی آن در مدت dt پایسته می‌ماند؛ یعنی

$$P_i = P_f \qquad (۹-۸۲)$$

در این معادله شاخص‌های پایین i و f مقادیر مربوط به آغاز و پایان بازه‌ی زمانی dt را نشان می‌دهند. معادله‌ی ۹-۸۲ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$Mv = -dMU + (M + dM)(v + dv) \qquad (۹-۸۳)$$

که در آن جمله‌ی اول طرف راست تکانه‌ی خطی محصولات خارج شده در بازه‌ی زمانی dt و جمله‌ی دوم تکانه‌ی خطی موشک در پایان بازه‌ی زمانی dt است.

تندی نسبی را به کار ببرید. معادله‌ی ۹-۸۳ را با استفاده کردن از سرعت نسبی v_{rel} بین موشک و محصولات خارج شده، که طبق معادله‌ی زیر به سرعت‌ها نسبت به چارچوب مرجع بستگی دارند، می‌توان ساده کرد:

(سرعت موشک نسبت به چارچوب مرجع) = (سرعت موشک نسبت به محصولات خروجی) + (سرعت محصولات خروجی نسبت به چارچوب مرجع)

معادله‌ی بالا به صورت نمادی چنین نوشته می‌شود

$$(v + dv) = v_{\text{rel}} + U$$

یا

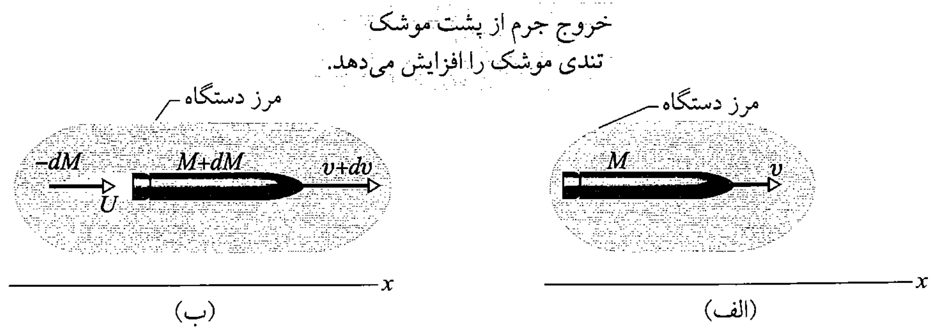
$$U = v + dv - v_{\text{rel}} \qquad (۹-۸۴)$$

با جانشانی این مقدار U در معادله‌ی ۹-۸۳، خواهیم داشت

$$-dM v_{\text{rel}} = M dv \qquad (۹-۸۵)$$

از تقسیم کردن دو طرف این معادله به dt، داریم

$$-\frac{dM}{dt} v_{\text{rel}} = M \frac{dv}{dt} \qquad (۹-۸۶)$$



شکل ۹-۲۲ (الف) نمودار طرح‌وار یک موشک در حال شتاب گرفتن به جرم M در زمان t، که از یک چارچوب مرجع لَخت مشاهده می‌شود. (ب) نمودار همان موشک در زمان $t + dt$. محصولات خارج شده از لوله‌ی خروجی در بازه‌ی زمانی dt، نشان داده شده‌اند.

به جای dM/dt (آهنگ کاهش یافتن جرم موشک)، $-R$ را قرار می‌دهیم، که R آهنگ زمانی جرم (مثبت) سوخت مصرف شده و dv/dt شتاب موشک است. با استفاده کردن از نمادها معادله‌ی ۹-۸۶ به صورت زیر ساده می‌شود

$$Rv_{\text{rel}} = Ma \quad \text{(معادله‌ی اول موشک)} \qquad (۹\text{-}۸۷)$$

معادله‌ی ۹-۸۷ در هر لحظه‌ای صادق است.

توجه کنید که طرف چپ معادله‌ی ۹-۸۷ دارای ابعاد نیرو $[(\text{kg/s})(\text{m/s}) = \text{kg}\cdot\text{m/s}^2 = \text{N}]$ است و فقط به مشخصات طراحی موتور موشک، مثلاً به آهنگ جرم سوخت مصرف شده، R، و تندی خروج این جرم نسبت به موشک، یعنی v_{rel}، بستگی دارد. جمله‌ی Rv_{rel} **پیش‌ران موتور موشک** نامیده می‌شود و آن را با T نشان می‌دهیم. اگر معادله‌ی ۹-۸۷ به صورت $T = Ma$ نوشته شود، شکل قانون دوم نیوتون را پیدا می‌کند، که در آن a شتاب موشک در لحظه‌ای است که جرم موشک M است.

پیدا کردن سرعت

وقتی موشک سوخت را مصرف می‌کند، تغییر سرعت آن چگونه است؟ با توجه به معادله‌ی ۹-۸۵، داریم

$$dv = -v_{\text{rel}} \frac{dM}{M}$$

با انتگرال گرفتن از این معادله، داریم

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_{\text{rel}} \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

که در آن M_i جرم آغازی موشک و M_f جرم پایانی آن است. پس از محاسبه‌ی انتگرال، داریم

$$v_f - v_i = v_{\text{rel}} \ln \frac{M_i}{M_f} \quad \text{(معادله‌ی دوم موشک)} \qquad (۹\text{-}۸۸)$$

این معادله افزایش تندی موشک را در حین تغییر کردن جرم از M_i تا M_f به دست می‌دهد. (نماد «ln» در معادله‌ی ۹-۸۸ نشان دهنده‌ی ***لگاریتم طبیعی*** است). در اینجا مزیت موشک‌های چند مرحله‌ای را مشاهده می‌کنیم، که در آن‌ها مرحله‌های مختلف بعد از خالی شدن سوخت آن‌ها یکی پس از دیگری از موشک جدا می‌شوند و M_f کاهش می‌یابد. یک موشک آرمانی هنگام رسیدن به مقصد، فقط شامل بخش‌های اصلی و مفید است.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۹-۹ موتور موشک، پیش‌ران، شتاب

در تمام مثال‌های پیشی این فصل، جرم دستگاه ثابت (ثابت به‌صورت عددی معین) بود. این مثال مربوط به دستگاهی (موشکی) است که جرمش کاهش می‌یابد. موشکی با جرم آغازی $M_i = ۸۵۰\,\text{kg}$ سوخت را با آهنگ $R = ۲{,}۳\,\text{kg/s}$ مصرف

می‌کند. تندی گازهای خروجی v_{rel}، نسبت به موتور موشک ۲۸۰۰m/s است. (الف) پیش‌ران تولید شده توسط موتور موشک چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

بنا به معادله‌ی ۹–۸۷ پیش‌ران T برابر با حاصل‌ضرب آهنگ مصرف سوخت R، در تندی نسبی خروج گازها v_{rel}، است.

محاسبه: در اینجا داریم

$$T = Rv_{rel} = (۲/۳\,\text{kg/s})(۲۸۰۰\,\text{m/s}) \Rightarrow$$
$$T = ۶۴۴۰\,\text{N} \approx ۶۴۰۰\,\text{N} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

(ب) شتاب آغازی موشک چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

با استفاده کردن از معادله‌ی $T = Ma$، که در آن M جرم موشک است، می‌توان پیش‌ران T را به بزرگی شتاب حاصل a، ربط داد. اما وقتی سوخت مصرف می‌شود، M کاهش و a افزایش می‌یابد. چون a، شتاب آغازی موشک را می‌خواهیم، باید از مقدار جرم آغازی M_i استفاده کنیم.

محاسبه: داریم

$$a = \frac{T}{M_i} = \frac{۶۴۴۰\,\text{N}}{۸۵۰\,\text{kg}} \Rightarrow$$
$$a = ۷/۶\,\text{m/s}^۲ \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

موشک برای پرتاب شدن از سطح زمین باید شتابی بیش از $g = ۹/۸\,\text{m/s}^۲$ داشته باشد. به عبارت دیگر، پیش‌ران T، باید از نیروی گرانشی آغازی وارد شده به موشک بیشتر باشد، که در اینجا بزرگی آن $M_i g$، برابر است با

$$(۸۵۰\,\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^۲) = ۸۳۳۰\,\text{N}$$

چون شتاب، یا پیش‌ران لازم (در اینجا $T = ۶۴۰۰\text{N}$) تأمین نمی‌شود، موشک به خودی خود نمی‌تواند از زمین بلند شود و به موشک توانمندتر دیگری نیاز است.

مرور و چکیده‌ی مطالب

مرکز جرم **مرکز جرم** یک دستگاه شامل n ذره، نقطه‌ای است که مختصات آن از معادله‌های زیر به دست می‌آیند

$$x_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$
$$y_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \qquad (۹–۵)$$
$$z_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

یا

$$\vec{r}_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \qquad (۹–۸)$$

در این معادله‌ها M جرم کل دستگاه است.

قانون دوم نیوتون درباره‌ی دستگاه ذرات حرکت مرکز جرم دستگاه ذرات از **قانون دوم نیوتون درباره‌ی دستگاه ذرات** پیروی می‌کند، که مبتنی بر معادله‌ی زیر است

$$\vec{F}_{net} = M\vec{a}_{com} \qquad (۹–۱۴)$$

در اینجا $\vec{F}_{net}$ برایند تمام ***نیروهای خارجی*** وارد شده به دستگاه، M جرم کل و $\vec{a}_{com}$ شتاب مرکز جرم دستگاه است.

تکانه‌ی خطی و قانون دوم نیوتون کمیت $\vec{p}$ را **تکانه‌ی خطی** تک ذره می‌نامند و از معادله‌ی زیر به دست می‌آید

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad (۹–۲۲)$$

قانون دوم نیوتون را برحسب تکانه‌ی خطی می‌توان چنین نوشت:

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (۹–۲۳)$$

دو معادله‌ی بالا برای دستگاه ذرات به صورت زیر در می‌آیند

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \text{و} \quad \vec{P} = M\vec{v}_{com} \qquad (۹–۲۵، ۹–۲۷)$$

برخورد و ضربه با استفاده کردن از قانون دوم نیوتون در شکل

تکانه برای یک جسم ذره مانند درگیر در برخورد، به **قضیه‌ی ضربه ـ تکانه‌ی خطی** منجر می‌شود:

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p} = \vec{J} \qquad (۹-۳۱، ۹-۳۲)$$

که در آن $\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$ تغییر تکانه‌ی خطی جسم و $\vec{J}$ ضربه‌ی ناشی از نیروی $\vec{F}(t)$ است که در حین برخورد از یک جسم به جسم دیگر وارد می‌شود:

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt \qquad (۹-۳۰)$$

اگر F_{avg} بزرگی متوسط $\vec{F}(t)$ در حین برخورد و Δt مدت زمان برخورد باشد، برای برخورد یک بعدی، داریم

$$J = F_{avg}\Delta t \qquad (۹-۳۵)$$

وقتی جریان پایایی از اجسام، هر یک به جرم m و تندی v، با جسم ثابت شده در محلی برخورد می‌کند، نیروی متوسط وارد شده به جسم ثابت برابر است با

$$F_{avg} = -\frac{n}{\Delta t}\Delta p = -\frac{n}{\Delta t}m\Delta v \qquad (۹-۳۷)$$

که در آن $n/\Delta t$ آهنگ برخورد اجسام با جسم ثابت و Δv تغییر سرعت هر جسم برخورد کننده است. این نیروی متوسط می‌تواند از معادله‌ی زیر هم به دست آید

$$F_{avg} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta v \qquad (۹-۴۰)$$

که در آن $\Delta m/\Delta t$ آهنگ برخورد مقدار جرم با جسم ثابت است. در معادله‌های ۹-۳۷ و ۹-۴۰، اگر اجسام بر اثر برخورد متوقف شوند، داریم $\Delta v = -v$ و اگر آن‌ها بدون تغییر تندی به طور مستقیم به پس‌سو برگردند، داریم $\Delta v = -2v$.

پایستگی تکانه‌ی خطی اگر دستگاهی منزوی باشد، به طوری که هیچ ***نیروی خارجی برایندی*** به آن وارد نشود، تکانه‌ی خطی دستگاه، $\vec{P}$، ثابت می‌ماند:

$$\vec{P} = \text{ثابت} \quad \text{(دستگاه بسته، منزوی)} \qquad (۹-۴۲)$$

این معادله را به صورت زیر هم می‌توان نوشت

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \quad \text{(دستگاه بسته، منزوی)} \qquad (۹-۴۳)$$

در این معادله شاخص‌های پایین کمیت $\vec{P}$ مقادیر آن را در زمان آغازی و زمان بعدی نشان می‌دهند. معادله‌های ۹-۴۲ و ۹-۴۳ بیان‌هایی هم‌ارز از **قانون پایستگی تکانه‌ی خطی** هستند.

برخورد ناکشسان یک بعدی در ***برخورد ناکشسان*** میان دو جسم انرژی جنبشی دستگاه دو جسمی پایسته نیست. اگر دستگاه بسته و منزوی باشد، تکانه‌ی خطی کل دستگاه ***باید پایسته باشد***. این مفهوم به صورت برداری زیر نوشته می‌شود

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \qquad (۹-۵۰)$$

در اینجا شاخص‌های پایین i و f مقادیر پیش و پس از برخورد را نشان می‌دهند.

اگر اجسام در راستای یک محور حرکت کنند، برخورد یک بعدی است و معادله‌ی ۹-۵۰ را برحسب مؤلفه‌های سرعت در راستای آن محور می‌توان چنین نوشت

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} \qquad (۹-۵۱)$$

اگر اجسام پس از برخورد به هم بچسبند، برخورد از نوع ***برخورد ناکشسان کامل*** است و اجسام دارای سرعت پایانی یکسان V خواهند بود (چون به هم ***چسبیده‌اند***).

حرکت مرکز جرم مرکز جرم یک دستگاه بسته و منزوی شامل دو جسم برخورد کننده، تحت تأثیر برخورد قرار نمی‌گیرد. یعنی، سرعت مرکز جرم v_{com}، بر اثر برخورد تغییر نمی‌کند.

برخوردهای کشسان یک بعدی ***برخورد کشسان*** نوع ویژه‌ای از برخورد است که در آن انرژی جنبشی دستگاه اجسام برخورد کننده پایسته است. اگر دستگاه بسته و منزوی باشد، تکانه‌ی خطی آن نیز پایسته است. در برخورد یک بعدی، که در آن جسم ۲ هدف و جسم ۱ یک پرتابه‌ی برخورد کننده است، با استفاده کردن از پایستگی انرژی جنبشی و تکانه‌ی خطی، سرعت‌های دو جسم، بی‌درنگ پس از برخورد، چنین به دست می‌آیند

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_{1i} \qquad (۹-۶۷)$$

و

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_{1i} \qquad (۹-۶۸)$$

برخوردهای دو بعدی اگر دو جسم با هم برخورد کنند و حرکت آن‌ها در راستای یک محور صورت نگیرد (برخورد غیر شاخ به شاخ)، برخورد دو بعدی است. اگر دستگاه دو جسمی بسته و

منزوی باشد، قانون پایستگی تکانه برای برخورد صادق است و به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\vec{P}_{1i} + \vec{P}_{2i} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f} \qquad (۹\text{-}۷۷)$$

با بیان کردن این قانون برحسب مؤلفه‌ها، دو معادله (برای هر یک از دو بعد یک معادله) به دست می‌آید، که برخورد را توصیف می‌کنند. اگر برخورد کشسان هم باشد (در حالتی خاص)، پایسته بودن انرژی جنبشی در حین برخورد، معادله‌ی سوم زیر را هم به‌دست می‌دهد:

$$K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \qquad (۹\text{-}۷۸)$$

دستگاه‌های با جرم متغیر در نبود نیروهای خارجی یک موشک با آهنگ لحظه‌ای زیر شتاب پیدا می‌کند

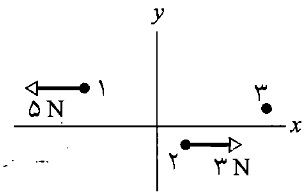
$$Rv_{\text{rel}} = Ma \quad \text{(معادله‌ی اول موشک)} \qquad (۹\text{-}۸۷)$$

در این معادله M جرم لحظه‌ای موشک (از جمله جرم سوخت مصرف نشده)، R آهنگ مصرف سوخت و v_{rel} تندی خروج گازها نسبت به موشک است. جمله‌ی Rv_{rel} را **پیش‌ران موتور موشک** می‌نامند. برای یک موشک با R و v_{rel} ثابت، که تندی‌اش از v_i تا v_f و جرمش از M_i تا M_f تغییر می‌کند، داریم

$$v_f - v_i = v_{\text{rel}} \ln \frac{M_i}{M_f} \quad \text{(معادله‌ی دوم موشک)} \qquad (۹\text{-}۸۸)$$

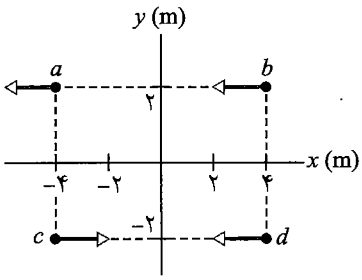
پرسش‌ها

۱ شکل ۹-۲۳ تصویر سه ذره را، با دید از بالا، نشان می‌دهد که به آن‌ها نیروهای خارجی اثر می‌کنند. در این شکل بزرگی و جهت نیروهای وارد شده به دو ذره نشان داده شده‌اند. بزرگی و جهت نیروی وارد شده به ذره‌ی سوم را به گونه‌ای پیدا کنید که مرکز جرم دستگاه سه‌ذره، (الف) ساکن باشد، (ب) با سرعت ثابت به راست‌سو حرکت کند و (پ) به راست‌سو شتاب پیدا کند.



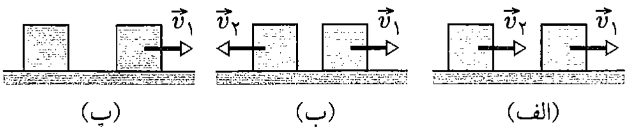
شکل ۹-۲۳ پرسش ۱.

۲ شکل ۹-۲۴ تصویر چهار ذره با جرم‌های مساوی را، با دید از بالا، نشان می‌دهد، که با سرعت ثابت بر روی یک سطح بی‌اصطکاک می‌لغزند. جهت سرعت‌ها در شکل نشان داده شده و بزرگی سرعت‌ها یکسان است. ذرات را به‌صورت زوج درنظر بگیرید. کدام زوج دستگاهی تشکیل می‌دهد که مرکز جرم آن (الف) ساکن است، (ب) ساکن و در مبداء مختصات واقع است، و (پ) از مبداء مختصات می‌گذرد؟



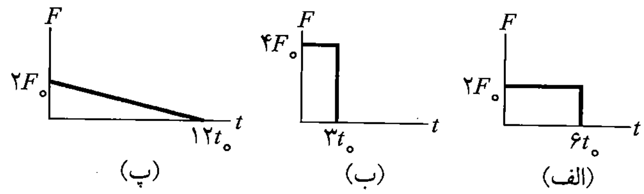
شکل ۹-۲۴ پرسش ۲.

۳ جعبه‌ای را چنان در نظر بگیرید که در حین حرکت کردن در راستای محور x با سرعت ثابت مثبت، منفجر و به دوپاره تقسیم می‌شود. اگر یکی از پاره‌ها به جرم m_1 دارای سرعت $\vec{v}_1$ شود، پاره‌ی دوم به جرم m_2 در نهایت دارای (الف) سرعت مثبت $\vec{v}_2$ (شکل ۹-۲۵ الف)، (ب) سرعت منفی $\vec{v}_2$ (شکل ۹-۲۵ ب)، یا (پ) سرعت صفر (شکل ۹-۲۵ پ)، می‌شود. این سه نتیجه‌ی ممکن برای پاره‌ی دوم را با توجه به بزرگی $\vec{v}_1$، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



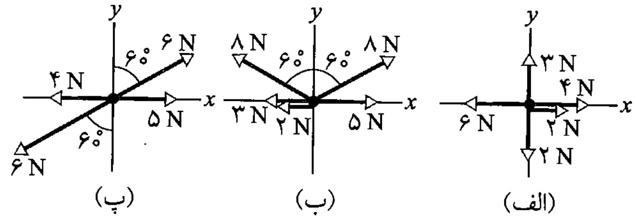
شکل ۹-۲۵ پرسش ۳.

۴ شکل ۹-۲۶ سه نمودار مربوط به تغییرات بزرگی نیرو برحسب زمان را برای یک جسم درگیر در برخورد نشان می‌دهد. نمودارها را با توجه به بزرگی ضربه‌ی وارد شده به جسم، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



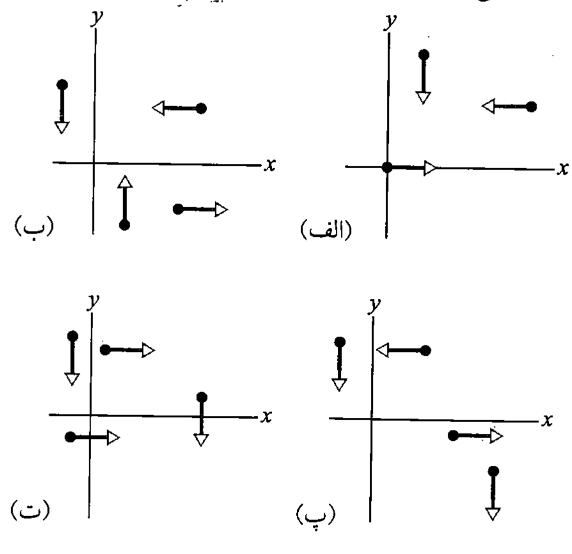
شکل ۹-۲۶ پرسش ۴.

۵ در نمودارهای جسم ـ آزاد شکل ۹-۲۷ با دید از بالا، نیروهای افقی وارد شده به سه جعبه‌ی شکلات در حال حرکت بر روی پیشخوان بی‌اصطکاک یک شیرینی فروشی نشان داده شده‌اند. آیا تکانه‌ی خطی مربوط به هر جعبه در راستای محور x و محور y پایسته است؟



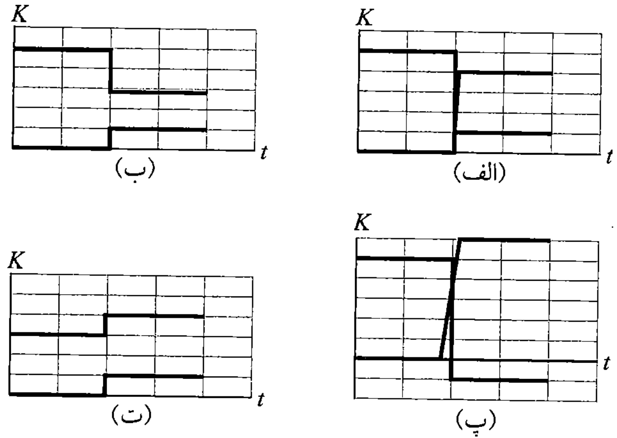
شکل ۹-۲۷ پرسش ۵.

۶ شکل ۹-۲۸ چهار گروه از ذره‌های مشابه سه تایی یا چهارتایی را نشان می‌دهد که به طور موازی با محور x، یا محور y، با تندی‌های یکسان حرکت می‌کنند. این گروه‌ها را با توجه به تندی مرکز جرم، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



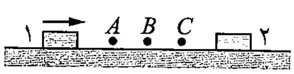
شکل ۹-۲۸ پرسش ۶.

۷ جسمی روی یک سطح بی‌اصطکاک به طرف جسم دیگری با جرم یکسان می‌لغزد. شکل ۹-۲۹ چهار گزینه‌ی مربوط به نمودار انرژی جنبشی اجسام K، را نشان می‌دهد. (الف) معین کنید کدام یک از حالت‌ها از نظر فیزیکی ناممکن است. کدام گزینه از میان گزینه‌های دیگر نشان‌دهنده‌ی (ب) برخورد کشسان، و (پ) برخورد ناکشسان، است؟



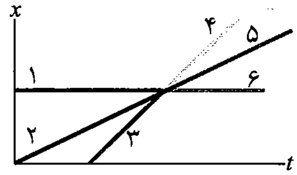
شکل ۹-۲۹ پرسش ۷.

۸ شکل ۹-۳۰ یک عکس فوری از جسم ۱ را، که پیش از برخورد کشسان با جسم ساکن ۲، در راستای محور x بر روی یک سطح بی‌اصطکاک می‌لغزد، نشان می‌دهد. در این شکل، هم‌چنین، سه حالت ممکن مرکز جرم (com) دستگاه دو جرمی در لحظه‌ی گرفتن عکس فوری نشان داده شده است. (نقطه‌ی B در وسط فاصله‌ی میان مرکزهای دو جسم قرار دارد). پس از برخورد، اگر مرکز جرم در نقطه‌ی (الف) A، (ب) B و (پ) C باشد، آیا جسم ۱ ساکن است، به پیش‌سو حرکت می‌کند، یا به پس‌سو حرکت می‌کند؟



شکل ۹-۳۰ پرسش ۸.

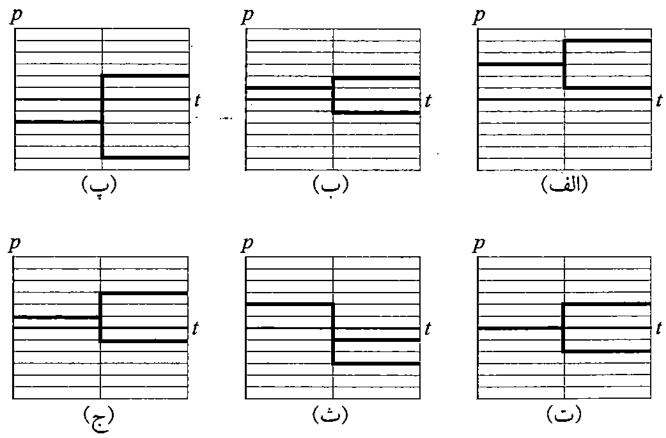
۹ دو جسم در راستای محور x برخورد کشسان یک بعدی انجام داده‌اند. شکل ۹-۳۱ نمودار تغییرات مکان برحسب زمان را



شکل ۹-۳۱ پرسش ۹.

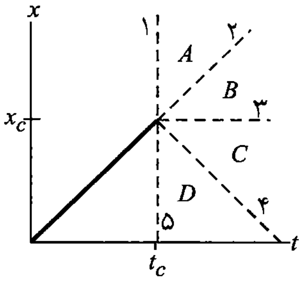
برای دو جسم و مرکز جرم آن‌ها نشان می‌دهد. (الف) آیا در آغاز هر دو جسم حرکت می‌کردند، یا یکی از آن‌ها ساکن بوده است؟ کدام پاره‌خط مربوط به حرکت مرکز جرم، (ب) پیش از برخورد و (پ) پس از برخورد، است؟ (ت) آیا جرم جسمی که پیش از برخورد حرکت می‌کرده است، نسبت به جرم جسم دیگر، بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است؟

۱۰ در شکل ۹-۳۲، جسمی که در آغاز بر روی سطحی افقی ساکن است، در جهت مثبت یا در جهت منفی محور x، در حال لغزیدن است. آنگاه، این جسم به دو پاره منفجر می‌شود و پاره‌ها در راستای محور x می‌لغزند. فرض کنید جسم و دو پاره یک دستگاه بسته و منزوی تشکیل می‌دهند. شش گزینه‌ی مربوط به نمودار تکانه‌های جسم و پاره‌ها برحسب زمان t داده شده‌اند. مشخص کنید کدام یک از گزینه‌ها از نظر فیزیکی حالت‌هایی ناممکن‌اند و دلیل آن را توضیح دهید.



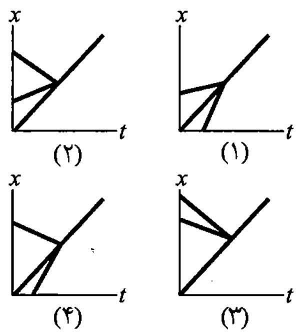
شکل ۹-۳۲ پرسش ۱۰.

۱۱ جسم ۱ به جرم m_1، که در راستای محور x بر روی یک سطح بی‌اصطکاک می‌لغزد، با جسم ساکن ۲ به جرم m_2، یک برخورد کشسان انجام می‌دهد. شکل ۹-۳۳ نمودار مکان x برحسب زمان t مربوط به جسم ۱ را تا لحظه‌ی برخورد t_c در مکان x_c نشان می‌دهد. در کدام یک از ناحیه‌های حروف‌گذاری شده به‌ازای (الف) $m_1 > m_2$ و (ب) $m_1 < m_2$، نمودار (پس از برخورد) ادامه می‌یابد؟ (پ) در راستای کدام خط‌چین شماره‌گذاری شده، به ازای $m_1 = m_2$ نمودار ادامه می‌یابد؟



شکل ۹-۳۳ پرسش ۱۱.

۱۲ شکل ۹-۳۴، چهار نمودار مربوط به تغییرات مکان برحسب زمان را برای دو جسم و مرکز جرم آن‌ها نشان می‌دهد. دو جسم یک دستگاه بسته و منزوی تشکیل می‌دهند و در راستای محور x به طور ناکشسان کامل یک بعدی با هم برخورد می‌کنند. در نمودار ۱، آیا (الف) دو جسم و (ب) مرکز جرم آن‌ها، در جهت مثبت محور x حرکت می‌کنند یا در جهت منفی محور؟ (پ) کدام نمودار مربوط به حالتی است که از نظر فیزیکی ناممکن است؟ توضیح دهید.



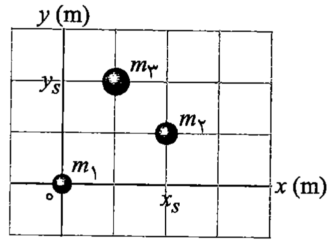
شکل ۹-۳۴ پرسش ۱۲.

مسئله‌ها

پودمان ۹-۱ مرکز جرم

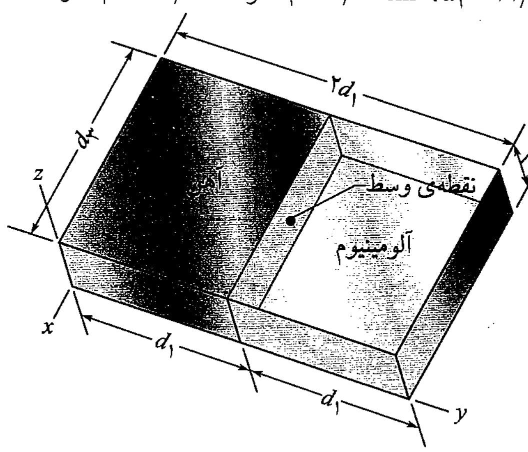
* ۱ ذره‌ای به جرم ۲٫۰۰kg دارای مختصات x و y (۱٫۲۰m- و ۰٫۵۰۰m)، و ذره‌ی دیگری به جرم ۴٫۰۰kg دارای مختصات x و y (۰٫۶۰۰m و ۰٫۷۵۰m-) است. هر دو ذره دریک صفحه‌ی افقی قرار دارند. ذره‌ای به جرم ۳٫۰۰kg را در چه نقطه‌ای با مختصه‌های (الف) x و (ب) y، باید قرار داد تا مختصات مرکزجرم دستگاه سه ذره‌ای (۰٫۵۰۰m- و ۰٫۷۰۰m-) باشد؟

* ۲ شکل ۹-۳۵ یک دستگاه سه ذره‌ای با جرم‌های $m_۱$ = ۳٫۰kg، $m_۲$ = ۴٫۰kg، و $m_۳$ = ۸٫۰kg را نشان می‌دهد. مقیاس‌های محورهای شکل با مقادیر x_s = ۲٫۰m و y_s = ۲٫۰m مشخص شده‌اند. مطلوب است تعیین مختصه‌های (الف) x و (ب) y، مرکز جرم دستگاه. (پ) اگر جرم ذره‌ی سوم $m_۳$، به تدریج افزایش یابد، آیا مرکز جرم دستگاه به سوی این ذره جابه‌جا می‌شود، از آن دور می‌شود، یا ساکن می‌ماند؟



شکل ۹-۳۵ مسئله‌ی ۲.

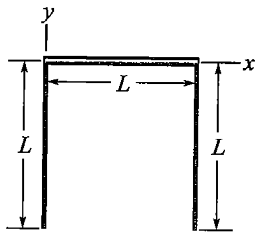
** ۳ شکل ۹-۳۶ تختالی شامل دو بخش، هر بخش با ابعاد $d_۱$ = ۱۱٫۰cm، $d_۲$ = ۲٫۸۰cm و $d_۳$ = ۱۳٫۰cm را نشان



شکل ۹-۳۶ مسئله‌ی ۳.

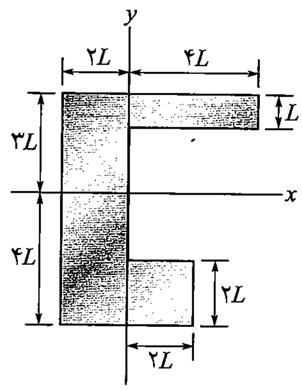
می‌دهد. نیمی از این تختال از آلومینیوم (با چگالی ۲٫۷۰g/cm³) و نیم دیگر از آهن (با چگالی ۷٫۸۵g/cm³) است. مختصه‌های (الف) x، (ب) y و (پ) z، مرکز جرم این تختال چیست؟

** ۴ در شکل ۹-۳۷، سه میله‌ی باریک یکنواخت، هر یک به طول L = ۲۲cm، یک حرف U وارون تشکیل داده‌اند. جرم هر یک از میله‌های قائم ۱۴ گرم و جرم میله‌ی افقی ۴۲ گرم است. مختصه‌های (الف) x و (ب) y، مرکز جرم دستگاه چیست؟



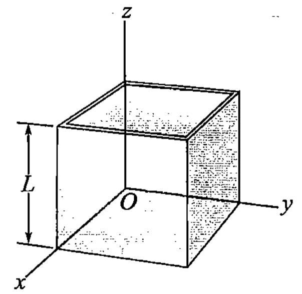
شکل ۹-۳۷ مسئله‌ی ۴.

** ۵ در شکل ۹-۳۸، به ازای L = ۵٫۰cm، مختصه‌های (الف) x و (ب) y، مرکز جرم ورق یکنواخت نشان داده شده چیست؟



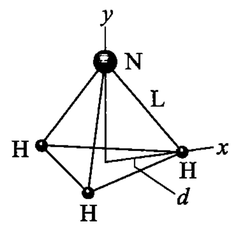
شکل ۹-۳۸ مسئله‌ی ۵.

** ۶ شکل ۹-۳۹ جعبه‌ی مکعب شکلی را نشان می‌دهد که از ورق فلزی یکنواخت وضخامت ناچیز ساخته شده است. وجه بالایی جعبه باز و طول هر ضلع L = ۴۰cm است. مختصه‌های (الف) x، (ب) y و (پ) z، مرکز جرم جعبه را پیدا کنید.



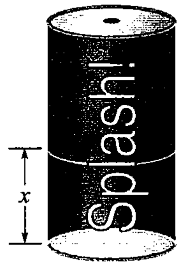
شکل ۹-۳۹ مسئله‌ی ۶.

*** ۷ در مولکول آمونیاک ($NH_۳$) در شکل ۹-۴۰، سه اتم هیدروژن (H) یک مثلث سه ضلع برابر تشکیل می‌دهند؛ فاصله‌ی مرکز مثلث از هر اتم هیدروژن $d = ۹٫۴۰ \times ۱۰^{-۱۱}\text{m}$ است. اتم نیتروژن (N) در رأس هرمی قرار دارد که سه اتم هیدروژن قاعده‌ی آن را می‌سازند. نسبت جرم اتمی نیتروژن به جرم اتمی هیدروژن ۱۳٫۹ و فاصله‌ی نیتروژن تا هیدروژن $L = ۱۰٫۱۴ \times ۱۰^{-۱۱}\text{m}$ است. مختصه‌های (الف) x و (ب) y، مرکز جرم مولکول چیست؟



شکل ۹-۴۰ مسئله‌ی ۷.

*** ۸ یک قوطی نوشابه‌ی یکنواخت به جرم $۰٫۱۴۰\,\text{kg}$ و به بلندی $۱۲٫۰\,\text{cm}$، محتوی $۰٫۳۵۴\,\text{kg}$ نوشابه‌است (شکل ۹-۴۱). برای خارج شدن نوشابه، در بالا و پایین قوطی سوراخ‌های کوچکی (بدون کاهش چشمگیر مقدار فلز کنده شده) ایجاد می‌کنیم. ارتفاع مرکز جرم قوطی و محتوای آن h، (الف) در آغاز و (ب) پس از خارج شدن تمام نوشابه، چیست؟ (پ) در حین خارج شدن نوشابه، h چگونه تغییر می‌کند؟ (ت) اگر x ارتفاع نوشابه‌های باقی‌مانده در زمانی خاص باشد، مقدار x را در حالتی که مرکز جرم به پایین‌ترین نقطه‌ی خود می‌رسد، معین کنید.



شکل ۹-۴۱ مسئله‌ی ۸.

پودمان ۹-۲ قانون دوم نیوتون درباره‌ی دستگاه ذرات

* ۹ سنگی در زمان $t = ۰$ از یک نقطه و سپس سنگ دیگری با جرمی دو برابر سنگ اولی از همان نقطه در زمان $t = ۱۰۰\,\text{ms}$، رها می‌شود. (الف) مرکز جرم دو سنگ در زمان $t = ۳۰۰\,\text{ms}$ در چه فاصله‌ای از نقطه‌ی رها شدن قرار دارد؟ (هنوز هیچ یک از سنگ‌ها به زمین نرسیده‌اند). (ب) در این زمان مرکز جرم دستگاه دو سنگ با چه تندی‌ای حرکت می‌کند؟

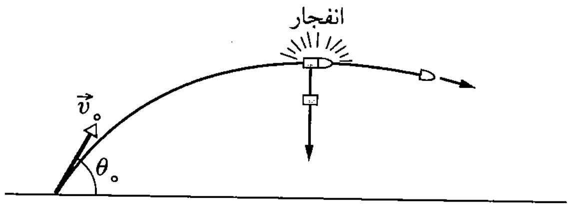
* ۱۰ خودرویی به‌جرم $۱۰۰۰\,\text{kg}$ در پشت چراغ قرمز راهنمایی ایستاده است. در لحظه‌ای که چراغ سبز می‌شود، خودرو با شتاب ثابت $۴٫۰\,\text{m/s}^۲$ شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه کامیونی به جرم $۲۰۰۰\,\text{kg}$، که با تندی ثابت $۸٫۰\,\text{m/s}$ حرکت می‌کند، از خودرو پیش می‌افتد. (الف) در زمان $t = ۳٫۰\,\text{s}$ فاصله‌ی مرکز جرم دستگاه خودرو ـ کامیون از چراغ راهنمایی چقدر است؟ (ب) در این زمان تندی مرکز جرم دستگاه خودرو ـ کامیون چیست؟

* ۱۱ یک دانه‌ی بزرگ زیتون هندی ($m = ۰٫۵۰\,\text{kg}$) در مبداء دستگاه مختصات xy و یک بادام بزرگ برزیلی ($M = ۱٫۵\,\text{kg}$) در نقطه‌ای با مختصات x و y ($۱٫۰\,\text{m}$ و $۲٫۰\,\text{m}$) قرار دارد. در زمان $t = ۰$، نیروی $\vec{F}_O = (۲٫۰\hat{i} + ۳٫۰\hat{j})\text{N}$ به زیتون و نیروی $\vec{F}_n = (-۳٫۰\hat{i} - ۲٫۰\hat{j})\text{N}$ به بادام شروع به وارد شدن می‌کند. جابه‌جایی مرکز جرم دستگاه زیتون ـ بادام در زمان $t = ۴٫۰\,\text{s}$ نسبت به مکان آن در زمان $t = ۰$، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟

* ۱۲ دو اسکیت‌باز، یکی به جرم $۶۵\,\text{kg}$ و دیگری به جرم $۴۰\,\text{kg}$، روی یک سطح یخ زده ایستاده و دو سر تیری به طول

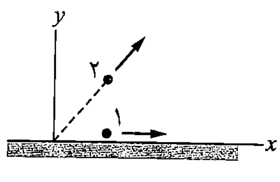
۱۰m و به جرم ناچیز را گرفته‌اند. اسکیت‌بازها از دو سر تیر شروع به کشیدن خود در طول تیر می‌کنند تا به هم می‌رسند. اسکیت‌باز ۴۰ کیلوگرمی چه فاصله‌ای را می‌پیماید؟

** ۱۳ گلوله‌ی توپی با سرعت آغازی $\vec{v}_0$ به بزرگی ۲۰m/s تحت زاویه‌ی $\theta_0 = ۶۰°$ نسبت به راستای افقی شلیک می‌شود. در بالاترین نقطه‌ی مسیر حرکت، گلوله منفجر و به دو پاره با جرم‌های مساوی تقسیم می‌شود (شکل ۹-۴۲). یکی از پاره‌ها که تندی آن درست پس از انفجار صفر است، به‌طور قائم سقوط می‌کند. با این فرض که سطح زمین ترازو نیروی پسار هوا ناچیز است، پاره‌ی دوم در چه فاصله‌ای از توپ به زمین برخورد می‌کند؟



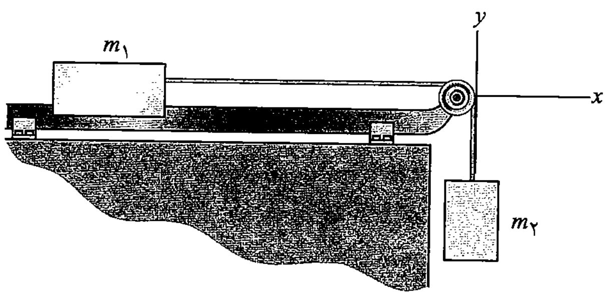
شکل ۹-۴۲ مسئله‌ی ۱۳.

** ۱۴ در شکل ۹-۴۳، دو ذره در زمان $t = ۰$ از مبداء یک دستگاه مختصات پرتاب می‌شوند. ذره‌ی ۱ به جرم $m_1 = ۵/۰۰$ g با تندی ثابت ۱۰/۰m/s از روی یک سطح بی‌اصطکاک به طور مستقیم در راستای محور x پرتاب می‌شود. ذره‌ی ۲ به جرم $m_2 = ۳/۰۰$ g با سرعتی به بزرگی ۲۰/۰m/s تحت یک زاویه‌ی بالاسو چنان پرتاب می‌شود که همیشه به طور مستقیم در بالای ذره‌ی ۱ می‌ماند. (الف) مرکز جرم این دستگاه دو ذره‌ای به چه ارتفاع بیشینه‌ی، H_{max}، می‌رسد؟ در هنگام رسیدن به ارتفاع H_{max}، (ب) سرعت و (پ) شتاب مرکز جرم، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه چیست؟



شکل ۹-۴۳ مسئله‌ی ۱۴.

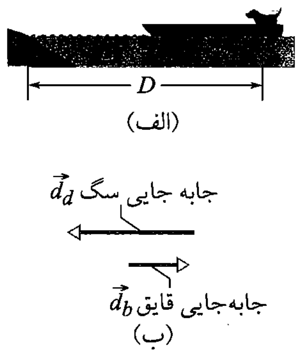
** ۱۵ شکل ۹-۴۴ آرایشی از یک سُره‌ی هوا را نشان می‌دهد که در آن ارابه‌ی با ریسمان به‌جسمی آویخته وصل شده است. ارابه دارای جرم $m_1 = ۰/۶۰۰$kg است و در آغاز مرکزش در مختصات x و y (۰/۵۰۰m- و ۰) قرار دارد؛ جسم آویخته دارای جرم $m_2 = ۰/۴۰۰$kg است و در آغاز مرکزش در مختصات x و y (۰ و ۰/۱۰۰m-) واقع است. ریسمان و قرقره جرم ناچیزی دارند. ارابه از حال سکون رها می‌شود و با جسم، هردو، حرکت می‌کنند تا ارابه به قرقره برخورد می‌کند. اصطکاک میان ارابه و سره‌ی هوا و میان قرقره و محورش ناچیز است. (الف) شتاب و مرکز جرم دستگاه ارابه ـ جسم را به‌صورت نمادگذاری بردارهای یکه به‌دست آورید. (ب) سرعت مرکز جرم به صورت تابعی از زمان t چیست؟ (پ) نمودار مسیر حرکت مرکز جرم دستگاه را رسم کنید. (ت) اگر این مسیر خمیده است، معین کنید. برآمدگی آن بالاسو و راست است یا پایین‌سو و چپ، و اگر مسیر مستقیم است، زاویه‌ی میان مسیر و محور x را به‌دست آورید.



شکل ۹-۴۴ مسئله‌ی ۱۵.

*** ۱۶ رضا به جرم ۸۰kg به اتفاق کاوه، که از رضا سبک‌تر است، روی قایقی به جرم ۳۰kg هنگام غروب به قایق‌رانی مشغول‌اند. وقتی قایق در آب آرام به حال سکون قرار دارد، این دو نفر جای خود را که به فاصله‌ی ۳/۰m از هم قرار دارد، و نسبت به مرکز قایق متقارن است، با هم عوض می‌کنند. اگر قایق به اندازه‌ی ۴۰cm به طور افقی نسبت به ساحل حرکت کند، جرم کاوه چقدر است؟

*** ۱۷ در شکل ۹-۴۵ الف، سگی به‌جرم ۴/۵kg روی قایقی تخت به جرم ۱۸kg ایستاده است و از ساحل به اندازه‌ی $D = ۶/۱$m فاصله دارد. سگ بر روی قایق به اندازه‌ی ۲/۴m



شکل ۹-۴۵ مسئله‌ی ۱۷.

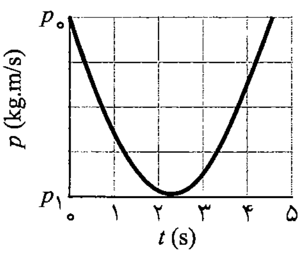
به سوی ساحل حرکت می‌کند و سپس می‌ایستد. با این فرض که میان قایق و آب اصطکاکی وجود ندارد، اکنون فاصله‌ی سگ از ساحل را پیدا کنید. (***راهنمایی:*** شکل ۹-۴۵ ب را ببینید).

پودمان ۹-۳ تکانه‌ی خطی دستگاه ذرات

* **۱۸** توپی به جرم $0/70\,\text{kg}$ در حال حرکت افقی با تندی $5/0\,\text{m/s}$ به یک‌دیوار قائم برخوردمی‌کند و باتندی $2/0\,\text{m/s}$ وامی‌جهد. بزرگی تغییر تکانه‌ی خطی توپ چقدر است؟

* **۱۹** کامیونی به جرم $2100\,\text{kg}$، در حالی که با تندی $41\,\text{km/h}$ به سمت شمال در حرکت است، به سمت خاور می‌پیچد و با تندی $51\,\text{km/h}$ به حرکت ادامه می‌دهد. (الف) تغییر انرژی جنبشی کامیون چقدر است؟ (ب) بزرگی و (پ) جهت تغییر تکانه‌ی خطی کامیون چیست؟

** **۲۰** در زمان $t = 0$ توپی از سطح زمین به سمت بالا پرتاب شده است. شکل ۹-۴۶ منحنی تغییرات تکانه‌ی p برحسب t را در حین پرواز توپ نشان می‌دهد ($p_0 = 6/0\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$ و $p_1 = 4/0\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$). این توپ تحت چه زاویه‌ی آغازی

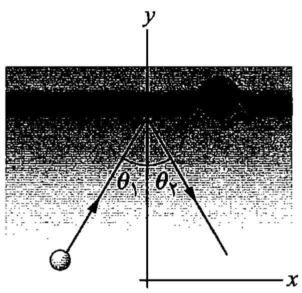


شکل ۹-۴۶ مسئله‌ی ۲۰.

پرتاب شده است؟ (***راهنمایی:*** پاسخی به دست آورید که نیازی به خواندن زمان نقطه‌ی پایین منحنی نداشته باشد).

** **۲۱** یک گوی سافت‌بال به جرم $0/30\,\text{kg}$ درست پیش از تماس با چوب دارای سرعت $15\,\text{m/s}$ تحت زاویه‌ی ۳۵ درجه‌ی زیر راستای افقی است. بزرگی تغییر تکانه‌ی خطی گوی در حین تماس با چوب چقدر است، در صورتی که گوی پس از جدا شدن از چوب، (الف) با سرعت $20\,\text{m/s}$ در راستای قائم و به پایین‌سو برگردد، و (ب) با سرعت $20\,\text{m/s}$ در راستای افقی به سوی گوی‌انداز برگردد؟

** **۲۲** شکل ۹-۴۷ تصویر مسیر یک گوی نشانه‌روی بیلیارد به جرم $0/165\,\text{kg}$ را، با دید از بالا، نشان می‌دهد که از کناره‌ی میز بازی برمی‌گردد. تندی آغازی گوی $2/00\,\text{m/s}$ و زاویه‌ی θ_1 برابر با $30/0$ درجه است. واجهیدن گوی مؤلفه‌ی y سرعت گوی را وارون می‌کند، اما مؤلفه‌ی x آن را تغییر نمی‌دهد. (الف) زاویه‌ی θ_2 و (ب) تغییر تکانه‌ی خطی گوی به صورت نمادگذاری بردارهای یکه چیست؟ (واقعیت غلتیدن گوی در مسئله اثری ندارد).

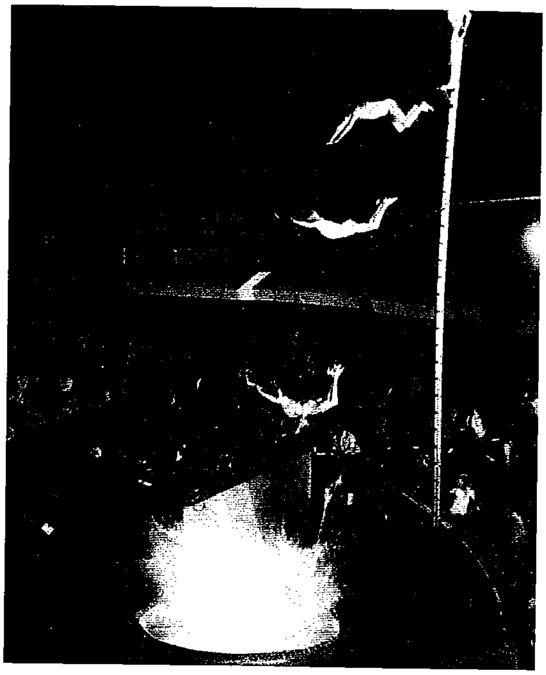


شکل ۹-۴۷ مسئله‌ی ۲۲.

پودمان ۹-۴ برخورد و ضربه

* **۲۳** هانری لاموت[1] تا حدود هفتاد سالگی با شیرجه رفتن به روی شکم از ارتفاع ۱۲ متری به درون ظرف آبی به عمق $30\,\text{cm}$ تماشاچیان را به هیجان می‌آورد (شکل ۹-۴۸). با این فرض که او درست هنگام رسیدن به ته حوض آب متوقف می‌شود و با برآوردی از جرم او، بزرگی ضربه‌ی وارد شده به او را از سوی آب حساب کنید.

1. Henri La Mothe



شکل ۹-۴۸ مسئله‌ی ۲۳. تصویری از شیرجه رفتن به روی شکم در آبی به عمق ۳۰cm.

* **۲۴** در فوریه‌ی سال ۱۹۵۵ (بهمن ۱۳۳۳) چتربازی از هواپیمایی واقع در ارتفاع ۳۷۰ متری به بیرون پرید، اما قادر به باز کردن چترش نبود. در نتیجه، با زمین پوشیده از برف برخورد کرد و فقط اندکی جراحت برداشت. فرض کنید تندی او در لحظه‌ی برخورد (تندی حد) $۵۶\,\text{m/s}$، جرم او (با وسایل همراه) $۸۵\,\text{kg}$ و بزرگی نیروی وارد شده به او از سوی برف برابر با حد مجاز قابل تحمل $۱/۲\times۱۰^{۵}\text{N}$، باشد. (الف) کمینه‌ی عمق برف که او را به صورت امن متوقف کرد و (ب) بزرگی ضربه‌ی وارد شده به او از سوی برف، چقدر بوده است؟

* **۲۵** توپی به جرم $۱/۲\,\text{kg}$ در راستای قائم به سوی یک سطح افقی رها می‌شود و با تندی $۲۵\,\text{m/s}$ به سطح برخورد می‌کند. توپ با تندی آغازی $۱۰\,\text{m/s}$ به بالا می‌جهد. (الف) چه ضربه‌ای در مدت تماس با سطح به توپ وارد می‌شود؟ (ب) اگر توپ به مدت ۰/۰۲۰ ثانیه با سطح در تماس باشد، بزرگی نیروی متوسطی که به سطح وارد می‌کند، چقدر است؟

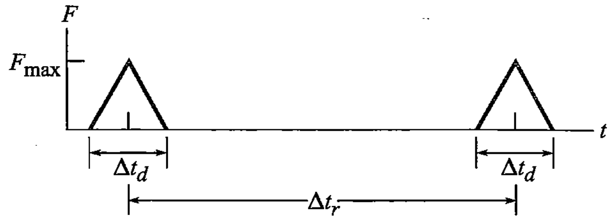
* **۲۶** در یک شوخی زننده‌ی مرسوم اما خطرناک، صندلی را از زیر شخصی که در حال نشستن بر روی آن است، می‌کشند. این کار سبب می‌شود شخص محکم به زمین بخورد. فرض کنید این شخص از ارتفاع $۰/۵۰\,\text{m}$ سقوط می‌کند، جرم او که به پایین‌سو حرکت می‌کند $۷۰\,\text{kg}$ است، و مدت درنگ در برخورد او با کف زمین ۰/۰۸۲ ثانیه طول می‌کشد. بزرگی (الف) ضربه و (ب) نیروی متوسط وارد شده به شخص از کف زمین در حین برخورد چیست؟

* **۲۷** گلوله‌ای به جرم $۰/۴۰\,\text{kg}$، که در آغاز با تندی $۱۴\,\text{m/s}$ در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند، تحت اثر نیرویی به مدت $۲۷\,\text{ms}$ در جهت منفی محور x قرار می‌گیرد. بزرگی این نیرو تغییر می‌کند و بزرگی ضربه‌ی آن $۳۲/۴\,\text{N}\cdot\text{s}$ است. درست پس از وارد شدن نیرو (الف) تندی گلوله و (ب) جهت حرکت آن، چیست؟ (پ) بزرگی متوسط نیرو و (ت) جهت ضربه‌ی وارد شده به گلوله، چیست؟

* **۲۸** در مسابقه‌ی تکواندو یک دست با تندی $۱۳\,\text{m/s}$ بر روی هدفی به سمت پایین کوبیده می‌شود و در طی برخوردی به مدت $۵/۰\,\text{ms}$ متوقف می‌شود. فرض کنید در این برخورد، دست از بازو مستقل و دارای جرم $۰/۷۰\,\text{kg}$ است. بزرگی (الف) ضربه و (ب) نیروی متوسط وارد شده به دست از سوی هدف چیست؟

* **۲۹** فرض کنید گانگستری گلوله‌هایی ۳ گرمی را با آهنگ ۱۰۰ گلوله بر دقیقه و با تندی $۵۰۰\,\text{m/s}$ به سینه‌ی سوپرمن شلیک می‌کند. هم‌چنین، فرض کنید گلوله‌ها بدون تغییر تندی یک راست به پس برمی‌گردند. بزرگی نیروی متوسطی که باران گلوله‌ها به سینه‌ی سوپرمن وارد می‌کند، چیست؟

** **۳۰** ***دو نیروی متوسط.*** گلوله‌های برفی به جرم $۰/۲۵۰\,\text{kg}$ با تندی $۴/۰۰\,\text{m/s}$ با جریانی پایا و به طور عمود به سوی دیواری پرتاب می‌شوند. گلوله‌ها پس از برخورد به دیوار می‌چسبند. شکل ۹-۴۹ نمودار بزرگی نیروی وارد شده به دیوار F، را به صورت تابعی از زمان t، برای دو برخورد از گلوله‌ها نشان می‌دهد. بازه‌ی زمانی میان دو برخورد پیاپی $\Delta t_r = ۵۰/۰\,\text{ms}$، و مدت درنگ در هر برخورد $\Delta t_d = ۱۰\,\text{ms}$ است، که در شکل مثلث‌های دو ضلع برابر را تشکیل می‌دهند و در برخورد نیروی وارد شده به مقدار بیشینه‌ی $F_{max} = ۲۰۰\,\text{N}$ می‌رسد. در طول هر برخورد، بزرگی (الف) ضربه و (ب)

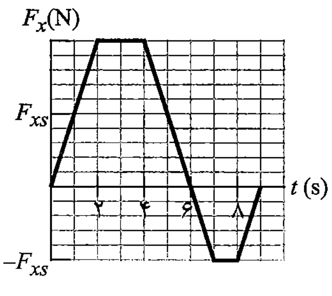


شکل ۹-۴۹ مسئله‌ی ۳۰.

نیروی متوسط وارد شده به دیوار چقدر است؟ (پ) در طول مدت زمان عده‌ی زیادی از برخوردها، بزرگی نیروی متوسط وارد شده به دیوار چقدر می‌شود؟

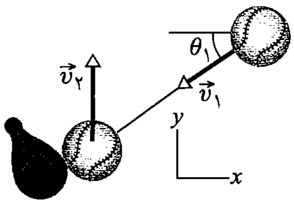
** **۳۱** ***پریدن به بالا پیش از برخورد آسانسور.*** اتاقک یک آسانسور پس از پاره شدن کابل و خراب شدن سیستم ایمنی از ارتفاع ۳۶ متری آزادانه سقوط می‌کند. در حین برخورد اتاقک با ته چاه آسانسور، مسافری به جرم ۹۰ kg در مدت زمان ۵٫۰ ms متوقف می‌شود. (فرض کنید مسافر و اتاقک واجهش نمی‌کنند). بزرگی (الف) ضربه و (ب) نیروی متوسط وارد شده به مسافر در حین برخورد چقدر است؟ اگر مسافر پیش از برخورد کردن اتاقک با ته چاه با تندی ۷٫۰ m/s نسبت به کف اتاقک به بالاسو بپرد، بزرگی (پ) ضربه و (ت) نیروی متوسط وارد شده به او چقدر است (مدت توقف را همان مدت پیشی در نظر بگیرید)؟

** **۳۲** یک خودرو اسباب بازی به جرم ۵٫۰ kg می‌تواند در راستای محور x حرکت کند؛ شکل ۹-۵۰ نمودار تغییرات F_x، نیروی وارد شده به خودرو را که در زمان $t = ۰$ از حال سکون شروع به حرکت می‌کند، نشان می‌دهد. مقیاس محور F_x با مقدار $F_{xs} = ۵٫۰\,\text{N}$ مشخص شده است. با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه، تکانه‌ی $\vec{p}$ را در زمان (الف) $t = ۴٫۰\,\text{s}$ و (ب) $t = ۷٫۰\,\text{s}$ و (پ) سرعت $\vec{v}$ را در زمان $t = ۹٫۰\,\text{s}$ پیدا کنید.



شکل ۹-۵۰ مسئله‌ی ۳۲.

** **۳۳** شکل ۹-۵۱ یک گوی بیس‌بال به جرم ۰٫۳۰۰ kg را درست پیش از برخورد و درست پس از برخورد با چوب نشان می‌دهد. درست پیش از برخورد، توپ دارای سرعت $\vec{v}_1$ به بزرگی ۱۲٫۰ m/s تحت زاویه‌ی $\theta_1 = ۳۵٫۰°$ است. درست پس از برخورد، توپ با سرعت $\vec{v}_2$ به بزرگی ۱۰٫۰ m/s یک راست به بالاسو حرکت می‌کند. مدت درنگ در برخورد ۲٫۰۰ ms است. (الف) بزرگی و (ب) جهت ضربه‌ی وارد شده به گوی از سوی چوب (نسبت به جهت مثبت محور x) چیست؟ (پ) بزرگی و (ت) جهت نیروی متوسط وارد شده به گوی از سوی چوب چیست؟



شکل ۹-۵۱ مسئله‌ی ۳۳.

** **۳۴** مارمولک‌های بازیلیسک[1] می‌توانند بر روی سطح آب بدوند (شکل ۹-۵۲). مارمولک در هر گام، نخست پایش را به آب می‌کوبد و سپس آن را به سرعت به آب فشار می‌دهد تا حفره‌ای از هوا در پیرامون پایش به وجود آورد. مارمولک برای آنکه بتواند پایش را در مقابله با نیروی پسار آب به بالا بکشد تا گام را کامل کند، پایش را پیش از پر شدن آب در حفره‌ی هوا، بلند می‌کند. در حین عمل کوبیدن پا، فشار دادن پا به سمت پایین و بلند کردن آن، ضربه‌ی بالاسوی متوسط وارد شده به مارمولک باید با ضربه‌ی پایین‌سوی ناشی از نیروی گرانش سازگار باشد تا مارمولک در آب فرو نرود. فرض کنید جرم یک مارمولک بازیلیسک ۹۰٫۰ گرم، جرم هر پایش ۳٫۰۰ گرم، تندی پایش هنگام کوبیدن به آب ۱٫۵۰ m/s، و مدت زمان هر گام ۰٫۶۰۰ ثانیه است. (الف) بزرگی ضربه‌ی وارد شده به مارمولک در هنگام کوبیدن پا چقدر است؟ (فرض کنید این

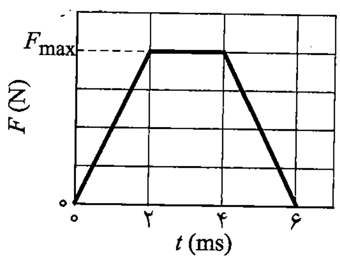
---

1. Basilisk lizards

شکل ۹-۵۲ مسئله‌ی ۳۴. تصویری از دویدن مارمولک بازیلیسک بر روی آب.

ضربه در راستای قائم و به سمت بالاسو است). (ب) در مدت زمان ۰٫۶۰۰ ثانیه برای هر گام، ضربه‌ی پایین‌سوی وارد شده به مارمولک از سوی نیروی گرانشی، چقدر است؟ (پ) کدام عمل، کوبیدن پا یا فشار دادن آن، تکیه‌گاه اصلی مارمولک را تأمین می‌کند؟ آیا هر دو در این مورد نقش یکسانی دارند؟

**** ۳۵** شکل ۹-۵۳ نمودار تغییرات بزرگی نیرو برحسب زمان را، به تقریب، در حین برخورد یک گلوله‌ی ۵۸ گرمی با دیوار نشان می‌دهد. گلوله دارای سرعت آغازی $۳۴\,\mathrm{m/s}$ و عمود بر دیوار است. گلوله تقریباً با همان تندی یک راست و به طور عمود بر دیوار به پس وامی‌جهد. بزرگی بیشینه‌ی نیروی وارد شده به دیوار F_{max}، در حین برخورد گلوله، چقدر است؟



شکل ۹-۵۳ مسئله‌ی ۳۵.

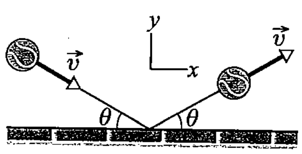
**** ۳۶** قرصی به جرم $۰٫۲۵\,\mathrm{kg}$ در آغاز بر روی سطح یخ بسته‌ی با اصطکاک ناچیز ساکن است. در زمان $t = ۰$ نیرویی افقی قرص را به حرکت درمی‌آورد. این نیرو از رابطه‌ی $\vec{F} = (۱۲٫۰ - ۳٫۰۰t^۲)\hat{\mathrm{i}}$ به‌دست می‌آید، که در آن $\vec{F}$ برحسب نیوتون و t برحسب ثانیه است. این نیرو تا زمانی اثر می‌کند که بزرگی‌اش صفر شود. (الف) بزرگی ضربه‌ای که این نیرو از زمان $t = ۰٫۵۰۰\,\mathrm{s}$ تا زمان $t = ۱٫۲۵\,\mathrm{s}$ به قرص وارد می‌کند، چقدر است؟ (ب) تغییر تکانه‌ی قرص در بین $t = ۰$ و لحظه‌ای که داریم $F = ۰$، چقدر است؟

**** ۳۷** یک بازیکن فوتبال به توپی به جرم $۰٫۴۵\,\mathrm{kg}$، که در آغاز ساکن است، ضربه می‌زند. پای بازیکن به مدت $۳٫۰ \times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{s}$ با توپ در تماس است و نیروی وارد شده به توپ در بازه‌ی زمانی $۰ \le t \le ۳٫۰ \times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{s}$، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$F(t) = [(۶٫۰ \times ۱۰^۶)t - (۲٫۰ \times ۱۰^۹)t^۲]\,\mathrm{N}$$

که در آن t برحسب ثانیه است. مطلوب است تعیین بزرگی کمیت‌های زیر: (الف) ضربه‌ی وارد شده از پای بازیکن به توپ، (ب) نیروی متوسط وارد شده از پای بازیکن در حین تماس با توپ، (پ) بیشینه‌ی نیروی وارد شده از پای بازیکن در حین تماس با توپ و (ت) سرعت توپ بی‌درنگ پس از جدا شدن از پای بازیکن.

**** ۳۸** در شکل ۹-۵۴، که از بالا دیده می‌شود، گلوله‌ای به جرم $۳۰۰\,\mathrm{g}$ با تندی v به بزرگی $۶٫۰\,\mathrm{m/s}$ تحت زاویه‌ی θ برابر با ۳۰ درجه با دیواری برخورد می‌کند و با همان تندی و همان زاویه وامی‌جهد. این گلوله به مدت $۱۰\,\mathrm{ms}$ با دیوار در تماس می‌ماند. با استفاده کردن از نمادگذاری بردارهای یکه، (الف) ضربه‌ی وارد شده به گلوله از سوی دیوار و (ب) نیروی متوسط وارد شده به دیوار از سوی گلوله، چیست؟



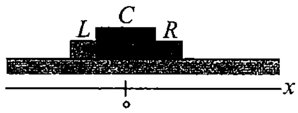
شکل ۹-۵۴ مسئله‌ی ۳۸.

پودمان ۹-۵ پایستگی تکانه‌ی خطی

*** ۳۹** شخصی به جرم $۹۱\,\mathrm{kg}$، که روی یک سطح با اصطکاک ناچیز خوابیده است، به سنگی به جرم ۶۸ گرم ضربه می‌زند و آن را با تندی $۴٫۰\,\mathrm{m/s}$ از خود دور می‌کند. این شخص چه تندی‌ای پیدا می‌کند؟

* ۴۰ یک وسیله‌ی نقلیه‌ی فضایی با تندی ۴۳۰۰ km/h نسبت به زمین حرکت می‌کند و در این هنگام موتور موشکی اضافی (با جرم $4m$) با تندی ۸۲ km/h نسبت به مدول فرماندهی (با جرم m) به پس‌سو جدا می‌شود. تندی مدول فرماندهی نسبت به زمین، درست پس از جدا شدن موتور چقدر است؟

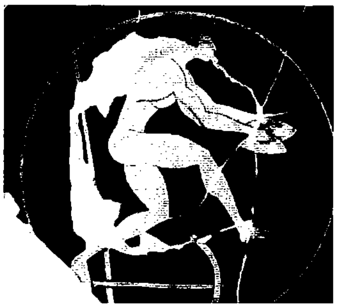
** ۴۱ شکل ۹-۵۵ یک «موشک» دو سره را نشان می‌دهد که در آغاز بر روی یک سطح بی‌اصطکاک ساکن و مرکزش در مبداء محور x واقع است. این موشک دارای قطعه‌ی مرکزی C (به‌جرم $M =$ ۶/۰۰ kg) و قطعه‌های L و R (هر یک به جرم $m =$ ۲/۰۰ kg) در طرف‌های چپ و راست است. انفجارهای کوچک می‌توانند قطعه‌های کناری را در راستای محور x از قطعه‌ی C دور کنند. دراینجا ترتیب‌رخدادها چنین است: (۱) در زمان $t =$ ۰، قطعه‌ی L با تندی ۳/۰۰ m/s ***نسبت به*** سرعتی که انفجار به بخش باقی‌مانده‌ی موشک می‌دهد به‌سمت چپ پرتاب می‌شود. (۲) سپس، در زمان $t =$ ۰/۸۰ s، قطعه‌ی R با تندی ۳/۰۰ m/s ***نسبت به*** سرعت قطعه‌ی C که در آن هنگام دارد، به سمت راست پرتاب می‌شود. در زمان $t =$ ۲/۸۰ s، (الف) سرعت قطعه‌ی C و (ب) مکان مرکز آن قطعه، چیست؟



شکل ۹-۵۵ مسئله‌ی ۴۱.

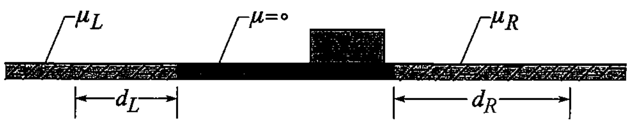
** ۴۲ شیئی به جرم m و با تندی v نسبت به یک ناظر، منفجر و به دو پاره تقسیم می‌شود. جرم یکی از پاره‌ها سه برابر جرم دیگری است و انفجار در اعماق فضا صورت می‌گیرد. پاره‌ی سبک‌تر نسبت به ناظر متوقف می‌شود. از دید چارچوب مرجع ناظر چقدر انرژی جنبشی براثر انفجار به‌دستگاه افزوده می‌شود؟

** ۴۳ در بازی‌های المپیک سال ۷۰۸ پیش از میلاد، برخی قهرمانان شرکت کننده در مسابقه‌ی پرش طول به حالت ایستاده برای افزایش دادن طول پرش از وزنه‌هایی به نام ***هالتر*** که در دست می‌گرفتند، استفاده می‌کردند (شکل ۹-۵۶). این وزنه‌ها را درست پیش از بلند شدن به طرف بالا و جلو تاب می‌دادند و سپس در حین پرش آن‌ها را به سمت پایین و عقب پرتاب می‌کردند. فرض کنید یک قهرمان پرش طول امروزی به جرم ۷۸ kg به همان ترتیب از دو هالتر ۵/۵۰ کیلوگرمی استفاده می‌کند و آن‌ها را در ارتفاع بیشینه‌ی پرش خود به طور افقی به‌گونه‌ای به پس‌سو پرتاب می‌کند که سرعت افقی‌شان نسبت به زمین صفر باشد. سرعت بلند شدن این قهرمان را با هالتر و بدون هالتر، $\vec{v} = (9/5\,\hat{i} + 4/0\,\hat{j})$ m/s در نظر بگیرید و فرض کنید در همان ارتفاعی که از زمین بلند می‌شود به زمین فرود می‌آید. استفاده کردن از هالترها چقدر به طول پرش اضافه می‌کند؟



شکل ۹-۵۶ مسئله‌ی ۴۳.

** ۴۴ در شکل ۹-۵۷، جسم ساکنی بر اثر انفجار به دو پاره‌ی L و R تقسیم می‌شود. این پاره‌ها بر روی سطح بی‌اصطکاکی می‌لغزند و سپس به ناحیه‌ی با اصطکاکی وارد و در آنجا متوقف می‌شوند. پاره‌ی L با جرم ۲/۰ kg، که با ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_L =$ ۰/۴۰ مواجه می‌شود، می‌لغزد و پس از پیمودن مسافت $d_L =$ ۰/۱۵ m متوقف می‌شود. پاره‌ی R، که با ضریب اصطکاک $\mu_R =$ ۰/۵۰ مواجه می‌شود، می‌لغزد و پس از پیمودن مسافت $d_R =$ ۰/۲۵ m می‌ایستد. جرم این جسم چقدر بوده است؟



شکل ۹-۵۷ مسئله‌ی ۴۴.

** ۴۵ جسمی به‌جرم ۲۰/۰ kg، درحالی‌که با تندی ۲۰۰ m/s در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند، منفجر و به سه پاره تقسیم می‌شود. یکی از پاره‌ها به جرم ۱۰/۰ kg با تندی ۱۰۰ m/s در

جهت مثبت محور y از نقطه‌ی انفجار دور می‌شود. پاره‌ی دوم به جرم $۴/۰۰\,kg$ با تندی $۵۰۰\,m/s$ در جهت منفی محور x حرکت می‌کند. (الف) سرعت پاره‌ی سوم به صورت نمادگذاری بردارهای یکه چیست؟ (ب) در این انفجار چقدر انرژی آزاد می‌شود؟ از اثرهای ناشی ازنیروی گرانشی چشم‌پوشی کنید.

** ۴۶ جعبه‌ای به جرم $۴/۰\,kg$، در حالی که بر روی یک سطح بی‌اصطکاک می‌لغزد منفجر و به دوبخش ۲/۰ کیلوگرمی تقسیم می‌شود. یکی از بخش‌ها با تندی $۳/۰\,m/s$ به سمت شمال و بخش دیگر با تندی $۵/۰\,m/s$ در راستای ۳۰ درجه‌ی شمال محور خاوری حرکت می‌کند. تندی اولی جعبه چقدر است؟

** ۴۷ ظرف ساکنی در مبداء دستگاه محورهای مختصات xy منفجر و به سه پاره تقسیم می‌شود. درست پس از انفجار، یکی از پاره‌ها به جرم m با سرعت $(-۳۰\,m/s)\hat{i}$ و پاره‌ی دوم هم به جرم m با سرعت $(-۳۰\,m/s)\hat{j}$ حرکت می‌کنند. جرم پاره‌ی سوم $۳m$ است. درست پس از انفجار، (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت پاره‌ی سوم چیست؟

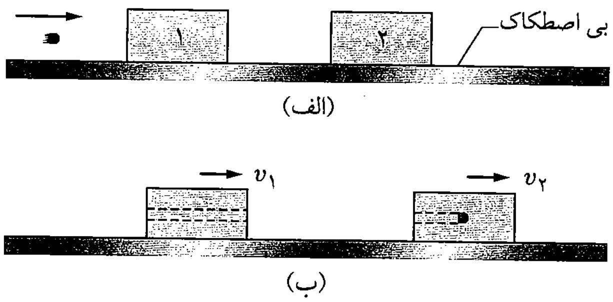
*** ۴۸ ذره‌ی A و ذره‌ی B به وسیله‌ی فنر متراکم شده‌ای، که در میان آن‌ها قرار دارد، به هم متصل‌اند. وقتی دو ذره رها می‌شوند، فنر آن‌ها را در جهت‌های مخالف هُل می‌دهد و از آن‌ها جدا می‌شود. جرم ذره‌ی A مساوی با ۲/۰۰ برابر جرم ذره‌ی B و انرژی ذخیره شده در فنر $۶۰\,J$ است. فرض کنید فنر جرم ناچیزی دارد و تمام انرژی ذخیره شده در آن به ذره‌ها منتقل می‌شود. وقتی این انتقال انرژی صورت گیرد، انرژی‌های جنبشی (الف) ذره‌ی A و (ب) ذره‌ی B، چه خواهند بود؟

پودمان ۹-۶ تکانه و انرژی جنبشی در برخوردها

* ۴۹ گلوله‌ای به جرم ۱۰ گرم به یک آونگ بالیستیک به جرم $۲/۰\,kg$ برخورد می‌کند. مرکز جرم آونگ در راستای قائم به اندازه‌ی $۱۲\,cm$ بالا می‌رود. با این فرض که گلوله در درون آونگ باقی می‌ماند، تندی آغازی آن را حساب کنید.

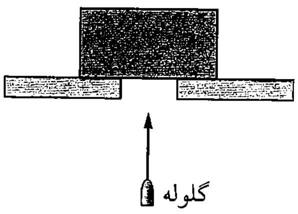
* ۵۰ گلوله‌ای به جرم ۵/۲۰ گرم در حال حرکت با تندی $۶۷۲\,m/s$ به یک قطعه چوب ساکن ۷۰۰ گرمی واقع در روی یک سطح بی‌اصطکاک برخورد می‌کند. گلوله با تندی $۴۲۸\,m/s$ از سوی دیگر قطعه چوب بیرون می‌رود. (الف) تندی قطعه چوب چقدر می‌شود؟ (ب) تندی مرکز جرم گلوله - قطعه چوب، چقدر است؟

** ۵۱ در شکل ۹-۵۸ الف، گلوله‌ای به جرم ۳/۵۰ گرم به طور افقی به سوی دو جسم ساکن بر روی یک میز بی‌اصطکاک شلیک می‌شود. این گلوله از جسم ۱ (به جرم $۱/۲۰\,kg$) عبور می‌کند و در جسم ۲ (به‌جرم $۱/۸۰\,kg$) فرومی‌رود. این اجسام دارای تندی پایانی $v_1 = ۰/۶۳۰\,m/s$ و $v_2 = ۱/۴۰\,m/s$ می‌شوند (شکل ۹-۵۸ ب). با چشم‌پوشی کردن از ماده‌ای که توسط گلوله از جسم ۱ خارج می‌شود، تندی گلوله را در هنگامی که (الف) از جسم ۱ خارج می‌شود و (ب) به جسم ۱ وارد می‌شود، پیدا کنید.



شکل ۹-۵۸ مسئله‌ی ۵۱.

** ۵۲ در شکل ۹-۵۹، گلوله‌ای ۱۰ گرمی که با تندی $۱۰۰۰\,m/s$ یک راست در حال حرکت به بالاسو است، به قطعه چوبی ساکن به جرم $۵/۰\,kg$ برخورد می‌کند و از مرکز جرم آن می‌گذرد. گلوله با تندی $۴۰۰\,m/s$ از قطعه چوب بیرون می‌آید و یک راست به بالاسو حرکت می‌کند. قطعه چوب نسبت به مکان آغازی خود حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟



شکل ۹-۵۹ مسئله‌ی ۵۲.

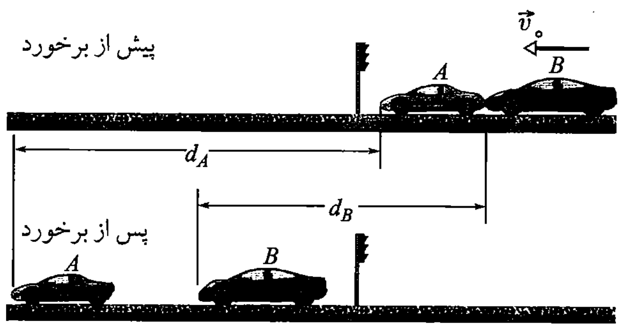
** ۵۳ در شهر آنکوریج[1] واقع در جنوب ایالت آلاسکا، برخورد وسایل نقلیه با گوزن‌ها به قدری معمول است که به این عمل نام اختصاری MVC[2] را داده‌اند. فرض کنید خودرویی به جرم $1000\,\text{kg}$ در حال سُر خوردن در جاده‌ای بسیار لغزنده با یک گوزن ساکن به جرم $500\,\text{kg}$ برخورد می‌کند و گوزن توسط شیشه‌ی جلو خودرو پرتاب می‌شود (که نتیجه‌ی عمل MVC است). (الف) چند درصد از انرژی جنبشی اولی در این برخورد به صورت‌های دیگر انرژی تلف می‌شود؟ مشابه این خطر در عربستان سعودی هم به خاطر برخورد وسایل نقلیه با شتر (CVC[3]) وجود دارد. (ب) اگر این خودرو با شتری به جرم $300\,\text{kg}$ برخورد کند، چند درصد از انرژی اولی تلف می‌شود؟ (پ) به طور کلی، اگر جرم حیوان کمتر باشد، آیا درصد اتلاف انرژی افزایش می‌یابد یا کاهش؟

** ۵۴ دو گلوله‌ی بتونه‌ی نرم که در طول یک محور قائم یک راست به سوی هم حرکت می‌کنند، برخورد ناکشسان کامل انجام می‌دهند. درست پیش از برخورد، یکی از گلوله‌ها به جرم $3{,}0\,\text{kg}$ با تندی $20\,\text{m/s}$ به بالاسو و گلوله‌ی دیگر به جرم $2{,}0\,\text{kg}$ با تندی $12\,\text{m/s}$ به پایین‌سو در حال حرکت است. این ترکیب دو گلوله‌ی بتونه تا چه ارتفاعی نسبت به نقطه‌ی برخورد بالا می‌روند (از نیروی پسار هوا چشم‌پوشی کنید).

** ۵۵ جسمی به جرم $5{,}0\,\text{kg}$ با تندی $3{,}0\,\text{m/s}$ با جسم دیگری به جرم $10\,\text{kg}$، که با تندی $2{,}0\,\text{m/s}$ به طور همسو در حرکت است، برخورد می‌کند. پس از برخورد مشاهده می‌شود که جسم ۱۰ کیلوگرمی با تندی $2{,}5\,\text{m/s}$ در همان جهت اولی حرکت می‌کند. (الف) سرعت جسم ۵٫۰ کیلوگرمی بی‌درنگ پس از برخورد چیست؟ (ب) انرژی جنبشی کل دستگاه دو جسم بر اثر برخورد چقدر تغییر می‌کند؟ (پ) اکنون فرض کنید جسم ۱۰ کیلوگرمی پس از برخورد با تندی $4{,}0\,\text{m/s}$ حرکت می‌کند. در این صورت، تغییر انرژی جنبشی کل چقدر است؟ (ت) دلیل نتیجه‌ای را که در قسمت (پ) به‌دست آورده‌اید، بیان کنید.

1. Anchorage
2. moose-vehicle collision (MVC)
3. camel-vehicle collision (CVC)

** ۵۶ در بخش «پیش از برخورد» شکل ۹-۶۰، خودرو A (به جرم $1100\,\text{kg}$) که در پشت چراغ راهنمایی ایستاده است، از پشت مورد برخورد خودرو B (به جرم $1400\,\text{kg}$) قرار می‌گیرد. سپس هر دو خودرو با چرخ‌های قفل شده می‌لغزند تا نیروی اصطکاک جاده‌ی لیز (با ضریب اصطکاک جنبشی اندک $\mu_k = 0{,}13$) آن‌ها را پس از پیمودن مسافت‌های $d_A = 8{,}2\,\text{m}$ و $d_B = 6{,}1\,\text{m}$ متوقف می‌کند. تندی‌های (الف) خودرو A و (ب) خودرو B در شروع لغزیدن درست پس از برخورد، چقدر است؟ (پ) با این فرض که در حین برخورد تکانه‌ی خطی پایسته است، تندی خودرو B را درست پیش از برخورد پیدا کنید. (ت) توضیح دهید چرا چنین فرضی ممکن است بی‌اعتبار باشد؟

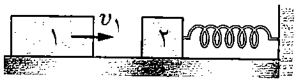


شکل ۹-۶۰ مسئله‌ی ۵۶.

** ۵۷ در شکل ۹-۶۱، گلوله‌ای به جرم $m = 60\,\text{g}$ با تندی $v_i = 22\,\text{m/s}$ به درون لوله‌ی یک تفنگ فنری به جرم $M = 240\,\text{g}$، که در حال سکون روی یک سطح بی‌اصطکاک قرار دارد، پرتاب می‌شود. گلوله درون لوله در نقطه‌ای که فنر بیشترین تراکم را پیدا می‌کند، گیر می‌کند. فرض کنید افزایش انرژی گرمایی ناشی از اصطکاک میان گلوله و لوله ناچیز است. (الف) تندی تفنگ فنری پس از توقف گلوله در درون لوله چقدر است؟ (ب) چه کسری از انرژی جنبشی اولی گلوله در فنر ذخیره می‌شود؟

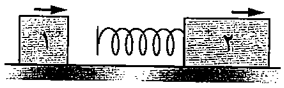
شکل ۹-۶۱ مسئله‌ی ۵۷.

*** ۵۸ در شکل ۹-۶۲، جسم ۲ (به جرم $1{,}0\,kg$) بر روی یک سطح بی‌اصطکاک ساکن و به سر یک فنر کشیده نشده با ثابت فنر $200\,N/m$ متصل است. سر دیگر فنر به یک دیوار ثابت شده است. جسم ۱ (به جرم $2{,}0\,kg$) در حال حرکت با تندی $v_1 = 4{,}0\,m/s$ با جسم ۲ برخورد می‌کند و دو جسم به هم می‌چسبند. وقتی دو جسم به طور لحظه‌ای متوقف می‌شوند، فنر چقدر متراکم شده است؟



شکل ۹-۶۲ مسئله‌ی ۵۸.

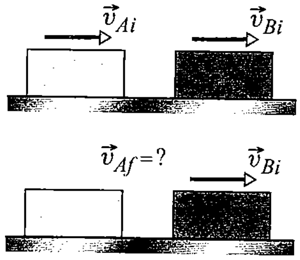
*** ۵۹ در شکل ۹-۶۳، جسم ۱ (به جرم $2{,}0\,kg$) با تندی $10\,m/s$ در حال حرکت به راست‌سو و جسم ۲ (به جرم $5{,}0\,kg$) هم با تندی $3{,}0\,m/s$ در حال حرکت به راست‌سو است. سطح بی‌اصطکاک است و یک فنر با ثابت فنر $1120\,N/m$ به جسم ۲ وصل شده است. در هنگام برخورد دو جسم میزان تراکم فنر در لحظه‌ای بیشینه است که دو جسم سرعت یکسان دارند. تراکم بیشینه‌ی فنر را پیدا کنید.



شکل ۹-۶۳ مسئله‌ی ۵۹.

پودمان ۹-۷ برخوردهای کشسان یک بعدی

* ۶۰ در شکل ۹-۶۴، جسم A (به جرم $1{,}6\,kg$) بر روی یک سطح بی‌اصطکاک به سمت جسم B (به جرم $2{,}4\,kg$) می‌لغزد. در شکل جهت‌های سه سرعت پیش (i) و پس (f) از برخورد نشان داده شده‌اند؛ تندی‌های متناظر عبارت‌اند از $v_{Ai} = 5{,}5\,m/s$، $v_{Bi} = 2{,}5\,m/s$ و $v_{Bf} = 4{,}9\,m/s$. (الف) تندی و (ب) جهت (چپ یا راست) سرعت $\vec{v}_{Af}$ چیست؟ (پ) آیا این برخورد کشسان است؟



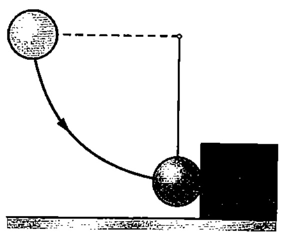
شکل ۹-۶۴ مسئله‌ی ۶۰.

* ۶۱ ارابه‌ای به جرم ۳۴۰ گرم، که با تندی آغازی $1{,}2\,m/s$ روی یک سُره‌ی هوای مستقیم و بی‌اصطکاک حرکت می‌کند، با ارابه‌ی ساکنی به جرم نامعلوم برخورد کشسان انجام می‌دهد. پس از برخورد، ارابه‌ی اولی با تندی $0{,}66\,m/s$ در جهت اولی خود به حرکت ادامه می‌دهد. (الف) جرم ارابه‌ی دوم چقدر است؟ (ب) تندی این ارابه پس از برخورد چقدر است؟ (پ) تندی مرکز جرم دو ارابه چیست؟

* ۶۲ دو کره از جنس تیتان با تندی یکسان به صورت شاخ‌به‌شاخ به هم نزدیک می‌شوند و یک برخورد کشسان انجام می‌دهند. پس از برخورد یکی از کره‌ها که جرمش ۳۰۰ گرم است ساکن می‌ماند. (الف) جرم کره‌ی دیگر چقدر است؟ (ب) اگر تندی آغازی هر کره $2{,}00\,m/s$ باشد، تندی مرکز جرم دو کره چیست؟

** ۶۳ جسم ۱ به جرم m_1 بر روی یک سطح بی‌اصطکاک می‌لغزد و با جسم ساکن ۲ به جرم $m_2 = 3m_1$ برخورد کشسان یک بعدی انجام می‌دهد. پیش از برخورد تندی مرکز جرم دستگاه دو جسمی $3{,}00\,m/s$ بوده است. پس از برخورد (الف) تندی مرکز جرم و (ب) تندی جسم ۲ چیست؟

** ۶۴ گلوله‌ای فولادی به جرم $0{,}500\,kg$ به ریسمانی به طول $70{,}0\,cm$ بسته شده و سر دیگر ریسمان در نقطه‌ای محکم شده است. سپس، گلوله در حالی که ریسمان افقی است رها می‌شود (شکل ۹-۶۵). گلوله در پایین‌ترین نقطه‌ی مسیرش به یک قطعه فولاد در حال سکون به جرم $2{,}50\,kg$ واقع بر روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک برخورد می‌کند. این برخورد کشسان است.



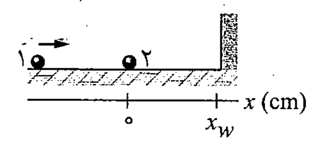
شکل ۹-۶۵ مسئله‌ی ۶۴.

(الف) تندی گلوله و (ب) تندی قطعه فولاد را درست پس از برخورد، پیدا کنید.

** ۶۵ جسمی به جرم ۲/۰ kg با جسم دیگری که در حال سکون است، به طور کشسان برخورد می‌کند و سپس در همان جهت با یک چهارم تندی آغازی به حرکت خود ادامه می‌دهد. (الف) جرم جسم دیگر چیست؟ (ب) اگر تندی آغازی جسم ۲/۰ کیلوگرمی ۴/۰ m/s باشد، تندی مرکز جرم دستگاه دو جسمی چیست؟

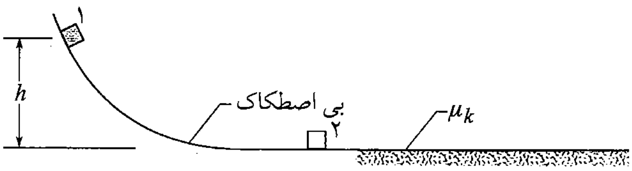
** ۶۶ جسم ۱ به‌جرم m_1 وتندی ۴/۰ m/s در راستای محور x واقع بر روی یک‌سطح بی‌اصطکاک می‌لغزد و با جسم ساکن ۲ به جرم $m_2 =$ ۰/۴۰m_1 برخورد کشسان یک بعدی انجام می‌دهد. سپس، این دو جسم به ناحیه‌ای با ضریب اصطکاک جنبشی ۰/۵۰ می‌لغزند و در آنجا متوقف می‌شوند. در این ناحیه (الف) جسم ۱ و (ب) جسم ۲، تا چه مسافتی می‌لغزد؟

** ۶۷ در شکل ۹-۶۶، ذره‌ی ۱ به جرم $m_1 =$ ۰/۳۰ kg و تندی ۲/۰ m/s در راستای محور x واقع بر روی یک سطح بی‌اصطکاک به راست‌سو می‌لغزد. این ذره هنگام رسیدن به نقطه‌ی $x =$ ۰ با ذره‌ی ساکن ۲ به جرم $m_2 =$ ۰/۴۰ kg برخورد کشسان یک بعدی انجام می‌دهد. سپس، ذره‌ی ۲ هنگام رسیدن به دیوار واقع در $x_W =$ ۷۰ cm بدون کاهش تندی از دیوار وامی‌جهد. در چه مکانی در روی محور x ذره‌ی ۲ بار دیگر با ذره‌ی ۱ برخورد می‌کند؟



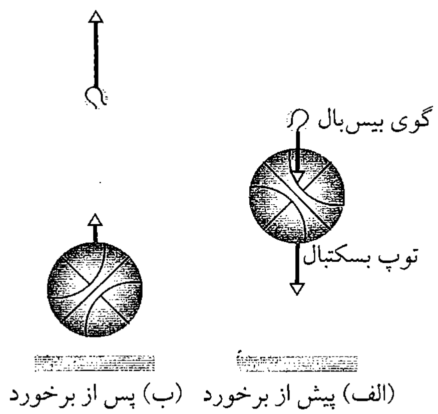
شکل ۹-۶۶ مسئله‌ی ۶۷.

** ۶۸ در شکل ۹-۶۷، جسم ۱ به جرم m_1 از حال سکون در راستای یک شیب‌راهه‌ی بی‌اصطکاک از ارتفاع $h =$ ۲/۵۰ m به پایین می‌لغزد و سپس با جسم ساکن ۲ به‌جرم $m_2 =$ ۲/۰۰m_1 برخورد می‌کند. پس از برخورد، جسم ۲ به ناحیه‌ای با ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_k =$ ۰/۵۰۰ وارد و پس از پیمودن مسافت d در آن ناحیه متوقف می‌شود. مقدار مسافت d در برخورد (الف) کشسان و (ب) ناکشسان کامل، چقدر است؟



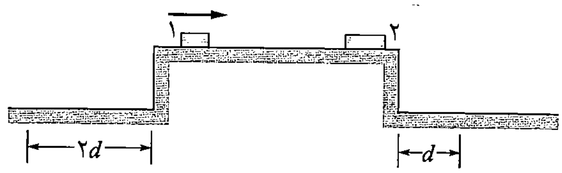
شکل ۹-۶۷ مسئله‌ی ۶۸.

*** ۶۹ گوی کوچکی به جرم m به طور هم خط در بالای یک توپ بزرگ به‌جرم $M =$ ۰/۶۳ kg (با فاصله‌ی جدایی اندکی، مانند گوی بیس‌بال و توپ بسکتبال در شکل ۹-۶۸ الف) قرار گرفته است. این گوی و توپ از ارتفاع $h =$ ۱/۸ m به طور هم‌زمان رها می‌شوند. (فرض کنید شعاع‌های گوی و توپ در مقایسه با h قابل چشم‌پوشی‌اند). (الف) اگر توپ به طور کشسان از سطح زمین وابجهد و سپس گوی هم به طور کشسان از روی توپ واجهیده شود مقدار m چقدر باید باشد تا توپ پس از برخورد با گوی متوقف شود؟ (ب) در این صورت، گوی تا چه ارتفاعی بالا می‌رود (شکل ۹-۶۸ ب)؟



شکل ۹-۶۸ مسئله‌ی ۶۹.

*** ۷۰ در شکل ۹-۶۹، قرص ۱ به جرم $m_1 =$ ۰/۲۰ kg بر روی میز بی‌اصطکاک آزمایشگاه لغزانده می‌شود تا با قرص ساکن ۲ برخورد کشسان یک بعدی انجام دهد. سپس، قرص ۲ از روی میز به بیرون می‌لغزد و در فاصله‌ی d از پای میز فرود می‌آید. قرص ۱ بر اثر برخورد وامی‌جهد و از لبه‌ی دیگر میز به بیرون می‌لغزد و درفاصله‌ی ۲d ازمیز فرود می‌آید. جرم قرص ۲ چقدر است؟ (*راهنمایی:* به علامت‌ها توجه کنید).



شکل ۹-۶۹ مسئله‌ی ۷۰.

پودمان ۹-۸ برخوردهای دو بعدی

** ۷۱ در شکل ۹-۲۱، ذره‌ی پرتابه‌ی ۱ یک ذره‌ی آلفا و ذره‌ی هدف ۲ یک هسته‌ی اکسیژن است. ذره‌ی آلفا تحت زاویه‌ی $\theta_1 = ۶۴/۰^\circ$ پراکنده و هسته‌ی اکسیژن باتندی $۱/۲۰ \times ۱۰^۵ m/s$ و تحت زاویه‌ی $\theta_2 = ۵۱/۰^\circ$ پس زده می‌شود. برحسب یکای جرم اتمی، جرم ذره‌ی آلفا $۴/۰۰ u$ و جرم هسته‌ی اکسیژن $۱۶/۰ u$ است. (الف) تندی پایانی و (ب) تندی آغازی ذره‌ی آلفا، چیست؟

** ۷۲ گلوله‌ی B در حال حرکت با تندی v در جهت مثبت محور x با گلوله‌ی ساکن A واقع در مبداء مختصات برخورد می‌کند. دو گلوله‌ی A و B جرم‌های متفاوت دارند. پس از برخورد، گلوله‌ی B با تندی $\frac{v}{۲}$ در جهت منفی محور y حرکت می‌کند. (الف) گلوله‌ی A در چه جهتی حرکت می‌کند؟ (ب) نشان دهید که با معلومات داده شده تندی گلوله‌ی A را نمی‌توان معین کرد.

** ۷۳ دو شیء با جرم وتندی آغازی یکسان پس از یک برخورد ناکشسان کامل، با نصف تندی اول خود با هم حرکت می‌کنند. زاویه‌ی میان سرعت‌های آغازی این دو شیء را پیدا کنید.

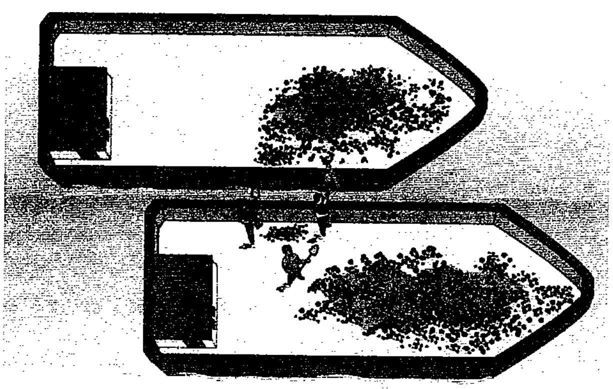
** ۷۴ دو جسم A و B، هرکدام به جرم $۲/۰ kg$، با هم برخورد می‌کنند. بردارهای سرعت دو جسم پیش از برخورد عبارت‌انداز: $\vec{v}_A = (۱۵\hat{i} + ۳۰\hat{j}) m/s$ و $\vec{v}_B = (-۱۰\hat{i} + ۵/۰\hat{j}) m/s$. پس از برخورد، بردار سرعت جسم A به صورت $\vec{v}'_A = (-۵/۰\hat{i} + ۲۰\hat{j}) m/s$ است. (الف) سرعت پایانی جسم B چیست؟ (ب) تغییر انرژی جنبشی کل (همراه با علامت) چیست؟

** ۷۵ یک پروتون پرتابه با تندی $۵۰۰ m/s$ با یک پروتون هدف، که در آغاز ساکن است، به طور کشسان برخورد می‌کند. پس از آن، پروتون‌های پرتابه و هدف در مسیرهای عمود برهم حرکت می‌کنند و زاویه‌ی مسیر پروتون پرتابه نسبت به راستای اولی حرکت ۶۰ درجه است. پس از برخورد، (الف) تندی پروتون هدف و (ب) تندی پروتون پرتابه، چقدر است؟

پودمان ۹-۹ دستگاه‌های با جرم متغیر: موشک

* ۷۶ یک کاوند فضایی به جرم $۶۰۹۰ kg$ در حالی که با تندی $۱۰۵ m/s$ نسبت به خورشید با پوزه به سوی سیاره‌ی مشتری در حرکت است، موتور موشکی خود را روشن و $۸۰/۰ kg$ گاز را با تندی $۲۵۳ m/s$ نسبت به بدنه‌ی خود خارج می‌کند. سرعت پایانی کاوند چیست؟

* ۷۷ در شکل ۹-۷۰، دو قایق ته پهن دراز در آب آرام و در یک جهت، یکی با تندی $۱۰ km/h$ و دیگری با تندی $۲۰ km/h$ در حرکت‌اند. درحالی‌که دو قایق از کنار هم می‌گذرند. کارگران با استفاده کردن از بیل با آهنگ $۱۰۰۰ kg/min$ زغال‌سنگ از قایق کندرو به قایق تندرو می‌ریزند. اگر بخواهیم تندی قایق‌ها تغییر نکند، چه نیروی اضافی‌ای باید توسط موتورهای راه‌انداز، (الف) قایق تندرو و (ب) قایق کُندرو تأمین شود؟ فرض کنید عمل ریختن زغال‌سنگ به‌طور کامل ازپهلو صورت می‌گیردو نیروهای اصطکاک میان قایق‌ها و آب به جرم قایق‌ها بستگی ندارند.



شکل ۹-۷۰ مسئله‌ی ۷۷.

* ۷۸ فرض کنید موشکی در اعماق فضا نسبت به یک چارچوب مرجع لَخت به حال سکون است. در این حالت، موتور موشک

برای مدت معینی روشن می‌شود. ***نسبت جرم موشک*** (نسبت جرم آغازی به جرم پایانی) در این مدت چقدر باید باشد تا تندی آغازی موشک نسبت به چارچوب مرجع لخت برابر باشد با، (الف) تندی خروج گازهای سوخته (تندی گازهای خروجی نسبت به موشک) و (ب) دو برابر تندی خروج گازها؟

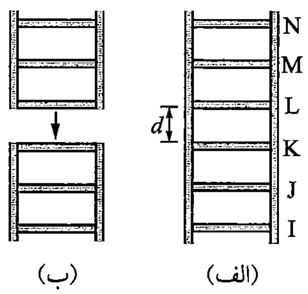
* ۷۹ موشکی در اعماق فضا در آغاز نسبت به یک چارچوب مرجع لخت به حال سکون است. موشک $۲٫۵۵\times ۱۰^{۵}\,\text{kg}$ جرم دارد که از آن $۱٫۸۱\times ۱۰^{۵}\,\text{kg}$ سوخت را تشکیل می‌دهد. در این حالت، موتور موشک به مدت ۲۵۰ ثانیه روشن و سوخت با آهنگ $۴۸۰\,\text{kg/s}$ مصرف می‌شود. تندی گازهای خارج شده نسبت به موشک $۳٫۲۷\,\text{km/s}$ است. (الف) پیش‌ران موشک چقدر است؟ ۲۵۰ ثانیه پس از روشن شدن موتور، (ب) جرم و (پ) تندی موشک، چقدر است؟

مسئله‌های بیشتر

۸۰ شیئی توسط یک ایستگاه رادار ردیابی و معلوم می‌شود که بردار مکان آن $\vec{r} = (۳۵۰۰ - ۱۶۰t)\hat{i} + ۲۷۰۰\hat{j} + ۳۰۰\hat{k}$ است، که در آن $\vec{r}$ برحسب متر و t برحسب ثانیه است. محور x ایستگاه رادار به سمت خاور، محور y آن به سمت شمال و محور z آن در راستای قائم به سمت بالاست. اگر شیء یک موشک هواشناسی به جرم $۲۵۰\,\text{kg}$ باشد، (الف) تکانه‌ی خطی آن، (ب) جهت حرکت آن و (پ) نیروی برایند وارد شده به آن، چیست؟

۸۱ آخرین مرحله‌ی یک موشک که با تندی $۷۶۰۰\,\text{m/s}$ در حال حرکت است، شامل دو بخش متصل به هم است: یکی از بخش‌ها محفظه‌ی موشک به جرم $۲۹۰٫۰\,\text{kg}$ و دیگری کپسول ملزومات به جرم $۱۵۰٫۰\,\text{kg}$ است. وقتی اتصال قطع می‌شود، فنر متراکم شده‌ای سبب می‌شود که این دو بخش با تندی نسبی $۹۱۰٫۰\,\text{m/s}$ از هم جدا شوند. تندی (الف) محفظه‌ی موشک و (ب) کپسول، پس از جدا شدن چیست؟ فرض کنید تمام سرعت‌ها در یک راستا قرار دارند. انرژی جنبشی کل دو بخش را، (پ) پیش و (ت) پس از جدا شدن، پیدا کنید. (ث) دلیل وجود اختلاف را توضیح دهید.

۸۲ ***فرو افتادن عمودی یک ساختمان بلند.*** در بخشی از یک ساختمان بلند که در شکل ۹-۷۱ الف نشان داده شده است، زیرساختار هر طبقه‌ای مانند K باید بتواند وزن تمام طبقه‌های بالاتر W، را تحمل کند. زیر ساختار را، به طور عادی، با ضریب ایمنی s طوری می‌سازند که بتواند حتی نیروی پایین‌سوی بزرگ‌تر از sW را هم تحمل کند. اما اگر ستون‌های نگهدارنده‌ی بین طبقات K و L ناگهان رُمبیده شوند و طبقه‌های بالاتر با هم بر روی طبقه‌ی K سقوط کنند (شکل ۹-۷۱ ب)، نیروی این برخورد می‌تواند از sW تجاوز کند و پس از مدت کوتاهی موجب شود طبقه‌ی K بر روی طبقه‌ی J، و آن هم بر روی طبقه‌ی I، و به همین ترتیب، فرو بریزند تا به زمین برسند. فرض کنید طبقه‌ها دارای فاصله‌ی جدایی $d = ۴٫۰\,\text{m}$ و جرم یکسان باشند. هم‌چنین، فرض کنید که وقتی طبقه‌های بالاتر از K بر روی این طبقه سقوط می‌کنند، مدت زمان برخورد $۱٫۵\,\text{ms}$ طول می‌کشد. در این شرایط ساده‌سازی شده ضریب ایمنی s از چه مقداری باید بیشتر باشد تا مانع از فرو افتادن عمودی ساختمان شود؟



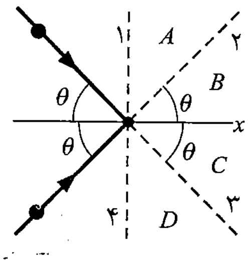
شکل ۹-۷۱ مسئله‌ی ۸۲.

۸۳ ***«نسبی» واژه‌ای مهم است.*** در شکل ۹-۷۲، جسم L به‌جرم $m_L = ۱٫۰۰\,\text{kg}$ و جسم R به جرم $m_R = ۰٫۵۰۰\,\text{kg}$ با یک فنر فشرده شده‌ی واقع در بین آن‌ها، نگه داشته شده‌اند. وقتی دو جسم رها می‌شوند فنر باعث لغزیدن آن‌ها بر روی یک سطح بی‌اصطکاک می‌شود (فنر جرمی ناچیز دارد و پس از رها شدن دو جسم بر روی سطح می‌افتد). (الف) اگر فنر تندی رها شدن $۱٫۲۰\,\text{m/s}$ را ***نسبت به*** سطح به جسم L بدهد مسافتی که جسم R در مدت $۰٫۸۰۰\,\text{s}$ بعد می‌پیماید چقدر است؟ (ب) حال اگر فنر تندی رها شدن $۱٫۲۰\,\text{m/s}$ را ***نسبت به*** سرعتی که

شکل ۹-۷۲ مسئله‌ی ۸۳.

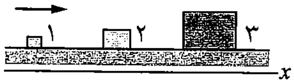
فنر به جسم R داده است، به جسم L بدهد مسافتی که جسم R در مدت ۰٫۸۰۰ s بعد می‌پیماید، چیست؟

۸۴ شکل ۹-۷۳ دو ذره را، با دید از بالا، نشان می‌دهد که با سرعت ثابت بر روی یک سطح بی‌اصطکاک می‌لغزند. این ذره‌ها دارای جرم یکسان و تندی آغازی یکسان $v =$ ۴٫۰۰ m/s هستند و در محل تلاقی مسیرهای‌شان با هم برخورد می‌کنند. محور x به عنوان نیمساز زاویه‌ی میان مسیرهای فرودی ذره‌ها رسم می‌شود، به طوری که داریم $\theta =$ ۴۰٫۰°. ناحیه‌ی سمت راست محل برخورد را به وسیله‌ی محور x و چهار خط‌چین شماره‌دار به چهار بخش حروف‌گذاری شده تقسیم می‌کنیم. در حالت‌های زیر، ذره‌ها در چه ناحیه‌ای یا در راستای چه خطی حرکت می‌کنند، اگر برخورد (الف) ناکشسان کامل باشد، (ب) کشسان باشد، و (پ) ناکشسان باشد؟ تندی پایانی ذره‌ها در برخوردهای (ت) ناکشسان کامل و (ث) کشسان، چیست؟



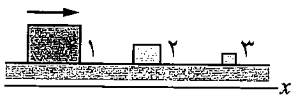
شکل ۹-۷۳ مسئله‌ی ۸۴.

۸۵ ***تضعیف‌کننده‌ی تندی.*** در شکل ۹-۷۴، جسم ۱ به‌جرم m_1 با تندی ۴٫۰۰ m/s در راستای محور x بر روی یک سطح بی‌اصطکاک می‌لغزد. سپس، این جسم با جسم ساکن ۲ به جرم $m_2 =$ ۲٫۰۰ m_1 یک برخورد کشسان یک بعدی انجام می‌دهد. آنگاه، جسم ۲ با جسم ساکن ۳ به جرم $m_3 =$ ۲٫۰۰ m_2 یک برخورد کشسان یک بعدی انجام می‌دهد. (الف) در این صورت، تندی جسم ۳ چقدر می‌شود؟ آیا (ب) تندی، (پ) انرژی جنبشی و (ت) تکانه‌ی جسم ۳ از مقادیر آغازی مربوط به جسم ۱ بیشتر، کمتر، یا مساوی با آن‌ها، است؟



شکل ۹-۷۴ مسئله‌ی ۸۵.

۸۶ ***تقویت‌کننده‌ی تندی.*** در شکل ۹-۷۵، جسم ۱ به جرم m_1 با تندی $v_{1i} =$ ۴٫۰۰ m/s در راستای محور x بر روی یک سطح بی‌اصطکاک می‌لغزد. سپس، این جسم با جسم ساکن ۲ به جرم $m_2 =$ ۰٫۵۰۰ m_1 یک برخورد کشسان یک بعدی انجام می‌دهد. آنگاه، جسم ۲ با جسم ساکن ۳ به جرم $m_3 =$ ۰٫۵۰۰ m_2 یک برخورد کشسان یک بعدی انجام می‌دهد. (الف) در این صورت، تندی جسم ۳ چقدر می‌شود؟ آیا (ب) تندی، (پ) انرژی جنبشی و (ت) تکانه‌ی جسم ۳ از مقادیر آغازی مربوط به جسم ۱ بیشتر، کمتر، یا مساوی با آن‌ها، است؟



شکل ۹-۷۵ مسئله‌ی ۸۶.

۸۷ گلوله‌ای به جرم ۱۵۰ گرم با تندی ۵٫۲ m/s به دیواری برخورد می‌کند و با ۵۰ درصد انرژی جنبشی آغازی خود وامی‌جهد. (الف) تندی گلوله بی‌درنگ پس از واجهیدن چقدر است؟ (ب) بزرگی ضربه‌ی وارد شده به دیوار توسط گلوله چقدر است؟ (پ) اگر گلوله به مدت ۷٫۶ ms با دیوار در تماس باشد، نیروی متوسطی که در این بازه‌ی زمانی دیوار به گلوله وارد می‌کند، چقدر است؟

۸۸ دو بخش یک سفینه‌ی فضایی بر اثر انفجار چفت‌هایی که آن‌ها را به هم وصل کرده‌اند، از هم جدا می‌شوند. جرم‌های دو بخش جدا شده ۱۲۰۰ kg و ۱۸۰۰ kg هستند و بزرگی ضربه‌ای که از سوی چفت به هر بخش وارد می‌شود، ۳۰۰ N·s است. تندی نسبی جدا شدن این دو بخش بر اثر انفجار چیست؟

۸۹ خودرویی به جرم ۱۴۰۰ kg در آغاز با تندی ۵٫۳ m/s در جهت مثبت محور y به سمت شمال حرکت می‌کند. راننده‌ی ناشی، که پس از یک دور زدن ۹۰ درجه‌ای به سمت راست در جهت مثبت محور x قرار می‌گیرد، به مدت ۴٫۶ ثانیه با یک درخت برخورد می‌کند و خودرو در مدت ۳۵۰ ms متوقف

می‌شود. ضربه‌ی وارد شده به خودرو به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، (الف) ناشی از دور زدن و (ب) ناشی از برخورد، چیست؟ بزرگی نیروی متوسطی که به خودرو وارد می‌شود، (پ) در حین دور زدن و (ت) در حین برخورد، چقدر است؟ (ث) جهت نیروی متوسط در حین دور زدن چیست؟

۹۰ یک هسته‌ی پرتوزای معین (هسته‌ی مادر) با گسیل کردن یک الکترون و یک نوترینو به هسته‌ی دیگری (هسته‌ی دختر) تبدیل می‌شود. هسته‌ی مادر در مبداء یک دستگاه محورهای مختصات xy در حال سکون بوده است. الکترون با تکانه‌ی خطی $(-۱٫۲\times ۱۰^{-۲۲}\,\mathrm{kg\cdot m/s})\hat{i}$ و نوترینو با تکانه‌ی خطی $(-۶٫۴\times ۱۰^{-۲۳}\,\mathrm{kg\cdot m/s})\hat{j}$ از مبداء دور می‌شود. (الف) بزرگی و (ب) جهت تکانه‌ی خطی هسته‌ی دختر چیست؟ (پ) اگر هسته‌ی دختر دارای جرم $۵٫۸\times ۱۰^{-۲۶}\,\mathrm{kg}$ باشد، انرژی جنبشی آن چقدر است؟

۹۱ شخصی به جرم ۷۵kg بر ارابه‌ای به جرم ۳۹kg و در حال حرکت با تندی ۲٫۳m/s سوار است. شخص با تندی افقی صفر نسبت به زمین به پایین می‌پرد. در این حالت تغییر تندی ارابه همراه با علامت آن، چیست؟

۹۲ دو جسم به جرم‌های ۱٫۰kg و ۳٫۰kg که بر روی یک سطح بی‌اصطکاک به حال سکون قرار دارند، با فنری به هم وصل شده‌اند. دو جسم را با سرعت‌هایی به طرف هم حرکت می‌دهیم، به گونه‌ای که جسم ۱٫۰ کیلوگرمی با تندی آغازی ۱٫۷m/s به سوی مرکز جرم حرکت کند و مرکز جرم ساکن بماند. تندی آغازی جسم دیگر چیست؟

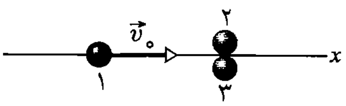
۹۳ یک واگن باری به جرم $۳٫۱۸\times ۱۰^{۴}\,\mathrm{kg}$ با یک واگن در حال سکون خدمه‌ی راه آهن برخورد می‌کند. این دو واگن به هم جفت می‌شوند و ۲۷٫۰ درصد از انرژی جنبشی اولی به صورت گرما، صدا، ارتعاشات و نظیر آن‌ها، تلف می‌شود. جرم واگن خدمه را پیدا کنید.

۹۴ یک خودرو کرایسلر[1] قدیمی به جرم ۲۴۰۰kg در جاده‌ای مستقیم با تندی ۸۰km/h در حال حرکت است. در پشت سر این خودرو یک خودرو فورد[2] به جرم ۱۶۰۰kg با تندی ۶۰km/h حرکت می‌کند. مرکز جرم دو خودرو با چه تندی‌ای حرکت می‌کند؟

۹۵ در آرایش شکل ۹-۲۱، گوی بیلیارد ۱ در حال حرکت با تندی ۲٫۲m/s با گوی بیلیارد ۲، که ساکن است، برخورد پهلو به پهلو انجام می‌دهد. پس از برخورد، گوی ۲ با تندی ۱٫۱m/s تحت زاویه‌ی $\theta_۲ = ۶۰^\circ$ حرکت می‌کند. (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت گوی ۱ پس از برخورد چیست؟ (پ) آیا داده‌ها برخورد را کشسان نشان می‌دهند یا ناکشسان؟

۹۶ موشکی با تندی $۶٫۰\times ۱۰^{۳}\,\mathrm{m/s}$ در حال دور شدن از منظومه‌ی شمسی است. موشک موتور خود را روشن و گازهای سوخته را با تندی $۳٫۰\times ۱۰^{۳}\,\mathrm{m/s}$ نسبت به موشک خارج می‌کند. در این زمان جرم موشک $۴٫۰\times ۱۰^{۴}\,\mathrm{kg}$ و شتاب آن $۲٫۰\,\mathrm{m/s^۲}$ است. (الف) پیش‌ران موتور چقدر است؟ (ب) آهنگ خروج گازها در هنگام روشن بودن موتور، برحسب کیلوگرم بر ثانیه، چیست؟

۹۷ سه گلوله‌ای که در شکل ۹-۷۶ از بالا دیده می‌شوند، مشابه‌اند. گلوله‌های ۲ و ۳ با هم تماس دارند و در راستای عمود بر مسیر حرکت گلوله‌ی ۱ ردیف شده‌اند. گلوله‌ی ۱ دارای سرعتی به بزرگی $v_۰ = ۱۰\,\mathrm{m/s}$ است که جهتش به سمت نقطه‌ی تماس گلوله‌های ۱ و ۲ است. پس از برخورد، (الف) تندی و (ب) جهت سرعت گلوله‌ی ۲، (پ) تندی و (ت) جهت سرعت گلوله‌ی ۳ و (ث) تندی و (ج) جهت سرعت گلوله‌ی ۱، چیست؟ (*راهنمایی:* در حالت نبود اصطکاک، هر ضربه در راستای خط وصل کننده‌ی مرکزهای گلوله‌های برخورد کننده و عمود بر سطح‌های برخورد قرار دارد).



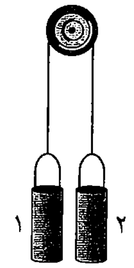
شکل ۹-۷۶ مسئله‌ی ۹۷.

۹۸ گلوله‌ای به جرم ۰٫۱۵kg با سرعت $(۵٫۰۰\,\mathrm{m/s})\hat{i} + (۶٫۵۰\,\mathrm{m/s})\hat{j} + (۴٫۰۰\,\mathrm{m/s})\hat{k}$ به دیواری برخورد می‌کند. این گلوله با سرعت $(۲٫۰۰\,\mathrm{m/s})\hat{i} + (۳٫۵۰\,\mathrm{m/s})\hat{j} + (-۳٫۲۰\,\mathrm{m/s})\hat{k}$ از دیوار

1. Chrysler 2. Ford

وامی‌جهد. (الف) تغییر تکانه‌ی گلوله، (ب) ضربه‌ی وارد شده به گلوله و (پ) ضربه‌ی وارد شده به دیوار، چیست؟

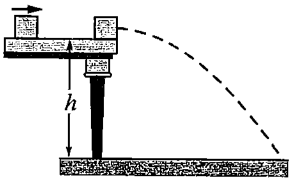
۹۹ در شکل ۹-۷۷، دو ظرف شکر مشابه با ریسمانی که از روی یک قرقره‌ی بی‌اصطکاک گذشته است، به هم وصل شده‌اند. ریسمان و قرقره جرم ناچیزی دارند، جرم هر ظرف با شکر درون آن ۵۰۰ گرم است، فاصله‌ی مرکزهای دو ظرف از یکدیگر ۵۰mm است، و ظرف‌ها در یک ارتفاع نگه داشته شده‌اند. فاصله‌ی افقی مرکز ظرف ۱ تا مرکز جرم دستگاه دو ظرف (الف) در آغاز و (ب) پس از منتقل کردن ۲۰ گرم شکر از ظرف ۱ به ظرف ۲، چیست؟ پس از این انتقال شکر و رها کردن ظرف‌ها مرکز جرم دستگاه (الف) در چه جهتی و (ب) با چه شتابی از لحاظ بزرگی، حرکت خواهد کرد؟



شکل ۹-۷۷ مسئله‌ی ۹۹.

۱۰۰ در یک بازی بیلیارد، گوی نشانه‌روی با گوی دیگری که ساکن است و همان جرم را دارد، برخورد می‌کند. پس از برخورد، گوی نشانه‌روی با تندی ۳/۵۰m/s در راستایی که با راستای حرکت آغازی‌اش زاویه‌ی ۲۲/۰ درجه می‌سازد، حرکت می‌کند و تندی گوی دوم ۲/۰۰m/s است. مطلوب است تعیین، (الف) زاویه‌ی میان راستای حرکت گوی دوم و راستای اولی حرکت گوی نشانه‌روی و (ب) تندی آغازی گوی نشانه‌روی. (پ) آیا در این برخورد انرژی جنبشی پایسته می‌ماند (مرکزهای جرم را در نظر بگیرید و به چرخش گوی‌ها توجه نکنید)؟

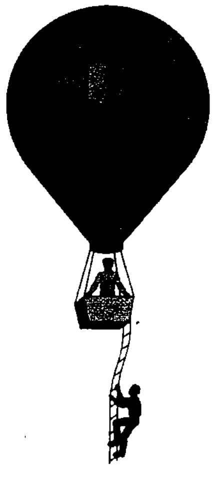
۱۰۱ در شکل ۹-۷۸، یک جعبه‌ی کفش دو و میدانی به جرم ۳/۲kg بر روی میز افقی بی‌اصطکاکی می‌لغزد و با یک جعبه‌ی کفش باله به جرم ۲/۰kg، که در آغاز در لبه‌ی میزی به ارتفاع $h =$ ۰/۴۰m ساکن است، برخورد می‌کند. تندی



شکل ۹-۷۸ مسئله‌ی ۱۰۱.

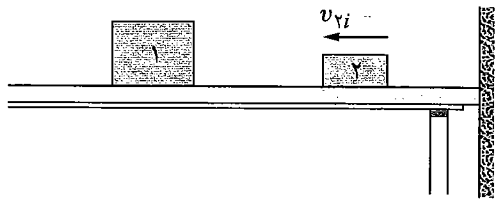
جعبه‌ی ۳/۲ کیلوگرمی درست پیش از برخورد ۳/۰m/s است. اگر دو جعبه به خاطر وجود برچسب‌های کنار آن‌ها به یکدیگر بچسبند، انرژی جنبشی آن‌ها درست پیش از برخورد به زمین چقدر است؟

۱۰۲ در شکل ۹-۷۹، مردی ۸۰ کیلوگرمی روی نردبان آویخته شده از یک بالون با جرم کل ۳۲۰kg (شامل سبد و سرنشین) ایستاده است. بالون در آغاز نسبت به زمین ساکن است. اگر مرد با تندی ۲/۵m/s نسبت به نردبان شروع به بالا رفتن بکند، بالون (الف) در چه جهتی و (ب) با چه تندی‌ای حرکت خواهد کرد؟ (پ) آنگاه، اگر مرد از بالا رفتن دست بکشد، تندی بالون چقدر خواهد شد؟



شکل ۹-۷۹ مسئله‌ی ۱۰۲.

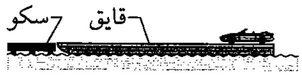
۱۰۳ در شکل ۹-۸۰، جسم ۱ به جرم $m_1 =$ ۶/۶kg روی یک میز دراز بی‌اصطکاکی که یک طرفش به دیوار چسبیده است، در حال سکون قرار دارد. جسم ۲ به جرم m_2 واقع در میان جسم ۱ و دیوار با تندی ثابت v_{2i} به سمت چپ و به سوی جسم ۱ در حال لغزیدن است. مقدار m_2 را طوری معین کنید که به‌ازای آن پس از برخورد جسم ۲ یک بار با m_1 و یک بار با دیوار، هر



شکل ۹-۸۰ مسئله‌ی ۱۰۳.

دو جسم با یک سرعت حرکت کنند. تمام برخوردها را کشسان فرض کنید (برخورد جسم ۲ با دیوار تندی آن را تغییر نمی‌دهد).

۱۰۴ بر پایه‌ی متن فیلم‌نامه‌ی یک فیلم هیجانی قرار است خودرو مسابقه‌ای (به جرم ۱۵۰۰kg و طول ۳٫۰m) در طول عرشه‌ی مسطح قایقی (به جرم ۴۰۰۰kg و طول ۱۴m) شتاب بگیرد و پس از پیمودن سرتاسر عرشه فاصله‌ی میان قایق و لنگرگاه اندکی پایین‌تر از قایق را با پرش طی کند. فرض کنید شما کارشناس فنی فیلم هستید. قایق در آغاز، مطابق شکل ۹-۸۱، با سکو تماس دارد و می‌تواند بدون مقاومت قابل توجهی در آب بلغزد؛ خودرو و قایق را می‌توان به تقریب دارای توزیع جرم یکنواخت در نظر گرفت. معین کنید درست در شرف اجرا شدن پرش خودرو فاصله‌ی میان لبه‌های قایق و سکو چقدر می‌شود؟



شکل ۹-۸۱ مسئله‌ی ۱۰۴.

۱۰۵ شیئی به جرم ۳٫۰kg در حال حرکت با تندی ۸٫۰m/s در جهت مثبت محور x با شیئی به جرم M که در آغاز ساکن است، برخورد کشسان یک بعدی انجام می‌دهد. پس از برخورد، شیء با جرم M دارای سرعت ۶٫۰m/s در جهت مثبت محور x می‌شود. جرم M چقدر است؟

۱۰۶ واگن کفی راه‌آهن به جرم ۲۱۴۰kg، که می‌تواند با اصطکاک ناچیز حرکت کند، در کنار سکویی بی‌حرکت ایستاده است. یک کشتی‌گیر سومو[1] (کشتی ژاپنی) به جرم ۲۴۲kg در حالی که با تندی ۵٫۳m/s در طول سکو (موازی با خط آهن) می‌دود به روی واگن می‌پرد. پس از پریدن کشتی گیر، آیا اگر او روی واگن (الف) بایستد، (ب) با تندی ۵٫۳m/s نسبت به واگن در همان جهت حرکت اولی خود بدود و (پ) با تندی ۵٫۳m/s نسبت به واگن در خلاف جهت حرکت اولی خود بدود، تندی واگن چه خواهد بود؟

۱۰۷ موشکی به جرم ۶۱۰۰kg برای پرتاب شدن از زمین به طور قائم آماده می‌شود. اگر تندی خروج گازهای سوخته ۱۲۰۰m/s باشد، چقدر گاز در هر ثانیه باید خارج شود تا پیش‌ران موشک، (الف) برابر با بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به موشک باشد و (ب) به موشک شتاب بالاسوی آغازی ۲۱m/s^2 بدهد.

۱۰۸ یک مدول ۵۰۰٫۰ کیلوگرمی متصل به یک شاتل فضایی به جرم ۴۰۰٫۰kg، با تندی ۱۰۰۰m/s نسبت به کشتی فضایی اصلی ساکن حرکت می‌کند. یک انفجار کوچک سبب می‌شود این مدول با تندی ۱۰۰٫۰m/s نسبت به تندی جدید شاتل به پس‌سو رانده شود. از نظر شخصی که بر روی کشتی فضایی اصلی قرار دارد، به خاطر این انفجار انرژی جنبشی مدول و شاتل به چه نسبتی افزایش می‌یابد؟

۱۰۹ (الف) فاصله‌ی مرکز جرم دستگاه زمین ـ ماه تا مرکز زمین چقدر است؟ (در پیوست ج کتاب جرم‌های زمین و ماه و فاصله‌ی میان آن دو داده شده است). (ب) این فاصله چند درصد شعاع زمین است؟

۱۱۰ گلوله‌ای به جرم ۱۴۰ گرم با تندی ۷٫۸m/s به طور عمود به دیواری برخورد می‌کند و با همان تندی در جهت مخالف وامی‌جهد. این برخورد ۳٫۸۰ms طول می‌کشد. بزرگی‌های (الف) ضربه و (ب) نیروی متوسط وارد شده به دیوار از سوی گلوله چقدر است؟

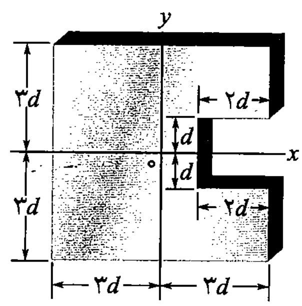
۱۱۱ یک سورتمه‌ی موشکی به‌جرم ۲۹۰۰kg با تندی ۲۵۰m/s بر روی مجموعه‌ای از ریل‌ها حرکت می‌کند. در نقطه‌ای معین یک سطل واقع در روی سورتمه در گودال آب واقع در بین ریل‌ها فرو می‌رود و آب را به درون یک مخزن خالی در روی سورتمه می‌ریزد. با به کار بردن قانون پایستگی تکانه‌ی خطی تندی سورتمه را پس از ریختن ۹۲۰kg آب در مخزن معین کنید. از هرگونه نیروی کند کننده چشم‌پوشی کنید.

1. sumo

۱۱۲ یک تفنگ ساچمه‌ای در هر ثانیه ۱۰ ساچمه‌ی ۲٫۰ گرمی را با تندی ۵۰۰m/s به سمت دیوار سفتی شلیک می‌کند و ساچمه‌ها پس از برخورد به دیوار متوقف می‌شوند. (الف) بزرگی تکانه‌ی هر ساچمه، (ب) انرژی جنبشی هر ساچمه و (پ) بزرگی نیروی متوسط وارد شده به دیوار از سوی رگبار ساچمه‌ها، چقدر است؟ (ت) اگر هر ساچمه به مدت ۰٫۶۰ms با دیوار در تماس باشد، بزرگی نیروی متوسطی که هر ساچمه در حین برخورد به دیوار وارد می‌کند، چیست؟ (ث) چرا این نیروی متوسط با نیروی متوسط حساب شده در قسمت (پ) تفاوت دارد؟

۱۱۳ یک واگن خط آهن با تندی ثابت ۳٫۲۰m/s از زیر بالا بر دانه‌های غله عبور می‌کند. دانه‌های غله با آهنگ ۵۴۰kg/min به درون واگن می‌ریزند. اگر اصطکاک ناچیز باشد، بزرگی نیروی لازم برای آنکه واگن با تندی ثابت حرکت کند، چقدر است؟

۱۱۴ شکل ۹-۸۲ ورق مربع شکل یکنواختی به ضلع $6d =$ ۶٫۰m را نشان می‌دهد که قطعه‌ی مربع شکلی به ضلع $2d$ از آن برداشته شده است. (الف) مختصه‌ی x و (ب) مختصه‌ی y مرکز جرم قطعه‌ی باقی‌مانده از ورق چیست؟



شکل ۹-۸۲ مسئله‌ی ۱۱۴.

۱۱۵ در زمان $t = ۰$ نیروی $\vec{F}_1 = (-۴٫۰۰\hat{i} + ۵٫۰۰\hat{j})$N به ذره‌ی ساکنی به جرم $۲٫۰۰\times ۱۰^{-۳}$kg و نیروی $\vec{F}_2 = (۲٫۰۰\hat{i} - ۴٫۰۰\hat{j})$N به ذره‌ی ساکنی به جرم $۴٫۰۰\times ۱۰^{-۳}$kg وارد می‌شود. از زمان $t = ۰$ تا زمان $t =$ ۲٫۰۰ms، (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی جابه‌جایی مرکز جرم این دستگاه دو ذره‌ای (نسبت به جهت مثبت محور x) چیست؟ (پ) انرژی جنبشی مرکز جرم در زمان $t =$ ۲٫۰۰ms چقدر است؟

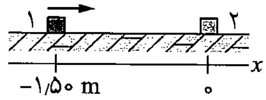
۱۱۶ دو ذره‌ی P و Q به فاصله‌ی ۱٫۰m از یکدیگر از حال سکون رها می‌شوند. ذره‌ی P دارای جرم ۰٫۱۰kg و ذره‌ی Q دارای جرم ۰٫۳۰kg است. P و Q با نیروی ثابت $۱٫۰\times ۱۰^{-۲}$N یکدیگر را جذب می‌کنند. هیچ نیروی خارجی‌ای به این دستگاه دو ذره‌ای وارد نمی‌شود. (الف) وقتی فاصله‌ی جدایی P و Q برابر با ۰٫۵۰m می‌شود تندی مرکز جرم آن‌ها چقدر است؟ (ب) در چه فاصله‌ای از مکان اولی P ذره‌ها با هم برخورد می‌کنند؟

۱۱۷ میان ذره‌ای به جرم ۲٫۰۰kg در حال حرکت با سرعت $\vec{v}_1 = (-۴٫۰۰\,\mathrm{m/s})\hat{i} + (-۵٫۰۰\,\mathrm{m/s})\hat{j}$ و ذره‌ای به جرم ۴٫۰۰kg در حال حرکت با سرعت $\vec{v}_2 = (۶٫۰۰\,\mathrm{m/s})\hat{i} + (-۲٫۰۰\,\mathrm{m/s})\hat{j}$ برخورد روی می‌دهد. این برخورد دو ذره را به یکدیگر می‌چسباند. پس از برخورد، سرعت هر ذره (الف) به صورت نمادگذاری بردارهای یکه و به‌صورت (ب) بزرگی و (پ) زاویه، چیست؟

۱۱۸ در آرایش دو کره‌ای شکل ۹-۲۰، فرض کنید کره‌ی ۱ دارای جرم ۵۰ گرم و ارتفاع آغازی $h_1 =$ ۹٫۰cm و کره‌ی ۲ دارای جرم ۸۵ گرم است. پس از رها شدن کره‌ی ۱ و انجام دادن برخورد کشسان با کره‌ی ۲، (الف) کره‌ی ۱ و (ب) کره‌ی ۲ به چه ارتفاع‌هایی می‌رسند؟ پس از برخورد (کشسان) بَعدی، (پ) کره‌ی ۱ و (ت) کره‌ی ۲ به چه ارتفاع‌هایی می‌رسند؟ (*راهنمایی:* از مقادیر گِرد شده استفاده نکنید).

۱۱۹ در شکل ۹-۸۳، جسم ۱ با تندی ۰٫۷۵m/s در راستای محور x واقع بر روی یک سطح بی‌اصطکاک حرکت می‌کند. وقتی این جسم به جسم ساکن ۲ می‌رسد دو جسم یک برخورد کشسان انجام می‌دهند. جدول زیر جرم‌ها و طول‌های (یکنواخت) دو جسم و هم‌چنین، مکان مرکزهای آن‌ها در زمان $t = ۰$ را نشان می‌دهد. مکان مرکز جرم دستگاه دو جسم (الف) در زمان $t = ۰$، (ب) در زمان برقرار شدن نخستین تماس میان دو جسم و (پ) در زمان $t =$ ۴٫۰s، کجاست؟

جسم	جرم (kg)	طول (cm)	مکان مرکز در زمان $t = ۰$
۱	۰٫۲۵	۵٫۰	$x = -۱٫۵۰$ m
۲	۰٫۵۰	۶٫۰	$x = ۰$



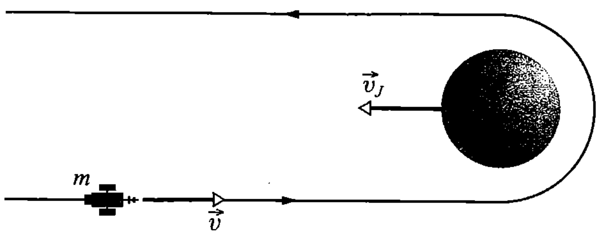
شکل ۹-۸۳ مسئله‌ی ۱۱۹.

۱۲۰ جسمی با تندی ۲٫۰ m/s در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند و به آن هیچ نیروی برایندی وارد نمی‌شود. یک انفجار درونی این جسم را به دو بخش، که جرم هر کدام ۴٫۰ kg است، تقسیم می‌کند و انرژی جنبشی کل را به اندازه‌ی ۱۶ J افزایش می‌دهد. بخش جلویی به حرکت در جهت پیشی ادامه می‌دهد. تندی (الف) بخش عقبی و (ب) بخش جلویی چیست؟

۱۲۱ الکترونی با یک اتم هیدروژن ساکن برخورد کشسان یک بعدی انجام می‌دهد. چند درصد از انرژی جنبشی آغازی الکترون به انرژی جنبشی اتم هیدروژن تبدیل می‌شود؟ (جرم اتم هیدروژن ۱۸۴۰ برابر جرم الکترون است).

۱۲۲ مردی (به وزن ۹۱۵ N) روی یک واگن کفی دراز راه‌آهن (به وزن ۲۴۱۵ N) ایستاده است و واگن با تندی ۱۸٫۲ m/s در جهت مثبت محور x با اصطکاک ناچیز حرکت می‌کند. سپس، مرد با تندی ۴٫۰۰ m/s نسبت به واگن در جهت محور x منفی بر روی واگن می‌دود. افزایش حاصل در تندی واگن چقدر می‌شود؟

۱۲۳ یک کاوند فضایی بی‌سرنشین (با جرم m و تندی v نسبت به خورشید) مطابق شکل ۹-۸۴، به سیاره‌ی مشتری (با جرم M و تندی V_J نسبت به خورشید) نزدیک می‌شود. این کاوند سیاره را دور می‌زند و در جهت مخالف از آن دور می‌شود. تندی کاوند (برحسب کیلومتر بر ثانیه) نسبت به خورشید، پس از انجام دادن این دور زدن، که می‌توان آن را به عنوان یک برخورد تلقی کرد، چیست؟ فرض کنید $v = ۱۰٫۵$ km/s و $V_J = ۱۳٫۰$ km/s (تندی مداری سیاره‌ی مشتری). جرم مشتری خیلی بیشتر از جرم کاوند ($M >> m$) است.



شکل ۹-۸۴ مسئله‌ی ۱۲۳.

۱۲۴ گلوله‌ای به جرم ۰٫۵۵۰ kg روی کف بتونی می‌افتد، با تندی ۱۲٫۰ m/s به کف برخورد می‌کند و با تندی ۳٫۰۰ m/s یک راست به بالاسو وامی‌جهد. جهت محور y را به سمت بالا در نظر بگیرید. (الف) تغییر تکانه‌ی گلوله، (ب) ضربه‌ی وارد شده به گلوله و (پ) ضربه‌ی وارد شده به کف بتونی، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟

۱۲۵ یک هسته‌ی اتمی در حال سکون در مبدأ دستگاه مختصات xy به سه ذره تبدیل می‌شود. ذره‌ی ۱ به جرم $۱۶٫۷ \times ۱۰^{-۲۷}$ kg با سرعت $(۶٫۰۰ \times ۱۰^{۶}\ \text{m/s})\hat{i}$ از مبدأ دور می‌شود؛ ذره‌ی ۲ به جرم $۸٫۳۵ \times ۱۰^{-۲۷}$ kg با سرعت $(-۸٫۰۰ \times ۱۰^{۶}\ \text{m/s})\hat{j}$ دور می‌شود. (الف) تکانه‌ی خطی ذره‌ی سوم به جرم $۱۱٫۷ \times ۱۰^{-۲۷}$ kg، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟ (ب) در این تبدیل چقدر انرژی جنبشی ظاهر می‌شود؟

۱۲۶ ذره‌ی ۱ به جرم ۲۰۰ g و تندی ۳٫۰۰ m/s یک برخورد یک بعدی با ذره‌ی ساکن ۲ به جرم ۴۰۰ g انجام می‌دهد. بزرگی ضربه‌ی وارد شده به ذره‌ی ۱ در حالتی که برخورد (الف) کشسان و (ب) ناکشسان کامل باشد، چیست؟

۱۲۷ در یک مأموریت سفر به کره‌ی ماه، وقتی سفینه با تندی ۴۰۰ m/s نسبت به ماه حرکت می‌کند، لازم است تندی سفینه به اندازه‌ی ۲٫۲ m/s افزایش یابد. تندی محصولات خارج شده از موتور موشک نسبت به سفینه ۱۰۰۰ m/s است. چه کسری از جرم اولیه‌ی سفینه باید بسوزد و خارج شود تا این افزایش تندی صورت گیرد؟

۱۲۸ یک چوب بیلیارد به گوی ساکنی ضربه‌ای با نیروی متوسط ۳۲ N در طی مدت ۱۴ ms وارد می‌کند. اگر گوی دارای جرم ۰٫۲۰ kg باشد، تندی آن درست پس از دریافت ضربه چیست؟

فصل ۱۰

دوران

۱۰–۱ متغیرهای دورانی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۰–۱ مشخص کنید که هرگاه تمام بخش‌های یک جسم حول محور ثابت متصل به آن بچرخند، آن جسم یک جسم صُلب است. (این فصل کتاب درباره‌ی حرکت چنین اجسامی است).

۱۰–۲ مشخص کنید که مکان زاویه‌ای یک جسم صُلب چرخان زاویه‌ای است که یک خط مرجع درونی با یک خط مرجع خارجی ثابت تشکیل می‌دهد.

۱۰–۳ رابطه‌ی میان جابه‌جایی زاویه‌ای و مکان‌های زاویه‌ای آغازی و پایانی را به کار ببرید.

۱۰–۴ رابطه‌ی میان سرعت زاویه‌ای متوسط، جابه‌جایی زاویه‌ای و بازه‌ی زمانی مربوط به این جابه‌جایی را به کار ببرید.

۱۰–۵ رابطه‌ی میان شتاب زاویه‌ای متوسط، تغییر سرعت زاویه‌ای و بازه‌ی زمانی مربوط به این تغییر را به کار ببرید.

۱۰–۶ مشخص کنید که حرکت پادساعت‌گرد در جهت مثبت و حرکت ساعت‌گرد در جهت منفی است.

۱۰–۷ با داشتن مکان زاویه‌ای ***به صورت تابعی از زمان***، سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای در زمان خاص و سرعت زاویه‌ای متوسط در میان هر دو زمان خاص را حساب کنید.

۱۰–۸ با داشتن ***نمودار مکان زاویه‌ای*** برحسب زمان، سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای در یک زمان خاص و سرعت زاویه‌ای متوسط در میان هر دو زمان خاص را معین کنید.

۱۰–۹ تندی زاویه‌ای لحظه‌ای را به صورت بزرگی سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای مشخص کنید.

۱۰–۱۰ با داشتن سرعت زاویه‌ای ***به صورت تابعی از زمان***، شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای در هر زمان خاص و شتاب زاویه‌ای متوسط در میان هر دو زمان خاص را حساب کنید.

۱۰–۱۱ با داشتن ***نمودار سرعت زاویه‌ای*** برحسب زمان، شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای در هر زمان خاص و شتاب زاویه‌ای متوسط در میان هر دو زمان خاص را معین کنید.

۱۰–۱۲ تغییر سرعت زاویه‌ای یک جسم را با انتگرال‌گیری از تابع شتاب زاویه‌ای آن نسبت به زمان حساب کنید.

۱۰–۱۳ تغییر مکان زاویه‌ای یک جسم را با انتگرال‌گیری از تابع سرعت زاویه‌ای آن نسبت به زمان حساب کنید.

نکته‌های کلیدی

● برای توصیف دوران یک جسم صُلب حول محور ثابت، که محور دوران نامیده می‌شود، فرض می‌کنیم که یک خط مرجع ثابت در جسم به طور عمود بر محور وجود دارد که با جسم می‌چرخد. مکان زاویه‌ای این خط θ، را نسبت به یک جهت ثابت اندازه می‌گیریم. وقتی θ برحسب رادیان اندازه‌گیری می‌شود، داریم

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(مقیاس رادیان)}$$

که در آن s طول یک مسیر دایره‌ای به شعاع r و زاویه‌ی θ است.

● مقیاس رادیان با مقیاس زاویه برحسب دور و درجه به صورت زیر رابطه دارد

$$۱\,\mathrm{rev} = ۳۶۰^\circ = ۲\pi\,\mathrm{rad}$$

● جسمی که حول یک محور دوران می‌چرخد، مکان زاویه‌ای‌اش از $\theta_۱$ تا $\theta_۲$ تغییر می‌کند و جابه‌جایی زاویه‌ای زیر را انجام می‌دهد

$$\Delta\theta = \theta_۲ - \theta_۱$$

که در آن $\Delta\theta$ برای دوران پادساعت‌گرد مثبت و برای دوران ساعت‌گرد منفی است.

● هرگاه جسمی در بازه‌ی زمانی Δt به اندازه‌ی جابه‌جایی زاویه‌ای $\Delta\theta$ دوران کند، دارای سرعت زاویه‌ای متوسط ω_{avg} است:

$$\omega_{\mathrm{avg}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

سرعت زاویه‌ای (لحظه‌ای) این جسم ω، برابر است با

$$\omega = \frac{d\theta}{d\theta}$$

ω_{avg} و ω، هر دو، کمیت‌هایی برداری‌اند و جهت‌شان با قاعده‌ی دست راست معین می‌شود. این کمیت‌ها برای دوران پادساعت‌گرد مثبت و برای دوران ساعت‌گرد منفی‌اند. بزرگی سرعت زاویه‌ای یک جسم همان تندی زاویه‌ای آن است.

● هرگاه سرعت زاویه‌ای یک جسم در بازه‌ی زمانی $\Delta t = t_۲ - t_۱$ از $\omega_۱$ تا $\omega_۲$ تغییر کند، شتاب زاویه‌ای متوسط آن جسم α_{avg}، برابر است با

$$\alpha_{\mathrm{avg}} = \frac{\omega_۲ - \omega_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

شتاب زاویه‌ای (لحظه‌ای) این جسم α، برابر است با

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

α_{avg} و α، هر دو، کمیت‌هایی برداری‌اند.

فیزیک در این باره چه می‌گوید؟

چنان‌که پیش از این هم گفته شد، حرکت یکی از موضوع‌های مورد توجه در فیزیک است. اما تا اینجا فقط **حرکت انتقالی** را بررسی کرده‌ایم، که در آن فردی، مطابق شکل ۱۰-۱ الف، در طول یک خط راست یا خمیده حرکت می‌کند. اکنون، به مطالعه‌ی **حرکت دورانی** می‌پردازیم، که در آن فردی، مطابق شکل ۱۰-۱ ب، به دور یک محور می‌چرخد.

حرکت دورانی را، تقریباً، در هر ماشینی می‌توان مشاهده کرد. وقتی دَر یک بطری را با پیچاندن آن باز می‌کنیم این نوع حرکت را به کار می‌بریم، و هر وقت به شهربازی می‌رویم، برای تجربه کردن این نوع حرکت هزینه‌ای می‌پردازیم. دوران عامل اصلی در بسیاری از فعالیت‌های تفریحی است، نظیر ضربه زدن به توپ گلف برای حرکت دادن توپ به مدتی طولانی (که توپ برای آنکه هر چه بیشتر در هوا بماند باید بچرخد) و پرتاب کردن گوی بیس‌بال در مسیری خمیده (که برای آنکه گوی توسط هوا به چپ و راست هُل داده شود باید بچرخد). هم‌چنین، دوران عامل اصلی موضوع‌هایی جدی‌تر، از قبیل ناکارآمد شدن قطعات در هواپیماهای فرسوده نیز هست.

در اینجا بحث خود درباره‌ی دوران را با تعریف کردن متغیرهای مربوط به حرکت، مانند آنچه درباره‌ی حرکت انتقالی در فصل ۲ انجام دادیم، آغاز می‌کنیم. چنان‌که خواهیم دید، متغیرهای دوران شبیه متغیرهای حرکت یک بعدی هستند و همانند فصل ۲، شتاب (در اینجا شتاب دورانی)، که یک کمیت ویژه و با اهمیت است، ثابت است. در ضمن خواهیم دید که قانون دوم نیوتون را برای حرکت دورانی نیز می‌توان نوشت، اما در اینجا باید به جای نیرو از کمیت جدیدی به نام ***گشتاور نیرو*** استفاده کرد. در حرکت دورانی کار و قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی را نیز می‌توان به کار برد، اما در اینجا باید به جای جرم کمیت جدیدی به نام ***لختی دورانی*** را به کار برد. به طور خلاصه، بسیاری از مطالبی را که تاکنون مورد بحث قرار داده‌ایم، می‌توانیم در حرکت دورانی هم، شاید با تغییراتی اندک، به کار ببریم.

هشدار: برخلاف تکرار کردن این نکته‌های فیزیکی، خیلی از دانشجویان این فصل و فصل بعدی کتاب را بسیار چالش برانگیز می‌بینند. مدرسان برای این موضوع دلیل‌های گوناگونی را بیان می‌کنند، اما دو دلیل بارزتر است: (۱) در این بحث نمادهای به کار رفته (با حروف یونانی) زیاد است. (۲) شما اگرچه با حرکت خطی آشنا هستید (می‌توانید پهنای اتاق را بپیمایید و در طول جاده حرکت کنید)، اما احتمالاً با مفهوم دوران آشنایی کمتری دارید (و این، یکی از دلیل‌هایی است که شما علاقه‌ی زیادی به گذراندن وقت برای سوار شدن به وسایل در پارک تفریحی نشان می‌دهید). اگر حل کردن مسئله‌ها برای شما مانند یک زبان بیگانه به نظر می‌رسد، ببینید آیا ترجمه کردن آن به حرکت خطی یک بعدی فصل ۲ به شما کمک می‌کند. برای مثال، اگر باید کمیتی مانند ***مسافت زاویه‌ای*** را پیدا کنید، به طور موقت واژه‌ی زاویه‌ای را کنار بگذارید و ببینید آیا می‌توانید مسئله را با استفاده کردن از نمادگذاری و نکته‌های مربوط به فصل ۲ حل کنید.


(الف)


(ب)

شکل ۱-۱۰ نمایش حرکت یک اسکیت‌باز روی یخ درحالت (الف) حرکت انتقالی خالص در راستای ثابت و (ب) حرکت دورانی خالص به دور محور قائم ثابت.

متغیرهای حرکت دورانی

اکنون، می‌خواهیم دوران یک جسم صُلب به دور محور ثابت را بررسی کنیم. **جسم صُلب**، جسمی است که همه‌ی اجزاء آن به هم قفل شده‌اند و می‌توانـد بـدون تغییر شکل بچرخد. منظور از **محور ثابت** محوری است که در حین چرخش جسم به دور آن، حرکت نمی‌کند. بنابراین، در اینجا شیئی مانند خورشید بررسی نخواهد شد، زیرا اجزاء خورشید (که گلوله‌ای از گاز است) به یکدیگر قفل نشده‌اند. هم‌چنین، شیئی مانند توپ بولینگ هم که در سالن بولینگ در خط خود در حال غلتیدن است مطالعه نخواهد شد، زیرا توپ به دور یک محور در حال حرکت می‌چرخد (حرکت توپ آمیزه‌ای از حرکت دورانی و حرکت انتقالی است).

شکل ۱۰-۲ جسم صُلبی با شکل اختیاری را نشان می‌دهد که به دور یک محور ثابت به نام **محور دوران**، یا **محور چرخش**، می‌چرخد. در حرکت دورانی خالص (***حرکت زاویه‌ای***)، هر نقطه از جسم روی محیط دایره‌ای حرکت می‌کند که مرکزش بر محور دوران قرار دارد و همه‌ی نقطه‌های جسم در یک بازه‌ی زمانی معین، زاویه‌ی یکسانی را طی می‌کنند. در حرکت

انتقالی خالص (***حرکت خطی***)، هر نقطه از جسم به خط راست حرکت می‌کند و همه‌ی نقطه‌ها در بازه‌ی زمانی معین ***مسافت خطی*** یکسانی را می‌پیمایند.

اکنون، هم‌ارزهای زاویه‌ای کمیت‌های خطی مکان، جابه‌جایی، سرعت و شتاب را ـ هر کدام در جای خود ـ مطالعه می‌کنیم.

مکان زاویه‌ای

شکل ۱۰-۲ یک ***خط مرجع*** ثابت در جسم و عمود بر محور دوران را که با جسم می‌چرخد، نشان می‌دهد. **مکان زاویه‌ای** این خط، زاویه‌ی خط نسبت به یک راستای ثابت است، که آن را **مکان زاویه‌ای صفر** در نظر می‌گیریم. در شکل ۱۰-۳، مکان زاویه‌ای θ نسبت به محور x مثبت است. با توجه به شکل، می‌دانیم که θ از معادله‌ی زیر به دست می‌آید

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(مقیاس رادیان)} \qquad (۱۰-۱)$$

در اینجا s طول یک کمان دایره‌ای است که از محور x (مکان زاویه‌ای صفر) تا خط مرجع ادامه دارد و r شعاع دایره است.

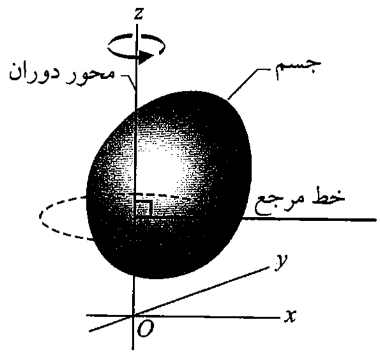
زاویه‌ای که چنین تعریف می‌شود به جای دور (با نماد rev) یا درجه، برحسب **رادیان** (با نماد rad) اندازه‌گیری می‌شود. رادیان که نسبت دو طول است، یک عدد خالص است و بُعد ندارد. چون محیط دایره‌ی به شعاع r برابر با $۲\pi r$ است، هر دایره‌ی کامل شامل ۲π رادیان است:

$$۱\text{rev} = ۳۶۰^\circ = \frac{۲\pi r}{r} = ۲\pi\text{rad} \qquad (۱۰-۲)$$

در نتیجه، داریم

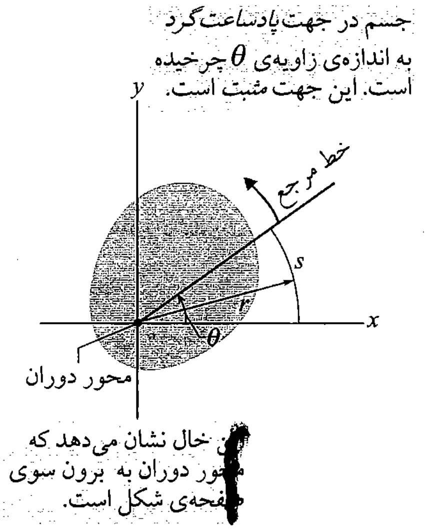
$$۱\text{rad} = ۵۷/۳^\circ = ۰/۱۵۹\,\text{rev} \qquad (۱۰-۳)$$

پس از هر دور کامل خط مرجع به دور محور دوران، زاویه‌ی θ به صفر ***برنمی‌گردد***. اگر خط مرجع نسبت به مکان زاویه‌ای صفر دو دور بزند، مکان زاویه‌ای این خط برابر با $\theta = ۴\pi\,\text{rad}$ می‌شود.



شکل ۱۰-۲ جسم صُلبی با شکل اختیاری به دور محور z دستگاه مختصات حرکت دورانی خالص انجام می‌دهد. مکان ***خط مرجع*** نسبت به جسم صُلب اختیاری است، اما بر محور دوران عمود است. این خط به جسم متصل است و با آن می‌چرخد.

در حرکت انتقالی خالص در راستای محور x اگر تابع $x(t)$، مکان ذره برحسب زمان، در دست باشد، همه‌ی آنچه را که درباره‌ی یک جسم در حال حرکت مورد نیاز است، می‌توان در اختیار داشت. به همین ترتیب، در حرکت دورانی خالص هم اگر تابع $\theta(t)$، مکان زاویه‌ای خط مرجع جسم برحسب زمان، معلوم باشد، همه‌ی اطلاعات لازم درباره‌ی یک جسم چرخان را در دست داریم.



شکل ۱۰-۳ نمودار سطح مقطع جسم صُلب چرخان شکل ۱۰-۲، که از بالا دیده می‌شود. صفحه‌ی سطح مقطع بر محور دوران که به برون سوی صفحه‌ی شکل (به سوی شما) است، عمود است. در این وضعیت جسم، خط مرجع با محور x زاویه‌ی θ می‌سازد.

جابه‌جایی زاویه‌ای

اگر جسم شکل ۱۰-۳، مطابق شکل ۱۰-۴، به دور محوری بچرخد و مکان زاویه‌ای خط مرجع از θ_1 تا θ_2 تغییر کند، **جابه‌جایی زاویه‌ای** جسم $\Delta\theta$، برابر است با

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \qquad (۱۰-۴)$$

تعریف جابه‌جایی زاویه‌ای نه تنها برای کل جسم صُلب، بلکه برای ***هر ذره‌ی درون آن جسم*** نیز صادق است، زیرا همه‌ی ذرات جسم به هم متصل‌اند.

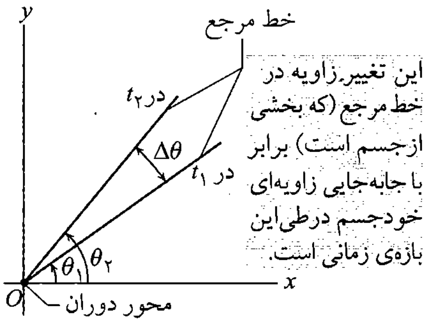
ساعت‌ها منفی‌اند. اگرجسمی در راستای محور x حرکت انتقالی انجام دهد بسته به‌حرکت جسم در جهت مثبت یا منفی محور، جابه‌جایی Δx مثبت یا منفی خواهد بود. به همین ترتیب، جابه‌جایی زاویه‌ای یک جسم چرخان $\Delta\theta$، بنا به قاعده‌ی زیر مثبت یا منفی است:

جابه‌جایی زاویه‌ای در جهت پادساعت‌گرد مثبت و در جهت ساعت‌گرد منفی است.

عبارت «***ساعت‌ها موجوداتی منفی هستند***» برای یادآوری این قاعده می‌تواند کمک کننده باشد. (ساعت‌ها، وقتی صبح زود صدای زنگ‌شان در می‌آید، به یقین، موجوداتی منفی هستند).

خودآزمایی ۱

قرصی می‌تواند به دور محور مرکزی خود بچرخد. کدام زوج مقادیر زیر در مکان‌های زاویه‌ای آغازی و پایانی به ترتیب، نشان دهنده‌ی جابه‌جایی زاویه‌ای منفی‌اند: (الف) ‎−۳rad، ‎+۵rad؛ (ب) ‎−۳rad، ‎−۷rad و (پ) ‎۷rad، ‎−۳rad؟



شکل ۱۰-۴ خط مرجع جسم صُلب شکل‌های ۱۰-۲ و ۱۰-۳ در زمان t_1 در مکان زاویه‌ای θ_1 و در زمان t_2 در مکان زاویه‌ای θ_2 قرار دارد. کمیت $\Delta\theta$ (مساوی با $\theta_2 - \theta_1$) جابه‌جایی زاویه‌ای پیموده شده در بازه‌ی زمانی Δt (مساوی با $t_2 - t_1$) است. خود جسم نشان داده نشده است.

سرعت زاویه‌ای

فرض کنید یک جسم چرخان، مطابق شکل ۱۰-۴، در زمان t_1 در مکان زاویه‌ای θ_1 و در زمان t_2 در مکان زاویه‌ای θ_2 قرار دارد. **سرعت زاویه‌ای متوسط** جسم در بازه‌ی زمانی Δt از t_1 تا t_2 چنین تعریف می‌شود

$$\omega_{avg} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (۱۰-۵)$$

که در آن $\Delta\theta$ جابه‌جایی زاویه‌ای پیموده شده در بازه‌ی زمانی Δt است. (ω حرف کوچک اُمگا است).

سرعت زاویه‌ای (لحظه‌ای) ω، که بسیار مورد استفاده قرار خواهد گرفت، برابر است با حد نسبت داده شده در معادله‌ی ۱۰-۵ وقتی‌که Δt به‌سمت صفر میل کند. پس، می‌توان نوشت

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \qquad (۱۰-۶)$$

اگر $\theta(t)$ معلوم باشد، سرعت زاویه‌ای ω را می‌توان با مشتق گرفتن از آن نسبت به زمان به‌دست آورد.

معادله‌های ۱۰-۵ و ۱۰-۶ نه تنها برای کل جسم صُلب چرخان، بلکه برای ***هر ذره از آن جسم*** نیز صادق‌اند، زیرا همه‌ی ذرات جسم به هم متصل‌اند. یکای سرعت زاویه‌ای، معمولاً، **رادیان بر ثانیه** (با نماد rad/s) یا **دور بر ثانیه** (با نماد rev/s) است. یکای دیگری که برای سرعت زاویه‌ای، دست کم در سه دهه‌ی اول ظهور موسیقی راک، مورد استفاده قرار می‌گرفت، این بود که صفحه‌های موسیقی تولید شده از ماده‌ی وینیل بر روی دستگاه گرامافون با سرعت‌های زاویه‌ای «$۳۳\frac{۱}{۳}$ rpm» یا «۴۵ rpm»، یعنی $۳۳\frac{۱}{۳}$ rev/min یا ۴۵ rev/min، می‌چرخیدند.

اگر ذره‌ای در راستای محور x حرکت انتقالی انجام دهد، بسته به حرکت ذره در جهت مثبت یا منفی محور، سرعت خطی آن v، مثبت یا منفی است. به‌همین ترتیب، سرعت زاویه‌ای یک جسم صُلب چرخان ω، بسته به اینکه جسم به طور پادساعت‌گرد (مثبت) یا ساعت‌گرد (منفی) بچرخد، مثبت یا منفی است. (باز هم عبارت «ساعت‌ها موجوداتی منفی هستند» صادق است). بزرگی سرعت زاویه‌ای را **تندی زاویه‌ای** می‌نامند و آن را هم با ω نشان می‌دهند.

شتاب زاویه‌ای

اگر سرعت زاویه‌ای یک جسم چرخان ثابت نباشد، جسم دارای شتاب زاویه‌ای است. فرض می‌کنیم $\omega_۲$ و $\omega_۱$ سرعت زاویه‌ای جسم، به ترتیب، در زمان‌های $t_۲$ و $t_۱$ باشد. **شتاب زاویه‌ای متوسط** جسم چرخان در بازه‌ی زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ چنین تعریف می‌شود

$$\alpha_{\text{avg}} = \frac{\omega_۲ - \omega_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \qquad (۱۰-۷)$$

که در آن $\Delta\omega$ تغییر سرعت زاویه‌ای در بازه‌ی زمانی Δt است. **شتاب زاویه‌ای (لحظه‌ای)** α، که با آن زیاد سر و کار خواهیم داشت، برابر است با حدّ این کمیت وقتی که Δt به سمت صفر میل کند. پس، می‌توان نوشت

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \qquad (۱۰-۸)$$

همان‌گونه که از نام شتاب برمی‌آید، این شتاب زاویه‌ای جسم در یک لحظه‌ی معین است. معادله‌های ۱۰-۷ و ۱۰-۸ برای هر ذره‌ی جسم نیز معتبرند. یکای شتاب زاویه‌ای، معمولاً، **رادیان بر مجذور ثانیه** (با نماد rad/s^2) یا **دور بر مجذور ثانیه** (با نماد rev/s^2) است.

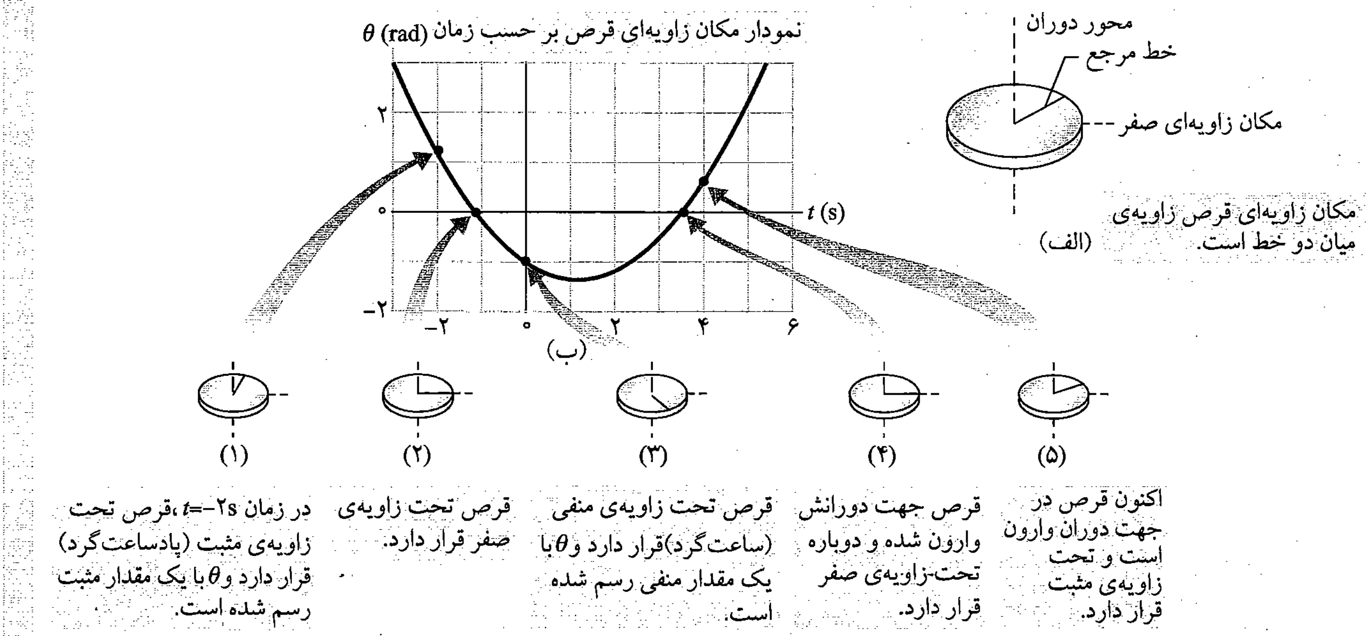
مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۰-۱ به دست آوردن سرعت زاویه‌ای از مکان زاویه‌ای

قرص شکل ۱۰-۵ الف مانند یک چرخ و فلک، به دور محور مرکزی خود می‌چرخد. $\theta(t)$، مکان زاویه‌ای مربوط به یک خط مرجع روی قرص از معادله‌ی زیر به دست می‌آید

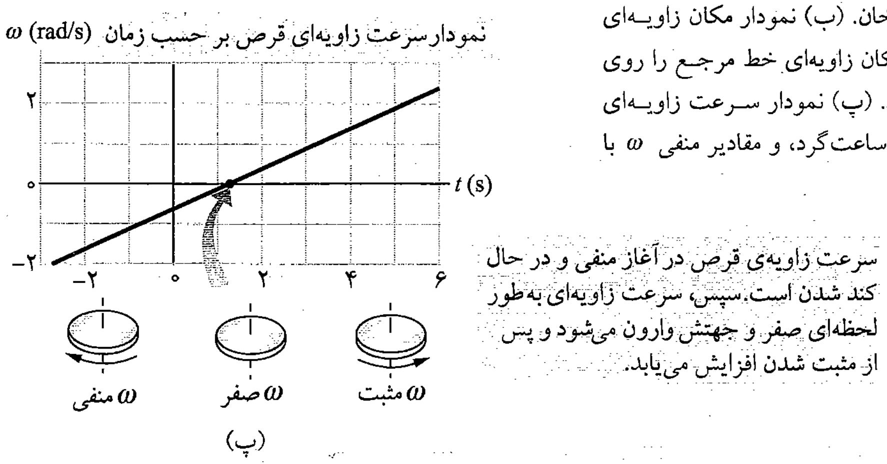
$$\theta = -۱/۰۰ - ۰/۶۰۰t + ۰/۲۵۰t^۲ \qquad (۱۰-۹)$$

که در آن t برحسب ثانیه، θ برحسب رادیان و مکان زاویه‌ای صفر در شکل مشخص شده است. (اگر بخواهید، می‌توانید همه‌ی این کمیت‌ها را با کنار گذاشتن موقتی واژه‌ی «زاویه‌ای» از «مکان زاویه‌ای» و جانشانی نماد x با نماد θ، به نمادگذاری فصل ۲ تبدیل کنید. در این صورت آنچه به دست می‌آید معادله‌ای است که مکان را به صورت تابعی از زمان، برای حرکت یک بعدی فصل ۲ نشان می‌دهد).

(الف) نمودار مکان زاویه‌ای قرص را برحسب زمان از $t = -۳/۰s$ تا $t = ۵/۴s$ رسم کنید. نمودار وضعیت قرص وخط مرجع مکان زاویه‌ای آن را در زمان‌های $t = -۲/۰s, ۰/۰s, ۴/۰s$ و در زمانی که نمودار محور t را قطع می‌کند، رسم کنید.



شکل ۱۰-۵ (الف) تصویر یک قرص چرخان. (ب) نمودار مکان زاویه‌ای قرص $\theta(t)$. نمایش پنج تصویر قرص، که مکان زاویه‌ای خط مرجع را روی قرص برای پنج نقطه از منحنی نشان می‌دهند. (پ) نمودار سرعت زاویه‌ای قرص $\omega(t)$. مقادیر مثبت ω با چرخش پادساعت‌گرد، و مقادیر منفی ω با چرخش ساعت‌گرد متناظرند.



نکته‌ی کلیدی

مکان زاویه‌ای قرص همان مکان زاویه‌ای $\theta(t)$ مربوط به خط مرجع است، که از معادله‌ی ۱۰-۹ به صورت تابعی از زمان به‌دست می‌آید. بنابراین، باید نمودار معادله‌ی ۱۰-۹ را رسم کنیم. نتیجه‌ی کار در شکل ۱۰-۵ ب، نشان داده شده است.

محاسبات: برای نشان دادن وضعیت قرص و خط مرجع آن در یک زمان خاص به تعیین θ در آن زمان نیاز داریم. برای این منظور، زمان داده شده را در معادله‌ی ۱۰-۹ قرار می‌دهیم. به ازای $t=-۲/۰\,\text{s}$، داریم

$$\theta = -۱/۰۰ - (۰/۶۰۰)(-۲/۰) + (۰/۲۵۰)(-۲/۰)^{۲} \Rightarrow$$

$$\theta = ۱/۲\,\text{rad} = ۱/۲\,\text{rad}\,\frac{۳۶۰°}{۲\pi\,\text{rad}} = ۶۹°$$

این نتیجه نشان می‌دهد که تا زمان $t=-۲/۰\,\text{s}$، خط مرجع نسبت به مکان زاویه‌ای صفر روی قرص به اندازه‌ی $۱/۲\,\text{rad}$ یا ۶۹ درجه (به طور پاد ساعت‌گرد، چون θ مثبت است) چرخیده است. تصویر ۱ قرص در شکل ۱۰-۵ ب، این مکان زاویه‌ای خط مرجع را نشان می‌دهد.

به‌همین ترتیب، به‌ازای $t=۰$، داریم $\theta = -۱/۰۰\,\text{rad} = -۵۷°$. در این حالت، تصویر ۳ نشان می‌دهد که خط مرجع نسبت به مکان زاویه‌ای صفر به اندازه‌ی $۱/۰\,\text{rad}$ یا ۵۷ درجه به طور ساعت‌گرد چرخیده است. هم‌چنین، به ازای $t=۴/۰\,\text{s}$، داریم $\theta = ۰/۶۰\,\text{rad} = ۳۴°$ (تصویر ۵ قرص). تعیین وضعیت قرص در لحظه‌هایی که نمودار محور t را قطع می‌کند، آسان است، زیرا در آن زمان‌ها، داریم $\theta = ۰$ وخط مرجع به‌طورلحظه‌ای در راستای مکان زاویه‌ای صفر (تصویرهای ۲ و ۴ قرص) قرار می‌گیرد.

(ب) در زمان t_{min}، مقدار $\theta(t)$ به کمینه‌ی نشان داده شده در شکل ۱۰-۵ ب، می‌رسد. این مقدار کمینه چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

برای پیدا کردن مقدار فرین تابع (در اینجا مقدار کمینه)، مشتق اول تابع را برابر با صفر قرار می‌دهیم.

محاسبات: مشتق اول $\theta(t)$ چنین به دست می‌آید

$$\frac{d\theta}{dt} = -۰/۶۰۰ + ۰/۵۰۰t \qquad (۱۰-۱۰)$$

با مساوی صفر قرار دادن این مقدار و حل کردن معادله‌ی حاصل نسبت به t، زمان مربوط به مقدار کمینه‌ی $\theta(t)$ به دست می‌آید، که برابر است با

$$t_{\text{min}} = ۱/۲۰\,\text{s} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

برای پیدا کردن کمینه‌ی θ، مقدار t_{min} را در معادله‌ی ۱۰-۹ قرار می‌دهیم:

$$\theta = -۱/۳۶\,\text{rad} \approx -۷۷/۹° \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

این ***مقدار کمینه‌ی*** $\theta(t)$ (پایین‌ترین نقطه‌ی منحنی در شکل ۱۰-۵ ب)، متناظر با چرخش ***ساعت‌گرد بیشینه‌ی*** قرص از مکان زاویه‌ای صفر تا اندکی پس از تصویر ۳ در شکل است.

(پ) نمودار سرعت زاویه‌ای قرص ω، را برحسب زمان از $t=-۳/۰\,\text{s}$ تا $t=۶/۰\,\text{s}$ رسم کنید. وضعیت قرص را رسم کنید و جهت دوران آن و علامت ω را در زمان‌های $t=-۲/۰\,\text{s}, ۴/۰\,\text{s}$ و نیز در زمان t_{min} نشان دهید.

نکته‌ی کلیدی

با توجه به معادله‌ی ۱۰-۶، سرعت زاویه‌ای ω برابر با $d\theta/dt$ است و از معادله‌ی ۱۰-۱۰ به دست می‌آید. بنابراین، داریم

$$\omega = -۰/۶۰۰ + ۰/۵۰۰t \qquad (۱۰-۱۱)$$

نمودار تابع $\omega(t)$ در شکل ۱۰-۵ پ، رسم شده است. چون این تابع خطی است، نمودار آن به صورت یک خط راست است. شیب خط $۰/۵۰۰\,\text{rad/s}^{۲}$ و مِحل تلاقی آن با محور قائم (که نشان داده نشده است) $-۰/۶۰۰\,\text{rad/s}$ است.

محاسبات: برای مشخص کردن وضعیت قرص در زمان $t=-۲/۰\,\text{s}$، این مقدار t را در معادله‌ی ۱۰-۱۱ قرار می‌دهیم و مقدار زیر را به دست می‌آوریم

$$\omega = -۱/۶\,\text{rad/s} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که در زمان $t=-۲/۰\,\text{s}$، قرص به طور ساعت‌گرد می‌چرخد (تصویر سمت چپ قرص درشکل ۱۰-۵ پ).

با جانشانی $t=۴/۰\,\text{s}$ در معادله‌ی ۱۰-۱۱، داریم

$$\omega = ۱/۴\,\text{rad/s} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

علامت مثبت نشان می‌دهد که اکنون قرص به طور پادساعت‌گرد

می‌چرخد (تصویر سمت راست قرص در شکل ۱۰-۵ پ).

از پیش می‌دانیم که t_{min} به ازای $d\theta/dt = ۰$ به دست آمده است که در این حال نیز، داریم $\omega = ۰$. یعنی، وقتی خط مرجع به مقدار کمینه‌ی θ در شکل ۱۰-۵ ب می‌رسد، چنان‌که تصویر مرکزی در شکل ۱۰-۵ پ نشان می‌دهد، قرص به طور لحظه‌ای متوقف می‌شود. در روی نمودار، این توقف لحظه‌ای در نقطه‌ی صفر صورت می‌گیرد که در آن جهت تغییرات نمودار از حرکت ساعت‌گرد منفی به حرکت پادساعت‌گرد مثبت عوض می‌شود.

(ت) با استفاده کردن از نتیجه‌های قسمت‌های (الف) تا (پ)، حرکت قرص را به ازای $t = -۳/۰\,s$ تا $t = ۶/۰\,s$ توصیف کنید.

توصیف: وقتی ابتدا قرص را در زمان $t = -۳/۰\,s$ مشاهده می‌کنیم، می‌بینیم که مکان زاویه‌ای آن مثبت است، به طور ساعت‌گرد می‌چرخد، اما حرکتش در حال کند شدن است. قرص در مکان زاویه‌ای $\theta = -۱/۳۶\,rad$ متوقف می‌شود، سپس به طور پادساعت‌گرد شروع به چرخش می‌کند و مکان زاویه‌ای آن دوباره مثبت می‌شود.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۰-۲ به دست آوردن سرعت زاویه‌ای از شتاب زاویه‌ای

فرفره‌ای با شتاب زاویه‌ای زیر می‌چرخد

$$\alpha = ۵t^{۳} - ۴t$$

که در آن t برحسب ثانیه و α برحسب رادیان بر مجذور ثانیه است. در زمان $t = ۰$، سرعت زاویه‌ای فرفره $۵\,rad/s$ و خط مرجع روی فرفره در مکان زاویه‌ای $\theta = ۲\,rad$ رسم شده است.

(الف) رابطه‌ی مربوط به سرعت زاویه‌ای فرفره $\omega(t)$، را به‌دست آورید. یعنی، رابطه‌ای پیدا کنید که به طور صریح بستگی سرعت زاویه‌ای به زمان را نشان دهد. (می‌توان گفت که این بستگی وجود دارد زیرا فرفره دارای شتاب زاویه‌ای است، که به معنی ***تغییر کردن*** سرعت زاویه‌ای است).

نکته‌ی کلیدی

بنا به تعریف، $\alpha(t)$ مشتق $\omega(t)$ نسبت به زمان است. بنابراین، با انتگرال‌گیری از $\alpha(t)$ نسبت به زمان می‌توان $\omega(t)$ را به‌دست آورد.

محاسبات: معادله‌ی ۱۰-۸ نشان می‌دهد که

$$d\omega = \alpha dt$$

در نتیجه

$$\int d\omega = \int \alpha dt$$

و از آنجا، داریم

$$\omega = \int (۵t^{۳} - ۴t)dt = \frac{۵}{۴}t^{۴} - \frac{۴}{۲}t^{۲} + C$$

برای حساب کردن ثابت انتگرال‌گیری C، می‌دانیم که در زمان $t = ۰$، داریم $\omega = ۵\,rad/s$. با جانشانی این مقادیر در رابطه‌ی ω، داریم

$$۵\,rad/s = ۰ - ۰ + C \Rightarrow C = ۵\,rad/s$$

پس، می‌توان نوشت

$$\omega = \frac{۵}{۴}t^{۴} - ۲t^{۲} + ۵ \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) رابطه‌ی مربوط به مکان زاویه‌ای فرفره $\theta(t)$، را به دست آورید.

نکته‌ی کلیدی

بنا به تعریف، $\omega(t)$ مشتق $\theta(t)$ نسبت به زمان است. بنابراین، با انتگرال‌گیری از $\omega(t)$ نسبت به زمان می‌توانیم $\theta(t)$ را به دست آوریم.

محاسبات: چون معادله‌ی ۱۰-۶ نشان می‌دهد که

$$d\theta = \omega dt$$

پس، می‌توان نوشت

$$\theta = \int \omega dt = \int (\frac{۵}{۴}t^{۴} - ۲t^{۲} + ۵)dt$$

$$\theta = \frac{۱}{۴}t^{۵} - \frac{۲}{۳}t^{۳} + ۵t + C' \Rightarrow$$

$$\theta = \frac{۱}{۴}t^{۵} - \frac{۲}{۳}t^{۳} + ۵t + ۲ \qquad \text{(پاسخ)}$$

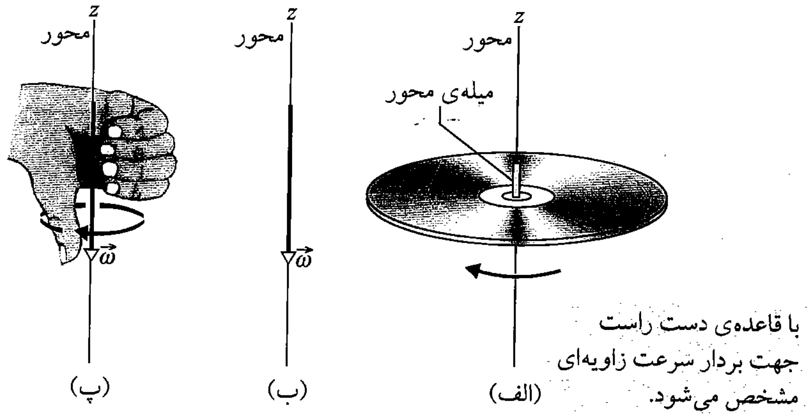
در اینجا C' با توجه به این نکته به دست آمده است که در زمان $t = ۰$، داریم $\theta = ۲\,rad$.

آیا کمیت‌های زاویه‌ای کمیت‌هایی برداری‌اند؟

مکان، سرعت و شتاب یک تک ذره را می‌توان به کمک بردارها توصیف کرد. اما اگر حرکت ذره به خط راست محدود باشد، نیازی به نمادگذاری برداری نیست. چنین ذره‌ای تنها می‌تواند در دو جهت حرکت کند، و این جهت‌ها را می‌توان با علامت‌های مثبت و منفی نشان داد.

به همین ترتیب، جسم صُلبی که به دور یک محور ثابت می‌چرخد، چنان‌که از بالا و در راستای محور دیده شود، تنها می‌تواند در دو جهت ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد، بچرخد. این دو جهت را هم می‌توان با علامت‌های منفی و مثبت مشخص کرد. اما پرسشی که مطرح می‌شود این است: «آیا جابه‌جایی، سرعت و شتاب زاویه‌ای یک جسم چرخان را می‌توان به‌صورت یک بردار در نظر گرفت؟» پاسخ به طور مشروط «بله» است (به هشدار زیر در ارتباط با جابه‌جایی‌های زاویه‌ای توجه کنید).

سرعت‌های زاویه‌ای. اکنون سرعت زاویه‌ای را در نظر می‌گیریم. شکل ۱۰-۶ الف یک صفحه‌ی گرامافون را نشان می‌دهد که بر روی سطح دوّاری می‌چرخد. تندی زاویه‌ای صفحه ω، (مساوی با $33\frac{1}{3}\,\text{rev/min}$) ثابت و ساعت‌گرد است. سرعت زاویه‌ای صفحه را می‌توان با بردار $\vec{\omega}$ نشان داد، که مطابق شکل ۱۰-۶ ب در راستای محور دوران است. برای پی بردن به موضوع، طول این بردار را طبق یک مقیاس مناسب، مثلاً، هر سانتی‌متر متناظر با $10\,\text{rev/min}$، انتخاب می‌کنیم. سپس، با استفاده کردن از **قاعده‌ی دست راست** برای $\vec{\omega}$ جهتی را مطابق شکل ۱۰-۶ پ، در نظر می‌گیریم. این جهت چنین به دست می‌آید: هرگاه انگشتان دست راست خود را ***در جهت چرخش*** صفحه‌ی چرخان خم کنیم، انگشت شست



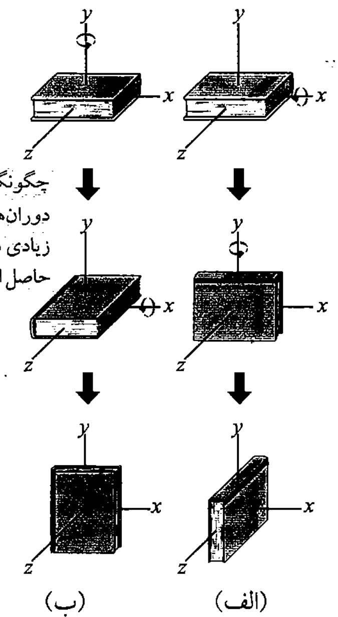
شکل ۱۰-۶ (الف) صفحه‌ی گرامافونی به دور یک محور قائم که بر میله‌ی محور منطبق است، می‌چرخد. (ب) سرعت زاویه‌ای صفحه‌ی چرخان را با بردار $\vec{\omega}$ می‌توان نمایش داد. این بردار، مطابق شکل، در راستای محور واقع و به پایین‌سو است. (پ) با استفاده کردن از قاعده‌ی دست راست می‌توان نشان داد که بردار سرعت زاویه‌ای به پایین‌سو است. هرگاه انگشتان دست راست خود را در جهت چرخش صفحه‌ی چرخان خم کنیم انگشت شست به حالت کشیده جهت $\vec{\omega}$ را نشان خواهد داد.

به حالت کشیده جهت بردار سرعت زاویه‌ای را نشان خواهد داد. اگر صفحه در جهت مخالف بچرخد، قاعده‌ی دست راست نشان می‌دهد که بردار سرعت زاویه‌ای در جهت مخالف است.

خو گرفتن با نمایش کمیت‌های زاویه‌ای به صورت بردار کار آسانی نیست. ما، به طور معمول، انتظار داریم که چیزی در ***راستای بردار*** حرکت کند. در حالی که در اینجا چنین اتفاقی نمی‌افتد، بلکه به دور راستای بردار چیزی (مانند جسم صُلب) می‌چرخد. در بحث حرکت دورانی خالص، یک بردار محور دوران را معرفی می‌کند، نه جهت حرکت چیزی را. با وجود این، یک بردار، حرکت را هم مشخص می‌کند. علاوه بر این، این بردار از تمام قاعده‌های عملیات برداری مورد بحث در فصل ۳، پیروی می‌کند. هم‌چنین، شتاب زاویه‌ای $\vec{\alpha}$ هم برداری است که تابع این قاعده‌هاست.

در این فصل چون فقط دوران‌های به دور یک محور ثابت را در نظر می‌گیریم نیازی به استفاده کردن از بردارها نداریم ـ یعنی می‌توانیم سرعت زاویه‌ای را با ω و شتاب زاویه‌ای را با α نشان دهیم. هم‌چنین، دوران پادساعت‌گرد را با علامت مثبت و دوران ساعت‌گرد را با علامت منفی مشخص می‌کنیم.

جابه‌جایی‌های زاویه‌ای. اکنون به عنوان هشدار اشاره می‌کنیم که ***جابه‌جایی‌های زاویه‌ای را نمی‌توان به عنوان بردار در نظر گرفت*** (مگر آنکه خیلی کوچک باشند). چرا نه؟ ما می‌توانیم درست مانند بردار سرعت زاویه‌ای در شکل ۱۰-۶، برای جابه‌جایی‌های زاویه‌ای هم، جهت و بزرگی در نظر بگیریم. اما برای آنکه بتوان کمیتی را به عنوان بردار تلقی کرد باید آن کمیت از قاعده‌های برداری ***نیز*** پیروی کند. بنا به یکی از این قاعده‌ها هنگامی که دو بردار را با هم جمع می‌کنیم، ترتیب جمع کردن آن‌ها اهمیتی ندارد. اما به کار بردن این قاعده در مورد جابه‌جایی‌های زاویه‌ای ناموفق است.



شکل ۱۰-۷ (الف) کتاب نسبت به وضعیت آغازی در بالا، به طور پی‌درپی دو دوران ۹۰ درجه، ابتدا به دور محور x (افقی) و سپس به دور محور y (قائم) پیدا می‌کند. (ب) همان دو دوران به ترتیبی برعکس، به کتاب داده شده‌اند.

شکل ۱۰-۷ در این مورد مثالی را نشان می‌دهد. در این شکل به کتابی که در آغاز افقی است، پی‌درپی دو جابه‌جایی زاویه‌ای ۹۰ درجه، نخست به ترتیب شکل ۱۰-۷ الف و سپس به‌ترتیب شکل ۱۰-۷ ب، داده می‌شود. اگرچه این دو جابه‌جایی زاویه‌ای یکسان‌اند، ترتیب آن‌ها یکی نیست و کتاب در نهایت دارای سمت‌گیری‌های متفاوتی می‌شود. در نتیجه، جمع دو جابه‌جایی زاویه‌ای به ترتیب آن‌ها بستگی پیدا می‌کند و این دو جابه‌جایی نمی‌توانند بردار باشند. در اینجا مثال دیگری مطرح می‌شود. بازوی راست خود را در کنار بدن در حالی به پایین‌سو نگه دارید که کف دست به سوی ران شما باشد. در حالی که مچ دست ثابت است، (۱) بازو را به پیش سو بلند کنید تا افقی شود، (۲) بازو را به طور افقی بچرخانید تا جهت راست را نشان دهد، و (۳) بازو را در کنار بدن به پایین بیاورید. اکنون، کف دست شما رو به پیش‌سو خواهد بود. حال اگر این عمل را از اول شروع کنید اما ترتیب‌مرحله‌ها را برعکس کنید، در آخر کف دست شما رو به کدام سو قرار می‌گیرد؟ از هر یک از این مثال‌ها باید نتیجه بگیریم که حاصل جمع دو جابه‌جایی زاویه‌ای به ترتیب آن‌ها بستگی دارد و آن‌ها نمی‌توانند بردار باشند.

۱۰-۲ حرکت دورانی با شتاب زاویه‌ای ثابت

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۰-۱۴ برای شتاب زاویه‌ای ثابت، رابطه‌ی میان مکان زاویه‌ای، جابه‌جایی زاویه‌ای، سرعت زاویه‌ای، شتاب زاویه‌ای، و مدت زمان سپری شده را به کار ببرید (جدول ۱۰-۱).

نکته‌ی کلیدی

● شتاب زاویه‌ای ثابت ($\alpha = \text{const.}$) حالت ویژه‌ی مهمی از حرکت دورانی است. در این حالت، معادله‌های سینماتیک مناسب عبارت‌اند از

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$$

$$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$$

حرکت دورانی با شتاب زاویه‌ای ثابت

در حرکت انتقالی خالص حرکت با ***شتاب خطی ثابت*** (مثلاً شتاب یک جسم در حال سقوط آزاد)، حالتی ویژه و مهم است. در جدول ۲-۱، یک رشته از معادله‌های مربوط به این حرکت درج شده است.

در حرکت دورانی خالص نیز حالت ***شتاب زاویه‌ای ثابت*** اهمیت دارد و برای این حالت هم مجموعه‌ای از معادله‌های مشابه را می‌توان نوشت. ما در اینجا این معادله‌ها را به‌دست نمی‌آوریم، بلکه با قرار دادن کمیت‌های زاویه‌ای هم‌ارز آن‌ها در معادله‌های خطی، آن‌ها را از معادله‌های خطی متناظر پیدا می‌کنیم. جدول ۱۰-۱ هر دو مجموعه‌ی معادله‌ها (معادله‌های ۲-۱۱ و ۲-۱۵ تا ۲-۱۸؛ معادله‌های ۱۰-۱۲ تا ۱۰-۱۶) را نشان می‌دهد.

جدول ۱۰-۱ معادله‌های حرکت مربوط به شتاب خطی ثابت و شتاب زاویه‌ای ثابت

شماره‌ی معادله	معادله‌ی خطی	متغیر حذف شده		معادله‌ی زاویه‌ای	شماره‌ی معادله
(۲-۱۱)	$v = v_0 + at$	$x - x_0$	$\theta - \theta_0$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(۱۰-۱۲)
(۲-۱۵)	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v	ω	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(۱۰-۱۳)
(۲-۱۶)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t	t	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	(۱۰-۱۴)
(۲-۱۷)	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a	α	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$	(۱۰-۱۵)
(۲-۱۸)	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0	ω_0	$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$	(۱۰-۱۶)

یادآوری می‌شود که معادله‌های ۲-۱۱ و ۲-۱۵ معادله‌های اصلی مربوط بـه شـتاب خطـی ثابت‌اند و معادله‌های خطی دیگر جدول را می‌توان از آن‌ها به دست آورد. بـه همـین ترتیـب، معادله‌های ۱۰-۱۲ و ۱۰-۱۳ هم معادله‌هـای اصـلی مربـوط بـه شـتاب زاویـه‌ای ثابـت‌انـد و معادله‌های زاویه‌ای دیگر می‌توانند از آن‌ها استنتاج شوند. برای حل کردن یک مسـئله‌ی نمونـه در مورد شتاب زاویه‌ای ثابت، به طور معمول، از یکی از معادله‌های زاویه‌ای می‌تـوان اسـتفاده کرد (*اگر* جدول آن را در اختیار داشته باشیم). در این صورت، معادله‌ای را انتخاب می‌کنیم که تنها متغیر نـامعلوم در آن، متغیـر مـورد نظـر در مسـئله باشـد. روش بهتـر آن اسـت کـه تنهـا معادله‌های ۱۰-۱۲ و ۱۰-۱۳ را به ذهن بسپاریم و در صورت نیاز، آن‌ها را به طـور هـم‌زمـان حل کنیم.

☑ خودآزمایی ۲

در چهار حالت زیر، مکان زاویه‌ای یک جسم چرخان $\theta(t)$، برحسب زمان داده شده اسـت:

(الـف) $\theta = ۳t - ۴$، (ب) $\theta = -۵t^۳ - ۴t^۲ + ۶$، (پ) $\theta = \frac{۲}{t^۲} - \frac{۴}{t}$ و (ت) $\theta = ۵t^۲ - ۳$.

در کدام حالت، معادله‌های جدول ۱۰-۱ به کار رفته‌اند؟

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۰-۳ شتاب زاویه‌ای ثابت، چرخ سُنباده

یـک چـرخ سـنباده (شـکل ۱۰-۸) بـا شـتاب زاویـه‌ای ثابـت $\alpha = ۰/۳۵\,\mathrm{rad/s^۲}$ می‌چرخد. در زمـان $t = ۰$ سـرعت زاویـه‌ای چـرخ $\omega_۰ = -۴/۶\,\mathrm{rad/s}$ و خـط مرجـع روی آن در مکـان زاویه‌ای $\theta_۰ = ۰$، افقی است.

(الف) در چه زمانی پس از $t = ۰$ خط مرجع در مکـان زاویـه‌ای $\theta = ۵/۰\,\mathrm{rev}$ خواهد بود؟

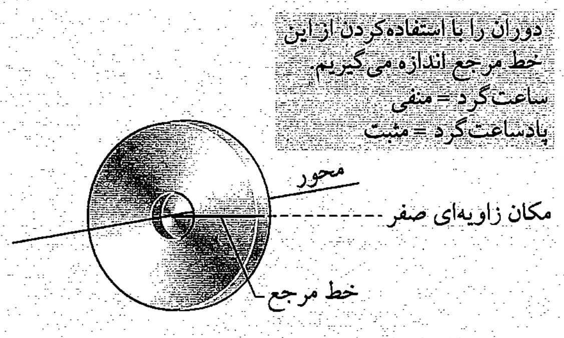
نکته‌ی کلیدی

شتاب زاویه‌ای ثابت است. در نتیجه، می‌توان معادله‌های حرکت دورانی جدول ۱۰-۱ را به کار برد. برای این کار معادله‌ی ۱۰-۱۳ مناسب است، زیرا تنها متغیر نامعلوم در این معادله زمان t است:

$$\theta - \theta_۰ = \omega_۰ t + \frac{۱}{۲}\alpha t^۲$$

محاسبات: با جانشانی مقادیر معلوم و قرار دادن داده‌های $\theta_۰ = ۰$ و $\theta = ۵/۰\,\mathrm{rev} = ۱۰\pi\,\mathrm{rad}$ در معادله، داریم

$$۱۰\pi\,\mathrm{rad} = (-۴/۶\,\mathrm{rad/s})t + \frac{۱}{۲}(۰/۳۵\,\mathrm{rad/s^۲})t^۲$$



شکل ۱۰-۸ تصویر یک چرخ سنباده، در زمـان $t = ۰$. خـط مرجـع (که تصور می‌کنیم بر روی چرخ رسم شده است)، افقی است.

(در اینجا بـرای سـازگار شـدن یکاهـا $۵/۰\,\mathrm{rev}$ را بـه $۱۰\pi\,\mathrm{rad}$ تبدیل کرده‌ایم). با حل کردن این معادله‌ی درجه دوم نسبت به t، خواهیم داشت

(پاسخ) $t = ۳۲\mathrm{s}$

اکنون، به برخی نکته‌های اندکی شگفت‌انگیز توجه کنید. ما ابتـدا چرخ را هنگامی می‌بینیم که درجهت منفی و از سمت‌گیری $\theta = ۰$ می‌چرخد. اما متوجه می‌شویم که $۳۲\mathrm{s}$ بعد چرخ در سمت‌گیری

مثبت $\theta = ۵/۰\,\text{rev}$ قرار دارد. در این بازه‌ی زمانی چه اتفاقی افتاده که سبب قرارگرفتن چرخ در سمت‌گیری مثبت شده است؟

(ب) وضعیت دوران چرخ سنباده را در بازه‌ی زمانی $t = ۰$ تا $t = ۳۲\text{s}$ توصیف کنید.

توصیف: چرخ سنباده در آغاز در جهت منفی (ساعت‌گرد) با سرعت زاویه‌ای $\omega_۰ = -۴/۶\,\text{rad/s}$ می‌چرخد، اما شتاب زاویه‌ای آن α، مثبت است. مخالف بودن علامت‌های سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای در آغاز به این معنی است که چرخ با چرخش در جهت منفی کُند می‌شود، متوقف می‌شود، و پس از تغییر دادن جهت در جهت مثبت می‌چرخد. پس از برگشتن خط مرجع به سمت‌گیری آغازی $\theta = ۰$، چرخ در مدت $t = ۳۲\text{s}$، به اندازه‌ی ۵/۰ دور دیگر می‌چرخد.

(پ) در چه زمانی چرخ سنباده به طور لحظه‌ای متوقف می‌شود؟

محاسبه: باز هم به سراغ جدول معادله‌های مربوط به شتاب زاویه‌ای ثابت می‌رویم. در اینجا معادله‌ای نیاز داریم که در آن فقط t متغیر نامعلوم و مورد نظر باشد. اما اکنون معادله‌ی مورد نظر باید شامل متغیر ω هم باشد، تا بتوان آن را مساوی صفر قرار داد و سپس معادله را نسبت به زمان t حل کرد. در اینجا معادله‌ی ۱۰-۱۲ را انتخاب می‌کنیم و داریم

$$t = \frac{\omega - \omega_۰}{\alpha} = \frac{۰ - (-۴/۶\,\text{rad/s})}{۰/۳۵\,\text{rad/s}^۲} \Rightarrow$$

$$t = ۱۳\text{s} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۰-۴ شتاب زاویه‌ای ثابت، سوار شدن به چرخانه

وقتی یک چرخانه (استوانه‌ی چرخان بزرگ و قائمی که در پارک‌های تفریحی وجود دارد) را راه می‌اندازیم، متوجه اضطراب بیش از حد یکی از مسافرها می‌شویم و در طی ۲۰/۰ دور با شتاب زاویه‌ای ثابت سرعت زاویه‌ای استوانه را از $۳/۴۰\,\text{rad/s}$ به $۲/۰۰\,\text{rad/s}$ کاهش می‌دهیم. (واضح است که این مسافر بیشتر یک «شخص اهل حرکت انتقالی» است تا یک «شخص اهل حرکت دورانی»).

(الف) شتاب زاویه‌ای ثابت استوانه در حین کاهش یافتن تندی زاویه‌ای چیست؟

نکته‌ی کلیدی

چون شتاب زاویه‌ای استوانه ثابت است با توجه به معادله‌های مربوط به شتاب زاویه‌ای ثابت (معادله‌های ۱۰-۱۲ و ۱۰-۱۳)، شتاب زاویه‌ای را می‌توان به سرعت زاویه‌ای و جابه‌جایی زاویه‌ای استوانه ربط داد.

محاسبات: نخست یک بازبینی فوری انجام می‌دهیم تا ببینیم آیا می‌توان معادله‌های پایه‌ای را حل کرد. سرعت زاویه‌ای آغازی $\omega_۰ = ۳/۴۰\,\text{rad/s}$، جابه‌جایی زاویه‌ای $\theta - \theta_۰ = ۲۰/۰\,\text{rev}$ و سرعت زاویه‌ای در پایان این جابه‌جایی $\omega = ۲/۰۰\,\text{rad/s}$ است. علاوه بر شتاب زاویه‌ای α، که مورد نیاز است، هر دو معادله‌ی پایه‌ای نیز شامل زمان t هستند، که به آن‌ها نیازی نداریم.

برای حذف کردن کمیت نامعلوم t، با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۰-۱۲ می‌توان نوشت

$$t = \frac{\omega - \omega_۰}{\alpha}$$

اگر این مقدار t را در معادله‌ی ۱۰-۱۳ قرار دهیم، داریم

$$\theta - \theta_۰ = \omega_۰\left(\frac{\omega - \omega_۰}{\alpha}\right) + \frac{۱}{۲}\alpha\left(\frac{\omega - \omega_۰}{\alpha}\right)^۲$$

این معادله را نسبت به α حل می‌کنیم، سپس داده‌های معلوم را در آن قرار می‌دهیم و ۲۰rev را هم به ۱۲۵/۷rad تبدیل می‌کنیم. در نتیجه، داریم

$$\alpha = \frac{\omega^۲ - \omega_۰^۲}{۲(\theta - \theta_۰)} = \frac{(۲/۰۰\,\text{rad/s})^۲ - (۳/۴۰\,\text{rad/s})^۲}{۲(۱۲۵/۷\,\text{rad})} \Rightarrow$$

$$\alpha = -۰/۰۳۰۱\,\text{rad/s}^۲ \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

(ب) کاهش یافتن تندی زاویه‌ای چه مدت طول می‌کشد؟

محاسبه: اکنون که α معلوم است، برای پیدا کردن t می‌توان از معادله‌ی ۱۰-۱۲ استفاده کرد:

$$t = \frac{\omega - \omega_۰}{\alpha} = \frac{۲/۰۰\,\text{rad/s} - ۳/۴۰\,\text{rad/s}}{-۰/۰۳۰۱\,\text{rad/s}^۲} \Rightarrow$$

$$t = ۴۶/۵\text{s} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

۱۰-۳ رابطه‌ی میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۰-۱۵ برای یک جسم صُلب در حال دوران به دور یک محور ثابت، متغیرهای زاویه‌ای جسم (مکان زاویه‌ای، سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای) و متغیرهای خطی (مکان، سرعت، و شتاب) یک ذره‌ی واقع در روی جسم با هر شعاع معینی را به هم ربط دهید.

۱۰-۱۶ تفاوت میان شتاب مماسی و شتاب شعاعی را از هم تمیز بدهید و در طرح شکل ذره‌ی روی جسم چرخان به دور یک محور برای هر یک از آن‌ها برداری رسم کنید که تندی زاویه‌ای مربوط به هر دوی آن‌ها افزایش و کاهش پیدا می‌کند.

نکته‌های کلیدی

● نقطه‌ای از یک جسم صُلب چرخان، واقع در فاصله‌ی عمودی r از محور دوران، در دایره‌ای به شعاع r حرکت می‌کند. هرگاه جسم تحت زاویه‌ی θ دوران کند، این نقطه در طول کمانی به طول s حرکت می‌کند که برابر است با

$$s = \theta r \quad \text{(مقیاس رادیان)}$$

که در آن θ برحسب رادیان است.

● سرعت خطی نقطه $\vec{v}$، بر دایره مماس است؛ تندی خطی نقطه، v، برابر است با

$$v = \omega r \quad \text{(مقیاس رادیان)}$$

که در آن ω تندی زاویه‌ای جسم (برحسب رادیان بر ثانیه) و در نتیجه تندی زاویه‌ای نقطه است.

● شتاب خطی این نقطه $\vec{a}$، دارای مؤلفه‌های مماسی و شعاعی است. مؤلفه‌ی مماسی برابر است با

$$a_t = \alpha r \quad \text{(مقیاس رادیان)}$$

که در آن α بزرگی شتاب زاویه‌ای جسم (برحسب رادیان بر مجذور ثانیه) است. مؤلفه‌ی شعاعی $\vec{a}$ برابر است با

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad \text{(مقیاس رادیان)}$$

● هرگاه این نقطه حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام دهد، دوره‌ی تناوب حرکت مربوط به این نقطه و جسم T، برابر است با

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{(مقیاس رادیان)}$$

رابطه‌ی میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای

در پودمان ۴-۵ حرکت دایره‌ای یکنواخت مورد بحث قرار گرفت. در این حرکت ذره‌ای با تندی خطی ثابت v در مسیری دایره‌ای به دور یک محور می‌چرخد. وقتی جسمی صُلب، مانند چرخ و فلک، به دور محوری قائم می‌چرخد، هر ذره از جسم در مسیری دایره‌ای به دور آن محور دوران می‌کند. چون جسم صُلب است، تمام ذرات آن در زمانی مساوی، یک دور کامل می‌زنند؛ یعنی، همه‌ی آن‌ها تندی زاویه‌ای یکسان ω دارند.

اما هر چه ذره‌ای از محور دوران دورتر باشد، محیط دایره‌ی چرخش آن بزرگ‌تر، و در نتیجه، تندی خطی آن v، بیشتر است. این موضوع را می‌توان در چرخ و فلک (افقی) مورد توجه قرار داد. هنگامی که روی چرخ و فلک با تندی زاویه‌ای ثابت ω و بدون توجه به

فاصله از محور می‌چرخید، هرگاه به سمت لبه‌ی بیرونی چرخ و فلک حرکت کنید، متوجه خواهید شد که تندی خطی شما v، به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد.

اغلب نیاز پیدا می‌کنیم که متغیرهای خطی s، v و a مربوط به یک نقطه‌ی خاص در جسم چرخان را به متغیرهای زاویه‌ای θ، ω و α در همان جسم ربط دهیم. این دو مجموعه متغیرها از طریق r، ***فاصله‌ی عمودی*** نقطه‌ی مورد نظر تا محور دوران، به هم مربوط می‌شوند. این فاصله‌ی عمودی، فاصله‌ی میان آن نقطه و محور دوران در راستای خطی عمود بر محور است. در ضمن، این فاصله برابر است با r، شعاع دایره‌ای که نقطه‌ی مورد نظر در روی آن به دور محور می‌چرخد.

مکان

اگر در جسم صُلب خط مرجع به اندازه‌ی زاویه‌ی θ بچرخد، یک نقطه از جسم در مکان r نسبت به محور دوران، بر روی یک کمان دایره‌ای مسافت s را، که از معادله‌ی ۱۰-۱ به دست می‌آید، می‌پیماید:

$$s = \theta r \quad \text{(مقیاس رادیان)} \qquad (۱۰\text{-}۱۷)$$

این معادله، نخستین رابطه‌ی خطی - زاویه‌ای را نشان می‌دهد. ***هشدار:*** زاویه‌ی θ را باید برحسب رادیان بیان کنیم زیرا خود معادله‌ی ۱۰-۱۷ بیان کننده‌ی تعریف مقیاس زاویه‌ای برحسب رادیان است.

تندی

اگر از معادله‌ی ۱۰-۱۷ نسبت به زمان با فرض ثابت بودن r مشتق بگیریم، داریم

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} r$$

کمیت ds/dt تندی خطی (بزرگی سرعت خطی) نقطه‌ی مورد نظر و $d\theta/dt$ برابر با ω، تندی زاویه‌ای جسم چرخان است. پس، می‌توان نوشت

$$v = \omega r \quad \text{(مقیاس رادیان)} \qquad (۱۰\text{-}۱۸)$$

هشدار: تندی زاویه‌ای ω را باید در مقیاس رادیان بیان کنیم.

معادله‌ی ۱۰-۱۸ نشان می‌دهد که چون تندی زاویه‌ای ω برای تمام نقاط درون جسم صُلب یکسان است، نقطه‌های با شعاع r بزرگ‌تر تندی خطی بیشتری دارند. شکل ۱۰-۹ الف، خاطرنشان می‌کند که سرعت خطی همیشه برمسیر دایره‌ای نقطه‌ی موردنظر مماس است.

اگر تندی زاویه‌ای جسم صُلب ω، ثابت باشد، بنا به معادله‌ی ۱۰-۱۸ تندی خطی هر نقطه از جسم v، نیز ثابت است. بنابراین، هر نقطه از جسم حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. دوره‌ی تناوب حرکت T، برای هر نقطه و برای خود جسم صُلب، از معادله‌ی ۴-۳۵

به دست می‌آید:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \qquad (۱۰-۱۹)$$

این معادله نشان می‌دهد که زمان لازم برای پیمودن یک دور، از تقسیم مسافت پیموده شده‌ی $2\pi r$ در یک دور، به تندی مربوط به پیمودن آن مسافت، به دست می‌آید. با جانشانی v از معادله‌ی ۱۰-۱۸ و حذف کردن r، داریم

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{(مقیاس رادیان)} \qquad (۱۰-۲۰)$$

بنا به این معادله زمان لازم برای پیمودن یک دور، از تقسیم مسافت زاویه‌ای پیموده شده‌ی $2\pi\,\text{rad}$ در یک دور، به تندی (یا آهنگ) زاویه‌ای مربوط به پیمودن آن زاویه، به دست می‌آید.

شتاب

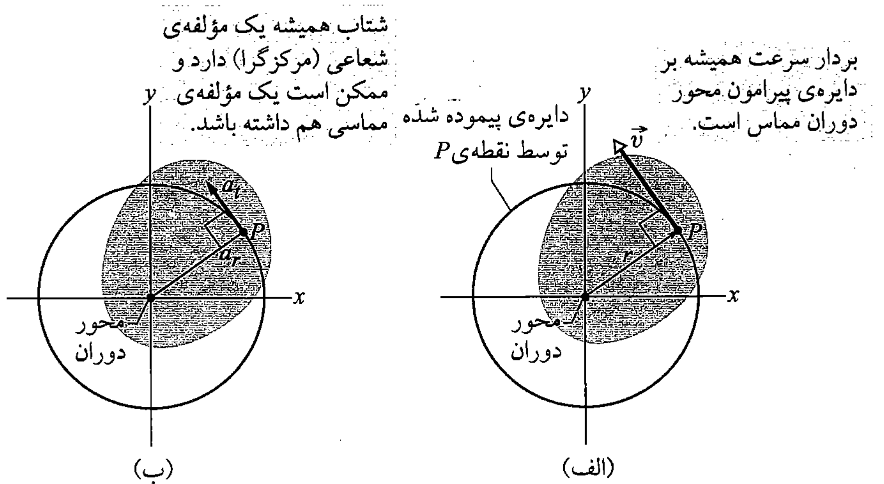
اگر از معادله‌ی ۱۰-۱۸، با فرض ثابت بودن r نسبت به زمان مشتق بگیریم، داریم

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r \qquad (۱۰-۲۱)$$

در اینجا از پیچیده کردن موضوع پرهیز می‌کنیم. در معادله‌ی ۱۰-۲۱، dv/dt فقط بخشی از شتاب خطی را مشخص می‌کند که سبب تغییر v، ***بزرگی*** سرعت خطی $\vec{v}$ می‌شود. این بخش از شتاب خطی نیز مانند $\vec{v}$ بر مسیر حرکت نقطه‌ی مورد نظر مماس است. این کمیت ***مؤلفه‌ی مماسی*** شتاب خطی آن نقطه a_t، نامیده می‌شود و می‌توان نوشت

$$a_t = \alpha r \quad \text{(مقیاس رادیان)} \qquad (۱۰-۲۲)$$

در این معادله، داریم $\alpha = d\omega/dt$. ***هشدار:*** در معادله‌ی ۱۰-۲۲ شتاب زاویه‌ای α را باید در مقیاس رادیان بیان کنیم.



شکل ۱۰-۹ نمودار جسم صُلب چرخان شکل ۱۰-۲، که مقطع آن از بالا دیده می‌شود. هر نقطه از جسم (مانند P) در روی دایره‌ای به دور محور دوران می‌چرخد. (الف) سرعت خطی هر نقطه $\vec{v}$، بر دایره‌ای که نقطه روی آن حرکت می‌کند، مماس است. (ب) شتاب خطی نقطه $\vec{a}$، دو مؤلفه (در حالت کلی) دارد: مؤلفه‌ی مماسی a_t و مؤلفه‌ی شعاعی a_r.

در ضمن، همان‌طور که معادله‌ی ۴-۳۴ نشان می‌دهد، ذره‌ی (یا نقطه‌ی) در حال حرکت بر مسیر دایره‌ای، یک ***مؤلفه‌ی شعاعی*** شتاب خطی $a_r = v^2/r$، (در راستای شعاع و به‌درون‌سو) دارد که سبب تغییر **جهت** سرعت خطی $\vec{v}$ می‌شود. با جانشانی v از معادله‌ی ۱۰-۱۸، این مؤلفه را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad \text{(مقیاس رادیان)} \qquad (۱۰-۲۳)$$

بنابراین، همان‌طور که شکل ۱۰-۹ ب، نشان می‌دهد، شتاب خطی یک نقطه از یک جسم صُلب چرخان در حالت کلی دو مؤلفه دارد. مؤلفه‌ی شعاعی و به درون سوی a_r، (که از معادله‌ی ۱۰-۲۳ به دست می‌آید) در جایی وجود دارد که سرعت زاویه‌ای جسم صفر نباشد. مؤلفه‌ی مماسی a_t، (که از معادله‌ی ۱۰-۲۲ به دست می‌آید) وقتی وجود دارد که شتاب زاویه‌ای صفر نباشد.

☑ خودآزمایی ۳

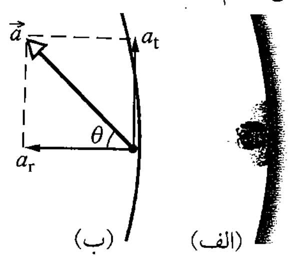
سوسکی بر لبه‌ی یک چرخ و فلک چرخان نشسته است. اگر تندی زاویه‌ای این دستگاه (***چرخ و فلک + سوسک***) ثابت باشد، آیا سوسک (الف) شتاب شعاعی و (ب) شتاب مماسی دارد؟ اگر تندی زاویه‌ای دستگاه در حال کاهش باشد، آیا سوسک (پ) شتاب شعاعی و (ت) شتاب مماسی دارد؟

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۰-۵ طراحی حلقه‌ی بسیار بزرگ، گردش سواره در پارک تفریحی بزرگ مقیاس

کار طراحی یک حلقه‌ی افقی بزرگ به شعاع $r = ۳۳/۱\text{m}$ را که به دور یک محور قائم خواهد چرخید، به ما داده‌اند (مانند چرخ مشاهده‌ی بزرگ پکن چین، که بزرگ‌ترین چرخ و فلک در دنیاست). مسافران از یک دَر واقع در دیوار خارجی این حلقه وارد می‌شوند و سپس پشت به دیوار می‌ایستند (شکل ۱۰-۱۰ الف). ما تصمیم می‌گیریم که در بازه‌ی زمانی $t = ۰$ تا $t = ۲/۳۰\text{s}$، مکان زاویه‌ای خط مرجع روی این حلقه $\theta(t)$، مطابق رابطه‌ی زیر باشد

$$\theta = ct^3 \qquad (۱۰-۲۴)$$

که در آن $c = ۶/۳۹ \times ۱۰^{-۲}\ \text{rad/s}^3$ است. پس از مدت زمان $t = ۲/۳۰\text{s}$، تندی زاویه‌ای چرخ تا آخر گردش سواره ثابت خواهد ماند. وقتی حلقه شروع به دوران می‌کند، کف حلقه در زیر پای مسافران فرو می‌افتد، اما مسافران نمی‌افتند، بلکه آن‌ها احساس می‌کنند که به دیوار کوبیده شده‌اند. می‌خواهیم در مدت زمان $t = ۲/۲۰\text{s}$، تندی زاویه‌ای ω، تندی خطی v، شتاب زاویه‌ای α، شتاب مماسی a_t، شتاب شعاعی a_r و شتاب مسافران $\vec{a}$، را معین کنیم.



شکل ۱۰-۱۰ (الف) تصویر یک مسافر، با دید از بالا، که آماده‌ی سوار شدن به یک حلقه‌ی بزرگ است. (ب) نمودار مؤلفه‌های شتاب شعاعی و مماسی شتاب (کل).

نکته‌های کلیدی

(۱) تندی زاویه‌ای از معادله‌ی ۱۰-۶ ($\omega = d\theta / dt$) به دست می‌آید. (۲) تندی خطی v (در طول مسیر دایره‌ای) بنا به معادله‌ی ۱۰-۱۸ ($v = \omega r$) با تندی زاویه‌ای (حول محور دوران) ربط دارد. (۳) شتاب زاویه‌ای α از معادله‌ی ۱۰-۸ ($\alpha = d\omega / dt$) به دست می‌آید. (۴) شتاب مماسی a_t (در طول مسیر دایره‌ای) بنا به معادله‌ی ۱۰-۲۲ ($a_t = \alpha r$) با شتاب زاویه‌ای (حول محور دوران) ربط دارد. (۵) شتاب شعاعی a_r از معادله‌ی ۱۰-۲۳ ($a_r = \omega^2 r$) به دست می‌آید. (۶) شتاب‌های مماسی و شعاعی مؤلفه‌های (عمود بر هم) شتاب (کل) $\vec{a}$ هستند.

محاسبات: محاسبات را به صورت مرحله به مرحله انجام می‌دهیم. نخست سرعت زاویه‌ای را از مشتق زمانی تابع مکان زاویه‌ای معلوم به دست می‌آوریم و سپس زمان معلوم $t = 2.20\,s$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(ct^3) = 3ct^2 \tag{10-25}$$

$$\omega = 3(6.39\times10^{-2}\,\mathrm{rad/s^3})(2.20\,\mathrm{s})^2 \Rightarrow$$

(پاسخ) $$\omega = 0.928\,\mathrm{rad/s}$$

در این صورت، تندی خطی از معادله‌ی ۱۰-۱۸ برابر است با

$$v = \omega r = 3ct^2 r \tag{10-26}$$

$$v = 3(6.39\times10^{-2}\,\mathrm{rad/s^3})(2.20\,\mathrm{s})^2(33.1\,\mathrm{m}) \Rightarrow$$

(پاسخ) $$v = 30.7\,\mathrm{m/s}$$

این تندی گرچه زیاد ($111\,\mathrm{km/h}$ یا $68.7\,\mathrm{mi/h}$) است، چنین تندی‌هایی در پارک‌های تفریحی عادی‌اند و خطرناک نیستند زیرا (همان گونه که در فصل ۲ یادآوری کردیم) بدن ما به شتاب واکنش نشان می‌دهد نه به سرعت‌ها. (بدن ما یک شتاب‌سنج است، نه تندی‌سنج). معادله‌ی ۱۰-۲۶ نشان می‌دهد که تندی خطی متناسب با مجذور زمان افزایش می‌یابد (اما این افزایش در $t = 2.30\,s$ پایان می‌پذیرد).

اکنون، شتاب زاویه‌ای را با گرفتن مشتق زمانی از معادله‌ی ۱۰-۲۵ به دست می‌آوریم

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(3ct^2) = 6ct$$

$$\alpha = 6(6.39\times10^{-2}\,\mathrm{rad/s^3})(2.20\,\mathrm{s})^2 \Rightarrow$$

(پاسخ) $$\alpha = 0.843\,\mathrm{rad/s^2}$$

بنابراین، شتاب مماسی از معادله‌ی ۱۰-۲۲ به دست می‌آید:

$$a_t = \alpha r = 6ctr \tag{10-27}$$

$$a_t = 6(6.39\times10^{-2}\,\mathrm{rad/s^3})(2.20\,\mathrm{s})^2(33.1\,\mathrm{m}) \Rightarrow$$

(پاسخ) $$a_t = 27.91\,\mathrm{m/s^2} \approx 27.9\,\mathrm{m/s^2}$$

یا $2.8\,g$ (که پاسخی معقول و اندکی هیجان برانگیز است). معادله‌ی ۱۰-۲۷ نشان می‌دهد که شتاب مماسی متناسب با زمان افزایش می‌یابد (اما این افزایش در $t = 2.30\,s$ پایان می‌پذیرد). با توجه به معادله‌ی ۱۰-۲۳، شتاب شعاعی را به صورت زیر می‌نویسیم

$$a_r = \omega^2 r$$

با جانشانی از معادله‌ی ۱۰-۲۵، داریم

$$a_r = (3ct^2)^2 r = 9c^2t^4 r$$

$$a_r = 9(6.39\times10^{-2}\,\mathrm{rad/s^3})^2(2.20\,\mathrm{s})^4(33.1\,\mathrm{m}) \Rightarrow$$

(پاسخ) $$a_r = 28.49\,\mathrm{m/s^2} \approx 28.5\,\mathrm{m/s^2}$$

یا $2.9\,g$ (که باز هم پاسخی معقول و اندکی هیجان برانگیز است).

شتاب‌های شعاعی و مماسی بر هم عمودند و مؤلفه‌های شتاب مسافر $\vec{a}$، را تشکیل می‌دهند (شکل ۱۰-۱۰ ب). بزرگی $\vec{a}$ برابر است با

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} \tag{10-29}$$

$$a = \sqrt{(28.49\,\mathrm{m/s^2})^2 + (27.91\,\mathrm{m/s^2})^2} \Rightarrow$$

(پاسخ) $$a = 39.9\,\mathrm{m/s^2}$$

یا $4.1\,g$ (که پاسخی به واقع هیجان برانگیز است). تمام مقادیر به دست آمده پذیرفتنی هستند.

برای پیدا کردن سمت‌گیری $\vec{a}$، می‌توان θ، زاویه‌ی نشان داده شده در شکل ۱۰-۱۰ ب را حساب کرد:

$$\tan\theta = \frac{a_t}{a_r}$$

اما به جای جانشانی نتیجه‌های عددی، نتیجه‌های جبری معادله‌های ۱۰-۲۷ و ۱۰-۲۸ را به کار می‌بریم:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{6ctr}{9c^2t^4r}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3ct^3}\right) \tag{10-30}$$

مزیت بزرگ به دست آوردن زاویه به صورت جبری این است که می‌بینیم زاویه، (۱) به شعاع حلقه بستگی ندارد و (۲) وقتی t از صفر تا ۲/۲۰s افزایش می‌یابد، زاویه کاهش پیدا می‌کند. یعنی، بردار شتاب $\vec{a}$ به طور شعاعی درون‌سو است زیرا شتاب شعاعی (که با $t^۴$ متناسب است) بر شتاب مماسی (که فقط با t متناسب است) به سرعت غالب می‌شود. در زمان داده شده‌ی $t = ۲/۲۰\,s$، داریم

$$\theta = \tan^{-1} \frac{۲}{۳(۶/۳۹\times۱۰^{-۲}\ rad/s^۳)(۲/۲۰\,s)^۳} \Rightarrow$$

$$\theta = ۴۴/۴^\circ \qquad \text{(پاسخ)}$$

۱۰–۴ انرژی جنبشی دورانی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۰–۱۷ لختی دورانی یک ذره را نسبت به یک نقطه پیدا کنید.

۱۰–۱۸ لختی دورانی کل چند ذره‌ی در حال حرکت نسبت به یک محور ثابت را پیدا کنید.

۱۰–۱۹ انرژی جنبشی دورانی یک جسم را برحسب لختی دورانی و تندی زاویه‌ای آن جسم حساب کنید.

نکته‌ی کلیدی

● انرژی جنبشی یک جسم صلب در حال دوران به دور یک محور ثابت K، برابر است با

$$K = \frac{۱}{۲} I\omega^۲ \quad \text{(مقیاس رادیان)}$$

که در آن I لختی دورانی جسم است و برای یک دستگاه ذرات مجزا، چنین تعریف می‌شود

$$I = \sum m_i r_i^۲$$

انرژی جنبشی دورانی

تیغه‌ی گرد یک اره برقی که به سرعت می‌چرخد، دارای انرژی جنبشی است. این انرژی را چگونه می‌توان حساب کرد؟ برای این کار از فرمول آشنای $K = \frac{۱}{۲}mv^۲$ برای کل تیغه نمی‌توان استفاده کرد، زیرا این فرمول فقط انرژی جنبشی مرکزجرم اره را به دست می‌دهد، که صفر است.

تیغه‌ی گرد اره برقی (و هر جسم صُلب چرخان) را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از ذرات با تندی‌های متفاوت در نظر گرفت. در این صورت، باید انرژی‌های جنبشی همه‌ی ذرات را با هم جمع کرد تا انرژی جنبشی کل جسم به دست می‌آید. بدین ترتیب، انرژی جنبشی یک جسم چرخان از معادله‌ی زیر به دست می‌آید

$$K = \frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲ + \frac{۱}{۲}m_۲v_۲^۲ + \frac{۱}{۲}m_۳v_۳^۲ + \cdots$$

$$K = \sum \frac{۱}{۲} m_i v_i^۲ \qquad (۱۰–۳۱)$$

که در آن m_i جرم ذره‌ی i اُم و v_i تندی آن جرم است. این مجموع روی تمام ذرات جسم حساب می‌شود.

مشکل موجود در معادله‌ی ۱۰-۳۱ این است که v_i برای تمام ذرات یکسان نیست. این مسئله را با جانشانی مقدار v از معادله‌ی ۱۰-۱۸ $(v = \omega r)$ می‌توان حل کرد. در نتیجه، داریم

$$K = \sum \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right)\omega^2 \qquad (۱۰-۳۲)$$

که در آن ω برای تمام ذره‌ها یکی است.

کمیت درون پرانتز در طرف راست معادله‌ی ۱۰-۳۲ چگونگی توزیع جرم جسم چرخان نسبت به محور دوران را مشخص می‌کند. این کمیت **لَختی دورانی** (یا **گشتاور لَختی**) جسم، I، نسبت به محور دوران نامیده می‌شود، که برای یک جسم صُلب معین و یک محور دوران خاص مقداری ثابت است. (اگر بخواهیم مقدار I با معنی باشد، همیشه باید محور دوران را مشخص کنیم).

اکنون، می‌توان نوشت

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad \text{(لختی دورانی)} \qquad (۱۰-۳۳)$$

با جانشانی I در معادله‌ی ۱۰-۳۲، داریم

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{(مقیاس رادیان)} \qquad (۱۰-۳۴)$$

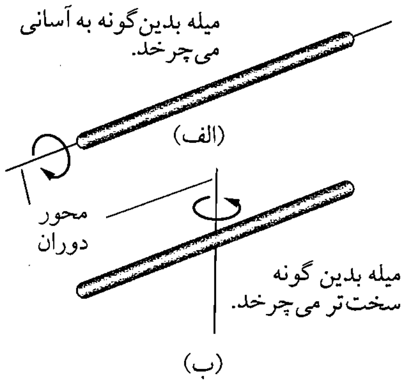
این، همان معادله‌ای است که در جست و جوی آن بودیم. چون برای به دست آوردن معادله‌ی ۱۰-۳۴ از رابطه‌ی $v = \omega r$ استفاده کرده‌ایم، ω را باید با مقیاس رادیان بیان کنیم. یکای I در دستگاه بین‌المللی یکاها (SI)، **کیلوگرم ـ متر مربع** (با نماد $kg \cdot m^2$) است.

طرح موضوع. اگر چند ذره و یک محور دوران مشخص داشته باشیم، می‌توانیم برای هر ذره mr^2 را به دست آوریم و مانند معادله‌ی ۱۰-۳۳ آن‌ها را با هم جمع کنیم تا لختی دورانی کل I، به دست آید. اگر انرژی جنبشی دورانی کل را بخواهیم، می‌توانیم I را در معادله‌ی ۱۰-۳۴ قرار دهیم. این طرح مربوط به عده‌ی اندکی ذره است، اما فرض کنید عده‌ی ذرات مانند عده‌ی آن‌ها در یک میله، بسیار زیاد باشد. در پودمان بعد خواهیم دید که با ***اجسام پیوسته*** چگونه کار کنیم و تنها در چند دقیقه محاسبه را انجام دهیم.

معادله‌ی ۱۰-۳۴، که انرژی جنبشی یک جسم صُلب در حال حرکت دورانی خالص را به‌دست می‌دهد، هم‌ارز زاویه‌ای فرمول $K = \frac{1}{2} M v_{com}^2$ مربوط به انرژی جنبشی یک جسم صُلب در حال حرکت انتقالی خالص است. در هر دو فرمول ضریب $\frac{1}{2}$، و هم‌چنین، در یک معادله جرم M و در معادله‌ی دیگر I (شامل جرم و چگونگی توزیع آن) وجود دارد. سرانجام، هر دو معادله شامل مجذور سرعت ـ انتقالی یا دورانی ـ بسته به مورد، هستند. انرژی‌های جنبشی انتقالی یا دورانی، دو نوع انرژی متفاوت نیستند. هر دو انرژی جنبشی‌اند و

متناسب با نوع حرکت مورد نظر بیان می‌شوند.

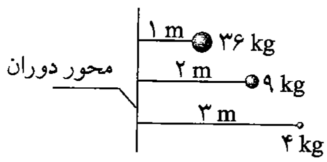
پیش‌تر اشاره شد که لختی دورانی یک جسم چرخان نه تنها به جرم جسم، بلکه به چگونگی توزیع جرم نسبت به محور دوران نیز بستگی دارد. در این مورد مثال ساده‌ای را بیان می‌کنیم. میله‌ای به نسبت سنگین و دراز (مثلاً، میله‌ی آهنی، تیر چوبی، یا چیزی مشابه) را ابتدا به دور محور مرکزی (محور طولی) آن (شکل ۱۰-۱۱ الف) و سپس به دور محور عمود بر میله و گذرنده از مرکز آن (شکل ۱۰-۱۱ ب) می‌چرخانیم. در هر دو حالت جرم جسم یکی است، اما جسم در حالت اول نسبت به حالت دوم راحت‌تر می‌چرخد. دلیلش این است که در حالت اول جرم جسم نسبت به محور دوران در فاصله‌ای کمتر توزیع شده است. در نتیجه، لختی دورانی میله در شکل ۱۰-۱۱ الف نسبت به شکل ۱۰-۱۱ ب، خیلی کوچک‌تر است. به‌طور کلی، لختی دورانی کمتر، نتیجه‌اش دوران آسان‌تر است.



شکل ۱۰-۱۱ چرخاندن یک میله‌ی دراز به دور (الف) محور مرکزی (محور طولی) آن، آسان‌تر از چرخاندن میله به دور (ب) محور گذرنده از مرکز و عمود بر محور طولی است، زیرا جرم میله در شکل (الف) نسبت به شکل (ب) به محور دوران نزدیک‌تر توزیع شده است.

☑ خودآزمایی ۴

شکل زیر سه کره‌ی کوچک را نشان می‌دهد که به دور یک محور قائم می‌چرخند. در شکل فاصله‌ی میان محور و مرکز هر کره مشخص شده است. سه کره را با توجه به لَختی دورانی آن‌ها نسبت به این محور از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



۱۰-۵ محاسبه‌ی لختی دورانی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۰-۲۰ لختی دورانی یک جسم را، اگر در جدول ۱۰-۲ داده شده باشد، معین کنید.

۱۰-۲۱ لختی دورانی یک جسم را با انتگرال‌گیری روی عنصرهای جرمی جسم حساب کنید.

۱۰-۲۲ قضیه‌ی محورهای موازی را برای محور دورانی که با محور موازی گذرنده از مرکز جرم جسم فاصله دارد، به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

- I لختی دورانی جسم است که برای یک دستگاه ذرات مجزا به صورت:

$$I = \sum m_i r_i^2$$

و برای یک جسم با جرم توزیع شده‌ی پیوسته، به صورت

$$I = \int r^2 dm$$

تعریف می‌شود. در این رابطه‌ها r و r_i معرف فاصله‌ی عمودی محور دوران تا هر عنصر جرم در جسم است و انتگرال‌گیری روی کل جسم به گونه‌ای گرفته می‌شود که شامل هر عنصر جرم باشد.

● قضیه‌ی محورهای موازی، لختی دورانی I یک جسم نسبت به هر محور را به لختی دورانی همان جسم نسبت به یک محور موازی گذرنده از مرکز جرم ربط می‌دهد:

$$I = I_{\text{com}} + Mh^{2}$$

در اینجا h فاصله‌ی عمودی میان دو محور و I_{com} لختی دورانی جسم نسبت به محور گذرنده از مرکز جرم است. ما می‌توانیم h را فاصله‌ای در نظر بگیریم که محور دوران واقعی به اندازه‌ی آن فاصله از محور دوران گذرنده از مرکز جرم جابه‌جا شده است.

محاسبه‌ی لَختی دورانی

اگر عده‌ی ذرات تشکیل دهنده‌ی جسم صُلب کم باشد، لختی دورانی جسم نسبت به یک محور معین را می‌توان با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۰-۳۳ $(I = \sum m_i r_i^{2})$ به دست آورد. بدین معنی که، ابتدا حاصل‌ضرب mr^{2} مربوط به هر ذره را معین و سپس آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم (یادآوری می‌شود که r فاصله‌ی ذره از محور دوران است).

اگر جسم صُلبی شامل عده‌ی زیادی ذره‌های متصل به هم (یعنی، **پیوسته**، مانند یک قرص) باشد، برای استفاده کردن از معادله‌ی ۱۰-۳۳ به یک رایانه نیاز داریم. در این صورت، به جای انجام دادن عمل جمع در معادله‌ی ۱۰-۳۳، از انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم و لختی دورانی را چنین تعریف می‌کنیم

$$I = \int r^{2}\,dm \quad \text{(لختی دورانی، جسم پیوسته)} \qquad (۱۰\text{–}۳۵)$$

جدول ۱۰-۲ رابطه‌های حاصل از انتگرال‌گیری را برای ۹ جسم با شکل‌های متداول و محورهای دوران مربوط نشان می‌دهد.

قضیه‌ی محورهای موازی

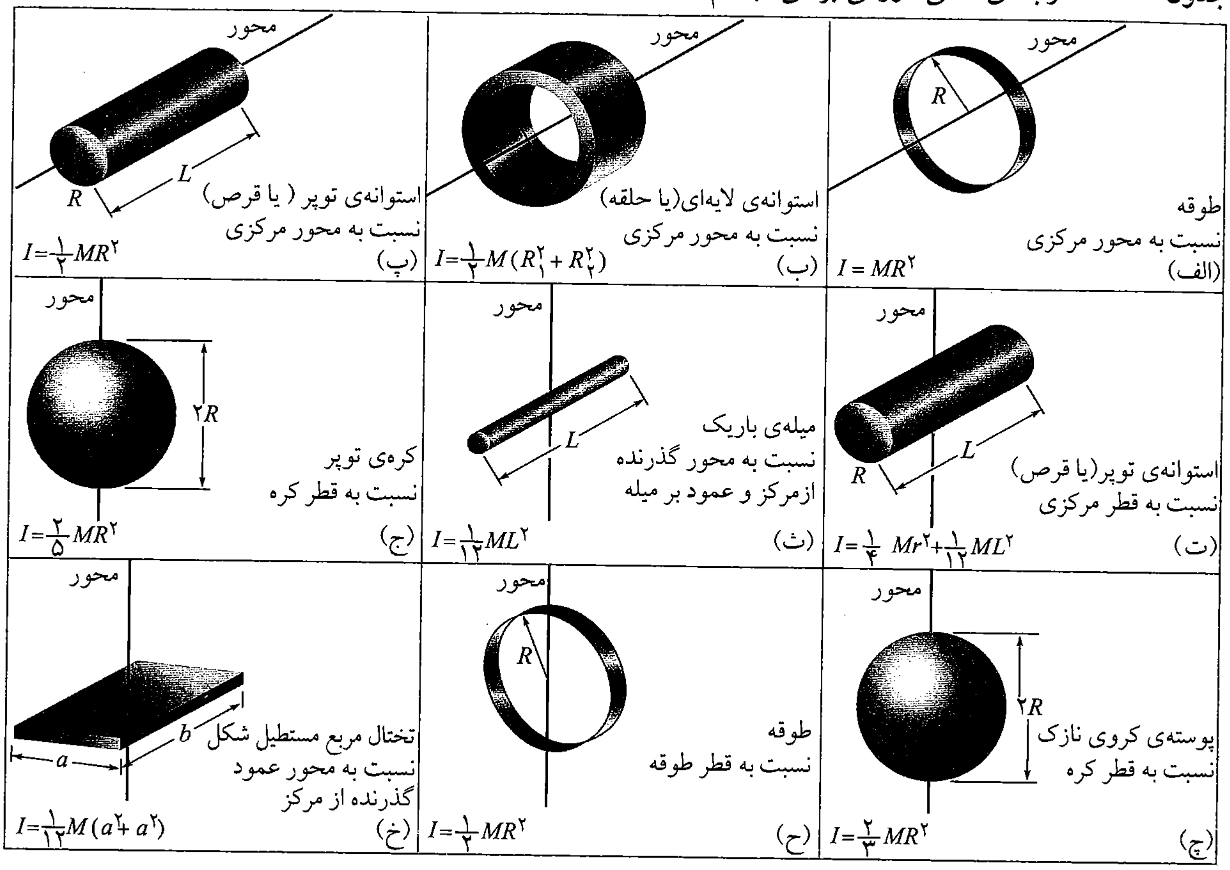
فرض کنید می‌خواهیم، I، لختی دورانی جسمی به جرم M را نسبت به محور معینی پیدا کنیم. در اصل، همیشه می‌توان I را با انتگرال‌گیری از معادله‌ی ۱۰-۳۵ به دست آورد. اما اگر I_{com}، لختی دورانی جسم نسبت به یک ***محور موازی*** گذرنده از مرکز جرم جسم معلوم باشد، حل کردن مسئله ساده‌تر می‌شود. فرض کنید h فاصله‌ی میان محور مورد نظر و محور گذرنده از مرکز جرم باشد (یادآوری می‌شود که این دو محور باید موازی باشند). در این صورت، لختی دورانی I نسبت به محور مورد نظر برابر است با

$$I = I_{\text{com}} + Mh^{2} \quad \text{(قضیه‌ی محورهای موازی)} \qquad (۱۰\text{–}۳۶)$$

فاصله‌ی h را به صورت فاصله‌ای تصور کنید که ما محور دوران را نسبت به مرکز جرم جابه‌جا کرده‌ایم.

این معادله بیان کننده‌ی **قضیه‌ی محورهای موازی** است و به شرح زیر اثبات می‌شود.

جدول ۱۰-۲ رابطه‌ی لختی دورانی برخی اجسام



(الف) طوقه نسبت به محور مرکزی $I = MR^{2}$	(ب) استوانه‌ی لایه‌ای(یا حلقه) نسبت به محور مرکزی $I=\frac{1}{2}M(R_1^{2}+R_2^{2})$	(پ) استوانه‌ی توپر (یا قرص) نسبت به محور مرکزی $I=\frac{1}{2}MR^{2}$
(ت) استوانه‌ی توپر(یا قرص) نسبت به قطر مرکزی $I=\frac{1}{4}Mr^{2}+\frac{1}{12}ML^{2}$	(ث) میله‌ی باریک نسبت به محور گذرنده ازمرکز و عمود بر میله $I=\frac{1}{12}ML^{2}$	(ج) کره‌ی توپر نسبت به قطر کره $I=\frac{2}{5}MR^{2}$
(چ) پوسته‌ی کروی نازک نسبت به قطر کره $I=\frac{2}{3}MR^{2}$	(ح) طوقه نسبت به قطر طوقه $I=\frac{1}{2}MR^{2}$	(خ) تختال مربع مستطیل شکل نسبت به محور عمود گذرنده از مرکز $I=\frac{1}{12}M(a^{2}+a^{2})$

اثبات قضیه‌ی محورهای موازی

فرض می‌کنیم نقطه‌ی O مرکز جرم جسمی به شکل دلخواه است که سطح مقطع آن در شکل ۱۰-۱۲ نشان داده شده است. مبداء مختصات را در نقطه‌ی O قرار می‌دهیم. محوری را که از نقطه‌ی O به طور عمود بر صفحه‌ی شکل، و محور دیگری را که از نقطه‌ی P به طور موازی با محور اول می‌گذرد، در نظر می‌گیریم. هم‌چنین، فرض می‌کنیم مختصات x و y نقطه‌ی P، به ترتیب، a و b باشند.

اگر dm عنصر جرمی با مختصات x و y باشد، لختی دورانی جسم نسبت به محور گذرنده از نقطه‌ی P با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۰-۳۵، چنین به دست می‌آید

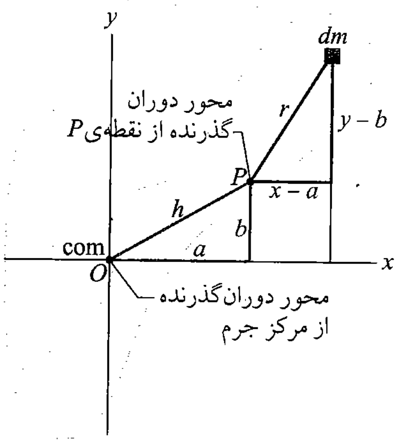
$$I = \int r^{2} dm = \int [(x-a)^{2} + (y-b)^{2}]\, dm$$

این معادله را به صورت زیر می‌نویسیم

$$I = \int (x^{2}+y^{2})dm - 2a\int x\,dm - 2b\int y\,dm + \int (a^{2}+b^{2})dm \qquad (۱۰-۳۷)$$

با توجه به تعریف مرکز جرم (معادله‌ی ۹-۹)، دو انتگرال میانی معادله‌ی ۱۰-۳۷، که مختصات مرکز جرم (ضرب در یک مقدار ثابت) را به دست می‌دهند، برابر با صفرند. چون $x^{2}+y^{2}$ برابر با R^{2} و R فاصله‌ی نقطه‌ی O تا dm است، انتگرال اول برابر با I_{com} است، که نشان دهنده‌ی لختی دورانی جسم نسبت به محور گذرنده از مرکز جرم است. بررسی شکل

باید لختی دورانی نسبت به محور گذرنده از P را به لختی دورانی نسبت به محور گذرنده از com مربوط کنیم.

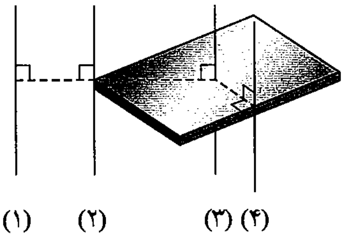


شکل ۱۰-۱۲ نمودار سطح مقطع یک جسم صُلب، که مرکز جرم آن درنقطه‌ی O قرار دارد. قضیه‌ی محورهای موازی (معادله‌ی ۱۰-۳۶) لختی دورانی جسم نسبت به یک‌محور گذرنده از نقطه‌ی O را به لختی دورانی جسم نسبت به یک محور موازی گذرنده از نقطه‌ای مانند P، به فاصله‌ی h از مرکز جرم جسم، ربط می‌دهد.

۱۰-۱۲ نشان می‌دهد که جمله‌ی آخر در معادله‌ی ۱۰-۳۷، برابر است با Mh^2، که M جرم کل جسم است. بنابراین، معادله‌ی ۱۰-۳۷ به صورت معادله‌ی ۱۰-۳۶، که می‌خواستیم آن را اثبات کنیم، ساده می‌شود.

خودآزمایی ۵

شکل زیر شیئی مانند کتاب (که یک وجه آن درازتر از وجه دیگر است) و چهار محور دوران را که بر سطح شیء عمودند، نشان می‌دهد. این محورها را با توجه به لختی دورانی شیء نسبت به آن‌ها از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۰-۶ لختی دورانی یک دستگاه دو ذره‌ای

شکل ۱۰-۱۳ الف یک جسم صُلب شامل دو ذره، هر یک به جرم m، را نشان می‌دهد که با میله‌ای به طول L و جرم ناچیز به هم وصل شده‌اند.

(الف) لختی دورانی جسم I_{com}، نسبت به محور گذرنده از مرکز جرم و عمود بر میله، مطابق شکل، چیست؟

نکته‌ی کلیدی

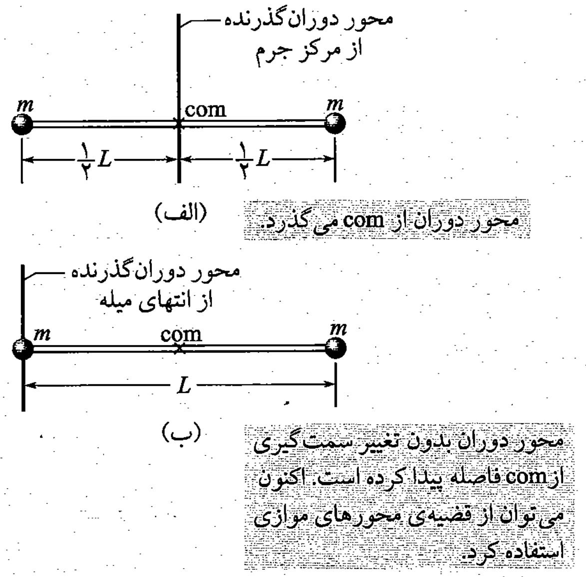
چون جسم فقط شامل دو ذره‌ی جرم‌دار است، لختی دورانی I_{com} را می‌توان با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۰-۳۳ و بدون انتگرال‌گیری به دست آورد. یعنی، لختی دورانی هر ذره را پیدا و سپس ـ نتیجه‌ها را با هم جمع کرد.

محاسبات: برای دو ذره که فاصله‌ی هر کدام از محور دوران $\frac{1}{2}L$ است، داریم

$$I=\sum m_i r_i^2=(m)(\frac{1}{2}L)^2+(m)(\frac{1}{2}L)^2 \Rightarrow$$

(پاسخ) $$I=\frac{1}{2}mL^2$$

(ب) لختی دورانی جسم I، نسبت به محور گذرنده از انتهای چپ میله و موازی با محور اول (شکل ۱۰-۱۳ ب) چیست؟



شکل ۱۰-۱۳ نمودار یک جسم صُلب شامل دو ذره، هر یک به جرم m، که با میله‌ای به جرم ناچیز به هم وصل شده‌اند.

نکته‌های کلیدی

اگر برای تعیین I از دو روش زیر استفاده کنیم، حل کردن مسئله آسان‌تر می‌شود. روش اول مانند قسمت (الف) مسئله است. روش دیگر، که توانمندتر است، استفاده کردن از قضیه‌ی

محورهای موازی است.

روش اول: مقدار I را مانند قسمت (الف) حساب می‌کنیم، با این تفاوت که فاصله‌ی r_i برای جرم سمت چپ صفر و برای جرم سمت راست L است. اکنون، با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۰-۳۳، داریم

$$I = m(۰)^۲ + mL^۲ \Rightarrow$$

$$I = mL^۲$$ (پاسخ)

روش دوم: چون I_{com} نسبت به محور گذرنده از مرکز جرم معلوم و محور مورد نظر با «محور مرکز جرم» موازی است، می‌توان از قضیه‌ی محورهای موازی (معادله‌ی ۱۰-۳۶) استفاده کرد. در نتیجه، داریم

$$I = I_{com} + Mh^۲ = \frac{۱}{۲}mL^۲ + (۲m)(\frac{۱}{۲}L)^۲ \Rightarrow$$

$$I = mL^۲$$ (پاسخ)

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۰-۷ لختی دورانی یک میله‌ی یکنواخت با انتگرال گیری

شکل ۱۰-۱۴ یک میله‌ی یکنواخت باریک به جرم m و طول L را بر روی محور x نشان می‌دهد که در آن مبداء مختصات در وسط میله قرار دارد.

(الف) لختی دورانی این میله نسبت به محور عمودی گذرنده از مرکز جرم چیست؟

نکته‌های کلیدی

(۱) این میله دارای عده‌ی بسیار زیادی ذرات واقع در فاصله‌های متفاوت از محور دوران است. ما به طور مسلم نمی‌خواهیم مجموع لختی‌های دورانی فردی ذرات را به دست آوریم. بنابراین، ابتدا برای لختی دورانی یک عنصر جرم dm واقع شده در فاصله‌ی r از محور دوران رابطه‌ی کلی، یعنی $r^۲dm$، را می‌نویسیم. (۲) سپس، با انتگرال‌گیری از این رابطه تمام لختی‌های دورانی را با هم جمع می‌کنیم (به جای جمع کردن یک به یک آن‌ها). با توجه به معادله‌ی ۱۰-۳۵، چنین می‌نویسیم

$$I = \int r^۲ dm \qquad (۱۰-۳۸)$$

(۳) چون میله یکنواخت است و محور دوران در مرکز جرم قرار دارد، باید لختی دورانی I_{com} را نسبت به مرکز جرم حساب کرد.

محاسبات: اکنون، می‌خواهیم انتگرال را نسبت به مختصه‌ی x (و نه نسبت به جرم m که در انتگرال آمده) بگیریم، پس، باید رابطه‌ی عنصر جرم میله dm، را با طول dx در راستای میله پیدا کنیم. (چنین عنصری در شکل ۱۰-۱۴ نشان داده شده است).

چون میله یکنواخت است، نسبت جرم به طول برای تمام عنصرها و برای کل میله یکسان است. پس می‌توان نوشت

$$\frac{\text{جرم عنصر}\ dm}{\text{طول عنصر}\ dx} = \frac{\text{جرم میله}\ M}{\text{طول میله}\ L}$$

یا

$$dm = \frac{M}{L}dx$$

اکنون، می‌توانیم این نتیجه‌ی مربوط به dm و x مربوط به r را در معادله‌ی ۱۰-۳۸ قرار دهیم. سپس، انتگرال را از یک سر تا سر دیگر میله (از $x = -L/۲$ تا $x = L/۲$) می‌گیریم تا تمام عنصرها را در بر بگیرد. در نتیجه، خواهیم داشت

$$I = \int_{x=-L/۲}^{x=+L/۲} x^۲(\frac{M}{L})dx$$

$$I = \frac{M}{۳L}\left[x^۳\right]_{-L/۲}^{+L/۲} = \frac{M}{۳L}\left[\left(\frac{L}{۲}\right)^۳ - \left(-\frac{L}{۲}\right)^۳\right] \Rightarrow$$

$$I = \frac{۱}{۱۲}ML^۲$$ (پاسخ)

(ب) لختی دورانی میله، I، نسبت به یک محور جدید، که عمود بر میله و گذرنده از انتهای چپ میله است، چیست؟

نکته‌های کلیدی

برای پیدا کردن I مبداء محور x را به انتهای چپ میله منتقل می‌کنیم و سپس از $x = ۰$ تا $x = L$ انتگرال می‌گیریم. اما در اینجا از روشی توانمندتر (و آسان‌تر) با به کار بردن قضیه‌ی محورهای موازی (معادله‌ی ۱۰-۳۶)، یعنی انتقال محور دوران بدون تغییر سمت‌گیری آن، استفاده می‌کنیم.

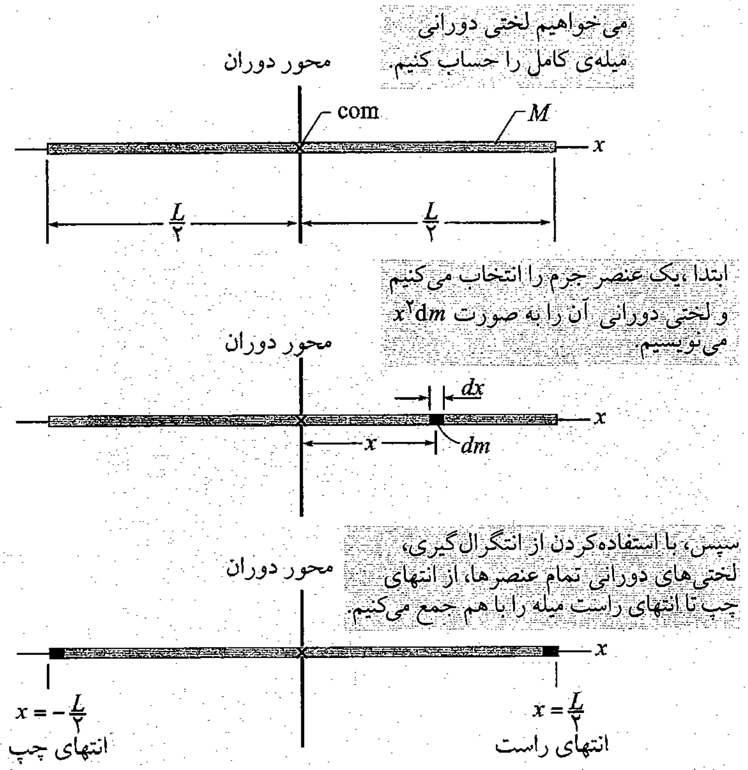
محاسبات: اگر محور را در انتهای میله به صورت موازی با محور

گذرنده از مرکز جرم میله قرار دهیم، می‌توانیم از قضیه‌ی محورهای موازی (معادله‌ی ۱۰-۳۶) استفاده کنیم. با توجه به قسمت (الف) می‌دانیم که $I_{com} = \frac{1}{12}ML^2$. شکل ۱۰-۱۴، نشان می‌دهد که h، فاصله‌ی میان محور دوران جدید و مرکز جرم، برابر با $\frac{1}{2}L$ است. بنابراین، با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۰-۳۶، داریم

$$I = I_{com} + Mh^2 = \frac{1}{12}ML^2 + (M)(\frac{1}{2}L)^2 \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{3}ML^2 \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

در واقع، این نتیجه برای هرمحور گذرنده از انتهای چپ یا راست و عمود بر میله، صدق می‌کند.



شکل ۱۰-۱۴ نمودار میله‌ی یکنواختی به طول L و جرم M. در شکل عنصر جرم dm و عنصر طول dx نشان داده شده است.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۰-۸ انرژی جنبشی دورانی، انفجار ناشی از آزمون چرخش

اجزاء یک‌ماشین بزرگ، که باید مدت‌ها با تندی‌های بالا بچرخند، نخست به منظور آگاهی از امکان آسیب‌دیدگی در یک ***دستگاه آزمون چرخش***، آزمایش می‌شوند. در این دستگاه وسیله‌ی مورد آزمایش (تا تندی‌های بالا) به چرخش در می‌آید. این کار درون محفظه‌ای استوانه‌ای از آجرهای سربی با یک لایه‌ی درونی مهارکننده صورت می‌گیرد. همه‌ی این اجزاء درون پوسته‌ای فولادی قرار می‌گیرند که با درپوشی محکم مسدود شده است. اگر دوران موجب متلاشی شدن وسیله‌ی مورد آزمایش شود، آجرهای سربی نرم قطعه‌ها را متوقف می‌کنند تا بتوان علت خرابی را تحلیل کرد.

در سال ۱۹۸۵/۱۳۶۴ شرکت وسایل آزمون[1] نمونه‌ای از یک چرخانه (یا یک قرص) فولادی صُلب به جرم $M = 272\text{kg}$ و شعاع $R = 38{,}0\text{cm}$ را مورد آزمون چرخش قرار داد. وقتی تندی

1. Test Devices, Inc. (www.testdevices.com)

زاویه‌ای نمونه به $\omega = ۱۴۰۰۰ \text{rev/min}$ می‌رسد، آزمایش‌کنندگان ناگهان از دستگاه آزمون، که در طبقه‌ی پایین و در اتاقی دور از آن‌ها قرار داشت، صدای مهیبی می‌شنوند. آنان پس از بازرسی متوجه می‌شوند که آجرهای سربی به راهرو منتهی به اتاق آزمون پرتاب شده‌اند، دَر اتاق به پارکینگ مجاور پرتاب شده است، یک آجر سربی از محوطه‌ی آزمون پرتاب شده و از دیوار آشپزخانه‌ی همسایه عبورکرده‌است، تیرهای سقف اتاق آزمون آسیب دیده‌اند، کف بتونی زیر اتاقک چرخش به اندازه‌ی $۰/۵ \text{cm}$ رو به پایین نشست کرده است، و درپوش ۹۰۰ کیلوگرمی دستگاه به طرف سقف پرتاب شده و سپس برگشته و به وسیله‌ی مورد آزمایش برخورد کرده است (شکل ۱۰-۱۵). خوشبختانه قطعه‌های حاصل از انفجار به اتاق مهندسان آزمایش کننده وارد نشده بودند.

در انفجار این چرخانه چقدر انرژی آزاد شده است؟

نکته‌ی کلیدی

انرژی آزاد شده برابر با انرژی جنبشی دورانی چرخانه K، در لحظه‌ی رسیدن به تندی زاویه‌ای ۱۴۰۰۰rev/min است.

محاسبات: مقدار K را با استفاده از معادله‌ی ۱۰-۳۴ $(K=\frac{۱}{۲}I\omega^۲)$ می‌توان پیدا کرد، اما نخست باید رابطه‌ی مربوط به لختی دورانی I را به دست آوریم. چون چرخانه به صورت قرصی است که مانند یک چرخ و فلک می‌چرخد، I از رابطه‌ی داده شده در جدول ۱۰-۲ پ $(I=\frac{۱}{۲}MR^۲)$ به دست می‌آید. بنابراین، داریم

$$I=\frac{۱}{۲}MR^۲=\frac{۱}{۲}(۲۷۲\text{kg})(۰/۳۸\text{m})^۲=۱۹/۶۴\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲$$

تندی زاویه‌ای چرخانه برابر است با

$$\omega=(۱۴۰۰۰\,\text{rev/min})(۲\pi\,\text{rad/rev})(\frac{۱\text{min}}{۶۰\text{s}})$$

$$\omega=۱/۴۶۶\times۱۰^۳\,\text{rad/s}$$

اکنون، با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۰-۳۴ می‌توان نوشت

$$K=\frac{۱}{۲}I\omega^۲=\frac{۱}{۲}(۱۹/۶۴\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲)(۱/۴۶۶\times۱۰^۳\,\text{rad/s})^۲ \Rightarrow$$

$$K=۲/۱\times۱۰^۷\,\text{J}$$ **(پاسخ)**

شکل ۱۰-۱۵ بخشی از خرابی‌های ناشی از انفجار یک‌قرص فولادی با چرخش سریع.

۱۰-۶ گشتاور نیرو

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۰-۲۳ مشخص کنید که گشتاور نیروی وارد شده به یک جسم، شامل یک نیرو و یک بردار مکان است که از محور دوران تا نقطه‌ی اثر نیرو ادامه دارد.

۱۰-۲۴ گشتاور نیرو را با استفاده کردن از (الف) زاویه‌ی میان بردار مکان و بردار نیرو، (ب) خط اثر نیرو و بازوی گشتاور نیرو و (پ) مؤلفه‌ی عمودی نیرو بر بردار مکان، حساب کنید.

۱۰-۲۵ مشخص کنید که برای محاسبه‌ی گشتاور نیرو محور دوران همیشه باید معین شود.

۱۰-۲۶ مشخص کنید که گشتاور نیرو بسته به جهتی که می‌خواهد جسم را به دور یک محور دوران معین بچرخاند، دارای علامت مثبت یا منفی است: «ساعت‌ها موجوداتی منفی‌اند».

۱۰-۲۷ وقتی به جسمی بیش از یک گشتاور نیرو نسبت به یک محور دوران وارد می‌شود، گشتاور نیروی برایند را حساب کنید.

نکته‌های کلیدی

● گشتاور نیرو به خاطر وجود نیروی $\vec{F}$، روی یک جسم نسبت به محور دوران اثر چرخانندگی یا پیچانندگی دارد. اگر $\vec{F}$ به نقطه‌ای با بردار مکان معلوم $\vec{r}$ نسبت به محور اثر کند، در آن صورت بزرگی گشتاور نیرو برابر است با

$$\tau = rF_t = r_\perp F = rF\sin\phi$$

که در آن F_t مؤلفه‌ی $\vec{F}$ عمود بر $\vec{r}$ و ϕ زاویه‌ی میان $\vec{r}$ و $\vec{F}$ است. کمیت $r_\perp$ فاصله‌ی عمودی میان محور دوران و خط رسم شده در راستای بردار $\vec{F}$ است. این خط را خط اثر $\vec{F}$ و $r_\perp$ را بازوی گشتاور $\vec{F}$ می‌نامند. به همین ترتیب، r بازوی گشتاور F_t است.

● یکای گشتاور نیرو در دستگاه یکاهای SI، به صورت نیوتون ـ متر $(\mathrm{N\cdot m})$ است. گشتاور نیروی τ هنگامی مثبت است که جسم در حال سکون را در جهت پادساعت‌گرد بچرخاند و هنگامی منفی است که جسم را در جهت ساعت‌گرد بچرخاند.

گشتاور نیرو

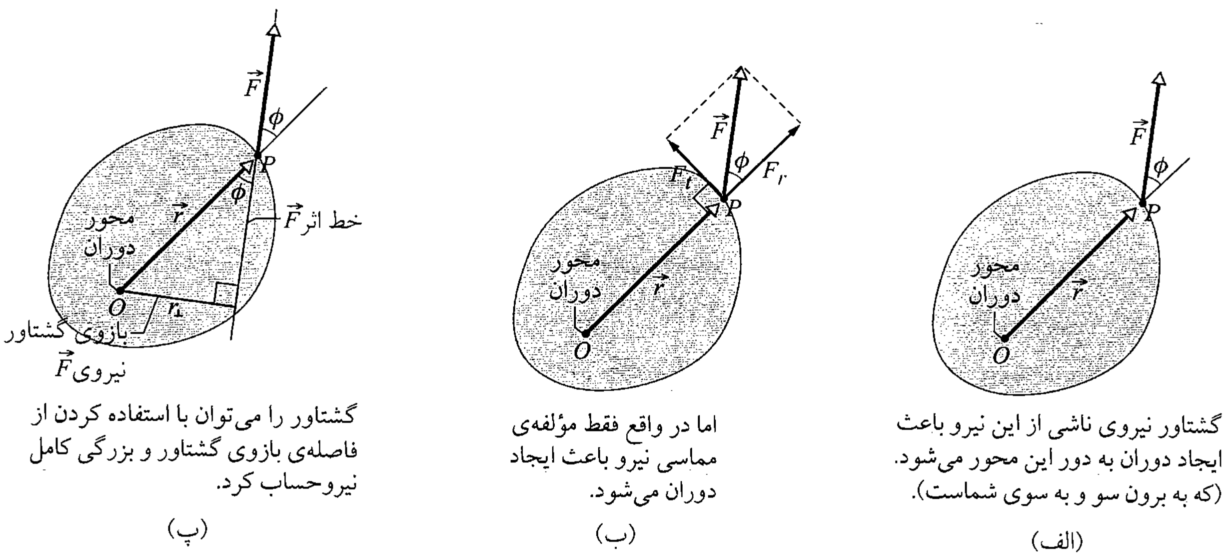
دستگیره‌ی دَر را به دلایل موجه تا حد امکان دور از خط لولای دَر نصب می‌کنند. اگر بخواهید دَر سنگین را باز کنید، مسلماً باید به آن نیرویی وارد کنید؛ اما وارد کردن نیرو به تنهایی کافی نیست. محل وارد کردن و جهت نیرو نیز در این کار مؤثر است. اگر نیروی خود را در جایی که از دستگیره‌ی دَر به لولا نزدیک‌تر است، یا تحت زاویه‌ای غیر از ۹۰ درجه نسبت به صفحه‌ی دَر وارد کنید، باید از نیروی بیشتری نسبت به حالت وارد شدن نیرو به طور عمود بر صفحه‌ی دَر به دستگیره، استفاده کنید.

شکل ۱۰-۱۶ الف مقطع جسمی را نشان می‌دهد که آزادانه می‌تواند به دور یک محور گذرنده از نقطه‌ی O و عمود بر مقطع، بچرخد. نیروی $\vec{F}$ به نقطه‌ی P، که مکان آن نسبت به O با بردار مکان $\vec{r}$ تعریف می‌شود، وارد شده است. بردارهای $\vec{F}$ و $\vec{r}$ با هم زاویه‌ی ϕ می‌سازند. (برای آسانی، فقط نیروهایی را در نظر می‌گیریم که مؤلفه‌ی موازی با محور دوران، ندارند؛ بنابراین، $\vec{F}$ در صفحه‌ی شکل قرار دارد).

برای آنکه بدانیم $\vec{F}$ چگونه یک جسم را به دور محور دوران می‌چرخاند، نیروی $\vec{F}$ را به دو مؤلفه تجزیه می‌کنیم (شکل ۱۰-۱۶ ب). یکی از مؤلفه‌ها، که ***مؤلفه‌ی شعاعی*** F_r نام دارد، در راستای $\vec{r}$ واقع است. این مؤلفه باعث چرخیدن دَر نمی‌شود، زیرا در راستای خطی اثر می‌کند که ازنقطه‌ی O گذشته است. (اگر دَر را به‌طور موازی با صفحه‌ی آن بکشید، نمی‌توانید آن را بچرخانید). مؤلفه‌ی دیگر $\vec{F}$، که ***مؤلفه‌ی مماسی*** F_t نامیده می‌شود، بر $\vec{r}$ عمود است و بزرگی آن از معادله‌ی $F_t = F\sin\phi$ به‌دست می‌آید. ***این مؤلفه سبب چرخیدن دَر می‌شود.***

محاسبه‌ی گشتاورهای نیرو. توانایی $\vec{F}$ برای چرخاندن یک‌جسم، نه تنها به بزرگی مؤلفه‌ی مماسی F_t، بلکه به فاصله‌ی نقطه‌ی وارد کردن نیرو تا O نیز بستگی دارد. برای در نظر گرفتن این دو عامل، کمیتی به نام **گشتاور نیرو** τ، را به صورت حاصل‌ضرب دو عامل تعریف می‌کنیم و چنین می‌نویسیم

$$\tau = (r)(F\sin\phi) \qquad (۱۰-۳۹)$$



شکل ۱۰-۱۶ (الف) نیروی $\vec{F}$ به جسم صُلبی با محور دوران عمود بر صفحه‌ی شکل، وارد می‌شود. گشتاور نیرو را می‌توان با استفاده کردن از (الف) زاویه‌ی ϕ، (ب) مؤلفه‌ی مماسی نیرو F_t، یا (پ) بازوی گشتاور $r_\perp$، به‌دست آورد.

برای محاسبه‌ی گشتاور نیرو دو راه هم‌ارز عبارت‌اند از

$$\tau = (r)(F \sin \phi) = rF_t \qquad (۱۰-۴۰)$$

و

$$\tau = (r \sin \phi)(F) = r_\perp F \qquad (۱۰-۴۱)$$

که در آن $r_\perp$ فاصله‌ی عمودی میان محور دوران در نقطه‌ی O و امتداد بردار $\vec{F}$ است (شکل ۱۰-۱۶ پ). این امتداد را **خط اثر** $\vec{F}$ و $r_\perp$ را **بازوی گشتاور** نیروی $\vec{F}$ می‌نامند. شکل ۱۰-۱۶ ب نشان می‌دهد که r، بزرگی $\vec{r}$، را می‌توان به عنوان بازوی گشتاور مؤلفه‌ی نیروی F_t در نظر گرفت.

گشتاور نیرو، که از واژه‌ای به معنی «چرخاندن» گرفته شده است، تقریباً به عنوان اثر چرخانندگی یا پیچانندگی نیروی $\vec{F}$ می‌تواند تعریف شود. وقتی به شیئی ـ مانند پیچ گوشتی یا هر آچار دیگر ـ به هدف چرخاندن آن نیرو وارد می‌کنیم، یک گشتاور نیرو ایجاد می‌کنیم. یکای گشتاور نیرو در دستگاه بین‌المللی یکاها (SI)، **نیوتون ـ متر** (با نماد $\mathrm{N \cdot m}$) است. ***هشدار:*** نیوتون ـ متر یکای کار نیز هست. اما گشتاور نیرو و کار دو کمیت کاملاً متفاوت‌اند و نباید با هم اشتباه شوند. کار را اغلب برحسب ژول ($1\mathrm{J} = 1\mathrm{N \cdot m}$) بیان می‌کنند، اما گشتاور را هرگز نباید برحسب ژول بیان کرد.

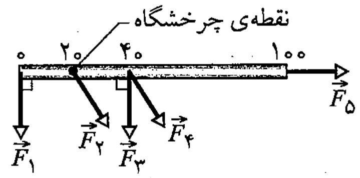
ساعت‌ها موجوداتی منفی‌اند. در فصل ۱۱ برای گشتاورها نمادگذاری برداری را به کار خواهیم برد، اما در اینجا، برای دوران به دور یک تک محور فقط از یک علامت جبری استفاده می‌کنیم. گشتاور نیرو اگر سبب دوران پادساعت‌گرد بشود، مثبت و اگر سبب دوران ساعت‌گرد

بشود، منفی است. (عبارت «ساعت‌ها موجوداتی منفی‌اند» در پودمان ۱۰-۱، در اینجا هم صدق می‌کند).

گشتاورهای نیرو از اصل برهم نهی مورد بحث مربوط به نیروها در فصل ۵ پیروی می‌کنند. هرگاه چند گشتاور نیرو به جسمی اثر کنند، **گشتاور نیروی خالص** (یا **گشتاور نیروی برایند**) برابر با مجموع گشتاورهای فردی است. نماد گشتاور نیروی برایند τ_{net} است.

خودآزمایی ۶

شکل زیر خط‌کشی را، با دید از بالا، نشان می‌دهد که می‌تواند به دور خال واقع در مکان مشخص شده با ۲۰ (فاصله‌ی ۲۰ سانتی‌متری) بچرخد. هر پنج نیروی وارد شده به خط‌کش دارای بزرگی یکسان‌اند. این نیروها را با توجه به بزرگی گشتاور نیرویی که وارد می‌کنند، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



۱۰-۷ قانون دوم نیوتون در حرکت دورانی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۰-۲۸ قانون دوم نیوتون را برای ربط دادن گشتاور نیروی برایند وارد شده به یک جسم، به لختی دورانی و شتاب دورانی، که هر دو نسبت به یک محور دوران مشخص حساب شده‌اند، به‌کار ببرید.

نکته‌ی کلیدی

- مانسته‌ی دورانی قانون دوم نیوتون چنین است

$$\tau_{net} = I\alpha$$

که در آن τ_{net} گشتاور نیروی برایند وارد شده به یک ذره یا جسم صُلب، I لختی دورانی ذره یا جسم نسبت به محور دوران و α شتاب زاویه‌ای حاصل از دوران به دور آن محور است.

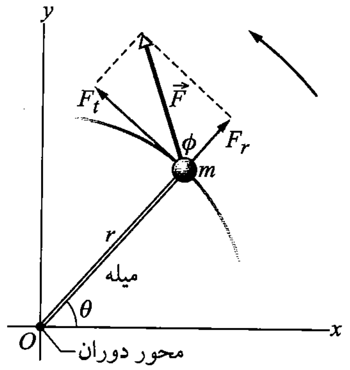
قانون دوم نیوتون در حرکت دورانی

گشتاور نیرو می‌تواند باعث ایجاد دوران در یک جسم صُلب شود، مانند هنگامی که برای چرخاندن یک دَر از گشتاور نیرو استفاده می‌کنیم. در اینجا می‌خواهیم گشتاور نیروی برایند وارد شده به یک جسم صُلب τ_{net}، را به α، شتاب زاویه‌ای جسم در دوران به دور محور،

ربط دهیم. این کار را در قیاس با قانون دوم نیوتون $(F_{net} = ma)$ در مورد a، شتاب جسمی به جرم m که از نیروی برایند F_{net} در راستای محوری از دستگاه مختصات ناشی می‌شود، می‌توان انجام داد. در اینجا τ_{net} را به جای F_{net}، I را به جای m و α در مقیاس رادیان را به جای a قرار می‌دهیم و چنین می‌نویسیم

$$\tau_{net} = I\alpha \quad \text{(قانون دوم نیوتون در حرکت دورانی)} \qquad (۴۲\text{–}۱۰)$$

گشتاور نیروی ناشی از مؤلفه‌ی مماسی نیرو یک شتاب زاویه‌ای به دور محور دوران ایجاد می‌کند.



شکل ۱۰-۱۷ جسم صُلب ساده‌ای که می‌تواند آزادانه به دور محور گذرنده از نقطه‌ی O بچرخد، شامل ذره‌ای به جرم m متصل به انتهای میله‌ی به طول r و جرم ناچیز است. نیروی وارد شده‌ی $\vec{F}$ باعث دوران جسم می‌شود.

اثبات معادله‌ی ۱۰-۴۲

معادله‌ی ۱۰-۴۲ را نخست با توجه به وضعیت ساده‌ی نشان داده شده در شکل ۱۰-۱۷ ثابت می‌کنیم. در این شکل، جسم صُلب از ذره‌ای به جرم m متصل به انتهای میله‌ای بی‌جرم و به‌طول r، تشکیل شده است. این میله فقط با چرخیدن به دور محور گذرنده از انتهای دیگر و عمود بر صفحه‌ی شکل می‌تواند حرکت کند. بنابراین، ذره فقط می‌تواند در مسیری دایره‌ای، که محور دوران در مرکز آن واقع است، بچرخد.

نیروی وارد شده به ذره $\vec{F}$ است. اما چون ذره فقط در مسیری دایره‌ای حرکت می‌کند، تنها مؤلفه‌ی مماسی نیرو F_t (مؤلفه‌ای که بر مسیر دایره‌ای مماس است)، می‌تواند در طول مسیر به ذره شتاب بدهد. با استفاده کردن از قانون دوم نیوتون می‌توان F_t را به a_t، شتاب مماسی ذره در طول مسیر ربط داد و چنین نوشت

$$F_t = ma_t$$

گشتاور نیروی وارد شده به ذره با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۰-۴۰، برابر است با

$$\tau = F_t r = ma_t r$$

با توجه به معادله‌ی ۱۰-۲۲ $(a_t = \alpha r)$، رابطه‌ی بالا را می‌توان چنین نوشت

$$\tau = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha \qquad (۴۳\text{–}۱۰)$$

کمیت درون پرانتز در طرف راست این معادله، لختی دورانی ذره نسبت به محور دوران است (معادله‌ی ۱۰-۳۳ را ببینید، اما در اینجا فقط یک تک ذره داریم). بنابراین، معادله‌ی ۱۰-۴۳ با استفاده کردن از لختی دورانی I، به صورت زیر ساده می‌شود

$$\tau = I\alpha \quad \text{(مقیاس رادیان)} \qquad (۴۴\text{–}۱۰)$$

در حالتی که بیش از یک نیرو به ذره وارد می‌شود، معادله‌ی ۱۰-۴۴ را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد

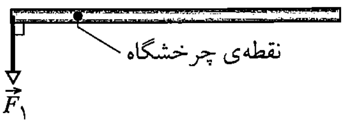
$$\tau_{net} = I\alpha \quad \text{(مقیاس رادیان)} \qquad (۴۵\text{–}۱۰)$$

این، همان معادله‌ای است که قرار بود ثابت شود. این معادله را برای هر جسم صُلب که به دور محور ثابتی می‌چرخد، می‌توان به کار برد، زیرا چنین جسمی همیشه می‌تواند به صورت

مجموعه‌ای از تک ذره‌ها در نظر گرفته شود.

خودآزمایی ۷

شکل مقابل خط‌کشی را، با دید از بالا، نشان می‌دهد که می‌تواند به دور نقطه‌ی واقع در سمت چپ نقطه‌ی وسط خط‌کش بچرخد. دو نیروی افقی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ به خط‌کش وارد می‌شوند، که در شکل فقط نیروی $\vec{F}_1$ نشان داده شده است. نیروی $\vec{F}_2$ بر خط‌کش عمود است و به انتهای راست آن وارد می‌شود. اگر خط‌کش دوران نکند، (الف) جهت $\vec{F}_2$ چگونه است و (ب) آیا F_2 نسبت به F_1 بزرگ‌تر است، کوچک‌تر است یا مساوی است؟



مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۰-۹ استفاده‌کردن از قانون دوم نیوتون برای چرخش در فن خاک‌کردن با کَپَل در کشتی جودو

جودوکاری برای خاک کردن حریفی ۸۰ کیلوگرمی با فن «خاک کردن با کَپَل» در کشتی جودو، تلاش می‌کند لباس حریف را با نیروی $\vec{F}$ و بازوی گشتاور $d_1 = ۰/۳۰\,\text{m}$ نسبت به یک نقطه‌ی چرخشگاه (محور دوران) واقع در سمت راست کَپَل خود بکشد (شکل ۱۰-۱۸). جودوکار می‌خواهد حریف را با شتاب زاویه‌ای α برابر با $-۶/۰\,\text{rad/s}^۲$، یعنی با شتاب زاویه‌ای ***ساعت‌گرد*** در شکل، به دور نقطه‌ی چرخشگاه بچرخاند. فرض کنید لختی دورانی حریف نسبت به نقطه‌ی چرخشگاه I، برابر با $۱۵\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲$ است.

(الف) اگر جودوکار پیش از پرتاب کردن حریف، او را به پیش‌سو خم کند تا مرکز جرمش به سمت کَپَل آورده شود، بزرگی $\vec{F}$ چقدر باید باشد (شکل ۱۰-۱۸ الف)؟

نکته‌ی کلیدی

نیروی کشش $\vec{F}$ وارد شده به حریف را می‌توان از طریق قانون دوم نیوتون در حرکت دورانی $(\tau_{\text{net}} = I\alpha)$ به شتاب زاویه‌ای معلوم ربط داد.

محاسبات: وقتی پای حریف از زمین بلند می‌شود، می‌توان فرض کرد که به حریف سه نیرو وارد می‌شود: نیروی کشش وارد شده از سوی جودوکار $\vec{F}$، نیروی وارد شده به حریف از سوی جودوکار در نقطه‌ی چرخشگاه $\vec{N}$ (این نیرو در شکل ۱۰-۱۸ نشان داده نشده است) و نیروی گرانشی $\vec{F}_g$. برای استفاده کردن از معادله‌ی $\tau_{\text{net}} = I\alpha$، باید گشتاورهای سه نیروی ذکر شده را نسبت به نقطه‌ی چرخشگاه پیدا کنیم.

با توجه به معادله‌ی ۱۰-۴۱ $(\tau = r_\perp F)$، گشتاور نیروی ناشی از نیروی کشش $\vec{F}$ برابر با $-d_1F$ است، که d_1 بازوی گشتاور $r_\perp$ و علامت منفی نشان دهنده‌ی ساعت‌گرد بودن گشتاور نیروی ایجاد شده است. گشتاور ناشی از نیروی $\vec{N}$ صفر است، زیرا $\vec{N}$ به نقطه‌ی چرخشگاه وارد می‌شود و بازوی گشتاور آن برابر است با $r_\perp = ۰$.

برای محاسبه‌ی گشتاور نیروی ناشی از $\vec{F}_g$، فرض می‌کنیم که $\vec{F}_g$ به مرکز جرم حریف وارد می‌شود. اگر مرکز جرم در نقطه‌ی چرخشگاه باشد، بازوی گشتاور $\vec{F}_g$ برابر است با $r_\perp = ۰$، و گشتاور نیروی ناشی از $\vec{F}_g$ صفر است. بنابراین، تنها گشتاور نیروی وارد شده به حریف از نیروی کشش $\vec{F}$ ناشی می‌شود و رابطه‌ی $\tau_{\text{net}} = I\alpha$ را می‌توان چنین نوشت

$$-d_1F = I\alpha$$

در نتیجه، داریم

$$F = \frac{-I\alpha}{d_1} = \frac{-(۱۵\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲)(-۶/۰\,\text{rad/s}^۲)}{۰/۳۰\,\text{m}} \Rightarrow$$

$$F = ۳۰۰\,\text{N} \qquad \text{(پاسخ)}$$

(ب) اگر حریف پیش از خاک کردن با کَپَل، ایستاده باشد به گونه‌ای که $\vec{F}_g$ دارای یک بازوی گشتاور $d_2 = ۰/۱۲\,\text{m}$ نسبت به نقطه‌ی چرخشگاه شود (شکل ۱۰-۱۸ ب)، بزرگی $\vec{F}$ چقدر باید باشد؟

نکته‌ی کلیدی

چون بازوی گشتاور نیروی $\vec{F}_g$ دیگر صفر نیست، گشتاور نیروی ناشی از $\vec{F}_g$ برابر با $d_۲mg$ و مثبت است، زیرا این گشتاور نیرو تلاش می‌کند دوران پادساعت‌گرد ایجاد کند.

محاسبات: اکنون، معادله‌ی $\tau_{\text{net}} = I\alpha$ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$-d_۱F + d_۲mg = I\alpha$$

که از آنجا، داریم

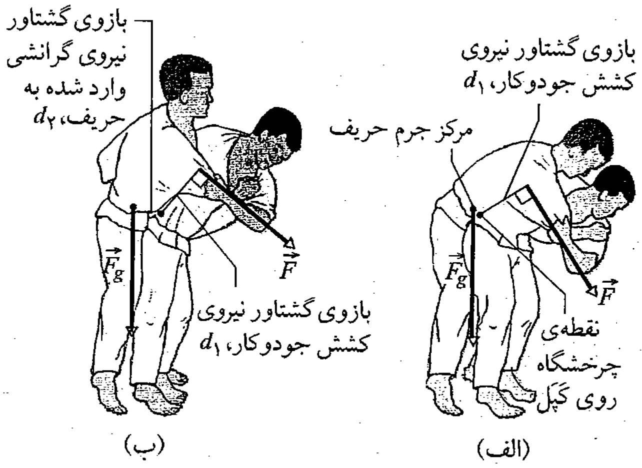
$$F = -\frac{I\alpha}{d_۱} + \frac{d_۲mg}{d_۱}$$

با توجه به قسمت (الف)، می‌دانیم که جمله‌ی اول در طرف راست معادله برابر با ۳۰۰N است. با جانشانی این مقدار و داده‌های معلوم، داریم

$$F = ۳۰۰\,\text{N} + \frac{(۰/۱۲\,\text{m})(۸۰\,\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^۲)}{۰/۳۰\,\text{m}} \Rightarrow$$

$$F = ۶۱۳/۶\,\text{N} \approx ۶۱۰\,\text{N}$$ **(پاسخ)**

این نتیجه‌ها نشان می‌دهند که اگر جودوکار حریف را ابتدا خم نکند تا مرکز جرمش به کَپَل نزدیک شود، مجبور است او را با نیروی بیشتری به سمت خود بکشد. یک جودوکار خوب این درس را از فیزیک آموخته است. در واقع، دانش فیزیک پایه‌ی بسیاری از هنرهای رزمی است، که در طی قرن‌ها پس از ساعت‌های بی‌شمار تمرین و خطا شکل گرفته‌اند.



شکل ۱۰–۱۸ نمایش فن خاک کردن با کَپَل در کشتی جودو، (الف) اجرای درست فن، (ب) اجرای نادرست فن.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۰–۱۰ قانون دوم نیوتون، دوران، گشتاور نیرو، قرص

شکل ۱۰–۱۸ الف قرص یکنواختی به جرم $M = ۲/۵\,\text{kg}$ و شعاع $R = ۲۰\,\text{cm}$ را نشان می‌دهد، که روی یک محور افقی ثابت نصب شده است. جسمی به جرم $m = ۱/۲\,\text{kg}$ از یک ریسمان بی‌جرم پیچیده شده به دور قرص آویخته شده است. شتاب جسم در حال سقوط، شتاب زاویه‌ای قرص و نیروی کشش ریسمان را حساب کنید. ریسمان نمی‌لغزد و محور بی‌اصطکاک است.

نکته‌های کلیدی

(۱) جسم را به عنوان یک دستگاه در نظر می‌گیریم. با استفاده کردن از قانون دوم نیوتون ($\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$)، می‌توان شتاب دستگاه a، را به نیروهای وارد شده ربط داد. (۲) قرص را به عنوان یک دستگاه در نظر می‌گیریم. با استفاده کردن از قانون دوم نیوتون مربوط به دوران ($\tau_{\text{net}} = I\alpha$) می‌توانیم شتاب زاویه‌ای دستگاه α، را به گشتاور نیروی وارد شده ربط دهیم. (۳) برای ترکیب کردن حرکت‌های جسم و قرص این واقعیت را در نظر می‌گیریم که شتاب خطی جسم a، و شتاب خطی (مماسی) کناره‌ی قرص a_t، باهم برابرند. (برای جلوگیری از اشتباه در مورد علامت‌ها، محاسبات را با بزرگی‌های شتاب و علامت‌های جبری صریح انجام می‌دهیم).

نیروهای وارد شده به جسم: این نیروها در نمودار جسم ـ آزاد مربوط به جسم در شکل ۱۰–۱۹ ب، نشان داده شده‌اند. در این شکل، $\vec{T}$ نیروی کشش ریسمان و $\vec{F}_g$ نیروی گرانشی با بزرگی mg است. اکنون، قانون دوم نیوتون برای مؤلفه‌های مربوط به راستای محور قائم y ($F_{\text{net},y} = ma_y$) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$T - mg = m(-a) \qquad (۱۰\text{–}۴۶)$$

که در آن a بزرگی شتاب (به سمت پایین محور y) است. با استفاده کردن از این معادله نمی‌توان شتاب a را به دست آورد، چون در آن، کمیت نامعلوم T وجود دارد.

گشتاور نیروی وارد شده به قرص: پیش از توجه به محور y بهتر است محور x را در نظر بگیریم. در اینجا به دوران قرص توجه می‌کنیم. برای محاسبه‌ی گشتاورهای نیرو و لختی دورانی I، فرض می‌کنیم محور دوران بر قرص عمود است و از مرکز قرص، نقطه‌ی O در شکل ۱۰-۱۹ پ، می‌گذرد.

گشتاورهای نیرو از معادله‌ی ۱۰-۴۰ $(\tau = rF_t)$ به دست می‌آیند. نیروی گرانشی وارد شده به قرص و نیروی وارد شده به قرص از سوی محور، هر دو در مرکز قرص، یعنی در فاصله‌ی $r = ۰$، اثر می‌کنند و در نتیجه گشتاورهای آن‌ها صفر است. نیروی وارد شده به قرص $\vec{T}$، از سوی ریسمان در فاصله‌ی $r = R$ اثر می‌کند و بر کناره‌ی قرص مماس است. گشتاور این نیرو $-RT$ است. دلیل علامت منفی این است که گشتاور نیرو قرص را از حال سکون به‌طور ساعت‌گرد می‌چرخاند. با توجه به جدول ۱۰-۲ پ، لختی دورانی قرص $\frac{۱}{۲}MR^۲$ است. پس، رابطه‌ی $\tau_{\text{net}} = I\alpha$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$-RT = \frac{۱}{۲}MR^۲(-\alpha) \qquad (۴۷\text{-}۱۰)$$

این معادله بی‌فایده به نظر می‌رسد، زیرا شامل دو کمیت نامعلوم α و T است، که هیچ کدام کمیت مورد نظر، a، نیستند. با این حال، معادله با استفاده کردن از راه‌های فیزیکی می‌تواند مفید واقع شود. چون ریسمان نمی‌لغزد، شتاب خطی جسم a، با شتاب خطی (مماسی) کناره‌ی قرص a_t، برابر است. بنابراین، با توجه به معادله‌ی ۱۱-۲۲ $(a_t = \alpha r)$ نتیجه می‌گیریم که $\alpha = a/R$. با جانشانی این مقدار در معادله‌ی ۱۰-۴۷، داریم

$$T = \frac{۱}{۲}Ma \qquad (۴۸\text{-}۱۰)$$

ترکیب کردن نتیجه‌ها: اکنون، اگر معادله‌های ۱۰-۴۶ و ۱۰-۴۸ را با هم ترکیب کنیم، داریم

$$a = g\frac{۲m}{M + ۲m} = (۹/۸\,\text{m/s}^۲)\frac{(۲)(۱/۲\,\text{kg})}{۲/۵\,\text{kg} + (۲)(۱/۲\,\text{kg})} \Rightarrow$$

(پاسخ) $$a = ۴/۸\,\text{m/s}^۲$$

حال برای پیدا کردن T از معادله‌ی ۱۰-۴۸ استفاده می‌کنیم:

$$T = \frac{۱}{۲}Ma = \frac{۱}{۲}(۲/۵\,\text{kg})(۴/۸\,\text{m/s}^۲) \Rightarrow$$

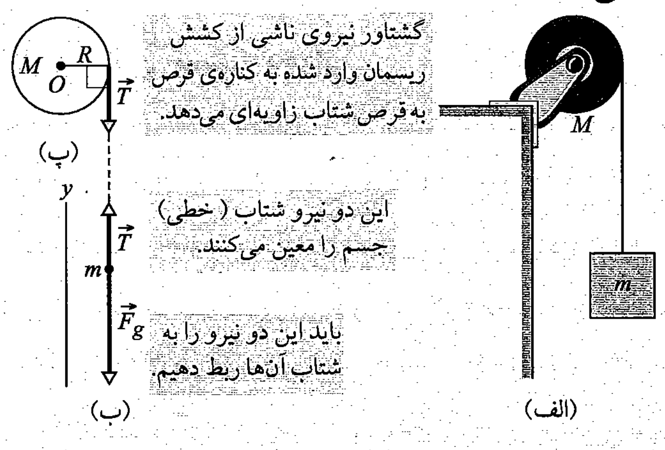
(پاسخ) $$T = ۶/۰\,\text{N}$$

همان‌طور که انتظار داریم، شتاب جسم در حال سقوط کمتر از g و نیروی کشش ریسمان (مساوی با $۶/۰\,\text{N}$) کمتر از نیروی گرانشی وارد شده به جسم آویخته شده $(mg = ۱۱/۸\,\text{N})$ است. در ضمن، دیده می‌شود که شتاب جسم و نیروی کشش ریسمان به جرم قرص بستگی دارند، اما به شعاع قرص بستگی ندارند.

به‌عنوان بازبینی، مشاهده می‌کنیم که فرمول‌های به دست آمده در بالا در حالت بی‌جرم بودن قرص $(M = ۰)$ نتیجه‌ی $a = g$ و $T = ۰$ را پیشگویی می‌کنند. این نتیجه قابل انتظار است، چون در این حالت جسم مانند یک جسم آزاد سقوط می‌کند و ریسمان را به دنبال خود می‌کشد. با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۰-۲۲، شتاب زاویه‌ای قرص چنین به دست می‌آید

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{۴/۸\,\text{m/s}^۲}{۰/۲۰\,\text{m}} \Rightarrow$$

(پاسخ) $$\alpha = ۲۴\,\text{rad/s}^۲$$



شکل ۱۰-۱۹ (الف) جسم در حال سقوط سبب می‌شود قرص بچرخد. (ب) نمودار جسم ـ آزاد مربوط به‌جسم. (پ) نمودار جسم ـ آزاد ناکامل مربوط به قرص.

۱۰–۸ کار و انرژی جنبشی دورانی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۰–۲۹ کار انجام شده توسط گشتاور نیروی وارد شده به یک جسم در حال دوران را با انتگرال‌گیری از گشتاور نیرو نسبت به زاویه‌ی دوران، حساب کنید.

۱۰–۳۰ قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی را برای ربط دادن کار انجام شده توسط گشتاور نیرو روی جسم به تغییر انرژی جنبشی دورانی حاصل، به کار ببرید.

۱۰–۳۱ کار انجام شده توسط یک گشتاور نیروی ***ثابت*** را با ربط دادن کار به زاویه‌ی دوران جسم، حساب کنید.

۱۰–۳۲ توان ناشی از گشتاور نیرو را با پیدا کردن آهنگ انجام شدن کار، حساب کنید.

۱۰–۳۳ توان ناشی از گشتاور نیرو در هر لحظه را با ربط دادن آن به گشتاور نیرو و سرعت زاویه‌ای در آن لحظه، حساب کنید.

نکته‌های کلیدی

- معادله‌های مورد استفاده برای محاسبه‌ی کار و توان در حرکت دورانی، با معادله‌های مورد استفاده برای حرکت انتقالی متناظرند و عبارت‌اند از

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$$

و

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega$$

- هرگاه τ ثابت باشد انتگرال به صورت زیر ساده می‌شود

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i)$$

- شکل قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی مورد استفاده برای اجسام در حال دوران چنین است

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = W$$

کار و انرژی جنبشی دورانی

در فصل ۷ دیدیم که هرگاه نیروی F سبب شود جسم صُلبی به جرم m در طول محوری از دستگاه مختصات شتاب پیدا کند، آن نیرو روی جسم کار W انجام می‌دهد. در نتیجه، انرژی جنبشی جسم $(K = \frac{1}{2}mv^2)$ می‌تواند تغییر کند. فرض کنید این انرژی تنها انرژی در حال تغییر کردن در جسم باشد. در این صورت، با استفاده کردن از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی (معادله‌ی ۷–۱۰)، می‌توان تغییر انرژی جنبشی ΔK، را به کار W ربط داد و چنین نوشت

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = W \quad \text{(قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی)} \qquad (۱۰–۴۹)$$

در حرکت در راستای محور x کار را می‌توان با استفاده کردن از معادله‌ی ۷–۳۲ به دست آورد:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F dx \quad \text{(کار، حرکت یک بعدی)} \qquad (۱۰–۵۰)$$

اگر F ثابت و جابه‌جایی جسم d باشد، این معادله به صورت $W = Fd$ ساده می‌شود. توان

عبارت است از آهنگ انجام دادن کار، که از معادله‌های ۷-۴۳ و ۷-۴۸ به دست می‌آید:

$$P = \frac{dW}{dt} = Fv \quad \text{(توان، حرکت یک بعدی)} \qquad (۱۰-۵۱)$$

اکنون، معادله‌های مشابه را برای حرکت دورانی به دست می‌آوریم. وقتی گشتاور نیرو موجب شتاب دادن به جسم صُلب در حال دوران به دور یک محور ثابت می‌شود، روی جسم کار W انجام می‌دهد. بنابراین، انرژی جنبشی دورانی جسم $(K = \frac{1}{2}I\omega^2)$ می‌تواند تغییر کند. فرض کنید انرژی جنبشی تنها انرژی در حال تغییر کردن در جسم باشد. در این صورت، باز هم با استفاده کردن از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی می‌توان تغییر انرژی جنبشی ΔK، را به کار W ربط داد، با این تفاوت که در این حالت انرژی جنبشی یک انرژی جنبشی دورانی است:

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = W \quad \text{(قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی)} \qquad (۱۰-۵۲)$$

در اینجا I لختی دورانی جسم نسبت به محور ثابت و ω_i و ω_f، به ترتیب، تندی‌های زاویه‌ای جسم پیش و پس از انجام دادن کار هستند.

کار را با استفاده کردن از هم‌ارز دورانی معادله‌ی ۱۰-۵۰ نیز می‌توان حساب کرد:

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta \quad \text{(کار، دوران به دور محور ثابت)} \qquad (۱۰-۵۳)$$

که در آن τ گشتاور نیرویی است که کار W را انجام می‌دهد و θ_i و θ_f، به ترتیب، مکان‌های زاویه‌ای جسم، پیش و پس از انجام دادن کار هستند. هرگاه τ ثابت باشد، معادله‌ی ۱۰-۵۳ به صورت زیر ساده می‌شود

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) \quad \text{(کار، گشتاور نیروی ثابت)} \qquad (۱۰-۵۴)$$

توان عبارت‌است از آهنگ انجام‌دادن کار، که از هم‌ارز دورانی معادله‌ی ۱۰-۵۱ به‌دست می‌آید:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega \quad \text{(توان، دوران به دور محور ثابت)} \qquad (۱۰-۵۵)$$

در جدول ۱۰-۳، معادله‌های مورد استفاده در حرکت دورانی یک جسم صُلب به دور محور ثابت و معادله‌های متناظر در حرکت انتقالی، درج شده‌اند.

اثبات معادله‌های ۱۰-۵۲ تا ۱۰-۵۵

باز هم وضعیت شکل ۱۰-۱۷ را در نظر می‌گیریم، که در آن نیروی $\vec{F}$، جسم صُلب شامل تک ذره‌ای به جرم m متصل به انتهای یک میله‌ی بی‌جرم را می‌چرخاند. در حین دوران، نیروی $\vec{F}$ روی جسم کار انجام می‌دهد. فرض می‌کنیم تنها انرژی‌ای که تحت اثر $\vec{F}$ تغییر می‌کند، انرژی جنبشی است. در این صورت، می‌توان قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی معادله‌ی ۱۰-۴۹ را به کار برد:

جدول ۱۰-۳ برخی رابطه‌های متناظر در حرکت‌های انتقالی و دورانی

حرکت انتقالی خالص (راستای ثابت)		حرکت دورانی خالص (محور ثابت)	
مکان	x	مکان زاویه‌ای	θ
سرعت	$v = dx/dt$	سرعت زاویه‌ای	$\omega = d\theta/dt$
شتاب	$a = dv/dt$	شتاب زاویه‌ای	$\alpha = d\omega/dt$
جرم	m	لختی دورانی	I
قانون دوم نیوتون	$F_{\text{net}} = ma$	قانون دوم نیوتون	$\tau_{\text{net}} = I\alpha$
کار	$W = \int F dx$	کار	$W = \int \tau d\theta$
انرژی جنبشی	$K = \frac{۱}{۲} mv^۲$	انرژی جنبشی	$K = \frac{۱}{۲} I\omega^۲$
توان (نیروی ثابت)	$P = Fv$	توان (گشتاور ثابت)	$P = \tau\omega$
قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی	$W = \Delta K$	قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی	$W = \Delta K$

$$\Delta K = K_f - K_i = W \qquad (۱۰-۵۶)$$

با استفاده کردن از رابطـه‌ی $K = \frac{۱}{۲} mv^۲$ و معادلـه‌ی ۱۰-۱۸ $(v = \omega r)$، معادلـه‌ی ۱۰-۵۶ را می‌توان چنین نوشت

$$\Delta K = \frac{۱}{۲} mr^۲ \omega_f^۲ - \frac{۱}{۲} mr^۲ \omega_i^۲ = W \qquad (۱۰-۵۷)$$

با توجه به معادله‌ی ۱۰-۳۳، لختی دورانی این جسم تک ذره‌ای برابـر اسـت بـا $I = mr^۲$. بـا جانشانی این مقدار در معادله‌ی ۱۰-۵۷، داریم

$$\Delta K = \frac{۱}{۲} I\omega_f^۲ - \frac{۱}{۲} I\omega_i^۲ = W$$

که همان معادله‌ی ۱۰-۵۲ است. این معادله برای یک جسم صُلب شامل تک ذره به دست آمده است، اما برای هر جسم صُلبی که به دور محور ثابت دوران می‌کند، نیز معتبر است.

اکنون W، کار انجام شده روی جسم در معادله‌ی ۱۰-۱۷ را به τ، گشتاور وارد شـده بـه جسم تحت اثر نیروی $\vec{F}$ ربط می‌دهیم. وقتی ذره در طول مسیر دایره‌ای خود مسـافت ds را می‌پیماید، فقط مؤلفه‌ی مماسی نیرو F_t، ذره را در طول مسیر شتاب می‌دهـد. بنـابراین، فقـط F_t روی ذره کار انجام می‌دهد. مقدار این کار dW به صورت $F_t ds$ نوشته می‌شود. به جای ds می‌توان $rd\theta$ را قرار داد، که در آن $d\theta$ زاویه‌ی پیموده شده توسط ذره اسـت. در نتیجـه، داریم

$$dW = F_t r d\theta \qquad (۱۰-۵۸)$$

با توجه به معادله‌ی ۱۰-۴۰ معلوم می‌شود که $F_t r$ برابر با τ، گشتاور نیرو اسـت. در نتیجـه، معادله‌ی ۱۰-۵۸ را می‌توان چنین نوشت

$$dW = \tau d\theta \qquad (۱۱-۵۹)$$

پس، کاری که در حین جابه‌جایی زاویه‌ای معین از θ_i تا θ_f انجام می‌شود، برابر است با

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$$

که همان معادله‌ی ۱۰-۵۳ است. این معادله برای هر جسم صُلبی که به دور یک محور ثابت می‌چرخد، صادق است. معادله‌ی ۱۰-۵۴ به طور مستقیم از معادله‌ی ۱۰-۵۳ به دست می‌آید.

توان P مربوط به حرکت دورانی را می‌توان از معادله‌ی ۱۰-۵۹ پیدا کرد:

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

که همان معادله‌ی ۱۰-۵۵ است.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۰-۱۱ کار، انرژی جنبشی دورانی، گشتاور نیرو، قرص

فرض می‌کنیم قرص شکل ۱۰-۱۹ در زمان $t = ۰$ از حال سکون شروع به دوران می‌کند. هم‌چنین، فرض می‌کنیم نیروی کشش ریسمان بی‌جرم $۶/۰\,\mathrm{N}$ وشتاب زاویه‌ای قرص $-۲۴\,\mathrm{rad/s^۲}$ باشد. انرژی جنبشی دورانی قرص K، در زمان $t = ۲/۵\,\mathrm{s}$ چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

انرژی جنبشی K را می‌توان با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۰-۳۴ $(K = \frac{۱}{۲} I\omega^۲)$ به دست آورد. می‌دانیم که I برابر با $\frac{۱}{۲}MR^۲$ است، اما مقدار ω درزمان $t = ۲/۵\,\mathrm{s}$ در دست‌نیست. چون شتاب زاویه‌ای α ثابت و برابربا $-۲۴\,\mathrm{rad/s^۲}$ است، ازمعادله‌های مربوط به شتاب زاویه‌ای ثابت در جدول ۱۰-۱ می‌توان استفاده کرد.

محاسبات: چون α و $\omega_۰$ (مساوی با صفر) را می‌دانیم و می‌خواهیم ω را به دست آوریم، از معادله‌ی ۱۰-۱۲ استفاده می‌کنیم:

$$\omega = \omega_۰ + \alpha t = ۰ + \alpha t = \alpha t$$

با جانشانی کمیت‌های $\omega = \alpha t$ و $I = \frac{۱}{۲}MR^۲$ در معادله‌ی ۱۰-۳۴، داریم

$$K = \frac{۱}{۲} I\omega^۲ = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}MR^۲)(\alpha t)^۲ = \frac{۱}{۴}M(R\alpha t)^۲$$

$$K = \frac{۱}{۴}(۲/۵\,\mathrm{kg})[(۰/۲۰\,\mathrm{m})(-۲۴\,\mathrm{rad/s^۲})(۲/۵\,\mathrm{s})]^۲ \Rightarrow$$

$$K = ۹۰\,\mathrm{J}$$ **(پاسخ)**

نکته‌ی کلیدی

این پاسخ را با تعیین انرژی جنبشی قرص با استفاده کردن از کار انجام شده روی آن هم می‌توان به دست آورد.

محاسبات: نخست، ***تغییر انرژی جنبشی*** قرص را با استفاده کردن از قضیه‌ی کار ـ انرژی جنبشی در معادله‌ی ۱۰-۵۲ $(K_f - K_i = W)$ به W، کار خالص انجام شده روی قرص ربط می‌دهیم. با قرار دادن K به جای K_f و صفر به جای K_i، داریم

$$K = K_i + W = ۰ + W = W \qquad (۱۰\text{-}۶۰)$$

اکنون، می‌خواهیم کار W را پیدا کنیم. با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۰-۵۳، یا معادله‌ی ۱۰-۵۴، می‌توان کار W را به گشتاور نیروی وارد شده به قرص ربط داد. تنها گشتاور نیروی ایجاد کننده‌ی شتاب زاویه‌ای و انجام دهنده‌ی کار، گشتاور ناشی از نیروی کشش $\vec{T}$ است که ریسمان به قرص وارد می‌کند و برابر است با $-TR$. چون α ثابت است، این گشتاور نیرو نیز ثابت است. بنابراین، با استفاده‌کردن از معادله‌ی ۱۰-۵۴ می‌توان نوشت

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) = -TR(\theta_f - \theta_i) \qquad (۱۰\text{-}۶۱)$$

چون α ثابت است، برای پیدا کردن $\theta_f - \theta_i$ می‌توان از معادله‌ی ۱۰-۱۳ استفاده کرد. به ازای $\omega_i = ۰$، داریم

$$\theta_f - \theta_i = \omega_i t + \frac{۱}{۲}\alpha t^۲ = ۰ + \frac{۱}{۲}\alpha t^۲ = \frac{۱}{۲}\alpha t^۲$$

اکنون، این مقدار را در معادله‌ی ۱۰-۶۱ قرار می‌دهیم و سپس نتیجه‌ی حاصل را در معادله‌ی ۱۰-۶۰ جانشانی می‌کنیم. به ازای

$T = 6/0\,\text{N}$ و $\alpha = -24\,\text{rad/s}^2$، داریم

$$K = W = -TR(\theta_f - \theta_i) = -TR(\frac{1}{2}\alpha t^2) = -\frac{1}{2}TR\alpha t^2$$

$$K = -\frac{1}{2}(6/0\,\text{N})(0/20\,\text{m})(-24\,\text{rad/s}^2)(2/5\,\text{s})^2 \Rightarrow$$

(پاسخ) $K = 90\,\text{J}$

مرور و چکیده‌ی مطالب

مکان زاویه‌ای برای توصیف دوران یک جسم صُلب به دور محور ثابت، که **محور دوران** نامیده می‌شود، یک **خط مرجع** ثابت را در جسم، که بر محور عمود است و با جسم می‌چرخد، در نظر می‌گیریم. **مکان زاویه‌ای** این خط θ، را نسبت به یک راستای ثابت اندازه‌گیری می‌کنیم. هرگاه θ برحسب‌رادیان اندازه‌گیری شود، داریم

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{(مقیاس رادیان)} \qquad (1-10)$$

در این معادله s طول کمان مسیر دایره‌ای به شعاع r و زاویه‌ی θ است. رابطه‌ی میان مقیاس رادیان با مقیاس زاویه‌ای عده‌ی دور و درجه چنین است

$$1\text{rev} = 360° = 2\pi\,\text{rad} \qquad (2-10)$$

جابه‌جایی زاویه‌ای وقتی جسمی به دور محور دوران می‌چرخد و مکان زاویه‌ای آن از θ_1 تا θ_2 تغییر می‌کند، **جابه‌جایی زاویه‌ای** زیر را انجام می‌دهد

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \qquad (4-10)$$

که در آن $\Delta\theta$، اگر دوران پادساعت‌گرد باشد، مثبت و اگر دوران ساعت‌گرد باشد، منفی است.

سرعت و تندی زاویه‌ای اگر جسمی که می‌چرخد در بازه‌ی زمانی Δt جابه‌جایی زاویه‌ای $\Delta\theta$ را انجام دهد، **سرعت زاویه‌ای متوسط** آن ω_{avg}، برابر است با

$$\omega_{\text{avg}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (5-10)$$

سرعت زاویه‌ای (لحظه‌ای) جسم ω، برابر است با

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad (6-10)$$

ω_{avg} و ω، هر دو بردارند و جهت‌شان از **قاعده‌ی دست راست** شکل ۱۰-۶ به دست می‌آید. این کمیت‌ها، اگر دوران پادساعت‌گرد باشد مثبت، و اگر دوران ساعت‌گرد باشد، منفی‌اند. بزرگی سرعت زاویه‌ای جسم **تندی زاویه‌ای** است.

شتاب زاویه‌ای اگر سرعت زاویه‌ای جسمی در بازه‌ی زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ از ω_1 تا ω_2 تغییر کند، **شتاب زاویه‌ای متوسط** جسم α_{avg}، برابر است با

$$\alpha_{\text{avg}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad (7-10)$$

شتاب زاویه‌ای (لحظه‌ای) جسم α، برابر است با

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (8-10)$$

α_{avg} و α هر دو بردارند.

معادله‌های سینماتیکی مربوط به‌شتاب زاویه‌ای ثابت حرکت ***با شتاب زاویه‌ای ثابت*** $(\alpha = \text{const.})$ حالت ویژه‌ای از حرکت دورانی است. معادله‌های سینماتیکی مربوط به این حالت که در جدول ۱۰-۱ درج شده‌اند، عبارت‌اند از

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (12-10)$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (13-10)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \qquad (14-10)$$

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t \qquad (15-10)$$

$$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (16-10)$$

رابطه‌ی میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای نقطه‌ای از جسم صُلب چرخان واقع در ***فاصله‌ی*** r از محور دوران در روی دایره‌ای به شعاع r حرکت می‌کند. اگر این جسم به اندازه‌ی زاویه‌ی θ بچرخد، نقطه‌ی مورد نظر کمانی به طول s را می‌پیماید، که از معادله‌ی زیر به دست می‌آید

$$s = \theta r \quad \text{(مقیاس رادیان)} \qquad (17-10)$$

در این معادله θ برحسب رادیان است.

سرعت خطی نقطه $\vec{v}$، بر دایره‌ی مسیر مماس است؛ تندی خطی نقطه v، برابر است با

$$v = \omega r \quad \text{(مقیاس رادیان)} \qquad (۱۸-۱۰)$$

که در آن ω تندی زاویه‌ای جسم (برحسب رادیان بر ثانیه) است.

شتاب خطی نقطه $\vec{a}$، دو مؤلفه‌ی ***مماسی*** و ***شعاعی*** دارد. مؤلفه‌ی مماسی برابر است با

$$a_t = \alpha r \quad \text{(مقیاس رادیان)} \qquad (۲۲-۱۰)$$

که در آن α بزرگی شتاب زاویه‌ای جسم (برحسب رادیان بر مجذور ثانیه) است. مؤلفه‌ی شعاعی شتاب $\vec{a}$ برابر است با

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad \text{(مقیاس رادیان)} \qquad (۲۳-۱۰)$$

اگر نقطه‌ای حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام دهد، دوره‌ی تناوب حرکت نقطه و جسم T، برابر است با

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{(مقیاس رادیان)} \qquad (۱۹-۱۰، ۲۰-۱۰)$$

انرژی جنبشی دورانی و لختی دورانی انرژی جنبشی یک جسم صُلب K، که به دور محور ثابتی می‌چرخد، از معادله‌ی زیر به دست می‌آید

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \quad \text{(مقیاس رادیان)} \qquad (۳۴-۱۰)$$

که در آن I **لختی دورانی** جسم است. لختی دورانی برای دستگاه متشکل از ذره‌های مجزا به صورت زیر

$$I = \sum m_i r_i^2 \qquad (۳۳-۱۰)$$

و برای جسم با توزیع جرم پیوسته به صورت زیر

$$I = \int r^2 dm \qquad (۳۵-۱۰)$$

تعریف می‌شود. در این معادله‌ها r و r_i، فاصله‌ی هر جزء جرم جسم تا محور دوران است و انتگرال روی کل جسم گرفته می‌شود، که در نتیجه هر جزء جرم را شامل می‌شود.

قضیه‌ی محورهای موازی ***قضیه‌ی محورهای موازی*** لختی دورانی I یک جسم نسبت به هر محور را به لختی دورانی همان جسم نسبت به یک محور موازی گذرنده از مرکز جرم جسم، ربط می‌دهد:

$$I = I_{\text{com}} + Mh^2 \qquad (۳۶-۱۰)$$

در این معادله h فاصله‌ی میان دو محور و I_{com} لختی دورانی جسم نسبت به محور گذرنده از com است. ما می‌توانیم h را به‌صورت فاصله‌ی محور دوران واقعی از محور دوران گذرنده از com توصیف کنیم.

گشتاور نیرو ***گشتاور نیرو*** بیان کننده‌ی اثر چرخانندگی یا پیچانندگی نیروی $\vec{F}$ وارد شده به یک جسم نسبت به محور دوران است. اگر $\vec{F}$ در نقطه‌ای با بردار مکان $\vec{r}$ نسبت به محور وارد شود، بزرگی گشتاور نیرو برابر است با

$$\tau = rF_t = r_\perp F = rF\sin\phi \qquad (۴۰-۱۰، ۴۱-۱۰ \text{ و } ۳۹-۱۰)$$

که در آن F_t مؤلفه‌ی $\vec{F}$ در راستای عمود بر $\vec{r}$ و ϕ زاویه‌ی میان $\vec{r}$ و $\vec{F}$ است. کمیت $r_\perp$ فاصله‌ی میان محور دوران و امتداد بردار $\vec{F}$ است. این امتداد را **خط اثر** $\vec{F}$ و $r_\perp$ را **بازوی گشتاور** $\vec{F}$ می‌نامند. به همین ترتیب، r هم بازوی گشتاور F_t است.

یکای گشتاور نیرو در SI، **نیوتون ـ متر** (با نماد N·m) است. گشتاور نیروی τ، اگر جسم ساکن را به‌طور پادساعت‌گرد بچرخاند مثبت و اگر آن را به طور ساعت‌گرد بچرخاند، منفی است.

قانون دوم نیوتون در شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون در حرکت دورانی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\tau_{\text{net}} = I\alpha \qquad (۴۵-۱۰)$$

که در آن τ_{net} گشتاور نیروی برایند وارد شده به یک ذره یا یک جسم صُلب، I لختی دورانی ذره یا جسم نسبت به محور دوران و α شتاب زاویه‌ای حاصل از دوران است.

کار و انرژی جنبشی دورانی معادله‌های مورد استفاده در محاسبه‌ی کار و توان در حرکت دورانی، با معادله‌های مورد استفاده در حرکت انتقالی متناظرند و عبارت‌اند از

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta \qquad (۵۳-۱۰)$$

و

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega \qquad (۵۵-۱۰)$$

وقتی τ ثابت است، معادله‌ی ۱۰-۵۳ به صورت زیر ساده می‌شود

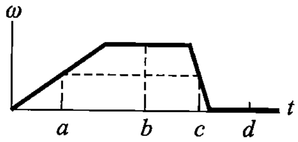
$$W=\tau(\theta_f-\theta_i) \qquad (۱۰\text{-}۵۴)$$

معادله‌ی مربوط به قضیه‌ی کار - انرژی جنبشی، که برای اجسام چرخان به کار می‌رود، چنین است

$$\Delta K=K_f-K_i=\frac{۱}{۲}I\omega_f^۲-\frac{۱}{۲}I\omega_i^۲=W \qquad (۱۰\text{-}۵۲)$$

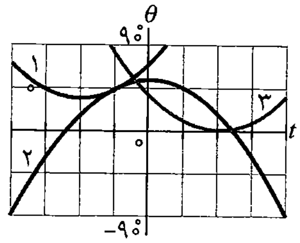
پرسش‌ها

۱ شکل ۱۰-۲۰ نمودار سرعت زاویه‌ای برحسب زمان را برای یک قرص چرخان شبیه چرخ و فلک نشان می‌دهد. با توجه به بزرگی (الف) شتاب مماسی و (ب) شتاب شعاعی، چهار زمان a، b، c و d مربوط به یک نقطه‌ی واقع در کناره‌ی قرص را، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۱۰-۲۰ پرسش ۱.

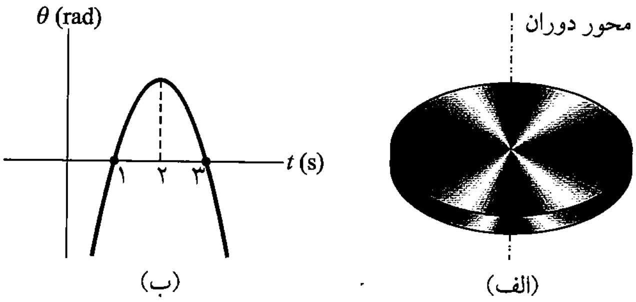
۲ شکل ۱۰-۲۱ نمودارهای مکان زاویه‌ای θ برحسب زمان t را برای سه حالتی نشان می‌دهند که یک قرص مانند یک چرخ و فلک چرخیده است. در هر حالت، جهت دوران قرص به ازای یک مکان زاویه‌ای معین θ_{ch} تغییر می‌کند. (الف) در هر حالت، معین کنید آیا θ_{ch} نسبت به مکان زاویه‌ای $\theta=۰$ ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد است، یا در مکان $\theta=۰$ است. در هر حالت، معین کنید (ب) آیا ω در زمان $t=۰$، پیش از آن، یا پس از آن، صفر است و (پ) معین کنید α مثبت، منفی، یا صفر است.



شکل ۱۰-۲۱ پرسش ۲.

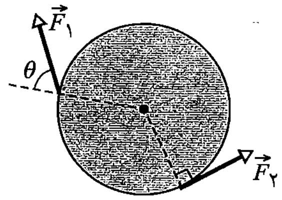
۳ نیرویی به کناره‌ی یک قرص، که می‌تواند مانند چرخ و فلک بچرخد وارد می‌شود و در نتیجه سرعت زاویه‌ای قرص تغییر می‌کند. سرعت‌های زاویه‌ای آغازی و پایانی قرص برای چهار حالت، به ترتیب، عبارت‌اند از: (الف) -۲rad/s، ۵rad/s؛ (ب) ۲rad/s، ۵rad/s؛ (پ) -۲rad/s، -۵rad/s؛ و (ت) ۲rad/s، -۵rad/s. این حالت‌ها را با توجه به کار انجام شده توسط گشتاور نیروی ناشی از نیرو، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

۴ شکل ۱۰-۲۲ ب نمودار مکان زاویه‌ای قرص چرخان شکل ۱۰-۲۲ الف را نشان می‌دهد. آیا سرعت زاویه‌ای قرص در زمان (الف) $t=۱\text{s}$، (ب) $t=۲\text{s}$ و (پ) $t=۳\text{s}$، مثبت است، منفی است، یا صفر است؟ (ت) آیا شتاب زاویه‌ای مثبت است یا منفی است؟



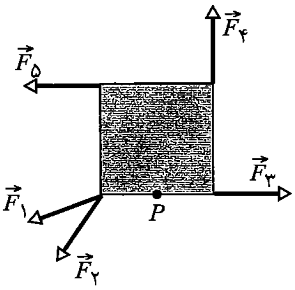
شکل ۱۰-۲۲ پرسش ۴.

۵ در شکل ۱۰-۲۳، دو نیروی $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ به قرصی وارد می‌شوند و قرص مانند یک چرخ و فلک، به‌دور مرکز جرم خود می‌چرخد. زاویه‌ی نیروها در حین دوران، حفظ می‌شود و قرص با آهنگ ثابت در جهت پادساعت‌گرد می‌چرخد. می‌خواهیم θ، زاویه‌ی نیروی $\vec{F}_۱$ را بدون تغییر بزرگی $\vec{F}_۱$ کاهش دهیم. (الف) برای ثابت نگهداشتن تندی زاویه‌ای، آیا بزرگی $\vec{F}_۲$ را باید افزایش داد، کاهش داد، یا حفظ کرد؟ آیا نیروهای (ب) $\vec{F}_۱$ و (پ) $\vec{F}_۲$، قرص را درجهت ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد می‌چرخانند؟



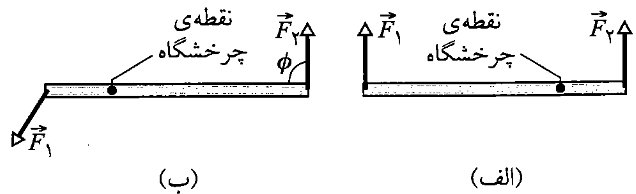
شکل ۱۰-۲۳ پرسش ۵.

۶ در شکل ۱۰-۲۴، که از بالا دیده می‌شود، پنج نیروی با بزرگی مساوی به یک چرخ و فلک غیرعادی وارد می‌شوند؛ این چرخ و فلک، مربعی است که می‌توانـد بـه دور نقطـه‌ی P، واقـع در وسط یکی از ضلع‌های مربـع بچرخـد. نیروهـای وارد شـده بـه چرخ و فلک را با توجه به بزرگی گشتاور نیرویی که نسبت بـه نقطه‌ی P ایجاد می‌کنند، از بیشترین تا کمتـرین مقـدار، مرتـب کنید.



شکل ۱۰-۲۴ پرسش ۶.

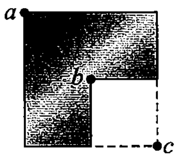
۷ شکل ۱۰-۲۵ الف یک میلـه‌ی افقـی را، بـا دیـد از بـالا، نشـان می‌دهد، که می‌تواند به دور یک نقطه‌ی چرخشگاه بچرخـد. دو نیروی افقی به میله اثر می‌کنند، اما میله ساکن می‌ماند. حال اگـر زاویه‌ی میان میله و نیروی $\vec{F}_2$ از مقدار ۹۰ درجه کمتر شـود و میله بازهم نچرخد، آیا بزرگی $\vec{F}_2$ باید بزرگ‌تر شود، کوچک‌تر شود، یا ثابت بماند؟



شکل ۱۰-۲۵ پرسش‌های ۷ و ۸

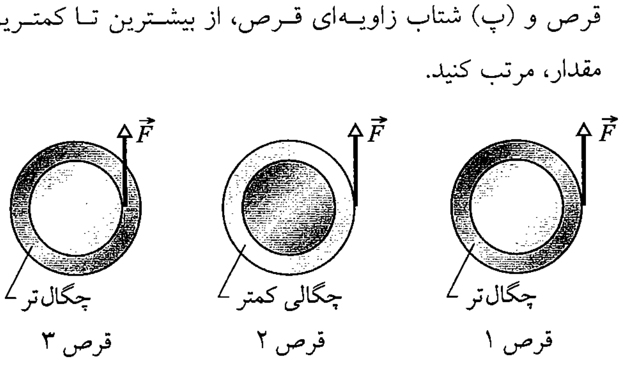
۸ شکل ۱۰-۲۵ ب میله‌ای افقی را، با دید از بالا، نشان می‌دهد، که بر اثر دو نیروی افقی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$، وارد شده به دو انتهای میله، به دور نقطه‌ی چرخشگاه می‌چرخد. زاویه‌ی میان میله و $\vec{F}_2$، برابر با ϕ است. زاویه‌های ۹۰، ۷۰ و ۱۱۰ درجه‌ی مربوط به ϕ را با توجه به بزرگی شتاب زاویه‌ای میله از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

۹ شکل ۱۰-۲۶ یک ورق فلزی یکنواخت را نشـان مـی‌دهـد کـه پیش از بریده شدن ۲۵% آن به شکل مربع بود. در این شکل سه نقطه با حروف مشخص شده‌اند. این نقطه‌ها را با توجه به لختی دورانی ورق نسبت به محور گذرنده از این نقطه‌هـا از بیشـترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



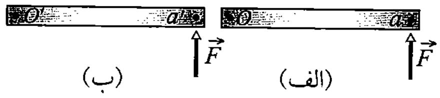
شکل ۱۰-۲۶ پرسش ۹.

۱۰ شکل ۱۰-۲۷ سه قـرص تخـت (بـا شـعاع یکسـان) را نشـان می‌دهد که می‌توانند مانند یک چرخ و فلک به‌دور مرکزهای‌شان بچرخند. هر قرص از دو ماده، که یکی چگال‌تر از دیگری است (چگـالی جـرم یکـای حجـم اسـت) تشـکیل شـده اسـت. در قرص‌های ۱ و ۳، ماده‌ی چگال‌تر نیمه‌ی بیرونی مساحت قرص و در قرص ۲ ماده‌ی چگال‌تر نیمه‌ی درونی مسـاحت قـرص را تشکیل می‌دهد. این قرص‌ها تحت‌اثر نیروهایی به‌بزرگی یکسان، مطابق شکل، قرار می‌گیرند و نیروها به لبه‌ی بیرونی یا به وسـط دو ماده وارد می‌شوند. این قرص‌ها را با توجه به (الف) گشتاور نیرو نسبت به مرکز قرص، (ب) لختی دورانی نسـبت بـه مرکـز قرص و (پ) شتاب زاویـه‌ای قـرص، از بیشـترین تـا کمتـرین مقدار، مرتب کنید.



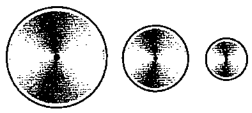
شکل ۱۰-۲۷ پرسش ۱۰.

۱۱ شکل ۱۰-۲۸ الف یک تیغه‌ی متر را نشان می‌دهد که نصف آن از چوب و نصف دیگرش از فولاد است. نقطه‌ی O واقع در انتهای قسمت چوبی تیغه محل چرخشگاه است. نیروی $\vec{F}$ به نقطه‌ی a واقع در انتهای قسمت فولادی وارد شده است. در شکل ۱۰-۲۸ ب، این تیغه وارون شده و محل چرخشگاه در نقطه‌ی O' انتهای قسمت فولادی واقع شده است و همان نیرو به نقطه‌ی a' در انتهای قسمت چوبی وارد شده است. آیا شتاب زاویه‌ای حاصل در شکل ۱۰-۲۸ الف از شتاب زاویه‌ای حاصل در شکل ۱۰-۲۸ ب بیشتر، کمتر یا با آن برابر است؟



شکل ۱۰-۲۸ پرسش ۱۱.

۱۲ شکل ۱۰-۲۹ سه قرص را نشان می‌دهد که در آن‌ها توزیع جرم یکنواخت است. در شکل شعاع‌های R و جرم‌های M نشان داده شده‌اند. هر قرص می‌تواند به دور محور مرکزی‌اش (عمود بر سطح قرص و گذرنده از مرکز آن) بچرخد. این قرص‌ها را با توجه به لختی‌های دورانی آن‌ها نسبت به محورهای مرکزی‌شان از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۱۰-۲۹ پرسش ۱۲.

مسئله‌ها

پودمان ۱۰-۱ متغیرهای حرکت دورانی

* **۱** یک گوی‌انداز خوب بیس‌بال می‌تواند گوی را با تندی ۸۵mi/h که با تندی زاویه‌ای ۱۸۰۰rev/min می‌چرخد، به‌سوی گوشه‌ی هدف پرتاب کند. این گوی تا رسیدن به‌هدف چند دور می‌چرخد؟ برای آسانی مسیر ۶۰ فوتی را راست‌خط در نظر بگیرید.

* **۲** در یک دستگاه ساعت، که به صورت قیاسی (مانسته) کار می‌کند، تندی زاویه‌ای (الف) عقربه‌ی ثانیه شمار، (ب) عقربه‌ی دقیقه شمار و (پ) عقربه‌ی ساعت شمار، چیست؟ پاسخ‌ها را برحسب رادیان بر ثانیه بیان کنید.

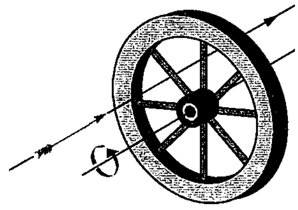
** **۳** وقتی یک قطعه نان برشته را، که روی آن کره مالیده شده است ناگهان به طرف کناره‌ی پیشخوان آشپزخانه هُل بدهیم، درحین افتادن می‌چرخد. اگرفاصله‌ی پیشخوان تا کف آشپزخانه ۷۶cm باشد و قطعه نان کمتر از یک دور بچرخد، (الف) کمترین و (ب) بیشترین تندی زاویه‌ای که به ازای آن سطح کره مالیده شده‌ی نان به کف آشپزخانه برخورد می‌کند، چیست؟

** **۴** مکان زاویه‌ای نقطه‌ای از یک چرخ دوّار، از رابطه‌ی $\theta = ۲/۰ + ۴/۰t^۲ + ۲/۰t^۳$ به دست می‌آید، که در آن θ برحسب رادیان و t برحسب ثانیه است. در زمان $t = ۰$، (الف) مکان زاویه‌ای نقطه و (ب) سرعت زاویه‌ای آن، چیست؟ (پ) سرعت زاویه‌ای نقطه در زمان $t = ۴/۰\,s$ چیست؟ (ت) شتاب زاویه‌ای نقطه را در زمان $t = ۲/۰\,s$ حساب کنید. (ث) آیا شتاب زاویه‌ای نقطه ثابت است؟

** **۵** شیرجه‌رویی در فاصله‌ی میان سکوی ۱۰ متری شیرجه و سطح آب در هوا ۲/۵ پشتک می‌زند. با فرض آنکه مؤلفه‌ی قائم سرعت آغازی صفر باشد، سرعت زاویه‌ای متوسط شیرجه‌رو را حساب کنید.

** **۶** مکان زاویه‌ای یک نقطه‌ی واقع بر کناره‌ی یک چرخ دوّار از رابطه‌ی $\theta = ۴/۰t - ۳/۰t^۲ + t^۳$ به دست می‌آید، که در آن θ برحسب رادیان و t برحسب ثانیه است. سرعت زاویه‌ای نقطه در زمان‌های (الف) $t = ۲/۰\,s$ و (ب) $t = ۴/۰\,s$، چقدر است؟ (پ) دربازه‌ی زمانی‌ای که از $t = ۲/۰\,s$ آغاز و در $t = ۴/۰\,s$ پایان می‌یابد، شتاب زاویه‌ای متوسط چقدر است؟ شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای (ت) در لحظه‌ی آغازی و (ث) در لحظه‌ی پایانی این بازه‌ی زمانی، چقدر است؟

❊❊❊ ۷ چرخ شکل ۱۰-۳۰، هشت پره به فاصله‌های مساوی دارد و شعاع آن $30\,cm$ است. چرخ روی محور ثابتی سوار شده است و با سرعت $2{,}5\,rev/s$ می‌چرخد. می‌خواهیم پیکانی به طول $20\,cm$ را به طور موازی با محور دوران طوری پرتاب کنیم که بدون برخورد با هیچ پره‌ای از چرخ بگذرد. فرض می‌کنیم پیکان و پره‌ها به قدر کافی باریک‌اند. (الف) کمینه‌ی تندی پیکان چقدر باید باشد؟ (ب) آیا مهم است که چه نقطه‌ای را در فاصله‌ی میان محور و کناره‌ی چرخ نشانه بگیریم؟ اگر این موضوع مهم است، بهترین نقطه کجاست؟



شکل ۱۰-۳۰ مسئله‌ی ۷.

❊❊❊ ۸ شتاب زاویه‌ای یک چرخ $\alpha = 6{,}0t^4 - 4{,}0t^2$ است، که در آن α برحسب رادیان بر مجذور ثانیه و t برحسب ثانیه است. این چرخ در زمان $t=0$ دارای سرعت زاویه‌ای $+2{,}0\,rad/s$ و مکان زاویه‌ای $+1{,}0\,rad$ است. رابطه‌های مربوط به (الف) سرعت زاویه‌ای (برحسب rad/s) و (ب) مکان زاویه‌ای (برحسب rad) را به صورت تابعی از زمان (برحسب ثانیه) بنویسید.

پودمان ۱۰-۲ حرکت دورانی با شتاب زاویه‌ای ثابت

❊ ۹ استوانه‌ای با سرعت زاویه‌ای $12{,}60\,rad/s$ به دور محور مرکزی‌اش می‌چرخد. اگر این استوانه با آهنگ ثابت $4{,}20\,rad/s^2$ حرکت دورانی‌اش کند شود، (الف) چه مدت طول می‌کشد و (ب) چه زاویه‌ای را طی می‌کند، تا متوقف شود؟

❊ ۱۰ قرصی از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و با شتاب زاویه‌ای ثابت به‌دور محور مرکزی‌اش می‌چرخد. قرص در مدت ۵٫۰ ثانیه به اندازه‌ی ۲۵ رادیان می‌چرخد. در این مدت، بزرگی (الف) شتاب زاویه‌ای و (ب) سرعت زاویه‌ای متوسط قرص، چقدر است؟ (پ) در پایان مدت ۵٫۰ ثانیه سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای قرص چقدر است؟ (ت) اگرشتاب زاویه‌ای تغییر نکند، در مدت ۵٫۰ ثانیه‌ی بعدی قرص تحت چه زاویه‌ای خواهد چرخید؟

❊ ۱۱ حرکت قرصی که در آغاز در حال دوران با تندی زاویه‌ای $120\,rad/s$ است، با شتاب زاویه‌ای ثابت $4{,}0\,rad/s^2$ کُند می‌شود. (الف) قرص پس از چه مدت متوقف می‌شود؟ (ب) در این مدت قرص تحت چه زاویه‌ای چرخیده است؟

❊ ۱۲ تندی زاویه‌ای موتور یک خودرو با آهنگی ثابت در مدت ۱۲ ثانیه از $1200\,rev/min$ به $3000\,rev/min$ افزایش می‌یابد. (الف) شتاب زاویه‌ای موتور برحسب دور بر مجذور دقیقه چقدر است؟ (ب) در این بازه‌ی زمانی ۱۲ ثانیه موتور چند دور چرخیده است؟

❊❊ ۱۳ چرخ لنگری از تندی زاویه‌ای $1{,}5\,rad/s$ تا توقف کامل، ۴۰ دور می‌زند. (الف) با فرض ثابت بودن شتاب زاویه‌ای، چه مدت طول می‌کشد تا چرخ متوقف شود؟ (ب) شتاب زاویه‌ای چرخ چقدر است؟ (پ) مدت زمان چرخیدن ۲۰ دور اول چرخ از ۴۰ دور چقدر است؟

❊❊ ۱۴ قرصی از حال سکون به حرکت در می‌آید و با شتاب زاویه‌ای ثابت به دور محور مرکزی‌اش می‌چرخد. قرص در یک زمان با تندی زاویه‌ای $10\,rev/s$ می‌چرخد و ۶۰ دور بعد تندی زاویه‌ای‌اش به $15\,rev/s$ می‌رسد. مطلوب است محاسبه‌ی (الف) شتاب زاویه‌ای، (ب) زمان لازم برای پیمودن ۶۰ دور بعدی، (پ) زمان لازم برای رسیدن به تندی زاویه‌ای $10\,rev/s$ و (ت) عده‌ی دورهایی که قرص از حال سکون تا زمان رسیدن به تندی زاویه‌ای $10\,rev/s$ می‌زند.

❊❊ ۱۵ شتاب زاویه‌ای ثابت چرخی $\alpha = 3{,}0\,rad/s^2$ است. این چرخ در یک بازه‌ی زمانی ۴٫۰ ثانیه زاویه‌ای به اندازه‌ی ۱۲۰ رادیان می‌پیماید. چرخ با این فرض که از حال سکون شروع به چرخش کرده باشد، تا آغاز بازه‌ی زمانی ۴٫۰ ثانیه چه مدت در حال حرکت بوده است؟

❊❊ ۱۶ یک چرخ و فلک (افقی) از حال سکون با شتاب زاویه‌ای $1{,}50\,rad/s^2$ می‌چرخد. چه مدت طول می‌کشد تا (الف) ۲٫۰۰ دور اول و (ب) ۲٫۰۰ دور بعدی، را بزند؟

** ۱۷ در زمان $t = ۰$، یک چرخ لنگر دارای سرعت زاویه‌ای $۴/۷ \, rad/s$، شتاب زاویه‌ای ثابت $-۰/۲۵ \, rad/s^۲$ و زاویه‌ی خط مرجع $\theta_۰ = ۰$ است. (الف) زاویه‌ی بیشینه‌ی θ_{max}، که خط مرجع در جهت مثبت می‌پیماید، چقدر است؟ در چه زمان‌هایی خط مرجع، (ب) برای اولین بار و (پ) برای دومین بار در مکان $\theta = \frac{۱}{۲}\theta_{max}$ قرار می‌گیرد؟ (ت) درچه زمان منفی و (ث) در چه زمان مثبت، خط مرجع در مکان $\theta = ۱۰/۵ \, rad$ خواهد بود؟ (ج) نمودار θ برحسب t را رسم و پاسخ‌های خود را بر روی نمودار مشخص کنید.

*** ۱۸ تپ اختر یک ستاره‌ی نوترونی در حال چرخش تند است که، مانند گسیل شدن باریکه‌ی نور توسط فانوس دریایی، باریکه‌ای از موج‌های رادیویی گسیل می‌کند. در هر دور این ستاره در روی زمین یک تپ دریافت می‌شود. دوره‌ی تناوب دوران، T، با اندازه‌گیری زمان میان تپ‌ها به دست می‌آید. در حال حاضر، دوره‌ی تناوب دوران تپ اختر واقع در سحابی خرچنگ $T = ۰/۰۳۳ \, s$ است و این مقدار با آهنگ $۱/۲۶ \times ۱۰^{-۵} \, s/y$ در حال افزایش است. (الف) شتاب زاویه‌ای تپ اختر α، چقدر است؟ (ب) اگر α ثابت باشد، دوران تپ اختر چند سال دیگر متوقف خواهد شد؟ (پ) این تپ اختر از انفجار یک ابرنواختر در سال ۱۰۵۴ به وجود آمده است. با فرض ثابت بودن α، T آغازی را پیدا کنید.

پودمان ۱۰-۳ رابطه‌ی میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای

* ۱۹ فضاپیمایی مسیری دایره‌ای به شعاع $۳۲۲۰ \, km$ را با تندی $۲۹۰۰۰ \, km/h$ می‌پیماید. بزرگی (الف) سرعت زاویه‌ای، (ب) شتاب شعاعی و (پ) شتاب مماسی فضاپیما، چقدر است؟

* ۲۰ شیئی به دور محور ثابتی می‌چرخد و مکان زاویه‌ای یک خط مرجع روی شیء از رابطه‌ی $\theta = ۰/۴۰ e^{۲t}$ به دست می‌آید، که در آن θ برحسب رادیان و t برحسب ثانیه است. نقطه‌ای را بر روی شیء به فاصله‌ی $۴/۰ \, cm$ از محور دوران در نظر بگیرید. در زمان $t = ۰$، بزرگی (الف) مؤلفه‌ی مماسی شتاب و (ب) مؤلفه‌ی شعاعی شتاب این نقطه، چیست؟

* ۲۱ در بین سال‌های ۱۹۱۱ و ۱۹۹۰، نوک برج کج پیزا[1] در ایتالیا با آهنگ متوسط $۱/۲ \, mm/y$ به سمت جنوب حرکت کرد. ارتفاع برج ۵۵ متر است. تندی زاویه‌ای متوسط نوک برج به دور پایه‌ی آن، برحسب رادیان بر ثانیه، چقدر است؟

* ۲۲ فضانوردی درون یک دستگاه مرکز گریز مورد آزمون قرار می‌گیرد. شعاع دستگاه $۱۰ \, m$ است و دستگاه طبق رابطه‌ی $\theta = ۰/۳۰ t^۲$، که در آن t برحسب ثانیه و θ برحسب رادیان است، شروع به دوران می‌کند. در زمان $t = ۵/۰ \, s$، بزرگی (الف) سرعت زاویه‌ای، (ب) سرعت خطی، (پ) شتاب مماسی، و (ت) شتاب شعاعی فضانورد، چیست؟

* ۲۳ چرخ لنگری به قطر $۱/۲۰ \, m$ با تندی زاویه‌ای $۲۰۰ \, rev/min$ می‌چرخد. (الف) تندی زاویه‌ای چرخ برحسب رادیان بر ثانیه چقدر است؟ (ب) تندی خطی یک نقطه‌ی واقع بر کناره‌ی چرخ چقدر است؟ (پ) چه شتاب زاویه‌ای ثابتی (برحسب دور بر مجذور دقیقه) موجب می‌شود تندی زاویه‌ای چرخ در مدت ۶۰/۰ ثانیه به $۱۰۰۰ \, rev/min$ برسد؟ (ت) چرخ در این مدت ۶۰/۰ ثانیه چند دور می‌زند؟

* ۲۴ وقتی یک صفحه‌ی گرامافون از جنس وینیل با چرخیدن به‌کار می‌افتد، یک شیار تقریباً دایره‌ای روی صفحه در زیر یک سوزن می‌لغزد. برآمدگی‌های موجود در این شیار سبب می‌شوند سوزن در درون شیار نوسان کند. دستگاه گرامافون این نوسان‌ها را به سیگنال‌های الکتریکی و سپس به صوت تبدیل می‌کند. فرض کنید صفحه با آهنگ $۳۳\frac{۱}{۳} \, rev/min$ می‌چرخد، شعاع شیار $۱۰/۰ \, cm$ است و فاصله‌ی یکنواخت برآمدگی‌های شیار $۱/۷۵ \, mm$ است. این برآمدگی‌ها با چه آهنگی (عده‌ی برخورد بر ثانیه) به سوزن برخورد می‌کنند؟

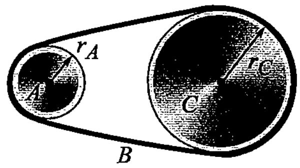
** ۲۵ (الف) تندی زاویه‌ای ω، برای نقطه‌ای از سطح زمین که در عرض جغرافیایی ۴۰ درجه‌ی شمالی به دور محور قطبی زمین می‌چرخد، چقدر است؟ (ب) تندی خطی این نقطه v، چقدر است؟ برای نقطه‌ای از استوا، (پ) مقدار ω و (ت) مقدار v، چیست؟

---
1. Pisa

۲۶ ٭٭ چرخ لنگر ماشین بخاری با سرعت زاویه‌ای ثابت ۱۵۰ rev / min می‌چرخد. وقتی بخار قطع می‌شود، اصطکاک یاتاقان‌ها و مقاومت هوا سبب می‌شود چرخ پس از مدت ۲٫۲ ساعت متوقف شود. (الف) شتاب زاویه‌ای ثابت چرخ در حین کند شدن حرکت، برحسب دور بر مجذور دقیقه، چقدر است؟ (ب) چرخ پیش از توقف چند دور می‌زند؟ (پ) در لحظه‌ای که چرخ با تندی زاویه‌ای ۷۵ rev / min می‌چرخد، مؤلفه‌ی مماسی شتاب خطی نقطه‌ای از چرخ به فاصله‌ی ۵۰ cm از محور دوران چقدر است؟ (ت) بزرگی شتاب خطی برایند نقطه‌ی مربوط به قسمت (پ) چقدر است؟

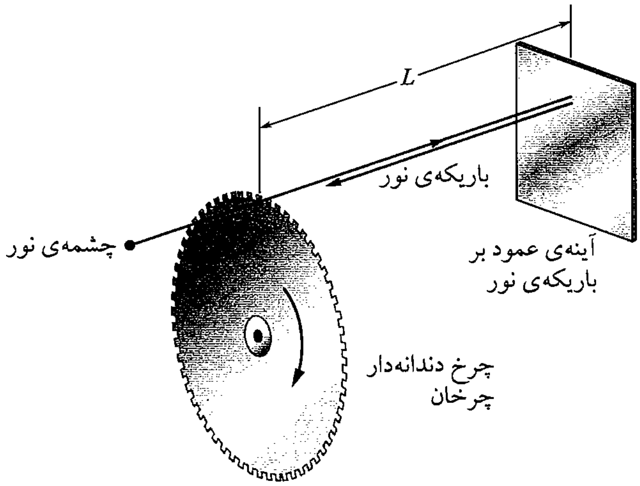
۲۷ ٭٭ صفحه‌ی یک گرامافون با تندی زاویه‌ای $۳۳\frac{۱}{۳}$ rev / min می‌چرخد. یک تخم هندوانه به فاصله‌ی ۶٫۰ cm از محور دوران بر روی صفحه قرار داده شده است. (الف) شتاب تخم را با این فرض که نمی‌لغزد، حساب کنید. (ب) اگر بخواهیم تخم نلغزد، کمینه‌ی مقدار ضریب اصطکاک ایستایی میان تخم و صفحه چقدر باید باشد؟ (پ) فرض کنید صفحه با شتاب ثابت از حال سکون شروع به دوران می‌کند و پس از ۰٫۲۵ ثانیه به این تندی زاویه‌ای می‌رسد. کمینه‌ی مقدار ضریب اصطکاک ایستایی لازم را برای آنکه تخم در مدت شتاب گرفتن نلغزد، حساب کنید.

۲۸ ٭٭ در شکل ۱۰-۳۱، چرخ A به شعاع $r_A =$ ۱۰ cm، به وسیله‌ی تسمه‌ی B به چرخ C به شعاع $r_C =$ ۲۵ cm وصل شده است. تندی زاویه‌ای چرخ A از حال سکون با آهنگ ثابت ۱٫۶ rad / s^۲ افزایش می‌یابد. با این فرض که تسمه نمی‌لغزد، مدت زمانی را که لازم است تا تندی زاویه‌ای چرخ C به ۱۰۰ rev / min برسد، معین کنید. (*راهنمایی:* اگر تسمه نلغزد، تندی خطی نقطه‌های واقع بر کناره‌های دو چرخ با هم مساوی‌اند).



شکل ۱۰-۳۱ مسئله‌ی ۲۸.

۲۹ ٭٭ در یکی از روش‌های اندازه‌گیری تندی نور از یک چرخ دندانه‌دار چرخان استفاده شده است. در این روش، باریکه‌ی نوری از شکاف میان دندانه‌های کناره‌ی بیرونی چرخ، مطابق شکل ۱۰-۳۲، می‌گذرد، به آینه‌ای که در فاصله‌ای دور قرار دارد می‌تابد و چنان به سوی چرخ برمی‌گردد که درست از شکاف بعدی چرخ عبور می‌کند. چرخ دندانه‌داری دارای شعاع ۵٫۰ cm است و در کناره‌ی آن ۵۰۰ دندانه وجود دارد. اندازه‌گیری مربوط به وقتی که فاصله‌ی آینه از چرخ $L =$ ۵۰۰ m بوده است، تندی نور را ۳٫۰×۱۰^۵ km / s نشان می‌دهد. (الف) تندی زاویه‌ای (ثابت) چرخ دندانه‌دار چقدر است؟ (ب) تندی خطی یک نقطه‌ی واقع بر کناره‌ی چرخ چقدر است؟



شکل ۱۰-۳۲ مسئله‌ی ۲۹.

۳۰ ٭٭ چرخ لنگر ژیروسکوپی به شعاع ۲٫۸۳ cm با شتاب زاویه‌ای ۱۴٫۲ rad / s^۲ از حال سکون شروع به چرخش می‌کند و تندی زاویه‌ای‌اش به ۲۷۶۰ rev / min می‌رسد. (الف) شتاب مماسی یک نقطه‌ی واقع بر کناره‌ی ژیروسکوپ در طی فرایند شتاب گرفتن چقدر است؟ (ب) وقتی که ژیروسکوپ با تندی نهایی می‌چرخد، شتاب شعاعی این نقطه چقدر است؟ (پ) در مدت شتاب گرفتن چرخ، نقطه‌ی واقع بر کناره چه مسافتی می‌پیماید؟

۳۱ ٭٭ می‌خواهیم قرصی به‌شعاع ۰٫۲۵ m مانند یک چرخ‌وفلک از حال سکون شروع به چرخش کند و زاویه‌ی ۸۰۰ rad را بپیماید. این قرص درچرخش ۴۰۰ rad اول تندی زاویه‌ای‌اش را

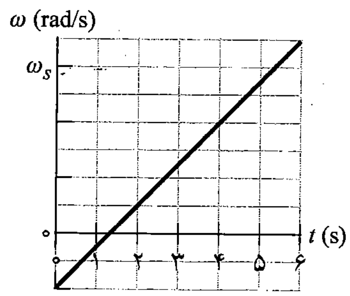
با شتاب ثابت α_1 افزایش می‌دهد و سپس تندی زاویه‌ای‌اش را با شتاب ثابت $-\alpha_1$ کاهش می‌دهد تا دوباره متوقف شود. بزرگی شتاب مرکزگرای هر بخش از این قرص نباید از $400\,\mathrm{m/s^2}$ تجاوز کند. (الف) کمترین زمان مورد نیاز برای این چرخش چقدراست؟ (ب) مقدار α_1 متناظر با این زمان چیست؟

** ۳۲ خودرویی از حال سکون شروع به حرکت می‌کند و یک مسیر دایره‌ای به شعاع $30.0\,\mathrm{m}$ را دور می‌زند. تندی این خودرو با آهنگ ثابت $0.500\,\mathrm{m/s^2}$ افزایش می‌یابد. (الف) بزرگی شتاب خطی ***برایند*** خودرو پس از $15.0\,\mathrm{s}$ چقدر است؟ (ب) زاویه‌ی این بردار شتاب برایند با بردار سرعت خودرو در این لحظه چیست؟

پودمان ۱۰-۴ انرژی جنبشی دورانی

* ۳۳ لَختی دورانی چرخی را حساب کنید که انرژی جنبشی‌اش در موقع دوران با تندی $602\,\mathrm{rev/min}$، برابر با $24400\,\mathrm{J}$ باشد.

* ۳۴ شکل ۱۰-۳۳ نمودار تندی زاویه‌ای مربوط به‌میله‌ی باریکی را برحسب زمان نشان می‌دهد، که به دور یک سر میله دوران می‌کند. مقیاس محور قائم شکل ω، با مقدار $\omega_s = 6.0\,\mathrm{rad/s}$ مشخص شده است. (الف) بزرگی شتاب زاویه‌ای میله چقدر است؟ (ب) در زمان $t = 4.0\,\mathrm{s}$ انرژی جنبشی دورانی میله $1.60\,\mathrm{J}$ است. انرژی جنبشی میله در زمان $t = 0$ چیست؟

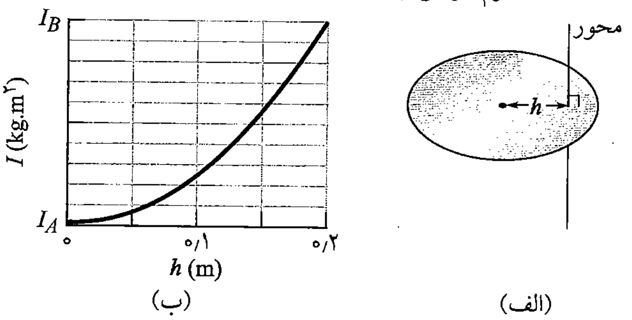


شکل ۱۰-۳۳ مسئله‌ی ۳۴.

پودمان ۱۰-۵ محاسبه‌ی لَختی دورانی

* ۳۵ دو استوانه‌ی صُلب یکنواخت به دور محور مرکزی (طولی) خود می‌چرخند. استوانه‌ها دارای جرم یکسان $1.25\,\mathrm{kg}$ هستند و با تندی زاویه‌ای یکسان $235\,\mathrm{rad/s}$، اما با شعاع‌های متفاوت، می‌چرخند. انرژی جنبشی دورانی، (الف) استوانه‌ی کوچک‌تر به شعاع $0.25\,\mathrm{m}$، و (ب) استوانه‌ی بزرگ‌تر به شعاع $0.75\,\mathrm{m}$، چقدر است؟

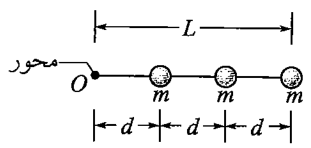
* ۳۶ شکل ۱۰-۳۴ الف قرصی را نشان می‌دهد که می‌تواند به دور یک محور واقع در فاصله‌ی شعاعی h از مرکز قرص بچرخد. شکل ۱۰-۳۴ ب نمودار لختی دورانی قرص I، نسبت به این محور را به صورت تابعی از h، از مرکز تا لبه‌ی قرص نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم شکل I، با مقادیر $I_A = 0.050\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ و $I_B = 0.150\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ مشخص شده‌اند. جرم قرص چقدر است؟



شکل ۱۰-۳۴ مسئله‌ی ۳۶.

* ۳۷ لختی دورانی یک خط‌کش چوبی یک متری به جرم $0.56\,\mathrm{kg}$ را نسبت به محور عمود بر خط‌کش و واقع در روی علامت $20\,\mathrm{cm}$ حساب کنید. (خط‌کش را به صورت تخته‌ای باریک در نظر بگیرید).

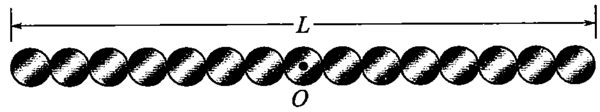
* ۳۸ شکل ۱۰-۳۵ سه ذره، هر یک به جرم $0.0100\,\mathrm{kg}$، را نشان می‌دهد، که به میله‌ای به طول $L = 6.00\,\mathrm{cm}$ و به جرم ناچیز، چسبیده‌اند. این مجموعه می‌تواند به دور یک محور عمودی گذرنده از نقطه‌ی O واقع در انتهای چپ میله دوران کند. اگر یک ذره (که ۳۳ درصد جرم را تشکیل می‌دهد) حذف شود، لختی دورانی مجموعه نسبت به محور دوران در حالت‌های زیر چند درصد کاهش می‌یابد: (الف) نزدیک‌ترین ذره و (ب) دورترین ذره، به محور دوران؟



شکل ۱۰-۳۵ مسئله‌های ۳۸ و ۶۲.

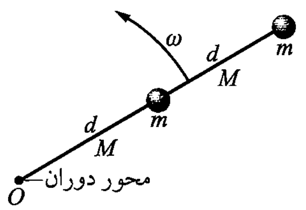
** ۳۹ کامیون‌ها را با انرژی ذخیره شده در یک چرخ لنگر، که توسط یک موتور الکتریکی به چرخش در می‌آید و به بالاترین تندی زاویه‌ای $200\pi\ \text{rad/s}$ می‌رسد، می‌توان به حرکت در آورد. چنین چرخ لنگری یک استوانه‌ی یکنواخت توپر به جرم $500\ \text{kg}$ و شعاع $1.0\ \text{m}$ است. (الف) انرژی جنبشی چرخ لنگر پس از انرژی‌گذاری، چقدر است؟ (ب) اگر کامیون دارای توان متوسط مصرفی $8.0\ \text{kW}$ باشد، در بین دو مرحله‌ی انرژی‌گذاری چند دقیقه می‌تواند کار کند؟

** ۴۰ شکل ۱۰-۳۶ آرایشی از ۱۵ قرص مشابه را نشان می‌دهد که به گونه‌ای میله مانند به طول $L = 1.0000\ \text{m}$ و جرم (کل) $M = 100.0\ \text{mg}$ به یکدیگر چسبانده شده‌اند. این آرایش قرص‌ها می‌تواند به دور محور گذرنده از قرص مرکزی در نقطه‌ی O دوران کند. (الف) لختی دورانی این آرایش نسبت به محور چقدر است؟ (ب) اگر این آرایش را به طور تقریبی مانند میله‌ای یکنواخت به جرم M و طول L در نظر بگیریم، در هنگام استفاده کردن از فرمول جدول ۱۰-۲ ث برای محاسبه‌ی لختی دورانی، چند درصد مرتکب خطا می‌شویم؟



شکل ۱۰-۳۶ مسئله‌ی ۴۰.

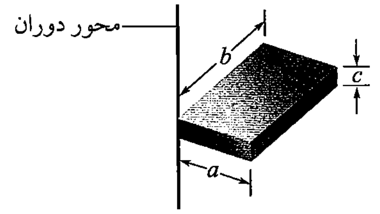
** ۴۱ در شکل ۱۰-۳۷، دو گلوله هریک به جرم $m = 0.85\ \text{kg}$، به وسیله‌ی دو میله‌ی باریک، هر یک به طول $d = 5.6\ \text{cm}$ و جرم $M = 1.2\ \text{kg}$، به یکدیگر و به محور دوران واقع در نقطه‌ی O، وصل شده‌اند. این ترکیب با تندی زاویه‌ای $\omega = 0.30\ \text{rad/s}$ به دور محور می‌چرخد. (الف) لختی دورانی و (ب) انرژی جنبشی این ترکیب نسبت به نقطه‌ی O چیست؟



شکل ۱۰-۳۷ مسئله‌ی ۴۱.

** ۴۲ جرم‌ها و مختصات چهار ذره عبارت‌اند از: $50\ \text{g}$، $x = 2.0\ \text{cm}$، $y = 2.0\ \text{cm}$؛ $25\ \text{g}$، $x = 0$، $y = 4.0\ \text{cm}$؛ $25\ \text{g}$، $x = -3.0\ \text{cm}$، $y = -3.0\ \text{cm}$؛ $30\ \text{g}$، $x = -2.0\ \text{cm}$، $y = 4.0\ \text{cm}$. لختی دورانی این مجموعه نسبت به محورهای (الف) x، (ب) y و (پ) z، چیست؟ (ت) فرض کنید پاسخ قسمت‌های (الف) و (ب)، به ترتیب، A و B است. در این صورت، پاسخ قسمت (پ) برحسب A و B چیست؟

** ۴۳ جسم صُلب با توزیع جرم یکنواخت شکل ۱۰-۳۸، دارای جرم $0.172\ \text{kg}$ و ضلع‌های $a = 3.5\ \text{cm}$، $b = 8.4\ \text{cm}$ و $c = 1.4\ \text{cm}$ است. لختی دورانی این جسم را نسبت به محور گذرنده از یکی از گوشه‌ها و عمود بر وجه‌های بزرگ، حساب کنید.

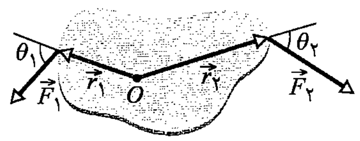


شکل ۱۰-۳۸ مسئله‌ی ۴۳.

** ۴۴ چهار ذره‌ی مشابه، هریک به‌جرم $0.50\ \text{kg}$، در رأس‌های یک مربع $2.0\ \text{m} \times 2.0\ \text{m}$ قرار دارند و به وسیله‌ی چهار میله‌ی بی‌جرم که ضلع‌های مربع را تشکیل می‌دهند، به هم وصل شده‌اند. لختی دورانی این‌جسم صُلب را نسبت به‌محور گذرنده، (الف) از وسط ضلع‌های متقابل و واقع در صفحه‌ی مربع، (ب) از وسط یکی از ضلع‌ها و عمود برصفحه‌ی مربع و (پ) از قطر وصل کننده‌ی دو ذره و واقع در صفحه‌ی مربع، حساب کنید.

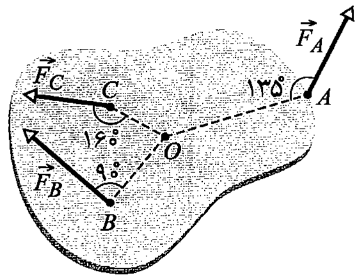
پودمان ۱۰-۶ گشتاور نیرو

* ۴۵ جسم نشان داده شده در شکل ۱۰-۳۹، می‌تواند به دور نقطه‌ی چرخشگاه O بچرخد و دو نیرو، مطابق شکل، به آن وارد می‌شوند. به ازای $r_1 = 1.30\ \text{m}$، $r_2 = 2.15\ \text{m}$، $F_1 = 4.20\ \text{N}$، $F_2 = 4.90\ \text{N}$، $\theta_1 = 75.0°$ و $\theta_2 = 60.0°$، گشتاور نیروی برایند نسبت به نقطه‌ی O چیست؟



شکل ۱۰-۳۹ مسئله‌ی ۴۵.

* **۴۶** جسم نشان داده شده در شکل ۱۰-۴۰، می‌تواند به دور نقطه‌ی چرخشگاه O بچرخد. این جسم، مطابق شکل، تحت اثر سه نیرو قرار می‌گیرد: F_A = ۱۰N در نقطه‌ی A، به فاصله‌ی ۸٫۰m از نقطه‌ی O؛ F_B = ۱۶N در نقطه‌ی B، به‌فاصله‌ی ۴٫۰m از نقطه‌ی O؛ F_C = ۱۹N در نقطه‌ی C، به‌فاصله‌ی ۳٫۰m از نقطه‌ی O. گشتاور نیروی برایند نسبت به نقطه‌ی O چیست؟



شکل ۱۰-۴۰ مسئله‌ی ۴۶.

* **۴۷** گلوله‌ی کوچکی به جرم ۰٫۷۵kg به یک سر میله‌ی بی‌جرمی به طول ۱٫۲۵m وصل شده و سر دیگر میله به یک نقطه‌ی چرخشگاه آویخته شده است. وقتی که آونگ حاصل به اندازه‌ی ۳۰ درجه نسبت به وضعیت قائم منحرف می‌شود، بزرگی گشتاور نیرو نسبت به نقطه‌ی چرخشگاه چقدر است؟

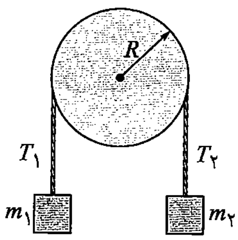
* **۴۸** طول بازوی رکاب دوچرخه‌ای ۰٫۱۵۲m است و یک نیروی پایین‌سوی ۱۱۱ نیوتونی از پای دوچرخه‌سوار به رکاب وارد می‌شود. بزرگی گشتاور این نیرو نسبت به نقطه‌ی چرخشگاه بازوی رکاب وقتی که این بازو با امتداد قائم زاویه‌ی، (الف) ۳۰ درجه، (ب) ۹۰ درجه و (پ) ۱۸۰ درجه می‌سازد، چیست؟

پودمان ۱۰-۷ قانون دوم نیوتون در حرکت دورانی

* **۴۹** شیرجه‌رویی در حین شیرجه رفتن از تخته تندی زاویه‌ای‌اش به دور مرکز جرمش در مدت ۲۲۰ms از صفر تا ۶٫۲۰rad/s افزایش می‌یابد. لختی دورانی شیرجه‌رو نسبت به مرکز جرمش ۱۲٫۰kg·m² است. در حین پرش، بزرگی (الف) شتاب زاویه‌ای متوسط شیرجه‌رو و (ب) گشتاور نیروی خارجی متوسط وارد شده به او از سوی تخته‌ی شیرجه، چقدر است؟

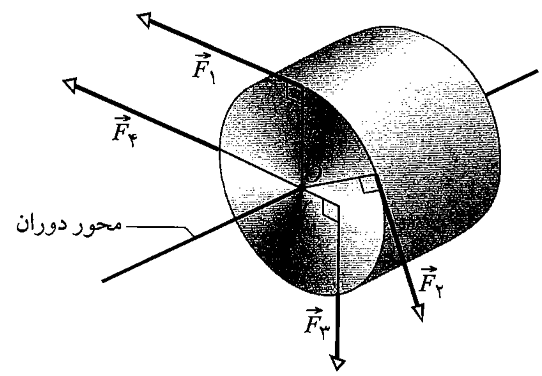
* **۵۰** اگر یک چرخ با وارد شدن گشتاور نیروی ۳۲٫۰N·m به آن شتاب زاویه‌ای ۲۵٫۰rad/s² را پیدا کند، لختی دورانی چرخ چیست؟

** **۵۱** در شکل ۱۰-۴۱، جسم ۱ دارای جرم m_1 = ۴۶۰g و جسم ۲ دارای جرم m_2 = ۵۰۰g است و قرقره‌ی سوار شده روی یک محور افقی بی‌اصطکاک دارای شعاع R = ۵٫۰۰cm است. وقتی جسم ۲ از حال سکون رها می‌شود در مدت ۵٫۰۰s به اندازه‌ی ۷۵٫۰cm سقوط می‌کند بی‌آنکه ریسمان بر روی قرقره بلغزد. (الف) بزرگی شتاب دو جسم چقدر است؟ (ب) نیروی کشش T_2 و (پ) نیروی کشش T_1 چقدر است؟ (ت) بزرگی شتاب زاویه‌ای قرقره چیست؟ (ث) لختی دورانی قرقره چقدر است؟



شکل ۱۰-۴۱ مسئله‌های ۵۱ و ۸۳

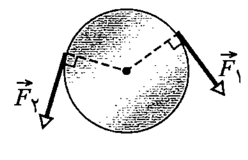
** **۵۲** در شکل ۱۰-۴۲، استوانه‌ای به جرم ۲٫۰kg می‌تواند به دور محور مرکزی خود که از نقطه‌ی O می‌گذرد، بچرخد.



شکل ۱۰-۴۲ مسئله‌ی ۵۲.

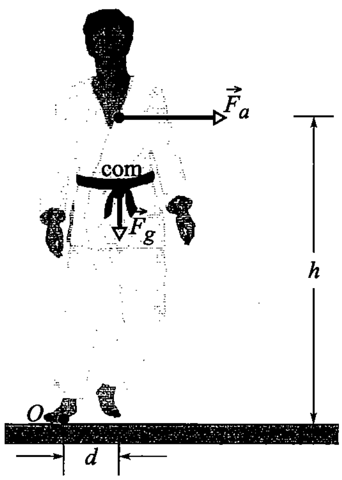
نیروهای وارد شده مطابق شکل، عبارت‌اند از: $F_1 = ۶/۰\,\mathrm{N}$، $F_2 = ۴/۰\,\mathrm{N}$، $F_3 = ۲/۰\,\mathrm{N}$ و $F_4 = ۵/۰\,\mathrm{N}$. هم‌چنین، داریم $R = ۱۲\,\mathrm{cm}$ و $r = ۵/۰\,\mathrm{cm}$. مطلوب است تعیین (الف) بزرگی و (ب) جهت شتاب زاویه‌ای استوانه (در حین دوران، نیروها زاویه‌ی خود را نسبت به استوانه حفظ می‌کنند).

** ۵۳ شکل ۱۰-۴۳ قرص یکنواختی را نشان می‌دهد، که مانند یک چرخ و فلک می‌تواند به دور مرکزش دوران کند. قرص با شعاع $۲/۰۰\,\mathrm{cm}$ و جرم ۲۰/۰ گرم در آغاز ساکن است. در زمان شروع دوران $t = ۰$، دو نیرو، مطابق شکل، به طور مماس بر کناره‌ی قرص وارد می‌شوند، به گونه‌ای که سرعت زاویه‌ای پادساعت‌گرد قرص در زمان $t = ۱/۲۵\,\mathrm{s}$، برابر با $۲۵۰\,\mathrm{rad/s}$ می‌شود. نیروی F_1 دارای بزرگی $۰/۱۰۰\,\mathrm{N}$ است. بزرگی F_2 چیست؟



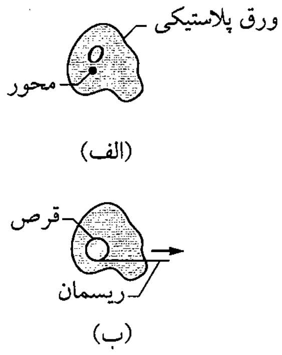
شکل ۱۰-۴۳ مسئله‌ی ۵۳.

** ۵۴ در حرکت پارویی مسابقه‌ی جودو، جودوکار پای چپ حریف را از زیر بدنش در حالی می‌روبد که لباس او را به همان طرف می‌کشد. در نتیجه، حریف روی پای راستش می‌چرخد و بر روی تشک می‌افتد. شکل ۱۰-۴۴ نمودار ساده شده‌ی حریف را در حالتی در مقابل جودوکار نشان می‌دهد که پای چپ حریف روبیده شده است. محور دوران از نقطه‌ی O می‌گذرد. نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد شده به او به طور مؤثر به مرکز جرمش اثر می‌کند، که فاصله‌ی آن از نقطه‌ی O، برابر است با $d = ۲۸\,\mathrm{cm}$. جرم حریف $۷۰\,\mathrm{kg}$ و لختی دورانی او نسبت به نقطه‌ی O برابر با $۶۵\,\mathrm{kg \cdot m^2}$ است. بزرگی شتاب زاویه‌ای آغازی او نسبت به نقطه‌ی O در حالت‌های زیر چقدر است؟ نیروی کشش $\vec{F}_a$ وارد شده به لباس حریف (الف) ناچیز است و (ب) افقی و به بزرگی $۳۰۰\,\mathrm{N}$ است، که در ارتفاع $h = ۱/۴\,\mathrm{m}$ به حریف وارد می‌شود.



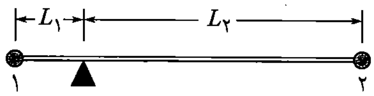
شکل ۱۰-۴۴ مسئله‌ی ۵۴.

** ۵۵ در شکل ۱۰-۴۵ الف، یک ورق پلاستیکی با شکل نامنظم و با ضخامت و چگالی (جرم یکای حجم) یکنواخت قرار است به دور یک محور عمود بر وجه ورق و گذرنده از نقطه‌ی O بچرخد. لختی دورانی این ورق نسبت به محور را با روش زیر اندازه می‌گیریم. قرصی دایره‌ای به جرم $۰/۵۰۰\,\mathrm{kg}$ و شعاع $۲/۰۰\,\mathrm{cm}$ را طوری به این ورق می‌چسبانیم که مرکزش در نقطه‌ی O باشد (شکل ۱۰-۴۵ ب). ریسمانی را به دور لبه‌ی قرص به مانند یک فرفره می‌پیچانیم و سپس ریسمان را به مدت $۵/۰۰\,\mathrm{s}$ می‌کشیم. در نتیجه، قرص و ورق با نیروی ثابت $۰/۴۰۰\,\mathrm{N}$ که به صورت مماس بر لبه‌ی قرص وارد شده است، می‌چرخد. تندی زاویه‌ای حاصل $۱۱۴\,\mathrm{rad/s}$ است. لختی دورانی ورق نسبت به محور چیست؟



شکل ۱۰-۴۵ مسئله‌ی ۵۵.

** ۵۶ شکل ۱۰-۴۶ دو ذره‌ی ۱ و ۲، هر یک به جرم m، را نشان می‌دهد. دو ذره به دو سر یک میله‌ی صُلب بی‌جرم به طول $L_1 + L_2$، که L_1 = ۲۰ cm و L_2 = ۸۰ cm، وصل شده‌اند. میله را به طور افقی روی تکیه‌گاه نگه می‌داریم و سپس آن را رها می‌کنیم. بزرگی شتاب آغازی (الف) ذره‌ی ۱ و (ب) ذره‌ی ۲، چقدر است؟



شکل ۱۰-۴۶ مسئله‌ی ۵۶.

*** ۵۷ قرقره‌ای با شعاع ۱۰ cm و لختی دورانی ۱٫۰×۱۰$^{-۳}$ kg·m^2 نسبت به محورش تحت تأثیر نیرویی به‌طور مماس بر کناره‌ی قرقره قرار می‌گیرد. بزرگی این نیرو برحسب زمان طبق معادله‌ی F = ۰٫۵۰t + ۰٫۳۰t^2 تغییر می‌کند، که در آن F برحسب نیوتون و t برحسب ثانیه است. قرقره در آغاز ساکن است. در زمان t = ۳٫۰ s، (الف) شتاب زاویه‌ای و (ب) تندی زاویه‌ای قرقره، چقدر است؟

پودمان ۱۰-۸ کار و انرژی جنبشی دورانی

* ۵۸ (الف) در شکل ۱۰-۱۹، داریم R = ۱۲ cm، M = ۴۰۰ g و m = ۵۰ g. تندی جسم را پس از پایین آمدن از حال سکون به اندازه‌ی ۵۰ cm، پیدا کنید. این مسئله را با استفاده کردن از اصل پایستگی انرژی حل کنید. (ب) محاسبه‌ی قسمت (الف) را به‌ازای R = ۵٫۰ cm تکرار کنید.

* ۵۹ میل‌لنگ موتور خودرویی در حالی که با تندی زاویه‌ای ۱۸۰۰ rev/min می‌چرخد، انرژی را با آهنگ ۱۰۰ قوه اسب (مساوی با ۷۴٫۶ kW) از موتور به محور منتقل می‌کند. گشتاور نیروی منتقل شده توسط میل‌لنگ (برحسب نیوتون ـ متر) چقدر است؟

* ۶۰ میله‌ی باریکی به طول ۰٫۷۵ m و جرم ۰٫۴۲ kg از یک سر به طور آزاد آویخته شده است. سر دیگر میله را به یک طرف می‌کشیم و سپس آن را رها می‌کنیم تا در حالی که از پایین‌ترین مکان با تندی زاویه‌ای ۴٫۰ rad/s می‌گذرد، مانند یک آونگ تاب بخورد. با چشم‌پوشی از اصطکاک و مقاومت هوا، (الف) انرژی جنبشی میله را در پایین‌ترین مکان پیدا کنید. (ب) مرکز جرم میله نسبت به پایین‌ترین مکان، چه اندازه بالا می‌رود؟

* ۶۱ چرخی به جرم ۳۲٫۰ kg که به شکل طوقه‌ای باریک به شعاع ۱٫۲۰ m است، با تندی ۲۸۰ rev/min می‌چرخد. این چرخ باید در مدت ۱۵٫۰ ثانیه متوقف شود. (الف) چقدر کار باید برای متوقف کردن چرخ انجام شود؟ (ب) توان متوسط لازم چقدر است؟

** ۶۲ در شکل ۱۰-۳۵، سه ذره، هر یک به جرم ۰٫۰۱۰۰ kg، به میله‌ای به طول L = ۶٫۰۰ cm و به جرم ناچیز چسبیده‌اند و میله می‌تواند به دور محوری عمود و گذرنده از نقطه‌ی O واقع در یک سر میله بچرخد. چقدر کار برای تغییر دادن آهنگ دورانی، (الف) از صفر تا ۲۰٫۰ rad/s، (ب) از ۲۰٫۰ rad/s تا ۴۰٫۰ rad/s و (پ) از ۴۰٫۰ rad/s تا ۶۰٫۰ rad/s، لازم است؟ (ت) شیب نمودار انرژی جنبشی دستگاه (برحسب ژول) نسبت به مجذور آهنگ دوران آن (برحسب مجذور رادیان بر مجذور ثانیه) چیست؟

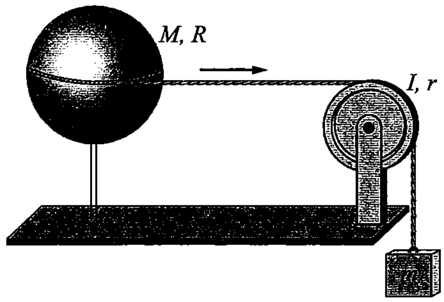
** ۶۳ یک خط‌کش چوبی یک متری را به طور قائم از یک سرش بر روی زمین نگه می‌داریم و سپس آن را رها می‌کنیم تا بیفتد. تندی سر دیگر خط‌کش را هنگام برخورد به سطح زمین، با این فرض که سر پایینی آن بر روی سطح نمی‌لغزد، پیدا کنید. (*راهنمایی:* خط‌کش را به صورت یک میله‌ی باریک در نظر بگیرید و از اصل پایستگی انرژی استفاده کنید).

** ۶۴ استوانه‌ی یکنواختی به شعاع ۱۰ cm و جرم ۲۰ kg طوری قرار داده شده است که می‌تواند به دور محوری افقی موازی با محور طولی مرکزی استوانه و به فاصله‌ی ۵٫۰ cm از این محور، بچرخد. (الف) لختی دورانی استوانه نسبت به این محور دوران چقدر است؟ (ب) اگر استوانه ازحال سکون طوری رها شود که محور طولی مرکزی‌اش با محور دوران استوانه هم ارتفاع باشد، تندی زاویه‌ای استوانه هنگام عبور از پایین‌ترین مکان چقدر است؟

*** ۶۵ یک دودکش بلند استوانه‌ای شکل پایه‌اش درهم می‌شکند

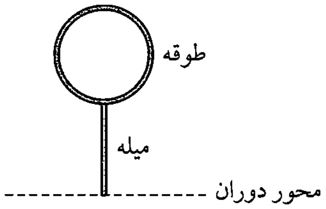
و سرنگون می‌شود. دودکش را به صورت میله‌ی باریکی به‌طول ۵۵٫۰ m در نظر بگیرید. در لحظه‌ای که دودکش در حین افتادن با راستای قائم زاویه‌ی ۳۵٫۰ درجه می‌سازد، (الف) شتاب شعاعی نوک دودکش و (ب) شتاب مماسی نوک دودکش چیست؟ (*راهنمایی:* از روش‌های انرژی استفاده کنید نه گشتاور نیرو). (پ) به ازای کدام زاویه‌ی θ شتاب مماسی برابر با g است؟

*** ۶۶ پوسته‌ی کروی یکنواختی به جرم $M =$ ۴٫۵ kg و شعاع $R =$ ۸٫۵ cm روی یاتاقان‌های بی‌اصطکاکی به دور یک محور قائم می‌چرخد (شکل ۱۰–۴۷). ریسمان بی‌جرمی به دور استوای پوسته‌ی کروی پیچیده شده و پس از عبور از روی قرقره‌ای با لختی دورانی $I =$ ۳٫۰×۱۰$^{-۳}$kg·m^{۲} و شعاع $r =$ ۵٫۰ cm، به شیء کوچکی به جرم $m =$ ۰٫۶۰ kg وصل شده است. محور قرقره اصطکاک ندارد و ریسمان بر روی قرقره نمی‌لغزد. تندی شیء پس از سقوط از حالت سکون به اندازه‌ی ۸۲ cm، چقدر است؟ از روش انرژی استفاده کنید.



شکل ۱۰–۴۷ مسئله‌ی ۶۶.

*** ۶۷ شکل ۱۰–۴۸ مجموعه‌ی صُلبی از یک طوقه‌ی باریک (به جرم m و شعاع $R =$ ۰٫۱۵۰ m) و میله‌ی شعاعی باریکی (به جرم m و طول $L =$ ۲٫۰۰ R) را نشان می‌دهد. این مجموعه به طور قائم قرار گرفته است، اما اگر ضربه‌ی کوچکی به آن بزنیم، به دور یک محور افقی واقع در صفحه‌ی میله و طوقه و گذرنده از انتهای پایینی میله می‌چرخد. با این فرض که انرژی داده شده به مجموعه از طریق ضربه ناچیز است، تندی زاویه‌ای مجموعه به دور محور دوران وقتی که از وضعیت رو به زیر (وارون) عبور می‌کند، چیست؟

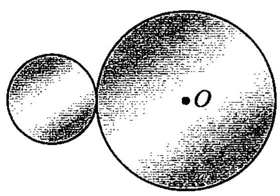


شکل ۱۰–۴۸ مسئله‌ی ۶۷.

مسئله‌های بیشتر

۶۸ دو کره‌ی توپر یکنواخت دارای جرم یکسان ۱٫۶۵ kg هستند، اما شعاع یکی از آن‌ها ۰٫۲۲۶ m و شعاع دیگری ۰٫۸۵۴ m است. هر کره می‌تواند به دور یک محور گذرنده از مرکزش دوران کند. (الف) بزرگی گشتاور نیروی لازم τ، برای آنکه کره‌ی کوچک‌تر در مدت ۱۵٫۵ ثانیه از حال سکون به تندی زاویه‌ای ۳۱۷ rad/s برسد، چقدر است؟ (ب) بزرگی نیروی F که باید به طور مماس بر دایره‌ی استوای کره وارد شود تا این مقدار گشتاور نیرو را ایجاد کند، چیست؟ همین مقادیر (پ) τ و (ت) F، برای کره‌ی بزرگ‌تر چه باید باشند؟

۶۹ در شکل ۱۰–۴۹، یک قرص کوچک به شعاع $r =$ ۲٫۰۰ cm به لبه‌ی یک قرص بزرگ به شعاع $R =$ ۴٫۰۰ cm به گونه‌ای چسبیده است که قرص‌ها در یک صفحه قرار دارند. این قرص‌ها می‌توانند به دور یک محور عمودی گذرنده از نقطه‌ی O واقع در مرکز قرص بزرگ بچرخند. این دو قرص دارای چگالی (جرم یکای حجم) یکنواخت ۱٫۴۰×۱۰^{۳}kg/m^{۳} و ضخامت یکنواخت ۵٫۰۰ mm هستند. لختی دورانی مجموعه‌ی دو قرص نسبت به محور دوران گذرنده از نقطه‌ی O چیست؟

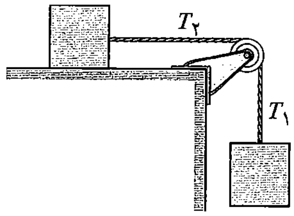


شکل ۱۰–۴۹ مسئله‌ی ۶۹.

۷۰ چرخی از حال سکون با شتاب زاویه‌ای ثابت ۲٫۰۰ rad/s^{۲} شروع به چرخیدن می‌کند. این چرخ در یک بازه‌ی زمانی معین

۳٫۰۰s به‌اندازه‌ی ۹۰٫۰rad می‌چرخد. (الف) سرعت زاویه‌ای چرخ در شروع بازه‌ی زمانی ۳٫۰۰s چقدر است؟ (ب) این چرخ تا شروع بازه‌ی زمانی ۳٫۰۰s چه زاویه‌ای را طی می‌کند؟

۷۱ در شکل ۱۰–۵۰، دو جسم، هر یک به جرم ۶٫۲۰kg، با یک ریسمان بی‌جرم که از روی قرقره‌ای به شعاع ۲٫۴۰cm و لختی دورانی $۷٫۴۰ \times ۱۰^{-۴} \mathrm{kg \cdot m^۲}$ گذشته است، به هم وصل شده‌اند. این ریسمان بر روی قرقره نمی‌لغزد و ما نمی‌دانیم که آیا بین میز و جسم در حال لغزیدن بر روی آن اصطکاک وجود دارد یا نه، اما محور قرقره بی‌اصطکاک است. هرگاه این دستگاه را از حال سکون رها کنیم، قرقره در مدت ۹۱٫۰ms به اندازه‌ی زاویه‌ی ۰٫۱۳۰rad می‌چرخد و شتاب دو جسم ثابت است. (الف) بزرگی شتاب زاویه‌ای قرقره، (ب) بزرگی شتاب هر جسم، (پ) نیروی کشش ریسمان $T_۱$ و (ت) نیروی کشش ریسمان $T_۲$، چیست؟

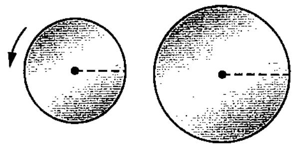


شکل ۱۰–۵۰ مسئله‌ی ۷۱.

۷۲ دو گلوله‌ی کوچک، هر یک به جرم ۱٫۰۶kg، به هر سر یک میله‌ی فولادی باریک به طول ۱٫۲۰m و جرم ۶٫۴۰kg، وصل شده‌اند. این میله محدود به چرخیدن در صفحه‌ای افقی به دور یک محور قائم گذرنده از وسط میله است. میله در لحظه‌ای خاص با تندی زاویه‌ای ۳۹٫۰rev/s در حال چرخیدن است، اما به خاطر وجود اصطکاک حرکتش کند و پس از گذشت ۳۲٫۰s متوقف می‌شود. با فرض ثابت بودن گشتاور نیروی کُند کننده‌ی وارد شده، مطلوب است محاسبه‌ی (الف) شتاب زاویه‌ای، (ب) گشتاور نیروی کُند کننده، (پ) انرژی کل تبدیل شده از صورت مکانیکی به صورت گرمایی بر اثر اصطکاک و (ت) عده‌ی دورهایی که میله در مدت ۳۲٫۰s می‌زند. (ث) اکنون، فرض کنید که می‌دانیم گشتاور نیروی کُند کننده ثابت نیست. در صورت امکان، هر یک از کمیت‌های مربوط به قسمت‌های (الف)، (ب)، (پ) و (ت) را باز هم بدون در دست داشتن اطلاعات اضافی می‌توان حساب کرد. مقدار هر کمیت را پیدا کنید.

۷۳ پره‌ی یکنواخت چرخانه‌ی یک هلیکوپتر به طول ۷٫۸۰m دارای جرم ۱۱۰kg است و با یک تک پیچ به محور چرخانه وصل شده است. (الف) وقتی چرخانه با تندی ۳۲۰rev/min می‌چرخد، بزرگی نیرویی که محور به پیچ وارد می‌کند چقدر است؟ (*راهنمایی:* برای انجام دادن این محاسبه پره را می‌توان به صورت جرمی نقطه‌ای واقع در مرکز جرمش در نظر گرفت. چرا؟) (ب) گشتاور نیروی لازم را که باید به چرخانه وارد شود تا پره در مدت ۶٫۷۰s از حال سکون به تندی نهایی برسد، حساب کنید. از مقاومت هوا چشم‌پوشی کنید. (در این حالت، برای انجام دادن این محاسبه پره را نمی‌توان به صورت جرمی نقطه‌ای در نظر گرفت. چرا؟ توزیع جرم را به صورت یک میله‌ی باریک یکنواخت فرض کنید). (پ) گشتاور نیرو چقدر کار روی پره انجام می‌دهد تا پره به تندی زاویه‌ای ۳۲۰rev/min برسد؟

۷۴ ***قرص‌های مسابقه دهنده.*** شکل ۱۰–۵۱ دو قرص را نشان می‌دهد که مانند یک چرخ و فلک می‌توانند به دور مرکزهای خود بچرخند. در زمان $t = ۰$ خط‌های مرجع دو قرص هم‌خط هستند. قرص A از پیش با سرعت زاویه‌ای ثابت ۹٫۵rad/s در حال چرخیدن است. قرص B ساکن بوده است، اما حالا با شتاب زاویه‌ای ثابت $۲٫۲ \mathrm{rad/s^۲}$ شروع به چرخش می‌کند. (الف) در چه زمان t، خط‌های مرجع دو قرص در یک لحظه دارای جابه‌جایی زاویه‌ای یکسان و مساوی با θ می‌شوند؟ (ب) آیا این زمان t نخستین بار پس از زمان $t = ۰$ خواهد بود که خط‌های مرجع در یک لحظه هم‌خط می‌شوند؟



شکل ۱۰–۵۱ مسئله‌ی ۷۴.

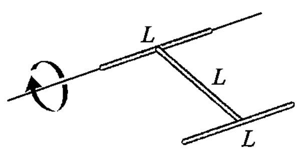
۷۵ بندبازها همیشه تلاش می‌کنند مرکز جرم خود را در روی بند (سیم یا طناب) نگه‌دارند. بندباز برای حفظ کردن توازن، به طور

معمول، یک تیر سنگین و بلند را با خود حمل می‌کند. اگر به‌عنوان مثال، او به‌سمت راست کج شود (مرکزجرمش به‌سمت راست حرکت کند) و درمعرض چرخش به‌دور بند قرار گیرد تیر را به‌سمت چپ خود حرکت می‌دهد (مرکز جرمش به سمت چپ حرکت می‌کند) تا چرخش را کُند و برای حفظ کردن توازن فرصت پیدا کند. فرض کنید بندباز دارای جرم ۷۰٫۰ kg و لختی دورانی ۱۵٫۰ $\mathrm{kg \cdot m^2}$ نسبت به‌بند است. اگرمرکز جرم بندباز به‌اندازه‌ی ۵٫۰ cm به طرف راست بند برود، بزرگی شتاب زاویه‌ای او به دور بند در حالت‌های زیر: بندباز (الف) هیچ تیری را حمل نمی‌کند و (ب) تیری به جرم ۱۴٫۰ kg حمل می‌کند که مرکز جرمش به‌اندازه‌ی ۱۰ cm درسمت چپ بند واقع است، چیست؟

۷۶ چرخی در زمان $t = 0$ از حال سکون با شتاب زاویه‌ای ثابت شروع به چرخیدن می‌کند. در زمان $t = 2.0\ \mathrm{s}$ سرعت زاویه‌ای چرخ ۵٫۰ rad/s است. این شتاب تا زمان $t = 20\ \mathrm{s}$ ادامه دارد و در آن لحظه ناگهان قطع می‌شود. چرخ در بازه‌ی زمانی $t = 0$ تا $t = 40\ \mathrm{s}$ تحت چه زاویه‌ای می‌چرخد؟

۷۷ صفحه‌ی $33\frac{1}{3}$ rev/min گرامافونی پس از خاموش کردن دستگاه حرکتش کند و ۳۰ ثانیه بعد متوقف می‌شود. (الف) شتاب زاویه‌ای (ثابت) صفحه را برحسب دور بر مجذور دقیقه پیدا کنید. (ب) صفحه در این مدت چند دور چرخیده است؟

۷۸ جسم صُلبی از سه میله‌ی باریک مشابه، هر یک به طول $L = 0.600\ \mathrm{m}$، که به صورت حرف **H** به هم وصل شده‌اند، ساخته شده است (شکل ۱۰-۵۲). این جسم می‌تواند آزادانه به دور محور افقی گذرنده از یکی از ساق‌های حرف **H** بچرخد. جسم را رها می‌کنیم تا از حال سکون و از وضعیتی که صفحه‌ی **H** به صورت افقی است، سقوط کند. تندی زاویه‌ای جسم در موقعی که صفحه‌ی **H** به حالت قائم قرار می‌گیرد، چقدر است؟



شکل ۱۰-۵۲ مسئله‌ی ۷۸.

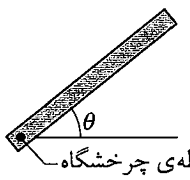
۷۹ (الف) نشان دهید که لختی دورانی یک استوانه‌ی توپر به جرم M و شعاع R نسبت به محور مرکزی‌اش برابر است با لختی دورانی یک طوقه‌ی نازک به جرم M و شعاع $R/\sqrt{2}$ نسبت به‌محور مرکزی آن. (ب) نشان دهید که لختی دورانی I جسمی به جرم M نسبت به هر محور برابر است با لختی دورانی یک ***طوقه‌ی هم‌ارز*** نسبت به همان محور، به شرطی که جرم طوقه همان M باشد و شعاع آن k، از رابطه‌ی زیر به‌دست آید

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

شعاع طوقه‌ی هم‌ارز k، را ***شعاع چرخش*** جسم مورد نظر می‌نامند.

۸۰ قرصی درمدت ۶٫۰۰ s با شتاب زاویه‌ای ثابت ازمکان زاویه‌ای $\theta_1 = 10.0\ \mathrm{rad}$ تا مکان زاویه‌ای $\theta_2 = 70.0\ \mathrm{rad}$ می‌چرخد. سرعت زاویه‌ای قرص درمکان زاویه‌ای θ_2 برابر با ۱۵٫۰ rad/s است. (الف) سرعت زاویه‌ای قرص در مکان θ_1 چقدر بوده است؟ (ب) شتاب زاویه‌ای قرص چقدر است؟ (پ) این قرص ابتدا در کدام مکان زاویه‌ای ساکن بوده است؟ (ت) نمودار θ برحسب t و نیز نمودار تندی زاویه‌ای ω برحسب t مربوط به قرص را، از آغاز حرکت (پس از زمان $t = 0$) رسم کنید.

۸۱ میله‌ی یکنواخت باریک نشان داده شده در شکل ۱۰-۵۳، ۲٫۰ m طول دارد و می‌تواند به دور یک نقطه‌ی چرخشگاه بی‌اصطکاک افقی واقع در یک سرش بچرخد. این میله از حال سکون تحت زاویه‌ی $\theta = 40^\circ$ در بالای افق رها می‌شود. با استفاده کردن از اصل پایستگی انرژی تندی زاویه‌ای میله را در هنگام عبور از حالت افقی معین کنید.



شکل ۱۰-۵۳ مسئله‌ی ۸۱.

۸۲ جورج واشینگتن گیل فریس[1] که دانش آموخته‌ی مهندسی عمران از انستیتو پلی تکنیک رنسلر[2] بود، نخستین چرخ و فلک

1. George Washington Gale Ferris, Jr.
2. Rensselaer Polytechnic

با محور افقی را برای نمایشگاه جهانی سال ۱۸۹۳ کلمبیا در شیکاگو ساخت. این چرخ و فلک که در آن زمان ساختار مهندسی شگفت‌آوری بود، ۳۶ کالسکه‌ی چوبی داشت که هر کدام تا ۶۰ مسافر را در خود جای می‌داد و کالسکه‌ها روی دایره‌ای به قطر ۷۶ m می‌چرخیدند. هر بار ۶ کالسکه به طور هم‌زمان مسافرگیری می‌کردند و پس از آن که ظرفیت هر ۳۶ کالسکه کامل می‌شد چرخ و فلک یک دور کامل را با تندی زاویه‌ای ثابت در مدتی در حدود ۲ min می‌پیمود. مقدار کار لازم را برای آنکه این دستگاه فقط بتواند مسافرها را بچرخاند، برآورد کنید.

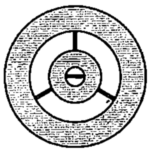
۸۳ در شکل ۱۰-۴۱، دو جسم به جرم‌های m_1 = ۴۰۰ g و m_2 = ۶۰۰ g با یک ریسمان بی‌جرم پیچیده شده به دور یک قرص یکنواخت به جرم M = ۵۰۰ g و شعاع R = ۱۲٫۰ cm، به هم وصل شده‌اند. این قرص می‌تواند بی‌اصطکاک به دور یک محور افقی ثابت گذرنده از مرکزش بچرخد؛ ریسمان نمی‌تواند بر روی قرص بلغزد. این دستگاه را از حال سکون رها می‌کنیم. (الف) بزرگی شتاب دو جسم، (ب) نیروی کشش T_1 در ریسمان سمت چپ و (پ) نیروی کشش T_2 در ریسمان سمت راست، را پیدا کنید.

۸۴ در ساعت ۷:۱۴ صبح روز ۳۰ ژوئن سال ۱۹۰۸ (۹ تیر سال ۱۲۸۷) انفجار مهیبی در بالای منطقه‌ی سیبری مرکزی در عرض جغرافیایی ۶۱ درجه‌ی شمالی و طول جغرافیایی ۱۰۲ درجه‌ی خاوری، رخ داد؛ آتشین گوی تولید شده روشن‌ترین درخشی بود که پیش از استفاده کردن از سلاح‌های هسته‌ای مشاهده شده بود. ***حادثه‌ی تانگوسکا***[1]، که بنا به اظهار یک شاهد عینی «بخش عظیمی از آسمان را پوشانده بود»، به احتمال، حاصل انفجار یک ***سیارک سنگی*** به پهنای حدود ۱۴۰ m بوده است. (الف) فقط با در نظر گرفتن دوران زمین، معین کنید این سیارک تا چه مدت اگر دیرتر می‌رسید، انفجار در بالای شهر هلسینکی (فنلاند) در طول جغرافیایی ۲۵ درجه‌ی خاوری روی می‌داد. و هلسینکی را نابود می‌کرد. (ب) اگر سیارک یک ***سیارک فلزی*** می‌بود، می‌توانست به سطح زمین برسد. این سیارک چه مدت باید دیرتر می‌رسید تا در سطح اقیانوس اطلس در طول جغرافیایی ۲۰ درجه‌ی باختری به زمین برخورد کند؟ (سونامی یا دریالرزه‌ی حاصل از این برخورد می‌توانست تمدن کرانه‌های دو طرف اقیانوس اطلس را محو کند).

۸۵ یک توپ گلف تحت زاویه‌ی ۲۰ درجه نسبت به افق با تندی ۶۰ m/s و آهنگ دوران ۹۰ rad/s پرتاب می‌شود. با چشم‌پوشی از نیروی پسار هوا، عده‌ی دورهایی را که توپ تا رسیدن به ارتفاع بیشینه می‌زند، معین کنید.

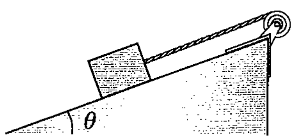
۸۶ شکل ۱۰-۵۴ ساختاری تخت از دو حلقه‌ی دایره‌ای هم‌مرکز را نشان می‌دهد که با سه میله‌ی با جرم ناچیز به هم وصل شده‌اند. این ساختار که در آغاز در حال سکون است، می‌تواند (مانند یک چرخ و فلک) به دور مرکز مشترک، که در آن میله‌ی دیگری با جرم ناچیز قرار دارد، بچرخد. جرم، شعاع درونی و شعاع بیرونی حلقه‌ها در جدول زیر داده شده‌اند. یک نیروی مماسی با بزرگی ۱۲٫۰ N به مدت ۰٫۳۰۰ s به لبه‌ی خارجی حلقه‌ی بیرونی وارد می‌شود. تغییر تندی زاویه‌ای این ساختار در این بازه‌ی زمانی چقدر است؟

حلقه	جرم (kg)	شعاع درونی (m)	شعاع بیرونی (m)
۱	۰٫۱۲۰	۰٫۰۱۶۰	۰٫۰۴۵۰
۲	۰٫۲۴۰	۰٫۰۹۰۰	۰٫۱۴۰۰



شکل ۱۰-۵۴ مسئله‌ی ۸۶.

۸۷ در شکل ۱۰-۵۵، چرخی به‌شعاع ۰٫۲۰ m بر روی یک محور افقی بی‌اصطکاک نصب شده است. یک ریسمان بی‌جرم پیچیده شده به دور این چرخ به جعبه‌ای به جرم ۲٫۰ kg واقع بر روی



شکل ۱۰-۵۵ مسئله‌ی ۸۷.

1. Tunguska Event

سطح شیب‌دار بی‌اصطکاکی با زاویه‌ی $\theta = ۲۰^\circ$ نسبت به افق، وصل شده است. این جعبه با شتاب $۲/۰\,\mathrm{m/s^2}$ به پایین سطح حرکت می‌کند. لختی دورانی چرخ نسبت به محور چقدر است؟

۸۸ شعاع یک پوسته‌ی کروی نازک $۱/۹۰\,\mathrm{m}$ است. با وارد کردن یک گشتاور نیروی $۹۶۰\,\mathrm{N\cdot m}$ پوسته دارای شتاب زاویه‌ای $۶/۲۰\,\mathrm{rad/s^2}$ به دور محور گذرنده از مرکزش می‌شود. (الف) لختی دورانی پوسته نسبت به این محور و (ب) جرم پوسته، چقدر است؟

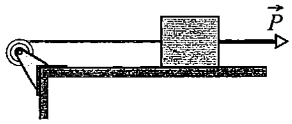
۸۹ دوچرخه سواری به جرم $۷۰\,\mathrm{kg}$ در هنگام رکاب زدن در یک سر بالایی کل جرمش را روی رکابی اعمال می‌کند که در حال رفتن به سمت پایین است. قطر دایره‌ای را که تحت آن رکاب می‌چرخد $۰/۴۰\,\mathrm{m}$ بگیرید و بزرگی گشتاور نیروی بیشینه‌ای را که دوچرخه‌سوار نسبت به محور دوران رکاب‌ها وارد می‌کند، معین کنید.

۹۰ چرخ لنگر یک موتور باتندی $۲۵/۰\,\mathrm{rad/s}$ می‌چرخد. وقتی موتور خاموش می‌شود چرخ لنگر حرکتش با آهنگ ثابت کُند و پس از $۲۰/۰\,\mathrm{s}$ متوقف می‌شود. مطلوب است محاسبه‌ی (الف) شتاب زاویه‌ای چرخ لنگر، (ب) زاویه‌ی پیموده شده توسط چرخ تا لحظه‌ی توقف و (پ) عده‌ی دورهایی که چرخ لنگر تا لحظه‌ی توقف می‌زند.

۹۱ در شکل ۱۰–۱۹ الف، چرخی به شعاع $۰/۲۰\,\mathrm{m}$ بر روی یک محور افقی بی‌اصطکاک سوار شده است. لختی دورانی چرخ نسبت به محور $۰/۴۰\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ است. ریسمان بی‌جرمی که به دور محیط چرخ پیچیده شده به جعبه‌ای به جرم $۶/۰\,\mathrm{kg}$ وصل شده است. این دستگاه از حال سکون رها می‌شود. وقتی انرژی جنبشی جعبه $۶/۰\,\mathrm{J}$ است، (الف) انرژی جنبشی دورانی چرخ و (ب) مسافتی که طی آن جعبه سقوط می‌کند، چقدر است؟

۹۲ خورشید به اندازه‌ی $۲/۳\times۱۰^۴\,\mathrm{ly}$ (ly نماد سال نوری است) از مرکز کهکشان راه شیری فاصله دارد و با تندی $۲۵۰\,\mathrm{km/s}$ روی دایره‌ای به دور این مرکز حرکت می‌کند. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا خورشید به دور مرکز کهکشان یک دور بچرخد؟ (ب) از حدود $۴/۵\times۱۰^۹$ سال پیش تاکنون، خورشید چند دور به دور این مرکز چرخیده است؟

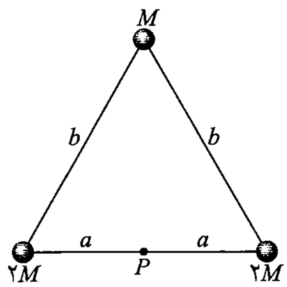
۹۳ چرخی به شعاع $۰/۲۰\,\mathrm{m}$ روی محور افقی بی‌اصطکاکی سوار شده است. لختی دورانی چرخ نسبت به محور $۰/۰۵۰\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ است. ریسمان بی‌جرمی که به دور چرخ پیچیده شده، به جسمی ۲/۰ کیلوگرمی وصل شده است و این جسم روی یک سطح افقی بی‌اصطکاک می‌لغزد. اگر یک نیروی افقی به بزرگی $P = ۳/۰\,\mathrm{N}$، مطابق شکل ۱۰–۵۶، به جسم وارد شود، بزرگی شتاب زاویه‌ای چرخ چقدر است؟ فرض کنید ریسمان بر روی چرخ نمی‌لغزد.



شکل ۱۰–۵۶ مسئله‌ی ۹۳.

۹۴ اگر هواپیمایی با تندی $۴۸۰\,\mathrm{km/h}$ نسبت به زمین پرواز کند و ملخ آن با سرعت $۲۰۰۰\,\mathrm{rev/min}$ بچرخد، تندی خطی یک نقطه‌ی واقع بر نوک ملخ، در فاصله‌ی $۱/۵\,\mathrm{m}$ از محور دوران، (الف) از دید خلبان و (ب) از دید ناظر روی زمین، چقدر است؟ سرعت هواپیما با محور دوران ملخ موازی است.

۹۵ جسم صُلب نشان داده شده در شکل ۱۰–۵۷، شامل سه ذره است که با میله‌های بی‌جرم به هم وصل شده‌اند. می‌خواهیم این جسم را به دور یک محور عمود بر صفحه‌ی آن و گذرنده از نقطه‌ی P بچرخانیم. به ازای $M = ۰/۴۰\,\mathrm{kg}$، $a = ۳۰\,\mathrm{cm}$ و $b = ۵۰\,\mathrm{cm}$، چقدر کار لازم است انجام شود تا جسم از حال سکون به تندی زاویه‌ای $۵/۰\,\mathrm{rad/s}$ برسد؟

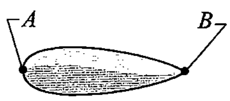


شکل ۱۰–۵۷ مسئله‌ی ۹۵.

۹۶ ***مهندسی نوشابه‌ها.*** ساخت دَر قوطی نوشابه که با کشیدن حلقه‌ای باز می‌شود، پیشرفت بزرگی در طراحی مهندسی

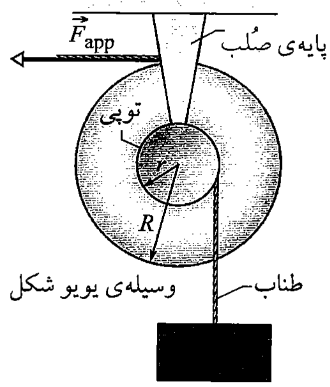
قوطی‌های نوشابه بوده است. چرخشگاه حلقه روی کشوی مرکزی دَر قوطی قرار دارد. وقتی یک سر حلقه را بالا می‌کشیم سر دیگر آن در محلی که روی دَر قوطی خط‌دار شده است به پایین‌سو فشرده می‌شود. اگر حلقه را با نیروی ۱۰ N به بالاسو بکشیم، بزرگی تقریبی نیروی وارد شده به قسمت خط‌دار شده چقدر است؟ (لازم است یک قوطی باز شونده با حلقه را آزمایش کنید).

۹۷ شکل ۱۰–۵۸ یک پره‌ی ملخی را نشان می‌دهد که با تندی ۲۰۰۰ rev/min به دور یک محور عمودی گذرنده از نقطه‌ی B می‌چرخد. نقطه‌ی A در نوک بیرونی پره و در فاصله‌ی شعاعی ۱/۵۰ m قرار دارد. (الف) اختلاف میان بزرگی‌های a، شتاب مرکزگرای نقطه‌ی A و یک نقطه‌ی واقع در فاصله‌ی شعاعی ۰/۱۵۰ m چقدر است؟ (ب) شیب نمودار تغییرات a برحسب فاصله‌ی شعاعی در طول پره را پیدا کنید.



شکل ۱۰–۵۸ مسئله‌ی ۹۷.

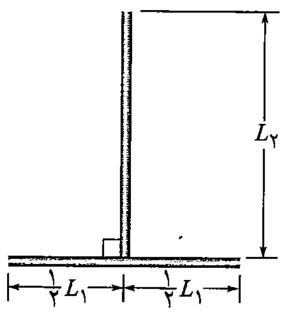
۹۸ وسیله‌ای یویو شکل، که بر روی یک محور بی‌اصطکاک افقی سوار شده است، برای بلند کردن یک جعبه‌ی ۳۰ کیلوگرمی، مطابق شکل ۱۰–۵۹، به کار می‌رود. این وسیله دارای شعاع بیرونی $R = ۰/۵۰\ m$ و شعاع توپی $r = ۰/۲۰\ m$ است. هرگاه یک نیروی افقی ثابت $\vec{F}_{app}$ به بزرگی ۱۴۰ N را به طناب پیچیده شده به دور قسمت بیرونی وسیله وارد کنیم، جعبه‌ی آویخته شده از طناب پیچیده شده به دور توپی دارای شتاب بالاسوی $۰/۸۰\ m/s^۲$ می‌شود. لختی دورانی این وسیله نسبت به محور دوران آن چیست؟



شکل ۱۰–۵۹ مسئله‌ی ۹۸.

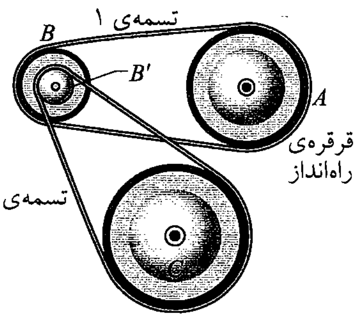
۹۹ گلوله‌ی کوچکی به جرم ۱/۳۰ kg در یک سر میله‌ای به طول ۰/۷۸۰ m و با جرم ناچیز قرار داده شده است. این دستگاه با تندی زاویه‌ای ۵۰۱۰ rev/min در روی دایره‌ای افقی به دور سر دیگر میله می‌چرخد. (الف) لختی دورانی این دستگاه را نسبت به محور دوران حساب کنید. (ب) نیروی پسار هوا که برابر با $۲/۳۰ \times ۱۰^{-۲}\ N$ است، در خلاف جهت حرکت به گلوله وارد می‌شود. چه گشتاور نیرویی باید به دستگاه وارد شود تا آن را با تندی ثابت بچرخاند؟

۱۰۰ دو میله‌ی باریک (هر یک به جرم ۰/۲۰ kg) به هم وصل شده‌اند تا جسم صُلب نشان داده شده در شکل ۱۰–۶۰ را تشکیل دهند. طول یکی از میله‌ها $L_۱ = ۰/۴۰\ m$ و طول میله‌ی دیگر $L_۲ = ۰/۵۰\ m$ است. لختی دورانی این جسم صُلب نسبت به (الف) محور عمود بر صفحه‌ی شکل و گذرنده از مرکز میله‌ی کوتاه‌تر و (ب) محور عمود بر صفحه‌ی شکل و گذرنده از مرکز میله‌ی بلندتر، چیست؟



شکل ۱۰–۶۰ مسئله‌ی ۱۰۰.

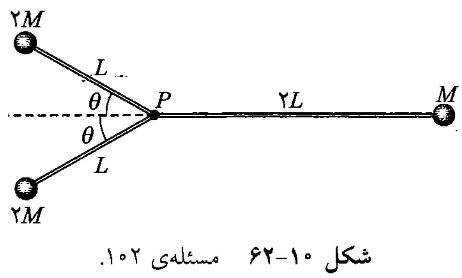
۱۰۱ در شکل ۱۰–۶۱، چهار قرقره با دو تسمه به یکدیگر وصل شده‌اند. قرقره‌ی A (به شعاع ۱۵ cm) قرقره‌ی راه‌انداز است و با تندی زاویه‌ای ۱۰ rad/s می‌چرخد. قرقره‌ی B (به شعاع ۱۰ cm) با تسمه‌ی ۱ به قرقره‌ی A وصل شده است. قرقره‌ی B' (به شعاع ۵ cm) با قرقره‌ی B هم مرکز و به آن محکم وصل شده است. قرقره‌ی C (به شعاع ۲۵ cm) با تسمه‌ی ۲ به قرقره‌ی B' وصل شده است. مطلوب است محاسبه‌ی (الف)



شکل ۱۰-۶۱ مسئله‌ی ۱۰۱.

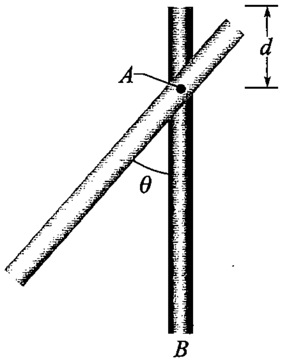
تندی خطی یک نقطه از تسمه‌ی ۱، (ب) تندی زاویه‌ای قرقره‌ی B، (پ) تندی زاویه‌ای قرقره‌ی B'، (ت) تندی خطی یک نقطه از تسمه‌ی ۲ و (ث) تندی زاویه‌ای قرقره‌ی C. (*راهنمایی:* اگر تسمه‌ی بین دو قرقره نلغزد، تندی‌های خطی در کناره‌های آن دو قرقره باید یکسان باشند).

۱۰۲ شیء صُلب نشان داده شده در شکل ۱۰-۶۲، شامل سه گلوله و سه میله‌ی اتصال با مشخصات $M =$ ۱٫۶ kg، $L =$ ۰٫۶۰ m و $\theta =$ °۳۰ است. گلوله‌ها را می‌توان به صورت ذره در نظر گرفت و جرم میله‌های اتصال ناچیز است. مطلوب است تعیین انرژی جنبشی دورانی جسم در هنگام دوران با تندی زاویه‌ای ۱٫۲ rad/s به دور محور گذرنده از نقطه‌ی P، در حالت‌هایی که، (الف) محور عمود بر صفحه‌ی شکل و (ب) محور عمود بر میله‌ی با طول $2L$ و واقع در صفحه‌ی شکل، است.



شکل ۱۰-۶۲ مسئله‌ی ۱۰۲.

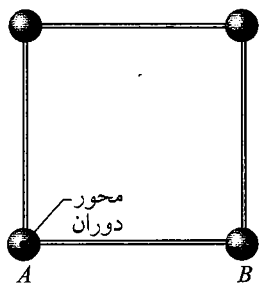
۱۰۳ در شکل ۱۰-۶۳، میله‌ی یکنواخت باریکی (به جرم ۳٫۰ kg و به طول ۴٫۰ m) آزادانه به دور محور افقی A می‌چرخد. محور A عمود بر میله و گذرنده از نقطه‌ای به فاصله‌ی $d =$ ۱٫۰ m از انتهای میله است. انرژی جنبشی میله در هنگام عبور از مکان قائم ۲۰ J است. (الف) لختی دورانی میله نسبت به محور A چقدر است؟ (ب) تندی (خطی) نقطه‌ی B انتهای



شکل ۱۰-۶۳ مسئله‌ی ۱۰۳.

میله در هنگام عبور میله از مکان قائم چیست؟ (پ) میله به‌ازای چه زاویه‌ای از θ در هنگام تاب خوردن به بالاسو به طور لحظه‌ای متوقف می‌شود؟

۱۰۴ چهار ذره، هر یک به جرم ۰٫۲۰ kg، در گوشه‌های یک مربع به ضلع ۰٫۵۰ m قرار دارند. این ذره‌ها با چهار میله به جرم ناچیز به یکدیگر وصل شده‌اند. جسم صُلب تشکیل شده می‌تواند در یک صفحه‌ی قائم به دور محور افقی A، گذرنده از یکی از ذره‌ها بچرخد. این جسم را در حالی که میله‌ی AB افقی است (شکل ۱۰-۶۴)، از حال سکون رها می‌کنیم. (الف) لختی دورانی جسم نسبت به محور A چیست؟ (ب) تندی زاویه‌ای جسم به دور محور A، در هنگامی که میله‌ی AB به حالت قائم قرار دارد، چقدر است؟



شکل ۱۰-۶۴ مسئله‌ی ۱۰۴.

۱۰۵ ناظرانی که با وسایل نقلیه‌ای مانند جیپ پهلو به پهلوی یوزپلنگ‌ها حرکت کرده‌اند، گزارش داده‌اند که تندی گیج‌کننده‌ی یوزپلنگ‌ها ۱۱۴ km/h (در حدود ۷۱ mi/h) بوده است. فرض کنید می‌خواهید تندی یوزپلنگ را با پهلو به پهلو قرار دادن جیپ با حیوان و با نگاه کردن به تندی‌سنج

خودرو که عدد $114\,\mathrm{km/h}$ را نشان می‌دهد، اندازه بگیرید. جیپ را در فاصله‌ی $8/0$ متری یوزپلنگ می‌رانید اما صدای موتور خودرو موجب می‌شود یوزپلنگ رفته رفته نسبت به مسیر جیپ تغییر جهت بدهد و یک مسیر دایره‌ای به شعاع $92\,\mathrm{m}$ را بپیماید. از این رو، شما هم در یک مسیر دایره‌ای به شعاع $100\,\mathrm{m}$ حرکت می‌کنید. (الف) تندی زاویه‌ای شما و یوزپلنگ در این مسیرهای دایره‌ای چقدر است؟ (ب) تندی خطی یوزپلنگ در مسیر خودش چقدر است؟ (اگر حرکت دایره‌ای را در نظر بگیرید، نتیجه خواهید گرفت که تندی یوزپلنگ هم $114\,\mathrm{km/h}$ است، و این اشتباهی است که در گزارش‌های منتشر شده وجود دارد).

۱۰۶ تندی یک نقطه‌ی واقع بر لبه‌ی یک چرخ چاقو تیزکنی به قطر $0/75\,\mathrm{m}$، در مدت $6/2\,\mathrm{s}$ با آهنگ ثابت از $12\,\mathrm{m/s}$ به $25\,\mathrm{m/s}$ تغییر می‌کند. شتاب زاویه‌ای متوسط این چرخ چقدر است؟

۱۰۷ بر روی محیط یک چرخ قرقره‌ای به قطر $8/0\,\mathrm{cm}$، طنابی به طول $5/6\,\mathrm{m}$ پیچیده شده است. به این چرخ از حال سکون شتاب زاویه‌ای ثابت $1/5\,\mathrm{rad/s}$ داده می‌شود. (الف) این چرخ به اندازه‌ی چه زاویه‌ای باید بچرخد تا طناب به طور کامل باز شود؟ (ب) این کار چه مدت طول می‌کشد؟

۱۰۸ یک صفحه‌ی گرامافون با تندی زاویه‌ای $33\frac{1}{3}\,\mathrm{rev/min}$ می‌چرخد. (الف) تندی زاویه‌ای صفحه برحسب رادیان بر ثانیه چقدر است؟ تندی خطی نقطه‌ای از این صفحه واقع در فاصله‌ی (ب) $15\,\mathrm{cm}$ و (پ) $7/4\,\mathrm{cm}$ از محور صفحه چقدر است؟

فصل ۱۱

غلتش، گشتاور نیرو و تکانه‌ی زاویه‌ای

۱۱–۱ حرکت غلتشی به صورت ترکیبی از حرکت‌های انتقالی و دورانی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۱–۱ مشخص کنید که غلتش هموار را می‌توان به صورت ترکیبی از انتقال خالص و دوران خالص در نظر گرفت.

۱۱–۲ رابطه‌ی میان تندی مرکز جرم و تندی زاویه‌ای یک جسم در غلتش هموار را به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

- برای چرخی به شعاع R، غلتش هموار به صورت زیر تعریف می‌شود

$$v_{\text{com}} = \omega R$$

که در آن v_{com} تندی خطی مرکز جرم چرخ و ω تندی زاویه‌ای چرخ به دور مرکز آن است.

- چرخ ممکن است در ضمن دوران لحظه‌ای به دور نقطه‌ی P «روی جاده»، با آن نقطه در تماس باشد. تندی زاویه‌ای چرخ به دور این نقطه با تندی زاویه‌ای چرخ به دور مرکز آن برابر است.

فیزیک در این باره چه می‌گوید؟

همان‌طور که در فصل ۱۰ دیدیم، فیزیک شامل مطالعه‌ی دَوَران نیز می‌شود. مهم‌ترین کاربرد فیزیک دوران شاید مربوط به **حرکت غلتشی** چرخ‌ها و اشیای چرخ مانند باشد. این‌گونه فیزیک کاربردی سال‌هاست که مورد استفاده قرار گرفته است. برای مثال، هنگامی که مردمان پیش از تاریخ در جزیره‌ی ایستر* تندیس‌های سنگی غول‌آسا را از معدن‌ها به سراسر جزیره می‌بردند آن‌ها را روی تنه‌ی درختان، که به صورت غلتک عمل می‌کردند، در جزیره به هر طرف می‌کشیدند. مدت‌های زیاد پس از آن، در دهه‌های ۱۸۰۰ میلادی، وقتی مهاجران به سوی باختر و به سراسر آمریکا سرازیر می‌شدند، دارایی‌ها و محموله‌های خود را ابتدا با ارابه

* ایستر (Easter) جزیره‌ای است در جنوب اقیانوس آرام، که در باختر کشور شیلی واقع شده و متعلق به این کشور است. ـ م.

و سپس با قطار منتقل می‌کردند. امروزه، خواه ناخواه، دنیا پر از خودروها، کامیون‌ها، موتورسیکلت‌ها، دوچرخه‌ها و وسایل نقلیه‌ی غلتشی دیگر، شده است.

فیزیک و مهندسی غلتش دارای چنان پیشینه‌ای است که باید بدانیم برای گسترش و تکامل آن فکر جدیدی باقی نمانده است. اما تخته‌های اسکیت و اسکیت‌های هم‌ردیف که به تازگی اختراع و ساخته شده‌اند، به موفقیت‌های تجاری عظیمی دست یافته‌اند. هم‌اکنون لوژهای خیابانی در حال رایج شدن‌اند و روروک‌های خودرو (شکل ۱۱-۱) ممکن است شیوه‌ی جابه‌جا شدن مردم در شهرهای بزرگ را دگرگون کنند. کاربرد فیزیک غلتش هنوز می‌تواند شگفتی‌ساز باشد و نتیجه‌های خوبی به بار بیاورد. نقطه‌ی آغاز شناخت این بخش از فیزیک ساده‌سازی حرکت غلتشی است.

شکل ۱۱-۱ تصویری از روروک خودرو که برای جابه‌جا کردن افراد به کار می رود.

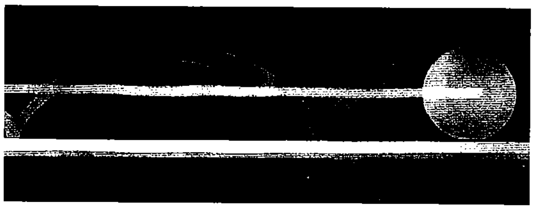
حرکت غلتشی به‌صورت ترکیبی از حرکت‌های انتقالی و دورانی

در این بخش فقط اشیایی را در نظر می‌گیریم که در راستای یک سطح ***به طور هموار می‌غلتند***. یعنی، اشیایی که بی‌لغزش یا جهیدن بر روی سطح حرکت می‌کنند. شکل ۱۱-۲ نشان می‌دهد که حرکت غلتشی هموار تا چه حد می‌تواند پیچیده باشد: در حالی که مرکز شیء در راستای یک خط موازی با سطح حرکت می‌کند، یک نقطه‌ی واقع بر کناره‌ی شیء این‌گونه حرکت نمی‌کند. اما حرکت غلتشی را می‌توان به صورت ترکیبی از انتقال مرکز جرم و دوران بقیه‌ی شی به دور آن مرکز مطالعه کرد.

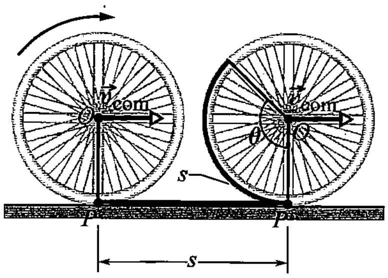
برای پی بردن به چگونگی این کار، فرض کنید در یک پیاده‌رو ایستاده‌اید و چرخ دوچرخه‌ی شکل ۱۱-۳ را که در کف خیابان در حال غلتیدن است تماشا می‌کنید. چنان‌که در شکل می‌بینیم، مرکز جرم چرخ O، با تندی ثابت v_{com} به پیش‌سو حرکت می‌کند. نقطه‌ی تماس چرخ با کف خیابان P، نیز با تندی v_{com} به پیش‌سو حرکت می‌کند، به‌گونه‌ای که نقطه‌ی P همیشه در زیر نقطه‌ی O باقی می‌ماند.

در بازه‌ی زمانی t مشاهده می‌شود که O و P هر دو مسافت s را به پیش‌سو می‌پیمایند. دوچرخه‌سوار مشاهده می‌کند که چرخ به اندازه‌ی زاویه‌ی θ به دور محور چرخ می‌چرخد و نقطه‌ی P، که در آغاز بازه‌ی زمانی t با کف خیابان در تماس بود، کمانی به طول s را می‌پیماید. معادله‌ی ۱۰-۱۷ رابطه‌ی میان طول کمان s و زاویه‌ی دوران θ را به‌دست می‌دهد:

$$s = \theta R \qquad (۱۱-۱)$$



شکل ۱۱-۲ عکسی با نوردهی لحظه‌ای از یک قرص غلتان. لامپ کوچکی به مرکز و لامپ دیگری به لبه‌ی قرص وصل شده است. ردهای حاصل از لامپ متصل به لبه‌ی قرص یک ***منحنی چرخزاد*** را نشان می‌دهند.



شکل ۱۱-۳ مرکز جرم چرخ غلتان O، مسافت s را با سرعت $\vec{v}_{\text{com}}$ می‌پیماید و در همین حال چرخ به اندازه‌ی زاویه‌ی θ می‌چرخد. نقطه‌ی P، که در آن نقطه چرخ در حال چرخش با سطح در تماس است، نیز به اندازه‌ی مسافت s حرکت می‌کند.

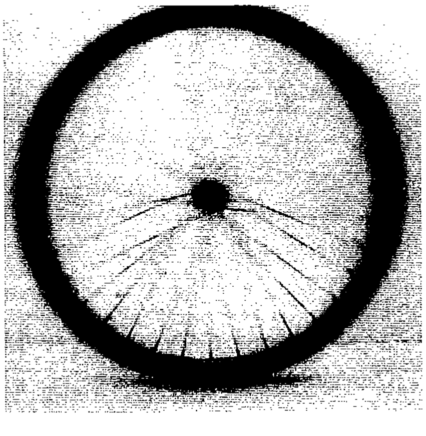
که در آن R شعاع چرخ است. v_{com}، تندی خطی مرکز چرخ (مرکز جرم این چرخ یکنواخت) برابر با ds/dt و ω تندی زاویه‌ای دوران چرخ به دور محورش برابر با $d\theta/dt$ است. پس، با مشتق گرفتن از معادله‌ی ۱۱-۱ نسبت به زمان (با ثابت نگهداشتن R)، داریم

$$v_{com} = \omega R \quad \text{(حرکت غلتشی هموار)} \qquad (۱۱-۲)$$

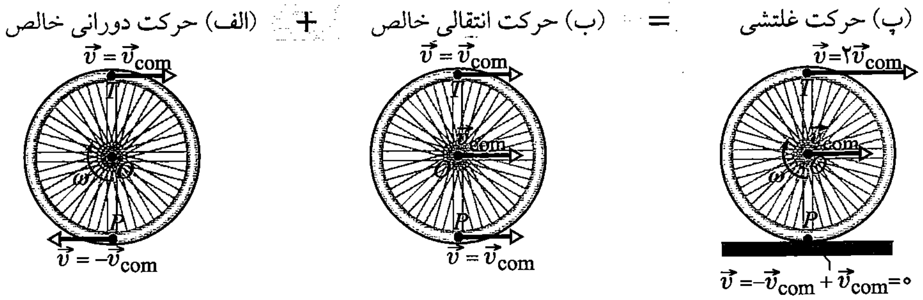
یک ترکیب. شکل ۱۱-۴ نشان می‌دهد که حرکت غلتشی چرخ ترکیبی از حرکت‌های انتقالی خالص و دورانی خالص است. شکل ۱۱-۴ الف نشانگر حرکت دورانی خالص است (چنان که گویی محور دوران گذرنده از مرکز ساکن است). در این‌حرکت هر نقطه از چرخ با تندی زاویه‌ای ω به دور مرکز می‌چرخد (این نوع حرکت در فصل ۱۰ مورد بحث قرار گرفت). تندی خطی هر نقطه از لبه‌ی بیرونی چرخ v_{com} است، که از معادله‌ی ۱۱-۲ به‌دست می‌آید. شکل ۱۱-۴ ب حرکت انتقالی خالص را (که در آن گویی چرخ ابداً نمی‌چرخد) نشان می‌دهد. در این حرکت هر نقطه از چرخ با تندی v_{com} به سمت راست حرکت می‌کند.

ترکیب کردن شکل‌های ۱۱-۴ الف و ۱۱-۴ ب، حرکت غلتشی واقعی چرخ، یعنی شکل ۱۱-۴ پ، را به دست می‌دهد. توجه کنید که در این ترکیب حرکت‌ها بخش پایینی چرخ (در نقطه‌ی P) ساکن است و بخش بالایی آن (در نقطه‌ی T) با تندی $۲v_{com}$ حرکت می‌کند، که تندتر از بخش‌های دیگر چرخ است. این نتیجه‌ها در شکل ۱۱-۵، که یک عکس با نوردهی لحظه‌ای از یک چرخ غلتان دوچرخه است، نشان داده شده‌اند. با توجه به شکل می‌توان گفت که نقطه‌های نزدیک به بالای چرخ تندتر از نقطه‌های نزدیک به پایین چرخ حرکت می‌کنند، زیرا پره‌های چرخ در بالا نسبت به پایین نامشخص‌تر دیده می‌شوند.

حرکت هر جسم گردی که به طور هموار بر روی یک سطح می‌غلتد، می‌تواند به صورت حرکت‌های مجزای دورانی خالص و انتقالی خالص، مانند شکل‌های ۱۱-۴ الف و ۱۱-۴ ب، در نظر گرفته شود.



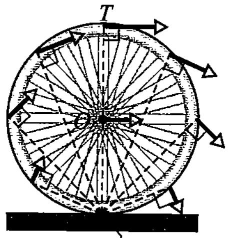
شکل ۱۱-۵ عکسی از یک چرخ غلتان دوچرخه. پره‌های نزدیک به بخش بالایی چرخ نامشخص‌تر از پره‌های بخش پایینی دیده می‌شوند، چون، مطابق شکل ۱۱-۴ پ، این پره‌ها تندتر حرکت می‌کنند.



شکل ۱۱-۴ نمودار حرکت غلتشی یک چرخ به صورت ترکیبی از حرکت دورانی خالص و حرکت انتقالی خالص. (الف) در حرکت دورانی خالص تمام نقطه‌های روی چرخ با تندی زاویه‌ای یکسان ω، و تمام نقطه‌های واقع بر لبه‌ی بیرونی چرخ با تندی خطی یکسان $v = v_{com}$ حرکت می‌کنند. در شکل، $\vec{v}$، سرعت خطی دو تا از این نقطه‌ها، در بالا (T) و در پایین (P) چرخ، نشان داده شده است. (ب) در حرکت انتقالی خالص تمام نقطه‌های روی چرخ با سرعت خطی $\vec{v}_{com}$، برابر با سرعت مرکز چرخ، به سمت راست حرکت می‌کنند. (پ) حرکت غلتشی چرخ، ترکیبی از حرکت‌های مربوط به قسمت‌های (الف) و (ب) است.

مطالعه‌ی غلتش به صورت حرکت دورانی خالص

شکل ۱۱-۶ راه دیگری را برای مطالعه‌ی حرکت غلتشی یک چرخ نشان می‌دهد. در اینجا حرکت غلتشی به عنوان حرکت دورانی خالص به دور محوری در نظر گرفته می‌شود که در حین حرکت چرخ همیشه از نقطه‌ی تماس چرخ با کف خیابان می‌گذرد. حرکت غلتشی را به‌صورت حرکت دورانی خالص به دور محوری که در شکل ۱۱-۴ پ از نقطه‌ی P می‌گذرد و بر صفحه‌ی شکل عمود است، در نظر می‌گیریم. به این ترتیب، در شکل ۱۱-۶ بردارها سرعت‌های لحظه‌ای نقطه‌های روی چرخ غلتان را نشان می‌دهند.



شکل ۱۱-۶ حرکت غلتشی را می‌توان به‌صورت حرکت دورانی خالص با تندی زاویه‌ای ω به دور محوری در نظر گرفت که همیشه از نقطه‌ی P می‌گذرد. بردارها سرعت‌های خطی لحظه‌ای نقاط انتخاب شده روی چرخ غلتان را نشان می‌دهند. این بردارها را می‌توان از ترکیب حرکت‌های انتقالی و دورانی، مطابق شکل ۱۱-۴، به دست آورد.

پرسش: یک ناظر ساکن به تندی زاویه‌ای چرخ غلتان دوچرخه در دوران به دور این محور جدید چه مقداری نسبت می‌دهد؟

پاسخ: همان تندی زاویه‌ای ω را نسبت می‌دهد که دوچرخه‌سوار در حرکت دورانی خالص چرخ به دور محور گذرنده از مرکز جرم مشاهده می‌کند.

برای راستیابی این پاسخ، از آن برای محاسبه‌ی تندی خطی بخش بالایی چرخ غلتان از دید یک ناظر ساکن استفاده می‌کنیم. اگر شعاع چرخ را R بگیریم، نقطه‌ی بالایی چرخ به فاصله‌ی $۲R$ از محور گذرنده از P در شکل ۱۱-۶ قرار دارد. در نتیجه، تندی خطی در بالا (با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۱-۲) برابر است با

$$v_{\text{top}} = (\omega)(۲R) = ۲(\omega R) = ۲v_{\text{com}}$$

این رابطه به طور دقیق با شکل ۱۱-۴ پ سازگار است. به همین ترتیب، تندی‌های خطی مربوط به بخش‌های گوناگون چرخ در نقطه‌های O و P در شکل ۱۱-۴ پ را می‌توان به‌دست آورد.

☑ خودآزمایی ۱

شعاع چرخ عقب یک دوچرخه‌ی سیرک دو برابر شعاع چرخ جلو است. در موقع حرکت کردن دوچرخه، (الف) تندی خطی بالاترین نقطه‌ی چرخ عقب نسبت به تندی خطی بالاترین نقطه‌ی چرخ جلو بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است؟ (ب) تندی زاویه‌ای بالاترین نقطه‌ی چرخ عقب نسبت به تندی زاویه‌ای چرخ جلو بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است؟

۱۱-۲ نیروها و انرژی جنبشی در حرکت غلتشی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۱-۳ انرژی جنبشی یک جسم را در غلتش هموار به صورت مجموع انرژی جنبشی انتقالی مرکز جرم و انرژی جنبشی دورانی به دور مرکز جرم، حساب کنید.

۱۱-۴ رابطه‌ی میان کار انجام شده روی شیء در حال غلتیدن هموار

و تغییر انرژی جنبشی آن را به کار ببرید.

۱۱-۵ در مورد غلتش هموار (و در نتیجه بی‌لغزش)، انرژی مکانیکی را پایسته نگه دارید تا مقادیر انرژی آغازی به مقادیر انرژی نقطه‌ی بعدی ربط داده شوند.

۱۱-۶ نموارجسم ـ آزاد مربوط به یک جسم شتاب‌دار را که بر روی یک سطح افقی یا در بالا یا پایین از یک شیب‌راهه به‌طور هموار می‌غلتد، رسم کنید.

۱۱-۷ رابطه‌ی میان شتاب مرکز جرم و شتاب زاویه‌ای را به کار ببرید.

۱۱-۸ در مورد غلتش هموار یک شیء در بالا یا پایین رفتن از یک شیب‌راهه، رابطه‌ی میان شتاب شیء، لختی دورانی آن و زاویه‌ی شیب‌راهه را به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

- انرژی جنبشی چرخی که به طور هموار می‌غلتد برابر است با

$$K = \frac{1}{2} I_{com}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{com}^2$$

که در آن I_{com} لختی دورانی چرخ نسبت به مرکز جرم آن و M جرم چرخ است.

- هرگاه چرخ شتاب داشته باشد اما هنوز در حال غلتش هموار باشد، رابطه‌ی شتاب مرکز جرم $\vec{a}_{com}$، با شتاب زاویه‌ای به دور مرکز α، عبارت است از

$$a_{com} = \alpha R$$

- هرگاه چرخی به طور هموار به پایین یک شیب‌راهه‌ی با زاویه‌ی شیب θ بغلتد، شتاب چرخ در طول محور x امتداد یافته به سمت بالای شیب‌راهه برابر است با

$$a_{com,x} = -\frac{g \sin\theta}{1 + I_{com}/MR^2}$$

انرژی جنبشی در حرکت غلتشی

اکنون، انرژی جنبشی چرخ غلتان را از دید یک ناظر ساکن حساب می‌کنیم. اگر غلتش چرخ را به صورت حرکت دورانی خالص به دور محور گذرنده از P در شکل ۱۱-۶ در نظر بگیریم، با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۰-۳۴، خواهیم داشت

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \tag{۱۱-۳}$$

که در آن ω تندی زاویه‌ای و I_P لختی دورانی چرخ نسبت به محور گذرنده از نقطه‌ی P است. با توجه به قضیه‌ی محورهای موازی در معادله‌ی ۱۰-۳۶ ($I = I_{com} + Mh^2$)، داریم

$$I_P = I_{com} + MR^2 \tag{۱۱-۴}$$

که در آن M جرم چرخ، I_{com} لختی دورانی چرخ نسبت به محور گذرنده از مرکز جرم و R (شعاع چرخ) فاصله‌ی عمودی h است. با جانشانی معادله‌ی ۱۱-۴ در معادله‌ی ۱۱-۳، خواهیم داشت

$$K = \frac{1}{2} I_{com}\omega^2 + \frac{1}{2} MR^2\omega^2$$

و با استفاده کردن از رابطه‌ی $v_{com} = \omega R$ (معادله‌ی ۱۱-۲)، داریم

$$K = \frac{1}{2} I_{com}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{com}^2 \tag{۱۱-۵}$$

جمله‌ی $\frac{1}{2}I_{com}\omega^2$ را به صورت انرژی جنبشی وابسته به دوران چرخ به دور محور گذرنده از مرکز جرم (شکل ۱۱-۴ الف)، و جمله‌ی $\frac{1}{2}Mv_{com}^2$ را به صورت انرژی جنبشی وابسته به حرکت انتقالی مرکز جرم چرخ (شکل ۱۱-۴ ب) در نظر می‌گیریم. در نتیجه، قاعده‌ی زیر را به دست می‌آوریم:

یک شیء غلتان دو نوع انرژی جنبشی دارد: انرژی جنبشی دورانی ($\frac{1}{2}I_{com}\omega^2$) ناشی از حرکت دورانی شیء به دور مرکز جرم و انرژی جنبشی انتقالی ($\frac{1}{2}Mv_{com}^2$) ناشی از حرکت انتقالی مرکز جرم.

نیروها در حرکت غلتشی

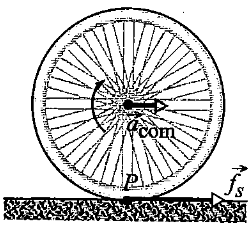
اصطکاک و غلتش

اگر چرخی، مطابق شکل ۱۱-۳، با تندی ثابت بغلتد، به لغزیدن در نقطه‌ی تماس P گرایش ندارد، و در نتیجه، هیچ نیروی اصطکاکی به آن وارد نمی‌شود. اما اگر به یک چرخ غلتان نیروی خالصی وارد و تندی آن زیاد یا کم شود، این نیرو در راستای حرکت به مرکز جرم چرخ شتاب $\vec{a}_{com}$ می‌دهد. هم‌چنین، این نیرو سبب می‌شود که چرخ تندتر یا کندتر بچرخد و بدین ترتیب، یک شتاب زاویه‌ای α به چرخ می‌دهد. این شتاب‌ها گرایش دارند چرخ را در نقطه‌ی P بلغزانند. پس، یک نیروی اصطکاک باید در نقطه‌ی P به چرخ وارد شود تا با این گرایش مخالفت کند.

اگر ***چرخ نلغزد***، نیرو، ***نیروی اصطکاک ایستایی*** $\vec{f}_s$، و حرکت، حرکت غلتشی هموار است. بنابراین، بزرگی شتاب خطی $\vec{a}_{com}$، و شتاب زاویه‌ای α، را می‌توان با مشتق گرفتن از معادله‌ی ۱۱-۲ نسبت به زمان (با توجه به ثابت نگهداشتن R) به دست آورد. در سمت چپ این معادله dv_{com}/dt برابر با a_{com} و در سمت راست، $d\omega/dt$ برابر با α است. در این صورت، در حرکت غلتشی هموار، داریم

$$a_{com} = \alpha R \quad \text{(حرکت غلتشی هموار)} \qquad (۱۱-۶)$$

اگر هنگام وارد شدن نیروی برایند به چرخ، ***چرخ بلغزد***، نیروی اصطکاکی که در نقطه‌ی P در شکل ۱۱-۳ اثر می‌کند، ***نیروی اصطکاک جنبشی*** $\vec{f}_k$، است. بنابراین، حرکت یک حرکت غلتشی هموار نیست، و معادله‌ی ۱۱-۶ در مورد این حرکت صدق نمی‌کند. در این فصل فقط حرکت غلتشی هموار را مورد بحث قرار خواهیم داد.



شکل ۱۱-۷ نمودار چرخی که بدون لغزش با شتاب خطی $\vec{a}_{com}$ به طور افقی می‌غلتد. نیروی اصطکاک ایستایی $\vec{f}_s$ که در نقطه‌ی P به چرخ وارد می‌شود، با گرایش چرخ به لغزیدن مخالفت می‌کند.

شکل ۱۱-۷ مثالی را نشان می‌دهد که در آن، مانند چرخ یک دوچرخه در آغاز مسابقه، چرخ با سرعت به چرخش درمی‌آید و در همان حال بر روی یک سطح تخت غلتانده می‌شود. دوران سریع چرخ سبب می‌شود که پایین چرخ در نقطه‌ی P به سمت چپ بلغزد. اما یک

نیروی اصطکاک در نقطه‌ی P به سمت راست وارد می‌شود و با گرایش به لغزیدن مخالفت می‌کند. اگر چرخ نلغزد، نیروی اصطکاک یک نیروی اصطکاک ایستایی $\vec{f}_s$ (مطابق شکل)، حرکت یک حرکت غلتشی هموار، و معادله‌ی ۱۱-۶ درباره‌ی این حرکت صادق است. (بدون اصطکاک دوچرخه ساکن می‌ماند و حرکت بسیار ملال‌آور خواهد بود).

اگر چرخ مربوط به شکل ۱۱-۷ مانند چرخ دوچرخه‌ای که سرعتش کم می‌شود، کندتر بچرخد، دو تغییر باید در شکل ایجاد شود. در این حالت، جهت‌های شتاب مرکز جرم $\vec{a}_{\text{com}}$، و نیروی اصطکاک $\vec{f}_s$ در نقطه‌ی P، باید به سمت چپ باشند.

غلتش در حال پایین آمدن از یک شیب‌راهه

شکل ۱۱-۸ یک جسم گرد یکنواخت به‌جرم M و شعاع R را نشان می‌دهد که به‌طور هموار می‌غلتد و از یک شیب‌راهه با زاویه‌ی شیب θ در راستای محور x پایین می‌آید. می‌خواهیم رابطه‌ی مربوط به شتاب رو به پایین جسم $a_{\text{com},x}$، را پیدا کنیم. این کار را می‌توان با استفاده کردن از قانون دوم نیوتون در شکل خطی $(F_{\text{net}} = Ma)$ و شکل زاویه‌ای $(\tau_{\text{net}} = I\alpha)$ انجام داد.

برای این منظور نخست نیروهای وارد شده به جسم را، مطابق شکل ۱۱-۸، رسم می‌کنیم:

۱. در این شکل بردار نیروی گرانشی وارد شده به جسم $\vec{F}_g$، به پایین‌سو است، دُم این بردار در مرکز جرم جسم قرار دارد و مؤلفه‌ی بردار در راستای شیب‌راهه $F_g \sin\theta$، برابر با $Mg \sin\theta$ است.

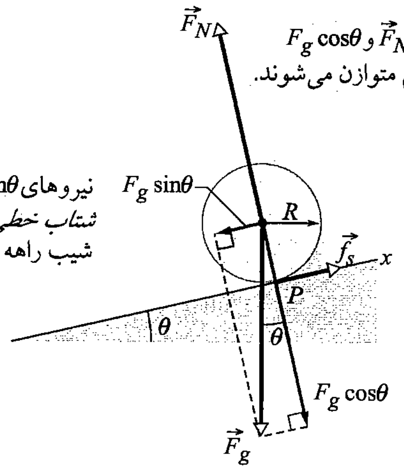
۲. نیروی عمودی $\vec{F}_N$ بر شیب‌راهه عمود است. این نیرو در نقطه‌ی تماس P اثر می‌کند، اما در شکل ۱۱-۸ این بردار در راستای خود جابه‌جا شده و دُم آن در مرکز جرم جسم قرار گرفته است.

۳. نیروی اصطکاک $\vec{f}_s$ به نقطه‌ی P اثر می‌کند و جهتش به سمت بالای شیب‌راهه است. (آیا می‌دانید چرا؟ اگر جسم بخواهد در نقطه‌ی P بلغزد ***به پایین‌سوی شیب‌راهه*** خواهد لغزید. بنابراین، جهت نیروی اصطکاک که با لغزیدن مخالفت می‌کند، ***باید به بالاسوی شیب‌راهه باشد***).

قانون دوم نیوتون برای مؤلفه‌های مربوط به راستای محور x در شکل ۱۱-۸ $(F_{\text{net},x} = ma_x)$ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$f_s - Mg\sin\theta = Ma_{\text{com},x} \qquad (۱۱-۷)$$

این معادله شامل دو مجهول f_s و $a_{\text{com},x}$ است. (***نباید فرض کرد*** که f_s دارای مقدار بیشینه‌ی $f_{s,\max}$ است. آنچه می‌دانیم این است که مقدار f_s در حدی است که جسم می‌تواند بدون لغزیدن، به طور هموار به پایین بغلتد).



شکل ۱۱-۸ جسم گِرد یکنواختی به شعاع R از یک شیب‌راهه به پایین می‌غلتد. نیروهای وارد شده به جسم عبارت‌اند از نیروی گرانشی $\vec{F}_g$، نیروی عمودی $\vec{F}_N$ و نیروی اصطکاک $\vec{f}_s$ به سمت بالای شیب‌راهه (برای ساده‌تر شدن موضوع بردار $\vec{F}_N$ در راستای خود جابه‌جا شده و دُم آن در مرکز جرم جسم قرار گرفته است).

اکنون می‌خواهیم قانون دوم نیوتون را به شکل زاویه‌ای برای دوران جسم به دور مرکز جرم خود به کار ببریم. نخست، برای نوشتن گشتاورهای نیروی وارد شده به جسم نسبت به مرکز جرم از معادله‌ی ۱۰-۴۱ ($\tau = r_\perp F$) استفاده می‌کنیم. نیروی اصطکاک $\vec{f}_s$ دارای بازوی گشتاور R است و گشتاور نیروی Rf_s را به وجود می‌آورد، که مثبت است، زیرا این گشتاور در شکل ۱۱-۸ می‌خواهد جسم را به طور پادساعت‌گرد بچرخاند. بازوهای گشتاور نیروهای $\vec{F}_g$ و $\vec{F}_N$ نسبت به مرکز جرم صفرند و در نتیجه گشتاورهای نیروی صفر به‌وجود می‌آورند. بنابراین، شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون ($\tau_{net} = I\alpha$) نسبت به محور گذرنده از مرکز جرم جسم را می‌توان چنین نوشت

$$Rf_s = I_{com}\alpha \qquad (۱۱-۸)$$

این معادله شامل دو کمیت مجهول f_s و α است.

چون جسم به طور هموار می‌غلتد، برای ربط دادن مجهول‌های $a_{com,x}$ و α به‌یکدیگر، می‌توان از معادله‌ی ۱۱-۶ ($a_{com} = \alpha R$) استفاده کرد. اما این کار را باید با احتیاط انجام داد، زیرا در اینجا $a_{com,x}$ منفی (در جهت منفی محور x) و α مثبت (پادساعت‌گرد) است. بنابراین، در معادله‌ی ۱۱-۸ به جای α مقدار $-a_{com,x}/R$ را قرار می‌دهیم. در این صورت برای f_s، داریم

$$f_s = -I_{com}\frac{a_{com,x}}{R^2} \qquad (۱۱-۹)$$

با قرار دادن مقدار سمت راست معادله‌ی ۱۱-۹ به‌جای f_s در معادله‌ی ۱۱-۷، خواهیم داشت

$$a_{com,x} = -\frac{g\sin\theta}{1 + I_{com}/MR^2} \qquad (۱۱-۱۰)$$

این معادله برای پیدا کردن شتاب خطی $a_{com,x}$ هر جسمی که بر روی سطح شیب‌داری با زاویه‌ی شیب θ می‌غلتد، می‌تواند به کار برده شود.

توجه کنید که کشش ناشی از نیروی گرانشی سبب می‌شود جسم به سمت پایین شیب‌راهه حرکت کند، اما نیروی اصطکاک موجب می‌شود جسم دوران کند و در نتیجه بغلتد. اگر اصطکاک را از میان ببریم (مثلاً، با لغزان کردن سطح شیب‌دار با یخ یا روغن) یا ترتیبی بدهیم که $Mg\sin\theta$ از $f_{s,max}$ تجاوز کند، در آن صورت، غلتش هموار از میان می‌رود و جسم از شیب‌راهه به پایین می‌لغزد.

خودآزمایی ۲

قرص‌های A و B مشابه‌اند و با تندهای یکسان بر روی زمین می‌غلتند. در این حال، قرص A از یک سطح شیب‌دار به سمت بالا می‌غلتد و به ارتفاع بیشینه‌ی h می‌رسد و قرص B از یک‌سطح شیب‌دار مشابه که بی‌اصطکاک است بالا می‌رود. آیا ارتفاع بیشینه‌ای که قرص B به آن می‌رسد، نسبت به h بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است؟

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۱-۱ غلتیدن گلوله به پایین یک شیب‌راهه

گلوله‌ی یکنواختی به جرم $M = ۶/۰۰\,\text{kg}$ و شعاع R، از حال سکون از یک شیب‌راهه با زاویه‌ی شیب $\theta = ۳۰/۰^\circ$ به طور هموار به پایین می‌غلتد (شکل ۱۱-۸).

(الف) این گلوله در راستای قائم به اندازه‌ی $h = ۱/۲۰\,\text{m}$ پایین می‌آید تا به پایین شیب‌راهه می‌رسد. تندی گلوله در پایین شیب چقدر است؟

نکته‌های کلیدی

در هنگام غلتیدن گلوله از شیب‌راهه به پایین، انرژی مکانیکی دستگاه گلوله ـ زمین E، پایسته می‌ماند، زیرا تنها نیرویی که روی گلوله کار انجام می‌دهد، نیروی پایستار گرانشی است. نیروی عمودی وارد شده به گلوله از سوی شیب‌راهه کاری انجام نمی‌دهد چون بر مسیر حرکت گلوله عمود است. نیروی اصطکاک وارد شده به گلوله از سوی شیب‌راهه هم هیچ انرژی‌ای را به انرژی گرمایی تبدیل نمی‌کند، زیرا گلوله نمی‌لغزد (***گلوله به‌طور هموار می‌غلتد***).

بنابراین، قانون پایستگی انرژی مکانیکی $(E_f = E_i)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$K_f + U_f = K_i + U_i \qquad (۱۱-۱۱)$$

در این معادله شاخص‌های پایین f و i، به ترتیب معرف مقادیر پایانی (در پایین شیب‌راهه) و مقادیر آغازی (در حالت سکون) هستند. انرژی پتانسیل گرانشی در آغاز $U_i = Mgh$ (M جرم گلوله است) و در پایان $U_f = ۰$ است. انرژی جنبشی در آغاز $K_i = ۰$ است. در مورد انرژی جنبشی پایانی K_f، به نکته‌ی کلیدی دیگری نیاز داریم. چون گلوله می‌غلتد، انرژی جنبشی شامل انرژی‌های جنبشی انتقالی و دورانی است و این دو مقدار در طرف راست معادله‌ی ۱۱-۵ نوشته شده‌اند.

محاسبات: با جانشانی همه‌ی این رابطه‌ها در معادله‌ی ۱۱-۱۱، داریم

$$\left(\frac{1}{۲}I_{com}\omega^۲ + \frac{1}{۲}Mv_{com}^۲\right) + ۰ = ۰ + Mgh \qquad (۱۱-۱۲)$$

که در آن I_{com} لختی دورانی گلوله نسبت به محور گذرنده از مرکز جرم، v_{com} تندی خواسته شده و ω تندی زاویه‌ای در پایین شیب‌راهه است.

چون گلوله به‌طور هموار می‌غلتد، با استفاده کردن ازمعادله‌ی ۱۱-۲ مقدار v_{com}/R را به‌جای ω قرارمی‌دهیم تا از عده‌ی مجهول‌ها در معادله‌ی ۱۱-۱۲ کاسته شود. با انجام دادن این‌کار و قرار دادن $\frac{۲}{۵}MR^۲$ به جای I_{com} (با استفاده کردن از جدول ۱۰-۲ ج) و حل‌کردن معادله‌ی حاصل نسبت به v_{com}، داریم

$$v_{com} = \sqrt{\frac{۱۰}{۷}gh} = \sqrt{\frac{۱۰}{۷}(۹/۸\,m/s^۲)(۱/۲۰\,m)} \Rightarrow$$

(پاسخ) $$v_{com} = ۴/۱۰\,m/s$$

توجه کنید که این پاسخ به M یا R بستگی ندارد.

(ب) هنگامی که گلوله به پایین شیب‌راهه می‌غلتد، بزرگی و جهت نیروی اصطکاک وارد شده به آن چیست؟

نکته‌ی کلیدی

چون گلوله به طور هموار می‌غلتد، نیروی اصطکاک وارد شده به آن از معادله‌ی ۱۱-۹ به دست می‌آید.

محاسبات: پیش از آن که بتوانیم از معادله‌ی ۱۱-۹ استفاده کنیم، نیاز داریم که شتاب گلوله $a_{com,x}$، را با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۱-۱۰ حساب کنیم:

$$a_{com,x} = -\frac{g\sin\theta}{۱+I_{com}/MR^۲} = -\frac{g\sin\theta}{۱+\frac{۲}{۵}MR^۲/MR^۲}$$

$$a_{com,x} = -\frac{(۹/۸\,m/s^۲)(\sin ۳۰/۰^\circ)}{۱+\frac{۲}{۵}} = -۳/۵۰\,m/s^۲$$

توجه کنید که برای پیدا کردن $a_{com,x}$، هیچ نیازی به جرم M یا شعاع R نبود. بنابراین، گلوله با هر اندازه و با هر جرم (یکنواخت) هنگام پایین رفتن از شیب‌راهه‌ی ۳۰/۰ درجه، دارای همین شتاب خواهد بود.

اکنون، می‌توان معادله‌ی ۱۱-۹ را حل کرد:

$$f_s = -I_{com}\frac{a_{com,x}}{R^۲} = -\frac{۲}{۵}MR^۲\frac{a_{com,x}}{R^۲}$$

$$f_s = -\frac{۲}{۵}Ma_{com,x}$$

$$f_s = -\frac{۲}{۵}(۶/۰۰\,kg)(-۳/۵۰\,m/s^۲) \Rightarrow$$

(پاسخ) $$f_s = ۸/۴۰\,N$$

بنابراین، نیروی اصطکاک وارد شده به هر گلوله‌ای به جرم ۶/۰۰ kg که از یک شیب‌راهه‌ی ۳۰/۰ درجه به طور هموار به پایین می‌غلتد، بدون توجه به شعاع گلوله، برابر با ۸/۴۰ N است، اما این نیرو برای جرم بزرگ‌تر بیشتر خواهد بود.

۱۱-۳ طرز کار یویو

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۱-۹ نمودار جسم ـ آزاد یک یویو را که از نخ خود به بالا یا پایین می‌رود، رسم کنید.

۱۱-۱۰ مشخص کنید که یویو در واقع شیئی است که بر روی یک شیب‌راهه‌ی با زاویه‌ی شیب ۹۰ درجه به طور هموار به بالا یا پایین می‌غلتد.

۱۱-۱۱ در مورد یویویی که از نخ خود بالا یا پایین می‌رود، رابطه‌ی میان شتاب یویو و لختی دورانی آن را به کار ببرید.

۱۱-۱۲ کشش نخ یویو را در هنگام حرکت کردن یویو به بالا یا پایین معین کنید.

نکته‌ی کلیدی

- یک یویو را که از نخ خود به طور قائم بالا یا پایین می‌رود، می‌توان به صورت یک چرخ در حال غلتیدن در طول یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی $\theta = ۹۰^\circ$ مطالعه کرد.

طرز کار یو یو

یو یو $(yo-yo)$ یک آزمایشگاه فیزیک است که می‌تواند در جیب جا داده شود. وقتی یو یو با باز شدن نخ به اندازه‌ی h به پایین می‌غلتد به میزان mgh انرژی پتانسیل از دست می‌دهد، اما انرژی جنبشی به دو شکل انتقالی $(\frac{1}{2}mv_{com}^2)$ و دورانی $(\frac{1}{2}I_{com}\omega^2)$ به دست می‌آورد. هنگامی که یو یو به بالا برمی‌گردد، انرژی جنبشی از دست می‌دهد و دوباره انرژی پتانسیل به‌دست می‌آورد.

در یو یوهای نوین نخ به محور وصل نشده بلکه به دور آن حلقه زده است. وقتی یو یو به انتهای نخ «ضربه می‌زند»، نیروی رو به بالایی که از سوی نخ به محور وارد می‌شود، مانع سقوط کردن یو یو می‌شود. سپس، یو یو در حالی که محور درون حلقه قرار دارد، فقط با انرژی جنبشی دورانی می‌چرخد. یو یو به چرخیدن («خواب رفتن») خود ادامه می‌دهد تا آنکه با تکان دادن شدید نخ، آن را «بیدار کنیم». این عمل سبب می‌شود نخ با محور درگیر شود و یویو به بالا برگردد. انرژی جنبشی دورانی یو یو در انتهای نخ را (و در نتیجه زمان خواب رفتن را) با پرتاب کردن یو یو به پایین‌سو به طور چشمگیری می‌توان افزایش داد، به‌گونه‌ای که یویو به جای غلتیدن به پایین از حال سکون، نخ را با تندی‌های آغازی v_{com} و ω به سمت پایین حرکت دهد.

برای پیدا کردن رابطه‌ی مربوط به شتاب خطی a_{com} یک یو یو که از نخ به پایین می‌غلتد، همان‌طور که در مورد غلتیدن یک جسم از شیب‌راهه به پایین در شکل ۱۱-۸ دیدیم، می‌توانیم از قانون دوم نیوتون استفاده کنیم. تحلیل موضوع نیز مشابه است با این تفاوت که:

۱. یو یو به جای غلتیدن از شیب‌راهه‌ی با زاویه‌ی شیب θ نسبت به راستای افقی، تحت زاویه‌ی $\theta = 90^\circ$ نسبت به افق از یک نخ به پایین می‌غلتد.

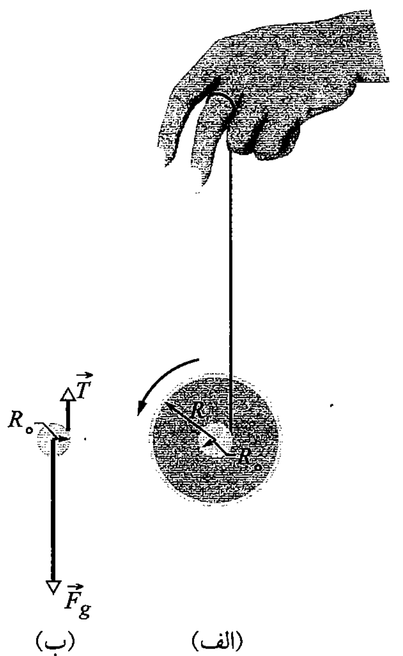
۲. یو یو به جای غلتیدن روی سطح بیرونی با شعاع R، روی محوری به شعاع R_0 می‌غلتد (شکل ۱۱-۹ الف).

۳. حرکت یو یو به جای کُند شدن با نیروی اصطکاک $\vec{f_s}$، با نیروی $\vec{T}$ که نخ به آن وارد می‌کند (شکل ۱۱-۹ ب) کُند می‌شود.

اگر موضوع را مورد تحلیل قرار دهیم به معادله‌ی ۱۱-۱۰ می‌رسیم. بنابراین، فقط نمادها را در معادله‌ی ۱۱-۱۰ تغییر می‌دهیم و با جانشانی $\theta = 90^\circ$ در آن معادله شتاب خطی را چنین به‌دست می‌آوریم

$$a_{com} = -\frac{g}{1 + I_{com}/MR_0^2} \qquad (11\text{-}13)$$

در این معادله I_{com} لختی دورانی یو یو نسبت به مرکز آن و M جرم یو یو است. شتاب بالاسوی یو یو با شتاب پایین‌سوی آن یکی است.



شکل ۱۱-۹ (الف) نمودار سطح مقطع یک یو یو، که در آن نخی با ضخامت ناچیز به دور محوری به شعاع R_0 پیچیده شده است. (ب) نمودار جسم ـ آزاد یو یو در حال سقوط. فقط محور نشان داده شده است.

۱۱-۴ مروری بر گشتاور نیرو

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۱-۱۳ مشخص کنید که گشتاور نیرو کمیتی برداری است.

۱۱-۱۴ مشخص کنید که نقطه‌ای که گشتاور نیرو نسبت به آن نقطه حساب می‌شود، همیشه باید معین باشد.

۱۱-۱۵ گشتاور نیروی ناشی از اثر نیرو بر روی یک ذره را از حاصل‌ضرب بردار مکان ذره و بردار نیرو، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه یا نمادگذاری بزرگی ـ زاویه حساب کنید.

۱۱-۱۶ برای پیدا کردن بردار گشتاور نیرو قاعده‌ی دست راست مربوط به ضرب‌های ضربدری را به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

● گشتاور نیروی $\vec{\tau}$، کمیتی برداری است که در سه بعد نسبت به یک نقطه‌ی ثابت (به طور معمول مبداء مختصات) چنین تعریف می‌شود

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

که در آن $\vec{F}$ نیروی وارد شده به یک ذره و $\vec{r}$ بردار مکان تعیین کننده‌ی محل ذره نسبت به نقطه‌ی ثابت است.

● بزرگی $\vec{\tau}$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\tau = rF\sin\phi = rF_{\perp} = r_{\perp}F$$

که در آن ϕ زاویه‌ی میان $\vec{F}$ و $\vec{r}$، $F_{\perp}$ مؤلفه‌ی $\vec{F}$ عمود بر $\vec{r}$ و $r_{\perp}$ بازوی گشتاور $\vec{F}$ است.

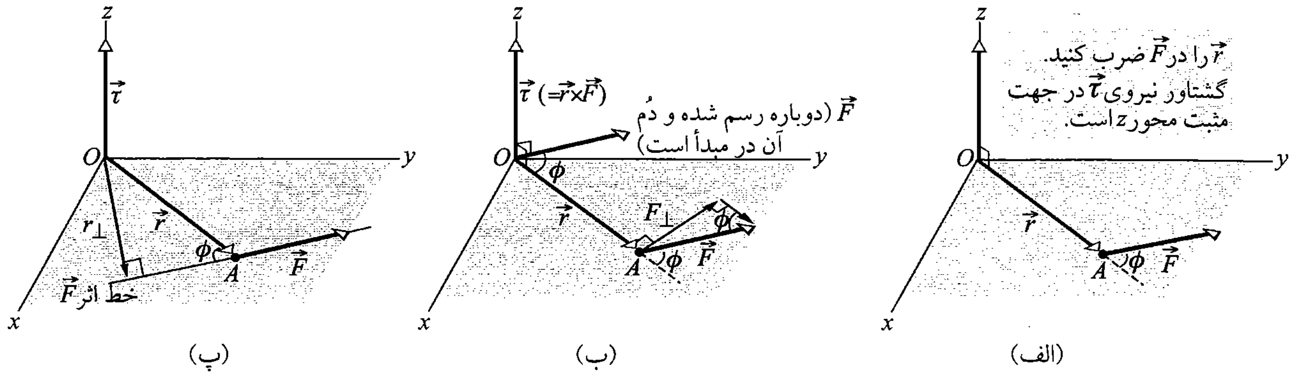
● جهت $\vec{\tau}$ با استفاده کردن از قاعده‌ی دست راست مربوط به ضرب ضربدری معین می‌شود.

مروری بر گشتاور نیرو

در فصل ۱۰ گشتاور نیروی τ را برای جسم صُلبی که می‌تواند به دور محور ثابتی بچرخد، و هر ذره‌ی آن بر روی مسیری دایره‌ای به دور همان محور حرکت می‌کند، تعریف کردیم. اکنون تعریف گشتاور نیرو را بسط می‌دهیم تا بتوانیم از آن برای هر ذره‌ی مجزایی که در راستای هر مسیری نسبت به یک ***نقطه‌ی ثابت*** (به جای محور ثابت) حرکت می‌کند، استفاده کنیم. بنابراین، دیگر لازم نیست مسیر دایره‌ای باشد، و ما باید گشتاور نیرو را به صورت بردار $\vec{\tau}$ بنویسیم که ممکن است هر جهتی داشته باشد.

شکل ۱۱-۱۰ الف چنین ذره‌ای را در نقطه‌ی A از صفحه‌ی xy نشان می‌دهد. در این صفحه تک نیروی $\vec{F}$ به ذره وارد و مکان ذره نسبت به مبداء O با بردار مکان $\vec{r}$ مشخص می‌شود. گشتاور نیروی $\vec{\tau}$، که نسبت به نقطه‌ی ثابت O به ذره وارد می‌شود، کمیتی برداری است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{(تعریف گشتاور نیرو)} \qquad (۱۱-۱۴)$$



شکل ۱۱–۱۰ تعریف گشتاور نیرو. (الف) نیروی $\vec{F}$، که در صفحه‌ی xy قرار دارد، به ذره‌ی واقع در نقطه‌ی A وارد می‌شود. (ب) این نیرو گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ (مساوی با $\vec{r}\times\vec{F}$) نسبت به مبداء O را به ذره وارد می‌کند. بنا به قاعده‌ی دست راست مربوط به ضرب برداری (ضربدری) بردار گشتاور نیرو در جهت مثبت محور z است. بزرگی گشتاور نیرو در شکل (ب) برابر با $rF_\perp$ و در شکل (پ) برابر با $r_\perp F$ است.

حاصل‌ضرب برداری (ضربدری) مربوط به تعریف $\vec{\tau}$ را با استفاده کردن از قاعده‌های ضرب برداری ارائه شده در پودمان ۳–۳ می‌توان حساب کرد. برای تعیین جهت $\vec{\tau}$ بردار $\vec{F}$ را به طور موازی با خود (بدون تغییر راستا) آن‌قدر می‌لغزانیم تا دُم آن در مبداء O واقع شود، به گونه‌ای که دو بردار مربوط به ضرب برداری، مطابق شکل ۱۱–۱۰ ب، به صورت دُم به دُم قرار گیرند. سپس، از قاعده‌ی دست راست مربوط به ضرب برداری در شکل ۳–۱۹ الف استفاده می‌کنیم، یعنی انگشتان دست راست را از $\vec{r}$ (بردار اول در ضرب برداری) به طرف $\vec{F}$ (بردار دوم) می‌چرخانیم. در این صورت، انگشت شست به حالت کشیده جهت $\vec{\tau}$ را نشان خواهد داد. در شکل ۱۱–۱۰ ب، $\vec{\tau}$ در جهت مثبت محور z قرار دارد.

برای تعیین بزرگی $\vec{\tau}$، از نتیجه‌ی کلی معادله‌ی ۳–۲۷ $(c = ab\sin\phi)$ استفاده می‌کنیم:

$$\tau = rF\sin\phi \qquad (۱۱–۱۵)$$

در این معادله ϕ زاویه‌ی میان بردارهای $\vec{r}$ و $\vec{F}$ در حالتی است که دُم این بردارها در یک نقطه باشد. با توجه به شکل ۱۱–۱۰ ب معلوم می‌شود که معادله‌ی ۱۱–۱۵ را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت

$$\tau = rF_\perp \qquad (۱۱–۱۶)$$

که در آن $F_\perp$ (مساوی با $F\sin\phi$) مؤلفه‌ی $\vec{F}$ در راستای عمود بر $\vec{r}$ است. با توجه به شکل ۱۱–۱۰ پ، معلوم می‌شود که معادله‌ی ۱۱–۱۵ به صورت زیر هم می‌تواند نوشته شود

$$\tau = r_\perp F \qquad (۱۱–۱۷)$$

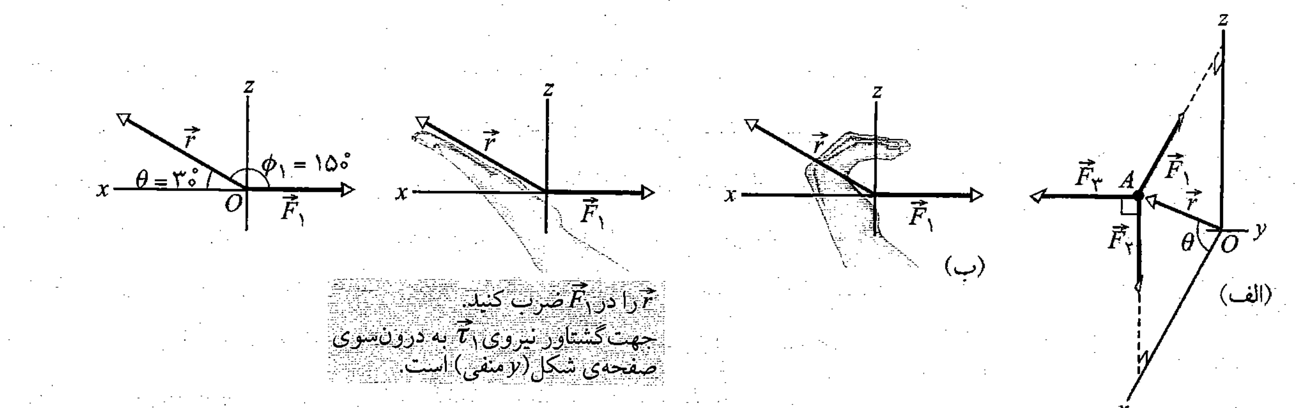
در این معادله $r_\perp$ (مساوی با $r\sin\phi$) بازوی گشتاور $\vec{F}$ (فاصله‌ی عمودی میان O و خط اثر $\vec{F}$) است.

خودآزمایی ۳

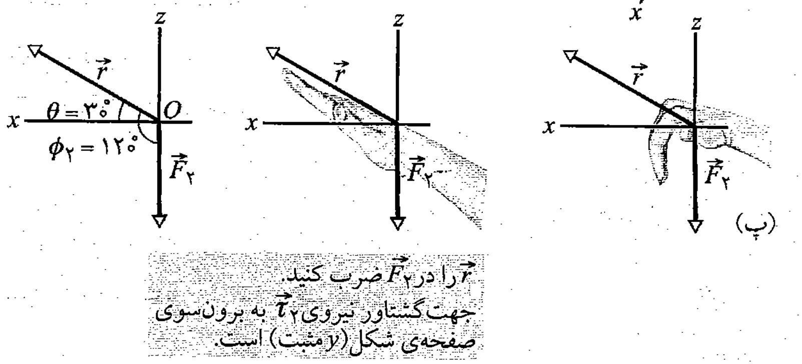
بردار مکان $\vec{r}$ یک ذره در جهت مثبت محور z است. اگر گشتاور نیروی وارد شده به ذره، (الف) صفر، (ب) در جهت منفی محور x و (پ) در جهت منفی محور y باشد، جهت نیروی به وجود آورنده‌ی گشتاور نیرو چگونه خواهد بود؟

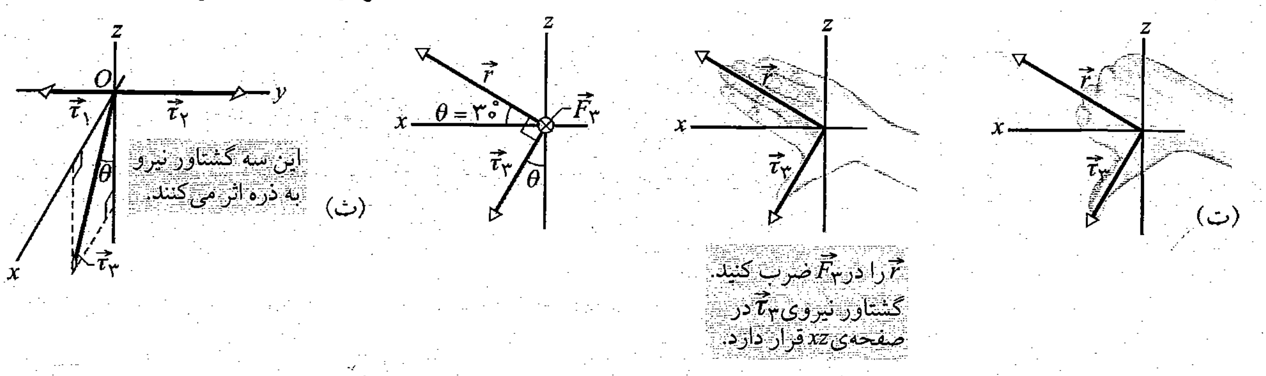
مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۱-۲ گشتاور ناشی از نیروی وارد شده به یک ذره

در شکل ۱۱-۱۱ الف، سه نیرو، هر کدام به بزرگی $۲/۰\,\mathrm{N}$، به ذره‌ای وارد می‌شوند. ذره در صفحه‌ی xz و در نقطه‌ی A که با بردار مکان $\vec{r}$ مشخص می‌شود، قرار دارد و $r = ۳/۰\,\mathrm{m}$ و $\theta = ۳۰^\circ$. گشتاور نیروی حاصل از هر یک از نیروها نسبت به مبداء O چیست؟



شکل ۱۱-۱۱ (الف) ذره‌ای در نقطه‌ی A تحت اثر سه نیروی موازی با محورهای مختصات، قرار گرفته است. در شکل زاویه‌ی ϕ (که برای تعیین گشتاور نیرو به کار می‌رود)، (ب) برای نیروی $\vec{F}_۱$ و (پ) برای نیروی $\vec{F}_۲$، نشان داده شده است. (ت) گشتاور نیروی $\vec{\tau}_۳$ بر $\vec{r}$ و $\vec{F}_۳$، هر دو، عمود است (نیروی $\vec{F}_۳$ به درون سوی صفحه‌ی شکل است). (ث) نمودار گشتاورهای نیروها.





نکته‌ی کلیدی

چون سه بردار نیرو در یک صفحه قرار ندارند، باید از ضرب برداری استفاده کنیم. بزرگی بردارها از معادله‌ی ۱۱-۱۵ $(\tau = rF\sin\phi)$ و جهت آن‌ها از قاعده‌ی دست راست به دست می‌آید.

محاسبات: چون می‌خواهیم گشتاورهای نیرو را نسبت به مبداء O به دست آوریم، بردار $\vec{r}$ مورد نیاز برای هر ضرب برداری همان بردار مکان داده شده است. برای تعیین ϕ، زاویه‌ی میان $\vec{r}$ و هر یک از نیروها، بردارهای نیرو در شکل ۱۱-۱۱ الف را به نوبت طوری جابه‌جا می‌کنیم که دُم آن‌ها در مبداء قرار گیرد. شکل‌های ۱۱-۱۱ ب، پ و ت، که نمایش دهنده‌ی مستقیم صفحه‌ی xz هستند، به ترتیب، بردارهای نیروی جابه‌جا شده‌ی $\vec{F}_۱$، $\vec{F}_۲$ و $\vec{F}_۳$ را نشان می‌دهند. (توجه کنید که دیدن زاویه‌های میان بردارهای نیرو و بردار مکان چقدر آسان‌تر شده است). در شکل ۱۱-۱۱ ت، زاویه‌ی میان $\vec{r}$ و $\vec{F}_۳$ برابر با ۹۰ درجه است و نماد ⊗ نشان می‌دهد که جهت $\vec{F}_۳$ به درون سوی صفحه‌ی شکل است. اگر جهت نیرو به برون سوی صفحه‌ی شکل می‌بود، با نماد ⊙ نشان داده می‌شد.

اکنون، با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۱-۱۵ برای هر نیرو، بزرگی گشتاورها به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\tau_۱ = rF_۱\sin\phi_۱ = (۳/۰\,\mathrm{m})(۲/۰\,\mathrm{N})\sin ۱۵۰^\circ \Rightarrow$$
$$\tau_۱ = ۳/۰\,\mathrm{N\cdot m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

$$\tau_۲ = rF_۲\sin\phi_۲ = (۳/۰\,\mathrm{m})(۲/۰\,\mathrm{N})\sin ۱۲۰^\circ \Rightarrow$$
$$\tau_۲ = ۵/۲\,\mathrm{N\cdot m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

$$\tau_۳ = rF_۳\sin\phi_۳ = (۳/۰\,\mathrm{m})(۲/۰\,\mathrm{N})\sin ۹۰^\circ \Rightarrow$$
$$\tau_۳ = ۶/۰\,\mathrm{N\cdot m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

اکنون، برای تعیین جهت این گشتاورهای نیرو، از قاعده‌ی دست راست استفاده می‌کنیم، یعنی انگشتان دست راست را طوری قرار می‌دهیم که از $\vec{r}$ به طرف $\vec{F}$ و تحت زاویه‌ی کوچک‌تر میان راستاهای آن‌ها بپیچند. در این صورت، انگشت شست جهت گشتاور نیرو را نشان خواهد داد. بنابراین، جهت $\vec{\tau}_۱$ در شکل ۱۱-۱۱ ب، به درون‌سوی صفحه وجهت $\vec{\tau}_۲$ درشکل ۱۱-۱۱ پ، به برون سوی صفحه‌ی شکل است. جهت $\vec{\tau}_۳$ در شکل ۱۱-۱۱ ت، به‌گونه‌ای است که نشان داده شده است. تمام این بردارهای گشتاور نیرو در شکل ۱۱-۱۱ ث، نشان داده شده‌اند.

۵-۱۱ تکانه‌ی زاویه‌ای

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۱-۱۷ مشخص کنید که تکانه‌ی زاویه‌ای کمیتی برداری است.

۱۱-۱۸ مشخص کنید که نقطه‌ی ثابتی که تکانه‌ی زاویه‌ای نسبت به آن حساب می‌شود، همیشه باید معین شده باشد.

۱۱-۱۹ تکانه‌ی زاویه‌ای یک ذره را با استفاده کردن از ضرب برداری مکان ذره و بردار تکانه‌ی خطی آن به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، یا بزرگی ـ زاویه، حساب کنید.

۱۱-۲۰ برای تعیین جهت بردار تکانه‌ی زاویه‌ای قاعده‌ی دست راست در ضرب برداری را به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

- تکانه‌ی زاویه‌ای یک ذره $\vec{\ell}$، با تکانه‌ی خطی $\vec{p}$، جرم m و سرعت خطی $\vec{v}$، کمیتی برداری است، که نسبت به یک نقطه‌ی ثابت (به طور معمول مبداء مختصات) تعریف می‌شود

$$\vec{\ell} = \vec{r}\times\vec{p} = m(\vec{r}\times\vec{v})$$

● بزرگی $\vec{\ell}$ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\ell = mv\sin\phi$$

$$\ell = r_{\perp}p_{\perp} = rmv_{\perp}$$

$$\ell = r_{\perp}p = r_{\perp}mv$$

که در آن ϕ زاویه‌ی میان $\vec{r}$ و $\vec{p}$، $p_{\perp}$ و $v_{\perp}$ مؤلفه‌های $\vec{p}$ و $\vec{v}$ عمود بر $\vec{r}$، و $r_{\perp}$ فاصله‌ی عمودی میان نقطه‌ی ثابت و امتداد $\vec{p}$ است.

● جهت $\vec{\ell}$ با قاعده‌ی دست راست معین می‌شود: دست راست خود را طوری قرار دهید که انگشت‌ها در جهت $\vec{r}$ باشند. اکنون انگشت‌ها را به طرف $\vec{p}$ بچرخانید در این صورت، انگشت شست به حالت کشیده جهت $\vec{\ell}$ را نشان خواهد داد.

تکانه‌ی زاویه‌ای

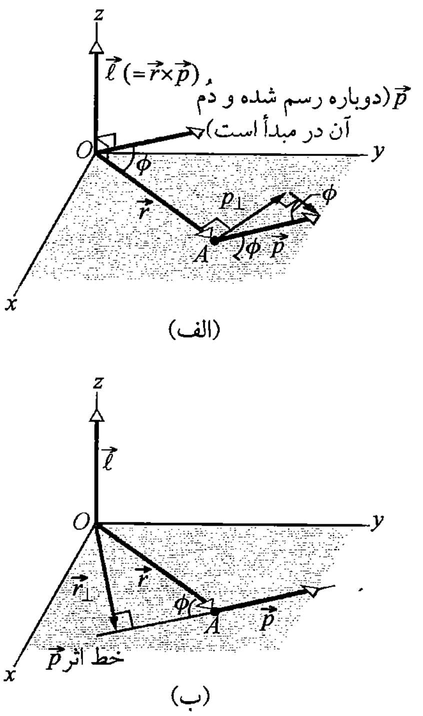
یادآوری می‌شود که مفهوم تکانه‌ی خطی $\vec{p}$ و اصل پایستگی تکانه‌ی خطی از ابزارهای توانمند در فیزیک هستند. با استفاده کردن از آن‌ها می‌توان نتیجه‌ی مثلاً برخورد دو خودرو را بدون اطلاع از جزئیات برخورد، پیشگویی کرد. اکنون، بحث مربوط به همتای زاویه‌ای $\vec{p}$ را آغاز می‌کنیم و در پودمان ۱۱-۸ به بحث در مورد همتای زاویه‌ای این اصل پایستگی خواهیم پرداخت، که منجر به کارهای برجسته (تقریباً سحرآمیز) در زمینه‌ی باله، شیرجه‌ی تفننی، اسکیت بر روی یخ و بسیاری فعالیت‌های دیگر می‌شود.

شکل ۱۱-۱۲ ذره‌ای به جرم m با تکانه‌ی خطی $\vec{p}$ (مساوی با $m\vec{v}$) را هنگام عبور از نقطه‌ی A در صفحه‌ی xy نشان می‌دهد. **تکانه‌ی زاویه‌ای** این ذره $\vec{\ell}$، نسبت به مبداء O کمیتی برداری است، که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\vec{\ell} = \vec{r}\times\vec{p} = m(\vec{r}\times\vec{v}) \quad \text{(تعریف تکانه‌ی زاویه‌ای)} \qquad (۱۱\text{–}۱۸)$$

که در آن $\vec{r}$ بردار مکان ذره نسبت به O است. وقتی ذره نسبت به O در جهت تکانه‌اش $\vec{p}$ (مساوی با $m\vec{v}$) حرکت می‌کند، بردار مکان $\vec{r}$ به دور نقطه‌ی O می‌چرخد. باید دقت کرد که برای به دست آوردن تکانه‌ی زاویه‌ای.نسبت به O ***لازم نیست*** خود ذره به دور O دوران کند. مقایسه‌ی معادله‌های ۱۱-۱۴ و ۱۱-۱۸ نشان می‌دهد که تکانه‌ی زاویه‌ای با تکانه‌ی خطی همان رابطه‌ای را دارد که گشتاور نیرو با نیرو دارد. یکای تکانه‌ی زاویه‌ای در دستگاه بین‌المللی یکاها (SI) **کیلوگرم ـ مترمربع بر ثانیه** (با نماد $\mathrm{kg\cdot m^2/s}$) و هم‌ارز با **ژول ـ ثانیه** (با نماد $\mathrm{J\cdot s}$) است.

تعیین جهت. برای تعیین جهت بردار تکانه‌ی زاویه‌ای $\vec{\ell}$ در شکل ۱۱-۱۲، بردار $\vec{p}$ را به طور موازی با خود آن‌قدر می‌لغزانیم تا دُم آن در مبداء O قرار گیرد. سپس از قاعده‌ی دست راست برای حاصل‌ضرب برداری استفاده می‌کنیم. هرگاه انگشتان دست راست را از $\vec{r}$ به طرف $\vec{p}$ بچرخانیم، در این صورت، انگشت شست به حالت کشیده نشان می‌دهد که در شکل ۱۱-۱۲، $\vec{\ell}$ در جهت مثبت محور z قرار دارد. این جهت مثبت با چرخش پادساعت‌گرد بردار مکان ذره $\vec{r}$، به دور محور z در حین حرکت کردن ذره سازگار است



شکل ۱۱-۱۲ نمودار مربوط به تعریف تکانه‌ی زاویه‌ای. ذره‌ای که از نقطه‌ی A عبور می‌کند، دارای تکانه‌ی خطی $\vec{p}$ (مساوی با $m\vec{v}$) است و بردار $\vec{p}$ در صفحه‌ی xy قرار دارد. تکانه‌ی زاویه‌ای ذره نسبت به مبداء O، $\vec{\ell}$ (مساوی با $\vec{r}\times\vec{p}$) است. بنا به قاعده‌ی دست راست بردار تکانه‌ی زاویه‌ای در جهت مثبت محور z است. (الف) بزرگی $\vec{\ell}$ از معادله‌ی $\ell = rp_{\perp} = rmv_{\perp}$، وهم‌چنین، (ب) از معادله‌ی $\ell = r_{\perp}p = r_{\perp}mv$، به‌دست می‌آید.

(جهت منفی $\vec{\ell}$ با چرخش ساعت‌گرد $\vec{r}$ به دور محور z همخوانی دارد).

تعیین بزرگی. برای پیدا کردن بزرگی $\vec{\ell}$، از نتیجه‌ی کلی معادله‌ی ۳-۲۷ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$\ell = rmv\sin\phi \tag{۱۱-۱۹}$$

در این معادله ϕ زاویه‌ی میان $\vec{r}$ و $\vec{p}$ در حالتی است که دو بردار به صورت دُم به دُم قرار می‌گیرند. با توجه به شکل ۱۱-۱۲ الف، معلوم می‌شود که معادله‌ی ۱۱-۱۹ به صورت زیر هم می‌تواند نوشته شود

$$\ell = r\,p_\perp = r\,mv_\perp \tag{۱۱-۲۰}$$

که در آن $p_\perp$ مؤلفه‌ی $\vec{p}$ در راستای عمود بر $\vec{r}$ و $v_\perp$ مؤلفه‌ی $\vec{v}$ در راستای عمود بر $\vec{r}$ است. با توجه به شکل ۱۱-۱۲ ب، نتیجه می‌گیریم که معادله‌ی ۱۱-۱۹ را به صورت زیر هم می‌توان نوشت

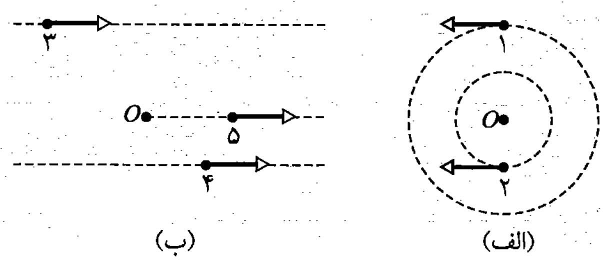
$$\ell = r_\perp p = r_\perp mv \tag{۱۱-۲۱}$$

که در آن $r_\perp$ فاصله‌ی عمودی میان O و امتداد $\vec{p}$ است.

موضوع مهم. در اینجا به دو ویژگی توجه کنید: (۱) تکانه‌ی زاویه‌ای هم مانند گشتاور نیرو فقط نسبت به یک مبداء مشخص معنی دارد و (۲) جهت آن همیشه بر صفحه‌ی متشکل از بردارهای مکان $\vec{r}$ و تکانه‌ی خطی $\vec{p}$، عمود است.

☑ خودآزمایی ۴

در قسمت الف شکل زیر، ذره‌های ۱ و ۲ در جهت‌های مخالف به دور نقطه‌ی O می‌چرخند و شعاع دوران آن‌ها ۲m و ۴m است. در قسمت ب، ذره‌های ۳ و ۴ در روی خط‌های راست در یک جهت و با فاصله‌های عمودی ۴m و ۲m از نقطه‌ی O حرکت می‌کنند. ذره‌ی ۵ به طور مستقیم از نقطه‌ی O دور می‌شود. جرم هر پنج ذره یکسان و تندی آن‌ها هم ثابت و یکسان است. (الف) این ذره‌ها را با توجه به بزرگی تکانه‌ی زاویه‌ای آن‌ها نسبت به نقطه‌ی O از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. (ب) تکانه‌ی زاویه‌ای کدام ذره نسبت به نقطه‌ی O منفی است؟



مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۱-۳ تکانه‌ی زاویه‌ای یک دستگاه دو ذره‌ای

شکل ۱۱-۱۳ تصویر دو ذره را در حال حرکت کردن با تکانه‌ی خطی ثابت درطول مسیرهای افقی، با دید از بالا، نشان می‌دهد. ذره‌ی ۱ دارای بزرگی تکانه‌ی خطی $p_1 = 5.0\,\mathrm{kg\cdot m/s}$ و بردار مکان $\vec{r}_1$ است، که از فاصله‌ی ۲٫۰ متری نقطه‌ی O عبور می‌کند. ذره‌ی ۲ با بزرگی تکانه‌ی خطی $p_2 = 2.0\,\mathrm{kg\cdot m/s}$ و بردار مکان $\vec{r}_2$ از فاصله‌ی ۴٫۰ متری نقطه‌ی O می‌گذرد. تکانه‌ی زاویه‌ای برایند $\vec{L}$ این دستگاه دو ذره‌ای نسبت به نقطه‌ی O چیست؟

نکته‌ی کلیدی

برای تعیین $\vec{L}$، ابتدا می‌توان تکانه‌های زاویه‌ای فردی $\vec{\ell}_1$ و $\vec{\ell}_2$ را پیدا و سپس آن‌ها را با هم جمع کرد. برای پیدا کردن بزرگی آن‌ها هم از یکی از معادله‌های ۱۱-۱۸ تا ۱۱-۲۱ می‌توان استفاده کرد. اما معادله‌ی ۱۱-۲۱ آسان‌تر است، چون فاصله‌های عمودی $r_{\perp 1}$ (مساوی با $2.0\,\mathrm{m}$) و $r_{\perp 2}$ (مساوی با $4.0\,\mathrm{m}$) و بزرگی‌های تکانه‌های p_1 و p_2 معلوم‌اند.

محاسبات: برای ذره‌ی ۱، با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۱-۲۱، داریم

$$\ell_1 = r_{\perp 1}p_1 = (2.0\,\mathrm{m})(5.0\,\mathrm{kg\cdot m/s}) = 10\,\mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

برای پیدا کردن جهت بردار $\vec{\ell}_1$، از معادله‌ی ۱۱-۱۸ و قاعده‌ی دست راست مربوط به ضرب برداری استفاده می‌کنیم. جهت حاصل‌ضرب برداری $\vec{r}_1\times\vec{p}_1$ به برون سوی صفحه و عمود بر صفحه‌ی شکل ۱۱-۱۳ است. این جهت مثبت است و با چرخش پادساعت‌گرد بردار مکان ذره $\vec{r}_1$، به دور نقطه‌ی O به هنگام حرکت کردن ذره‌ی ۱، سازگار است. بنابراین، تکانه‌ی زاویه‌ای مربوط به ذره‌ی ۱ عبارت است از

$$\ell_1 = +10\,\mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

به همین ترتیب، بزرگی بردار $\vec{\ell}_2$ برابر است با

$$\ell_2 = r_{\perp 2}p_2 = (4.0\,\mathrm{m})(2.0\,\mathrm{kg\cdot m/s}) = 8.0\,\mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

جهت حاصل‌ضرب برداری $\vec{r}_2\times\vec{p}_2$ به درون سوی صفحه‌ی شکل است، که منفی است و با چرخش ساعت‌گرد $\vec{r}_2$ به دور نقطه‌ی O به هنگام حرکت کردن ذره‌ی ۲، همخوانی دارد. بنابراین، تکانه‌ی زاویه‌ای مربوط به ذره‌ی ۲ عبارت است از

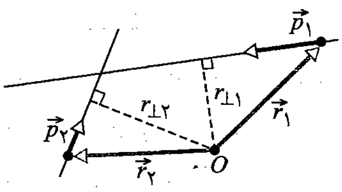
$$\ell_2 = -8.0\,\mathrm{kg\cdot m^2/s}$$

پس، تکانه‌ی زاویه‌ای برایند دستگاه دو ذره‌ای برابر است با

$$L = \ell_1 + \ell_2 = +10\,\mathrm{kg\cdot m^2/s} + (-8.0\,\mathrm{kg\cdot m^2/s}) \Rightarrow$$

$$L = +2.0\,\mathrm{kg\cdot m^2/s} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

معنی علامت مثبت این است که جهت تکانه‌ی زاویه‌ای برایند دستگاه نسبت به نقطه‌ی O به برون سوی صفحه‌ی شکل است.



شکل ۱۱-۱۳ دو ذره از نزدیکی نقطه‌ی O عبور می‌کنند.

۱۱-۶ شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۱-۲۱ شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون را برای ربط دادن گشتاور نیروی وارد شده به یک ذره به آهنگ تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای ذره، هر دو نسبت به یک نقطه معین، به کار ببرید.

نکته‌ی کلیدی

● قانون دوم نیوتون مربوط به یک ذره را می‌توان به صورت زاویه‌ای زیر نوشت

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

که در آن $\vec{\tau}_{\text{net}}$ گشتاور نیروی برایند وارد شده به ذره به و $\vec{\ell}$ تکانه‌ی زاویه‌ای ذره است.

شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون

قانون دوم نیوتون، که به صورت

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{(تک ذره)} \qquad (۱۱-۲۲)$$

نوشته می‌شود، رابطه‌ی نزدیک میان نیرو و تکانه‌ی خطی را برای تک ذره نشان می‌دهد. با توجه به تشابه میان کمیت‌های خطی و زاویه‌ای که مشاهده کرده‌ایم، می‌توان یقین کرد که میان گشتاور نیرو و تکانه‌ی زاویه‌ای نیز رابطه‌ی نزدیکی وجود دارد. به کمک معادله‌ی ۱۱-۲۲ می‌توان حدس زد که این رابطه چنین است

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt} \quad \text{(تک ذره)} \qquad (۱۱-۲۳)$$

معادله‌ی ۱۱-۲۳، در واقع، شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون برای تک ذره است:

مجموع (برداری) تمام گشتاورهای نیروی مؤثر بر یک ذره برابر با آهنگ زمانی تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای ذره است.

معادله‌ی ۱۱-۲۳ به شرطی معنی دارد که گشتاورهای نیروی $\vec{\tau}$ و تکانه‌ی زاویه‌ای $\vec{\ell}$ نسبت به یک نقطه، که، به طور معمول، مبداء مختصات دستگاه به کار رفته است، تعریف شوند.

اثبات معادله‌ی ۱۱-۲۳

بنا به معادله‌ی ۱۱-۱۸، تکانه‌ی زاویه‌ای یک ذره چنین تعریف شد:

$$\vec{\ell} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

که در آن $\vec{r}$ بردار مکان و $\vec{v}$ سرعت ذره است. از دو طرف این معادله نسبت به t مشتق می‌گیریم*، داریم

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}\right) \qquad (۱۱-۲۴)$$

در اینجا $d\vec{v}/dt$ شتاب ذره $\vec{a}$، و $d\vec{r}/dt$ سرعت ذره است. بنابراین، معادله‌ی ۱۱-۲۴ را

* هنگام مشتق گرفتن از یک عبارت ضرب برداری دقت کنید ترتیب دو عامل ضرب (در اینجا $\vec{r}$ و $\vec{v}$) تغییر نکند. (معادله‌ی ۳-۲۵ را ببینید).

می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r}\times\vec{a} + \vec{v}\times\vec{v})$$

در اینجا $\vec{v}\times\vec{v} = 0$ (حاصل‌ضرب برداری هر بردار در خودش صفر است، زیرا زاویه‌ی میان دو بردار صفر است). در نتیجه، جمله‌ی آخر این رابطه حذف می‌شود و داریم

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = m(\vec{r}\times\vec{a}) = \vec{r}\times m\vec{a}$$

اکنون، از قانون دوم نیوتون $(\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a})$ استفاده می‌کنیم و به جای $m\vec{a}$، مساوی آن مجموع برداری نیروهای وارد شده به ذره، را قرار می‌دهیم:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F}_{\text{net}} = \sum(\vec{r}\times\vec{F}) \qquad (۱۱-۲۵)$$

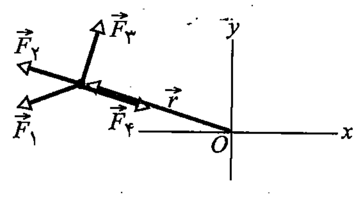
در اینجا نماد Σ نشان می‌دهد که باید حاصل‌ضرب‌های برداری $\vec{r}\times\vec{F}$ مربوط به تمام نیروها را با هم جمع کنیم. اما با توجه به معادله‌ی ۱۱-۱۴ می‌دانیم که هر یک از این حاصل‌ضرب‌های برداری برابر با گشتاور نیروی مربوط به یکی از نیروهاست. بنابراین، معادله‌ی ۱۱-۲۵ نشان می‌دهد که:

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

این، همان معادله‌ی ۱۱-۲۳ مورد نظر است.

خودآزمایی ۵

شکل زیر بردار مکان $\vec{r}$ مربوط به یک ذره در لحظه‌ای معین و نمودار چهار حالت نیروی شتاب دهنده به ذره را نشان می‌دهد. هر چهار حالت در صفحه‌ی xy قرار دارند. (الف) این نیروها را با توجه به بزرگی آهنگ زمانی تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای $(d\vec{\ell}/dt)$ ایجاد شده نسبت به نقطه‌ی O، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. (ب) آهنگ تغییر کدام حالت نسبت به نقطه‌ی O منفی است؟

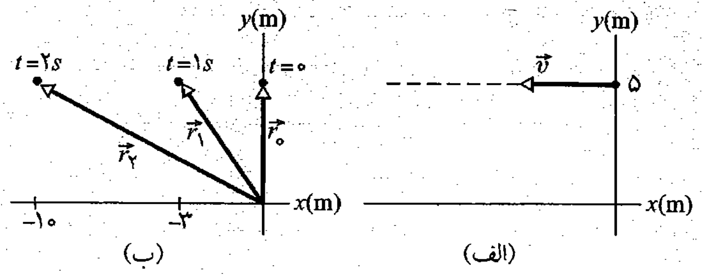


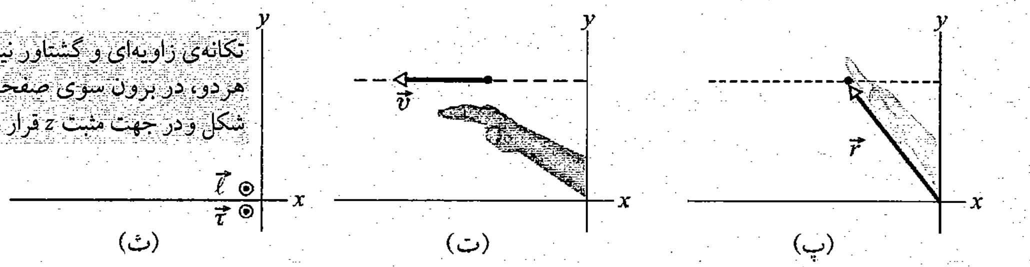
مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۱-۴ گشتاور نیرو و مشتق تکانه‌ی زاویه‌ای نسبت به زمان

شکل ۱۱-۱۴ الف چارچوب ثابت یک ذره‌ی ۰٫۵۰۰ کیلوگرمی را نشان می‌دهد که با بردار مکان به معادله‌ی زیر در راستای یک خط راست از زمان $t = 0$ شروع به حرکت می‌کند.

$$\vec{r} = (-2{,}00t^2 - t)\hat{i} + 5{,}00\hat{j}$$

در این معادله $\vec{r}$ برحسب متر و t بر حسب ثانیه است. بردار از مبداء مختصات به سمت ذره است. رابطه‌ی مربوط به تکانه‌ی زاویه‌ای ذره $\vec{\ell}$، گشتاور نیروی وارد شده به ذره $\vec{\tau}$، هر دو، را به مبداء مختصات، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه به دست آورید. علامت‌های جبری این کمیت‌ها را با توجه به حرکت ذره توجیه کنید.





شکل ۱۱-۱۴ (الف) ذره‌ای که به خط راست حرکت می‌کند، در زمان $t=۰$ نشان داده شده است. (ب) بردار مکان در زمان $t=۰, ۱٫۰۰s, ۲٫۰۰s$. (پ) مرحله‌ی اول به کار بردن قاعده‌ی دست راست برای ضرب برداری. (ت) مرحله‌ی دوم. (ث) بردار تکانه‌ی زاویه‌ای و بردار گشتاور نیرو در راستای محور z قرار دارند و در برون‌سوی صفحه‌ی شکل واقع شده‌اند.

نکته‌های کلیدی

(۱) نقطه‌ای که تکانه‌ی زاویه‌ی ذره نسبت به آن حساب می‌شود، همیشه باید مشخص شده‌باشد. در اینجا این نقطه مبداء مختصات است. (۲) تکانه‌ی زاویه‌ای یک ذره $\vec{\ell}$، از معادله‌ی ۱۱-۱۸ $[\vec{\ell}=\vec{r}\times\vec{p}=m(\vec{r}\times\vec{v})]$ به دست می‌آید. (۳) علامت تکانه زاویه‌ای وابسته به ذره با جهت دوران بردار مکان ذره (به دور محور دوران) در هنگام حرکت ذره معین می‌شود: جهت ساعت‌گرد منفی و جهت پادساعت‌گرد مثبت است. (۴) اگر گشتاور نیروی وارد شده به یک ذره و تکانه‌ی زاویه‌ای ذره را نسبت به **یک نقطه** حساب کنیم، در آن‌صورت، گشتاور نیرو بنابه معادله‌ی ۱۱-۲۳ $(\vec{\tau}=d\vec{\ell}/dt)$ با تکانه‌ی زاویه‌ای رابطه دارد.

محاسبات: هنگام استفاده کردن از معادله‌ی ۱۱-۱۸ برای پیدا کردن تکانه‌ی زاویه‌ای نسبت به مبداء مختصات، نخست باید با مشتق گرفتن از بردار مکان برحسب زمان، برای سرعت ذره رابطه‌ای به دست آوریم. با استفاده کردن از معادله‌ی ۴-۱۰ $(\vec{v}=d\vec{r}/dt)$ چنین می‌نویسیم

$$\vec{v}=\frac{d}{dt}[(-۲٫۰۰t^{۲}-t)\hat{i}+۵٫۰۰\hat{j}]$$

$$\vec{v}=(-۴٫۰۰t-۱٫۰۰)\hat{i}$$

در اینجا $\vec{v}$ برحسب متر بر ثانیه است.

اکنون، حاصل‌ضرب برداری $\vec{r}$ و $\vec{v}$ را با استفاده کردن از الگوی مربوط به ضرب‌های برداری مندرج در معادله‌ی ۳-۲۷ حساب می‌کنیم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_y b_z-b_y a_z)\hat{i}+(a_z b_x-b_z a_x)\hat{j}$$
$$+(a_x b_y-b_x a_y)\hat{k}$$

در اینجا نماد کلی $\vec{a}$ به جای $\vec{r}$ و نماد کلی $\vec{b}$ به جای $\vec{v}$ قرار گرفته است. اما چون نمی‌خواهیم به کاری بیش از آنچه که نیاز داریم بپردازیم، نخست فقط درباره‌ی جانشانی‌ها در ضرب برداری فکر می‌کنیم. چون $\vec{r}$ بدون مؤلفه‌ی z و $\vec{v}$ بدون مؤلفه‌های y یا z است، تنها جمله‌ی ناصفر در ضرب برداری جمله‌ی آخر $(-b_x a_y)\hat{k}$ است. بنابراین، محاسبات (ریاضی) را چنین دنبال می‌کنیم.

$$\vec{r}\times\vec{v}=-(-۴٫۰۰t-۱٫۰۰)(۵٫۰۰)\hat{k}=(۲۰٫۰t+۵٫۰۰)\hat{k}\,m^{۲}/s$$

توجه کنید که مانند همیشه، نتیجه‌ی ضرب برداری یک بردار است که بر بردارهای اولیه عمود است. برای کامل کردن معادله‌ی ۱۱-۱۸، نتیجه‌ی بالا را در جرم ضرب می‌کنیم و رابطه‌ی زیر را به دست می‌آوریم

$$\vec{\ell}=(۰٫۵۰۰\,kg)[(۲۰٫۰t+۵٫۰۰)\hat{k}\,m^{۲}/s]$$

(پاسخ) $$\vec{\ell}=(۱۰٫۰t+۲٫۵۰)\hat{k}\,kg\cdot m^{۲}/s$$

گشتاور نیرو نسبت به مبداء مختصات با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۱-۲۳ چنین به دست می‌آید

$$\vec{\tau}=\frac{d}{dt}(۱٫۰۰t-۲٫۵۰)\hat{k}\,kg\cdot m^{۲}/s$$

(پاسخ) $$\vec{\tau}=۱۰٫۰\hat{k}\,kg\cdot m^{۲}/s^{۲}=۱۰٫۰\hat{k}\,N\cdot m$$

که در جهت مثبت محور z قرار دارد.

نتیجه‌ی به دست آمده برای $\vec{\ell}$ نشان می‌دهد که تکانه‌ی زاویه‌ای در جهت مثبت محور z واقع است. برای توجیه کردن این نتیجه‌ی مثبت با توجه به دوران بردار مکان، آن بردار را در چند زمان حساب می‌کنیم:

$$t=۰ \qquad \vec{r}_۰ = ۵/۰۰\,\hat{j}\,\text{m}$$
$$t=۱/۰۰\,\text{s} \qquad \vec{r}_۱ = -۳/۰۰\,\hat{i}+۵/۰۰\,\hat{j}\,\text{m}$$
$$t=۲/۰۰\,\text{s} \qquad \vec{r}_۲ = -۱/۰۰\,\hat{i}+۵/۰۰\,\hat{j}\,\text{m}$$

با رسم کردن این نتیجه‌ها به صورت شکل ۱۱-۱۴ ب، می‌بینیم که $\vec{r}$ در جهت پادساعت‌گرد دوران می‌کند تا با ذره بماند. این جهت، جهت مثبت دوران است. بنابراین، ذره گرچه به خط راست حرکت می‌کند، هنوز در جهت پادساعت‌گرد به دور مبداء مختصات می‌چرخد و درنتیجه دارای تکانه‌ی زاویه‌ای مثبت است.

جهت $\vec{\ell}$ را نیز با استفاده کردن از قاعده‌ی دست راست مربوط به ضرب برداری (در اینجا $\vec{r}\times\vec{v}$، یا اگر دوست داشته باشید $m\vec{r}\times\vec{v}$، که در همان جهت است) می‌توان معین کرد. برای هر لحظه‌ای در حین حرکت کردن ذره، انگشت‌های دست راست ابتدا در جهت بردار اول ($\vec{r}$) در ضرب برداری قرار می‌گیرند (مانند شکل ۱۱-۱۴ پ). بنابراین، سمت‌گیری دست (روی صفحه‌ی کتاب یا صفحه‌ی نمایش) به گونه‌ای تنظیم می‌شود که انگشت‌ها بتوانند به راحتی بچرخند و در جهت بردار دوم ضرب برداری ($\vec{v}$) قرار گیرند (شکل ۱۱-۱۴ ت). در نتیجه، انگشت شست به حالت کشیده جهت نتیجه‌ی ضرب برداری را نشان خواهد داد. همان طور که در شکل ۱۱-۱۴ ث نشان داده شده است، این بردار در جهت مثبت محور z (که در برون‌سوی صفحه‌ی شکل قرار دارد) با نتیجه‌ی پیشی سازگار است. شکل ۱۱-۱۴ ث جهت $\vec{\tau}$ را نیز نشان می‌دهد که در جهت مثبت محور z واقع است زیرا تکانه‌ی زاویه‌ای در آن جهت قرار دارد و بزرگی‌اش در حال افزایش یافتن است.

۱۱-۷ تکانه‌ی زاویه‌ای یک جسم صُلب

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۱-۲۲ شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون مربوط به یک دستگاه ذرات را برای ربط دادن گشتاور نیروی برایند وارد شده به دستگاه به آهنگ تغییر حاصل در تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه، به‌کار ببرید.

۱۱-۲۳ رابطه‌ی میان تکانه‌ی زاویه‌ای یک جسم صُلب در حال دوران به دور محور ثابت و لختی دورانی و تندی زاویه‌ای حرکت جسم به دور آن محور را به کار ببرید.

۱۱-۲۴ هنگامی که دو جسم صُلب به دور یک محور دوران می‌کنند، تکانه‌ی زاویه‌ای کل آن‌ها را حساب کنید.

نکته‌های کلیدی

- تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه ذرات، با مجموع برداری تکانه‌های زاویه‌ای فردی ذرات برابر است:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_۱ + \vec{\ell}_۲ + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=۱}^{n} \vec{\ell}_i$$

- آهنگ زمانی تغییر این تکانه‌ی زاویه‌ای با گشتاور نیروی برایند خارجی مؤثر بر دستگاه (مجموع برداری گشتاورهای نیروی ناشی از برهم کنش ذرات دستگاه با ذرات خارج دستگاه) برابر است:

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{(دستگاه ذرات)}$$

- در یک جسم صُلب در حال دوران به دور یک محور ثابت، مؤلفه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای موازی با محور دوران برابر است با

$$L = I\omega \quad \text{(جسم صُلب، محور ثابت)}$$

تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه ذرات

اکنون، به مطالعه‌ی موضوع تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه ذرات نسبت به یک مبداء می‌پردازیم. تکانه‌ی زاویه‌ای کل یک دستگاه ذرات $\vec{L}$، برابر با مجموع (برداری) تکانه‌های زاویه‌ای $\vec{\ell}$ هر یک از ذره‌هاست (که در اینجا با i مشخص شده است):

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i \qquad (۱۱-۲۶)$$

تکانه‌های زاویه‌ای هر یک از ذره‌ها ممکن است به خاطر برهم کنش‌های میان ذره‌های فردی یا برهم کنش با خارج دستگاه، برحسب زمان تغییر کنند. وقتی این تغییرات صورت می‌گیرند، با مشتق گرفتن از معادله‌ی ۱۱-۲۶ می‌توان تغییرات $\vec{L}$ را به دست آورد:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{\ell}_i}{dt} \qquad (۱۱-۲۷)$$

معادله‌ی ۱۱-۲۳ نشان می‌دهد که $d\vec{\ell}_i / dt$ برابر با گشتاور نیروی برایند وارد شده به ذره‌ی iاُم، $\vec{\tau}_{\text{net},i}$، است. معادله‌ی ۱۱-۲۷ را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{\text{net},i} \qquad (۱۱-۲۸)$$

یعنی، آهنگ تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه $\vec{L}$، برابر با مجموع برداری گشتاورهای نیروی وارد شده به ذره‌های فردی است. این گشتاورهای نیرو ***گشتاورهای نیروی درونی*** (ناشی از نیروهای میان ذرات) و ***گشتاورهای نیروی خارجی*** (ناشی از نیروهای وارد شده به ذرات از سوی اجسام خارجی دستگاه) را در برمی‌گیرند. اما نیروهای میان ذرات همیشه به صورت زوج نیروهای قانون سوم نیوتون هستند و در نتیجه، مجموع گشتاورهای نیروی آن‌ها صفر است. بنابراین، تنها گشتاورهای نیرویی که می‌توانند تکانه‌ی زاویه‌ای کل دستگاه $\vec{L}$، را تغییر دهند، گشتاورهای نیروی خارجی وارد شده به دستگاه هستند.

گشتاور نیروی برایند خارجی. فرض می‌کنیم $\vec{\tau}_{\text{net}}$ گشتاور نیروی خارجی برایند، یعنی مجموع برداری تمام گشتاورهای نیروی خارجی وارد شده به تمام ذره‌های دستگاه باشد. در این صورت، معادله‌ی ۱۱-۲۸ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{(دستگاه ذرات)} \qquad (۱۱-۲۹)$$

این معادله بیان کننده‌ی شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون است و نشان می‌دهد که:

گشتاور نیروی خارجی برایند وارد شده به دستگاه ذرات $\vec{\tau}_{\text{net}}$، برابر با آهنگ زمانی تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای کل دستگاه $\vec{L}$، است.

معادله‌ی ۱۱-۲۹ مانسته‌ی معادله‌ی $\vec{F}_{\text{net}} = d\vec{P} / dt$ (معادله‌ی ۹-۲۷) است، اما در اینجا باید دقت کرد که گشتاورهای نیرو و تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه نسبت به یک مبداء اندازه‌گیری

شوند. اگر مرکز جرم دستگاه نسبت به یک چارچوب مرجع لخت شتاب نداشته باشد، مبداء می‌تواند هر نقطه‌ای باشد. اما ***اگر مرکز جرم دستگاه شتاب داشته باشد***، مبداء باید مرکز جرم باشد. به عنوان مثال، یک چرخ را به عنوان دستگاه ذرات در نظر می‌گیریم. اگر این چرخ نسبت به زمین به دور محور ثابتی بچرخد، برای به کار بردن معادله‌ی ۱۱-۲۹ مبداء می‌تواند هر نقطه‌ی ساکنی نسبت به زمین باشد. اما اگر چرخ به دور یک محور شتاب‌دار بچرخد (مانند موقعی که چرخ از شیب‌راهه‌ای به پایین می‌غلتد)، مبداء فقط می‌تواند مرکز جرم چرخ باشد.

تکانه‌ی زاویه‌ای جسم صُلب چرخنده به دور محور ثابت

اکنون، تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه ذرات تشکیل دهنده‌ی یک جسم، مطابق شکل ۱۱-۱۵ الف، را که به دور محور ثابتی می‌چرخد، حساب می‌کنیم. محور ثابت دوران محور z است و جسم با تندی زاویه‌ای ثابت ω به دور آن می‌چرخد. در اینجا می‌خواهیم تکانه‌ی زاویه‌ای جسم را نسبت به این محور پیدا کنیم.

تکانه‌ی زاویه‌ای را می‌توان با جمع کردن مؤلفه‌های z تکانه‌های زاویه‌ای عنصرهای جرمی در جسم پیدا کرد. در شکل ۱۱-۱۵ الف، یک عنصر جرمی به جرم Δm_i بر روی مسیری دایره‌ای به دور محور z حرکت می‌کند. محل این عنصر نسبت به مبداء O با بردار مکان $\vec{r}_i$ مشخص شده است. شعاع مسیر دایره‌ای عنصر جرمی $r_{\perp i}$ است، که برابر با فاصله‌ی عمودی میان عنصر و محور z است.

بزرگی تکانه‌ی زاویه‌ای این عنصر جرمی $\vec{\ell}_i$، نسبت به O از معادله‌ی ۱۱-۱۹ به دست می‌آید:

$$\ell_i = (r_i)(p_i)(\sin 90^\circ) = (r_i)(\Delta m_i v_i)$$

که در آن p_i و v_i تکانه‌ی خطی و تندی خطی عنصر جرمی، و زاویه‌ی ۹۰ درجه زاویه‌ی میان $\vec{r}_i$ و $\vec{p}_i$ است. بردار تکانه‌ی زاویه‌ای $\vec{\ell}_i$ مربوط به عنصر جرمی شکل ۱۱-۱۵ الف در شکل ۱۱-۱۵ ب، نشان داده شده است؛ این بردار باید بر بردارهای $\vec{r}_i$ و $\vec{p}_i$ عمود باشد.

مؤلفه‌های z. در اینجا می‌خواهیم مؤلفه‌ی $\vec{\ell}_i$ موازی با محور دوران، یعنی محور z، را پیدا کنیم. این مؤلفه برابر است با

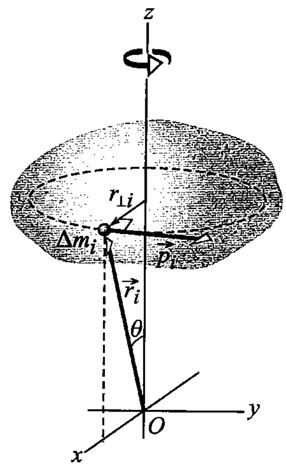
$$\ell_{iz} = \ell_i \sin\theta = (r_i \sin\theta)(\Delta m_i v_i) = r_{\perp i} \Delta m_i v_i$$

مؤلفه‌ی z تکانه‌ی زاویه‌ای کل جسم صُلب چرخان از جمع کردن تکانه‌های زاویه‌ای تمام عنصرهای جرمی تشکیل دهنده‌ی جسم به دست می‌آید. بنابراین، چون $v = \omega r_\perp$، پس، می‌توان نوشت

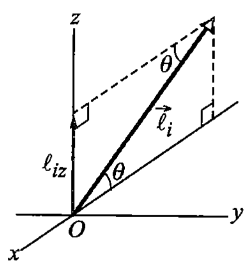
$$L_z = \sum_{i=1}^{n} \ell_{iz} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i r_{\perp i} = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (\omega r_{\perp i}) r_{\perp i} \Rightarrow$$

$$L_z = \omega\left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_{\perp i}^2\right) \qquad (۱۱-۳۰)$$

کمیت ω را می‌توان از این مجموع کنار گذاشت زیرا مقدار آن برای تمام نقاط جسم صُلب



(الف)



(ب)

شکل ۱۱-۱۵ (الف) جسم صُلبی با تندی زاویه‌ای ω به دور محور z می‌چرخد. عنصری به جرم Δm_i در درون جسم بر روی دایره‌ای به شعاع $r_{\perp i}$ به دور محور z حرکت می‌کند. تکانه‌ی خطی این عنصر جرمی $\vec{p}_i$ است و محل آن نسبت به مبداء O با بردار مکان $\vec{r}_i$ مشخص می‌شود. در اینجا عنصر جرمی در حالی نشان داده شده است که $r_{\perp i}$ موازی با محور x است. (ب) تکانه‌ی زاویه‌ای $\vec{\ell}_i$ عنصر جرمی مربوط به قسمت (الف) نسبت به O. مؤلفه‌ی ℓ_{iz} مربوط به راستای محور z نیز نشان داده شده است.

چرخان یکسان است.

کمیت $\sum \Delta m_i r_{\perp i}^2$ در معادله‌ی ۱۱-۳۰، نشان دهنده‌ی لختی دورانی جسم I، نسبت به محور ثابت است (معادله‌ی ۱۰-۳۳ را ببینید). بنابراین، معادله‌ی ۱۱-۳۰ به صورت زیر ساده می‌شود

$$L = I\omega \quad \text{(جسم صُلب، محور ثابت)} \qquad (۱۱-۳۱)$$

در اینجا شاخص پایین z حذف شده است، اما به خاطر داشته باشید که تکانه‌ی زاویه‌ای تعریف شده توسط معادله‌ی ۱۱-۳۱، تکانه‌ی زاویه‌ای نسبت به محور دوران و I در آن معادله هم لختی دورانی نسبت به همان محور است.

جدول ۱۱-۱ که مکمل جدول ۱۰-۳ است، رابطه‌های متناظر خطی و زاویه‌ای را نشان می‌دهد.

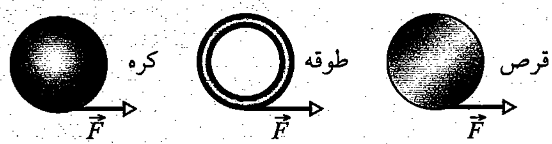
جدول ۱۱-۱ متغیرها و رابطه‌های متناظر در حرکت‌های انتقالی و دورانی[1]

حرکت انتقالی		حرکت دورانی	
نیرو	$\vec{F}$	گشتاور نیرو	$\vec{\tau}(=\vec{r}\times\vec{F})$
تکانه‌ی خطی	$\vec{p}$	تکانه‌ی زاویه‌ای	$\vec{\ell}(=\vec{r}\times\vec{p})$
تکانه‌ی خطی[2]	$\vec{P}\,(=\sum \vec{p}_i)$	تکانه‌ی زاویه‌ای[2]	$\vec{L}\,(=\sum \vec{\ell}_i)$
تکانه‌ی خطی[2]	$\vec{P} = M\vec{v}_{com}$	تکانه‌ی زاویه‌ای[3]	$L = I\omega$
قانون دوم نیوتون[2]	$\vec{F}_{net} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$	قانون دوم نیوتون[2]	$\vec{\tau}_{net} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
قانون پایستگی[4]	$\vec{P} = \text{const.}$	قانون پایستگی[4]	$\vec{L} = \text{const.}$

۱. جدول ۱۰-۳ را نیز ببینید.
۲. برای دستگاه ذرات و اجسام صُلب.
۳. برای جسم صُلب چرخنده به دور محور ثابت، که L مؤلفه‌ای در راستای همان محور است.
۴. برای یک دستگاه بسته و منزوی.

☑ خودآزمایی ۶

در شکل زیر، یک قرص، یک طوقه و یک کره‌ی توپر به وسیله‌ی نخ‌های پیچیده شده به دور آن‌ها، دور محور مرکزی ثابت‌شان (مانند یک فرفره) چرخانده شده‌اند. این نخ‌ها به هر سه شیء نیروی مماسی ثابت و یکسان $\vec{F}$ را وارد کرده‌اند. سه شیء جرم و شعاع یکسان دارند و در آغاز ساکن‌اند. این اشیا را با توجه به (الف) تکانه‌ی زاویه‌ای آن‌ها نسبت به محور مرکزی و (ب) تندی زاویه‌ای آن‌ها در حالتی که نخ‌ها به مدت معین t کشیده می‌شوند، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



۱۱-۸ پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۱-۲۵ هنگامی که در راستای یک محور معین هیچ گشتاور نیروی خارجی‌ای به دستگاهی وارد نمی‌شود، برای ربط دادن مقدار تکانه‌ی زاویه‌ای آغازی در راستای ***آن محور*** به مقدار آن در یک لحظه‌ی بعدی قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای را به کار ببرید.

نکته‌ی کلیدی

- تکانه‌ی زاویه‌ای یک دستگاه $\vec{L}$، به شرطی ثابت می‌ماند که گشتاور نیروی خارجی برایند وارد شده به دستگاه صفر باشد:

$$\vec{L} = \text{const.} \quad (\text{دستگاه منزوی})$$

یا

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \quad (\text{دستگاه منزوی})$$

این، قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای است.

پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای

تا اینجا دو قانون پایستگی توانمند، یعنی پایستگی انرژی و پایستگی تکانه‌ی خطی را مورد بحث قرار دادیم. اکنون، به قانون سومی از این نوع، یعنی پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای می‌پردازیم. برای این منظور از معادله‌ی ۱۱-۲۹ ($\vec{\tau}_{\text{net}} = d\vec{L}/dt$)، که شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون را بیان می‌کند، آغاز می‌کنیم. اگر هیچ گشتاور نیروی خارجی برایندی به دستگاه وارد نشود، این معادله به صورت $d\vec{L}/dt = 0$ در می‌آید، و از آنجا، داریم

$$\vec{L} = \text{const.} \quad (\text{دستگاه منزوی}) \qquad (۱۱-۳۲)$$

این نتیجه که **قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای** را بیان می‌کند، می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\begin{pmatrix} \text{تکانه‌ی زاویه‌ای برایند} \\ \text{در زمان بعدی } t_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{تکانه‌ی زاویه‌ای برایند} \\ \text{در زمان آغازی } t_i \end{pmatrix}$$

یا

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \quad (\text{دستگاه منزوی}) \qquad (۱۱-۳۳)$$

معادله‌های ۱۱-۳۲ و ۱۱-۳۳ نشان می‌دهند که:

اگر گشتاور نیروی خارجی برایند وارد شده به یک دستگاه صفر باشد، تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه $\vec{L}$، ثابت می‌ماند و موضوع به تغییرات صورت گرفته در درون دستگاه بستگی ندارد.

معادله‌های ۱۱-۳۲ و ۱۱-۳۳ معادله‌هایی برداری‌اند و به همین دلیل هم‌ارز با سه معادله‌ی مؤلفه‌های متناظر با پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای در سه راستای عمود بر هم هستند. تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه، بسته به گشتاورهای نیرویی که به یک دستگاه وارد می‌شوند، ممکن است فقط در یک یا دو راستا پایسته باشد، اما در تمام راستاها پایسته نباشد:

هرگاه مؤلفه‌ی گشتاور نیروی خارجی برایند وارد شده به یک دستگاه در راستای محور معینی صفر باشد، مؤلفه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه در راستای آن محور نمی‌تواند تغییر کند و این موضوع به تغییرات صورت گرفته در درون دستگاه بستگی ندارد.

به این گزاره‌ی توانمند توجه کنید: در این وضعیت ما تنها حالت‌های آغازی و پایانی را در نظر می‌گیریم و نیازی به در نظر گرفتن حالت‌های میانی نداریم.

این قانون را در مورد جسم منزوی شکل ۱۱-۱۵، که به دور محور z می‌چرخد، می‌توان به کار برد. فرض کنید جسمی که در آغاز صُلب است، بتواند توزیع جرم خود را نسبت به محور دوران با تغییر دادن لختی دورانی نسبت به آن محور به گونه‌ای تغییر دهد. بنا به معادله‌های ۱۱-۳۲ و ۱۱-۳۳ تکانه‌ی زاویه‌ای جسم نمی‌تواند تغییر کند. با جانشانی معادله‌ی ۱۱-۳۱ (مربوط به تکانه‌ی زاویه‌ای در راستای محور دوران) در معادله‌ی ۱۱-۳۳، قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای را چنین می‌نویسیم

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f \qquad (۱۱\text{-}۳۴)$$

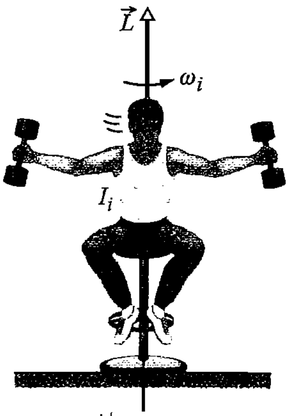
شاخص‌های پایین مقادیر لختی دورانی I و تندی زاویه‌ای ω را پیش و پس از توزیع دوباره‌ی جرم نشان می‌دهند.

در اینجا نیز مانند دو قانون پایستگی دیگر، که مورد بحث قرار گرفتند، معادله‌های ۱۱-۳۲ و ۱۱-۳۳ فراتر از محدودیت‌های مکانیک نیوتونی هم معتبرند. این معادله‌ها برای ذرات با تندی نزدیک به تندی نور (قلمرو نظریه‌ی نسبیت خاص)، و در دنیای ذرات زیر اتمی (قلمرو فیزیک کوانتومی)، نیز صادق‌اند. هنوز هیچ مورد اِستثنایی برای قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای پیدا نشده است.

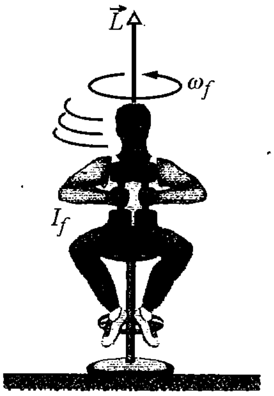
اکنون به توضیح چهار مثال درباره‌ی کاربرد این قانون می‌پردازیم.

۱. ***داوطلب چرخش*** شکل ۱۱-۱۶ دانشجویی را در حال نشستن بر روی یک زیرپایی، که می‌تواند آزادانه به دور محور قائمی بچرخد، نشان می‌دهد. دانشجو، که با تندی زاویه‌ای آغازی به نسبت کم ω_i، به چرخش در آمده دو دَمبل را در دست‌های باز شده‌ی خود نگه داشته است. بردار تکانه‌ی زاویه‌ای دانشجو $\vec{L}$، در راستای محور دوران قائم قرار دارد و جهتش به بالاسو است.

اکنون، مربی از دانشجو می‌خواهد که بازوهایش را جمع کند؛ این عمل لختی دورانی او را از مقدار آغازی I_i به مقدار کوچک‌تر I_f کاهش می‌دهد، زیرا جرم خود را به محور دوران نزدیک‌تر کرده است. در نتیجه، آهنگ دوران او به طور چشمگیری از ω_i به



(الف)



(ب)

شکل ۱۱-۱۶ (الف) لختی دورانی دانشجو نسبت به محور دوران به نسبت زیاد و تندی زاویه‌ای او به نسبت کم است. (ب) دانشجو با کم کردن لختی دورانی تندی زاویه‌ای‌اش را خود به خود افزایش می‌دهد. تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه چرخان $\vec{L}$، بدون تغییر باقی می‌ماند.

ω_f افزایش می‌یابد. دانشجو با باز کردن بازوهایش می‌تواند دوباره سرعت دوران خود را کم کند.

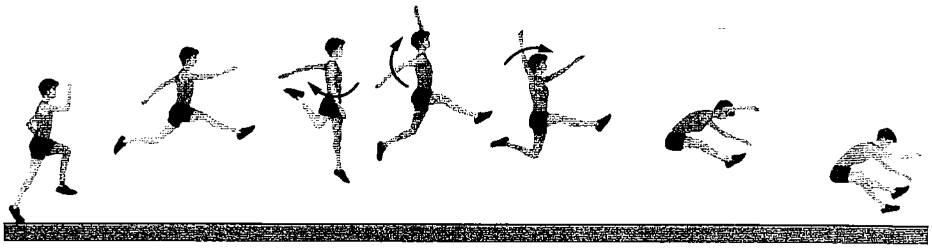
در این عمل هیچ گشتاور نیروی خارجی برایندی به دستگاه متشکل از دانشجو، زیرپایی و دَمبل‌ها وارد نمی‌شود. در نتیجه، تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه نسبت به محور دوران ثابت می‌ماند و این موضوع به چگونگی تغییر دادن محل دَمبل‌ها توسط دانشجو بستگی ندارد. در شکل ۱۱-۱۶ الف، تندی زاویه‌ای دانشجو ω_i، به نسبت کم و لختی دورانی او I_i، به نسبت زیاد است. بنا به معادله‌ی ۱۱-۳۴، تندی زاویه‌ای او در شکل ۱۱-۱۶ ب، باید بیشتر شود تا کاهش یافتن لختی دورانی را جبران کند.

۲. ***شیرجه رونده از تخته‌ی پرش*** شکل ۱۱-۱۷ شیرجه رویی را نشان می‌دهد که یک شیرجه‌ی با یک و نیم پشتک اجرا می‌کند. چنان‌که انتظار داریم، مرکز جرم شیرجه رو یک مسیر سهمی شکل می‌پیماید. او تخته‌ی شیرجه را با تکانه‌ی زاویه‌ای معین $\vec{L}$ نسبت به محور گذرنده از مرکز جرمش، که با برداری به درون سوی صفحه‌ی شکل ۱۱-۱۷ و عمود بر صفحه نشان داده شده است، ترک می‌کند. وقتی او در هوا قرار دارد، هیچ گشتاور نیروی خارجی برایندی نسبت به مرکز جرم به او وارد نمی‌شود. در نتیجه، تکانه‌ی زاویه‌ای او نسبت به مرکز جرم نمی‌تواند تغییر کند. او با کشیدن بازوها و پاها در ***وضعیت جمع شده***، می‌تواند به نحو قابل ملاحظه‌ای لختی دورانی خود را نسبت به محور کم کند، و در نتیجه، بنا به معادله‌ی ۱۱-۳۴، تندی زاویه‌ای‌اش را به نحو چشمگیری افزایش دهد. او با خارج شدن از وضعیت جمع شده (و رفتن به ***وضعیت باز شده***) در انتهای شیرجه لختی دورانی خود را افزایش می‌دهد. در نتیجه، آهنگ دوران او کند می‌شود، به گونه‌ای که او می‌تواند با ضربه‌ی ضعیفی در آب فرودآید. حتی در شیرجه‌های پیچیده‌تر، شامل پیچش و پشتک، هم تکانه‌ی زاویه‌ای شیرجه‌رو در طول مدت شیرجه باید از لحاظ بزرگی و جهت پایسته باشد.

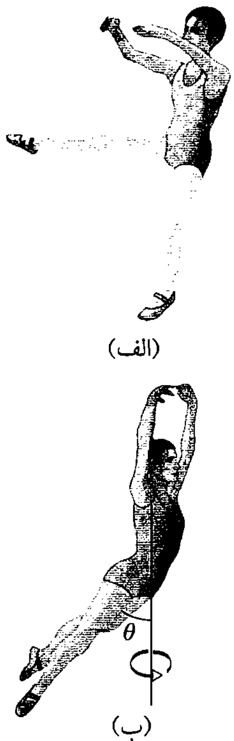
۳. ***پرش طول*** وقتی یک پرنده‌ی پرش-طول در حین دویدن از سطح زمین بلند می‌شود، نیروهای وارد شده به پاهای بلند شده‌ی او یک تکانه‌ی زاویه‌ای به پرنده می‌دهند. این نیروها او را به دور یک محور افقی به پیش‌سو می‌چرخانند. این چرخش به پرنده اجازه نمی‌دهد به نحوی مناسب فرود آید. درهنگام فرود آمدن، پاها باید با هم و تحت زاویه‌ی مناسب به پیش‌سو باز شوند تا پاشنه‌ها در بیشترین مسافت بر روی ماسه‌ها علامت بگذارند. پرنده همین که به هوا پرید تکانه‌ی زاویه‌ای‌اش تغییر نمی‌کند (پایسته می‌ماند) زیرا هیچ گشتاور نیروی خارجی‌ای به او وارد نمی‌شود تا تکانه‌ی زاویه‌ای را تغییر دهد. با وجود این، پرنده می‌تواند بخش بیشتر تکانه‌ی زاویه‌ای را با چرخاندن بازوهایش به صورت آسیاب بادی، به بازوهای خود منتقل کند (شکل ۱۱-۱۸). در این صورت، بدن راست می‌ماند و برای فرود آمدن سمت‌گیری مناسب پیدا می‌کند.

۴. ***پرش همراه با چرخش*** یک باله کار در حرکت توأم با چرخش با حرکت پیچشی اندک

شکل ۱۱-۱۷ تکانه‌ی زاویه‌ای شیرجه‌رو $\vec{L}$، در طول مدت شیرجه ثابت است. این کمیت با نماد ⊗، که نمایش دهنده‌ی دُم پیکان است، نشان داده شده و برصفحه‌ی شکل عمود است. هم‌چنین، توجه کنید که مرکز جرم شیرجه‌رو (به خال‌ها توجه کنید) یک مسیر سهمی شکل می‌پیماید.



شکل ۱۱-۱۸ حرکت بازوها به صورت آسیاب بادی در حین پرش طول کمک می‌کند تا بدن پرنده سمت‌گیری مناسب برای فرود آمدن را پیدا کند.



شکل ۱۱-۱۹ (الف) مرحله‌ی اول پرش همراه با چرخش: لختی دورانی زیاد و تندی زاویه‌ای کم. (ب) مرحله‌ی بعدی: لختی دورانی کمتر و تندی زاویه‌ای بیشتر.

روی یک پا بر روی زمین، در حالی که پای دیگر بر بدنش عمود است، به هوا می‌پرد (شکل ۱۱-۱۹ الف). تندی زاویه‌ای باله کار آن‌قدر کم است که شاید تماشاگران هم متوجه نشوند. در هنگام پریدن او به هوا پای باز شده‌اش را پایین می‌آورد و پای دیگرش را بالا می‌برد، به گونه‌ای که هر دو پای او در کنار هم با راستای بدنش زاویه‌ی θ می‌سازند (شکل ۱۱-۱۹ ب). این حرکت که زیباست، موجب افزایش یافتن چرخش نیز می‌شود زیرا جمع شدن پای باز شده در آغاز، لختی دورانی باله کار را کاهش می‌دهد. چون هیچ گشتاور نیروی خارجی‌ای به باله کار در هوا وارد نمی‌شود، تکانه‌ی زاویه‌ای‌اش تغییر نمی‌کند. بنابراین، با کم شدن لختی دورانی تندی زاویه‌ای باید افزایش یابد. وقتی پرش به خوبی اجرا می‌شود به نظر می‌رسد که باله کار ناگهان شروع به چرخیدن می‌کند و پیش از آنکه سمت‌گیری پاها برای فرود آمدن واورن شود، ۱۸۰ درجه می‌چرخد. بار دیگر وقتی پا به بیرون باز می‌شود، به نظر می‌رسد چرخش حذف شده است.

خودآزمایی ۷

سوسکی بر کناره‌ی قرص کوچکی که مانند یک چرخ و فلک می‌چرخد، قرار گرفته است. اگر سوسک به سمت مرکز قرص بخزد، آیا کمیت زیر (نسبت به محور مرکزی) برای دستگاه سوسک ـ قرص افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند: (الف) لختی دورانی، (ب) تکانه‌ی زاویه‌ای و (پ) تندی زاویه‌ای؟

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۱-۵ پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای، نمایش چرخ در حال دوران

شکل ۱۱-۲۰ الف دانشجویی را نشان می‌دهد که روی یک زیرپایی چرخان نشسته است و می‌تواند آزادانه به دور محور قائم بچرخد. دانشجو در آغاز ساکن است و چرخ دوچرخه‌ای را که طوقه‌ی آن با سرب پر شده در دست نگه داشته است. لختی دورانی چرخ I_{wh}، نسبت به محور مرکزی $۱/۲\,kg\cdot m^2$ است. (طوقه‌ی چرخ به این دلیل با سرب پر شده است که مقدار I_{wh} قابل ملاحظه باشد). تندی زاویه‌ای ω_{wh} برابر با $۳/۹\,rev/s$ و حرکت چرخ، با دید از بالا، به صورت پادساعت‌گرد است. محور چرخ قائم و تکانه‌ی زاویه‌ای آن $\vec{L}_{wh}$، در راستای قائم به بالاسو است.

اکنون، دانشجو چرخ را واورن می‌کند (شکل ۱۱-۲۰ ب)، به‌گونه‌ای که چرخ، با دید از بالا، به طور ساعت‌گرد می‌چرخد.

در این حالت، تکانه‌ی زاویه‌ای چرخ $-\vec{L}_{wh}$ است. وارون کردن چرخ سبب می‌شود دانشجو، زیرپایی و مرکز چرخ، همه با هم، به صورت یک جسم صُلب مرکب با لختی دورانی $I_b = ۶/۸\,\mathrm{kg\cdot m^۲}$ به دور محور دوران زیرپایی بچرخند. (این واقعیت که چرخ هم به دور مرکزش می‌چرخد اثری بر توزیع جرم این جسم مرکب ندارد. بنابراین، چرخ بچرخد یا نچرخد، مقدار I_b ثابت می‌ماند). پس از وارون شدن چرخ تندی زاویه‌ای جسم مرکب ω_b، و جهت چرخش آن چیست؟

نکته‌های کلیدی

۱. تندی زاویه‌ای مورد نظر ω_b، بنا به معادله‌ی ۱۱-۳۱ $(L = I\omega)$ به $\vec{L}_b$، تکانه‌ی زاویه‌ای پایانی جسم مرکب نسبت به محور دوران زیرپایی بستگی دارد.

۲. تندی زاویه‌ای آغازی چرخ ω_{wh}، بنا به همان معادله به $\vec{L}_{wh}$، تکانه‌ی زاویه‌ای چرخ نسبت به مرکزش بستگی دارد.

۳. از مجموع برداری $\vec{L}_b$ و $\vec{L}_{wh}$، تکانه‌ی زاویه‌ای کل $\vec{L}_{tot}$ دستگاه دانشجو، زیرپایی و چرخ به دست می‌آید.

۴. وقتی چرخ وارون می‌شود، هیچ ***گشتاور نیروی خارجی*** برایندی برای تغییر دادن $\vec{L}_{tot}$ نسبت به هر محور قائمی به دستگاه وارد نمی‌شود. (وقتی دانشجو چرخ را وارون می‌کند، گشتاورهای ناشی از نیروهای میان دانشجو و چرخ، نسبت به دستگاه، ***درونی*** به حساب می‌آیند). بنابراین، تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه نسبت به هر محور قائمی، از جمله محور دوران گذرنده از زیرپایی چرخان پایسته است.

محاسبات: در شکل ۱۱-۲۰ پ، خاصیت پایستگی $\vec{L}_{tot}$ توسط بردارهایی نشان داده شده است. قانون پایستگی تکانه را برحسب مؤلفه‌های مربوط به راستای قائم می‌توان به صورت زیر نوشت

$$L_{b,f} + L_{wh,f} = L_{b,i} + L_{wh,i} \qquad (۱۱\text{-}۳۵)$$

که در آن i و f معرف حالت آغازی (پیش از وارون‌شدن چرخ) و حالت پایانی (پس از وارون شدن چرخ) دستگاه هستند. چون وارون کردن چرخ باعث وارون شدن بردار تکانه‌ی زاویه‌ای چرخ می‌شود، به جای $L_{wh,f}$، تکانه‌ی $-L_{wh,i}$ را قرار می‌دهیم. پس، با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۱-۳۵ و به ازای $L_{b,i} = ۰$ (زیرا دانشجو، زیرپایی و مرکز چرخ در آغاز ساکن‌اند)، خواهیم داشت

$$L_{b,f} = ۲L_{wh,i}$$

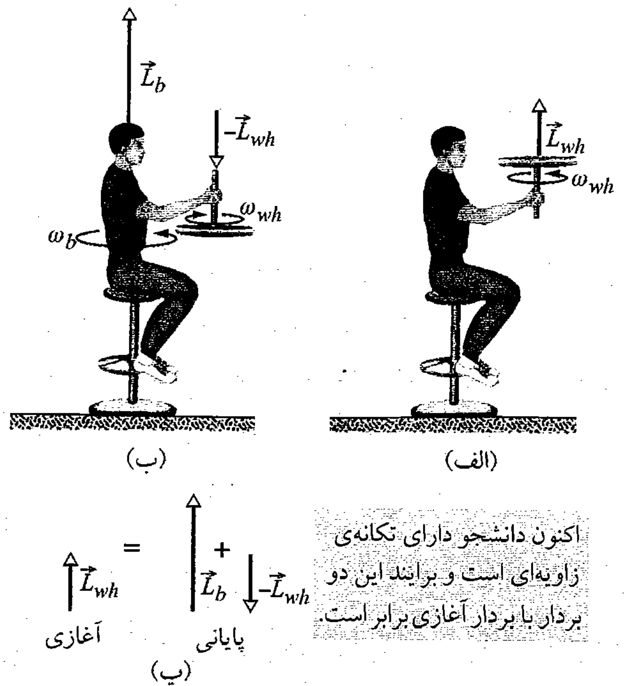
اکنون، با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۱-۳۱، و قرار دادن $I_b\omega_b$ به جای $L_{b,f}$ و $I_{wh}\omega_{wh}$ به جای $L_{wh,i}$، مقدار ω_b را به‌دست می‌آوریم:

$$\omega_b = \frac{۲I_{wh}}{I_b}\omega_{wh}$$

$$\omega_b = \frac{(۲)(۱/۲\,\mathrm{kg\cdot m^۲})(۳/۹\,\mathrm{rev/s})}{۶/۸\,\mathrm{kg\cdot m^۲}} \Rightarrow$$

$$\omega_b = ۱/۴\,\mathrm{rev/s}$$ **(پاسخ)**

این نتیجه مثبت است و نشان می‌دهد که، با دید از بالا، دانشجو به طور پادساعت‌گرد به دور محور زیرپایی می‌چرخد. اگر دانشجو بخواهد چرخش خود را متوقف کند، باید دوباره چرخ را وارون کند.



شکل ۱۱-۲۰ (الف) دانشجویی چرخ دوچرخه‌ای را که به دور محور قائمی می‌چرخد در دست خود نگه داشته است. (ب) دانشجو چرخ را وارون می‌کند و خودش به چرخش درمی‌آید. (پ) با وجود وارون شدن چرخ تکانه‌ی زاویه‌ای برایند دستگاه ثابت می‌ماند.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۱-۶ پایستگی تکانه، سوسک حمام بر روی قرص

درشکل ۱۱-۲۱، یک سوسک حمام به‌جرم m بر روی قرصی به جرم $6.00m$ و شعاع R قرار دارد. قرص مانند یک چرخ‌وفلک با تندی زاویه‌ای $\omega_i = 1.50\,\text{rad/s}$ به دور محور مرکزی‌اش می‌چرخد. این سوسک در آغاز در شعاع $r = 0.800R$ قرار دارد، اما بعد تا کناره‌ی قرص به برون‌سو می‌خزد. سوسک را مانند یک ذره در نظر بگیرید. در این صورت، تندی زاویه‌ای آن چیست؟

نکته‌های کلیدی

(۱) خزیدن سوسک موجب می‌شود توزیع جرم (و در نتیجه لختی دورانی) دستگاه سوسک ـ قرص تغییر کند. (۲) تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه تغییر نمی‌کند زیرا هیچ گشتاور نیروی خارجی آن را تغییر نمی‌دهد. (نیروها و گشتاورهای نیروی ناشی از خزیدن سوسک، نسبت به دستگاه درونی هستند. (۳) بزرگی تکانه‌ی زاویه‌ای یک جسم توپر یا یک ذره، از معادله‌ی ۱۱-۳۱ $(L = I\omega)$ به دست می‌آید.

محاسبات: ما می‌خواهیم تندی زاویه‌ای پایانی را پیدا کنیم. راه حل این است که تکانه‌ی زاویه‌ای پایانی L_f را با تکانه‌ی زاویه‌ای آغازی L_i مساوی قرار دهیم، زیرا هر دو دارای تندی زاویه‌ای هستند. این کمیت‌ها لختی دورانی I هم دارند. بنابراین، ابتدا لختی دورانی دستگاه سوسک و قرص پیش و پس از خزیدن سوسک را پیدا می‌کنیم.

لختی دورانی قرص که به دور محور مرکزی‌اش می‌چرخد، بنا به جدول ۱۰-۲ پ، برابر با $\frac{1}{2}MR^2$ است. با قرار دادن $6.00m$ به جای جرم M، لختی دورانی قرص برابر است با

$$I_d = 3.00\,mR^2 \qquad (۱۱\text{-}۳۶)$$

(ما مقادیر m و R را نداریم، اما با جسارت ناشی از فیزیک به حل کردن مسئله ادامه می‌دهیم).

با توجه به معادله‌ی ۱۰-۳۳، می‌دانیم که لختی دورانی سوسک حمام (یک ذره) برابر با mr^2 است. با قرار دادن شعاع مکان آغازی $(r = 0.800R)$ و شعاع مکان پایانی سوسک $(r = R)$، لختی دورانی آغازی آن را نسبت به محور دوران چنین به دست می‌آوریم

$$I_{ci} = 0.64\,mR^2 \qquad (۱۱\text{-}۳۷)$$

لختی دورانی پایانی سوسک نسبت به محور دوران برابر است با

$$I_{cf} = mR^2 \qquad (۱۱\text{-}۳۸)$$

بنابراین، لختی‌دورانی آغازی دستگاه سوسک ـ قرص برابراست با

$$I_i = I_d + I_{ci} = 3.64\,mR^2 \qquad (۱۱\text{-}۳۹)$$

و برای لختی دورانی پایانی دستگاه، داریم

$$I_f = I_d + I_{cf} = 4.00\,mR^2 \qquad (۱۱\text{-}۴۰)$$

اکنون، با این واقعیت که تکانه‌ی زاویه‌ای پایانی L_f، برابر با تکانه‌ی زاویه‌ای آغازی L_i، است، از معادله‌ی ۱۱-۳۱ $(L = I\omega)$ استفاده می‌کنیم و داریم

$$I_f\omega_f = I_i\omega_i$$

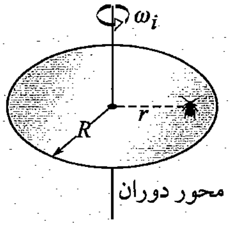
یا

$$4.00\,mR^2\omega_f = 3.64\,mR^2(1.5\,\text{rad/s})$$

پس از حذف کردن مقادیر نامعلوم m و R، داریم

$$\omega_f = 1.37\,\text{rad/s} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

توجه کنید که تندی زاویه‌ای کاهش یافته است زیرا بخشی از جرم از محور دوران به برون‌سو حرکت کرده است، در نتیجه لختی دورانی دستگاه افزایش یافته است.



شکل ۱۱-۲۱ یک سوسک حمام در شعاع r بر روی قرص چرخانی مانند یک چرخ و فلک، می‌چرخد.

۱۱–۹ حرکت تقدیمی ژیروسکوپ

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۱–۲۶ مشخص کنید که نیروی گرانشی وارد شده به ژیروسکوپ چرخان، که موجب دوران بردار تکانه‌ی زاویه‌ای چرخشی (و در نتیجه ژیروسکوپ) به دور محور قائم می‌شود، حرکت تقدیمی نامیده می‌شود.

۱۱–۲۷ آهنگ حرکت تقدیمی یک ژیروسکوپ را حساب کنید.

۱۱–۲۸ مشخص کنید که آهنگ حرکت تقدیمی یک ژیروسکوپ مستقل از جرم ژیروسکوپ است.

نکته‌های کلیدی

- یک ژیروسکوپ چرخان می‌تواند حرکت تقدیمی حول یک محور قائم گذرنده از تکیه‌گاه آن را انجام دهد؛ آهنگ این حرکت برابر است با

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}$$

که در آن M جرم ژیروسکوپ، r بازوی گشتاور، I لختی دورانی، و ω آهنگ چرخش است.

حرکت تقدیمی ژیروسکوپ

ژیروسکوپ ساده شامل چرخی نصب شده بر روی یک میله است و می‌تواند آزادانه به دور محور آن میله بچرخد. اگر یک سر میله‌ی ***ژیروسکوپ ناچرخان*** را، مطابق شکل ۱۱–۲۲ الف، بر روی تکیه‌گاهی قرار دهیم و ژیروسکوپ را رها کنیم، ژیروسکوپ با چرخش پایین‌سو به دور نوک تکیه‌گاه، سقوط می‌کند. چون این سقوط با دوران همراه است، از شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون پیروی می‌کند، که بنا به معادله‌ی ۱۱–۲۹ به صورت زیر است

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (۱۱–۴۱)$$

این معادله نشان می‌دهد که گشتاور نیرویی که سبب چرخش (سقوط) پایین‌سوی ژیروسکوپ می‌شود تکانه‌ی زاویه‌ای آن $\vec{L}$، را از مقدار آغازی‌اش صفر تغییر می‌دهد. گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ از نیروی گرانشی $M\vec{g}$ وارد شده به مرکز جرم ژیروسکوپ که ما آن را مرکز چرخ در نظر می‌گیریم، ناشی می‌شود. بازوی گشتاور نسبت به نوک تکیه‌گاه، که در شکل ۱۱–۲۲ الف در نقطه‌ی O واقع شده، مساوی با $\vec{r}$ است. بزرگی $\vec{\tau}$ برابر است با

$$\tau = Mgr\sin ۹۰^\circ = Mgr \qquad (۱۱–۴۲)$$

(چون زاویه‌ی میان $M\vec{g}$ و $\vec{r}$ برابر با ۹۰ درجه است)، و جهت این گشتاور نیز در شکل ۱۱–۲۲ الف نشان داده شده است.

اما ژیروسکوپی که به سرعت در حال چرخیدن است رفتار متفاوتی دارد. فرض کنید ژیروسکوپ را در حالی رها می‌کنیم که میله‌ی آن اندکی به بالاسو متمایل است. این

ژیروسکوپ ابتدا اندکی به پایین‌سو می‌چرخد اما پس از آن در حالی که هنوز به دور میله‌اش می‌چرخد، شروع به چرخیدن افقی به دور محور قائمی می‌کند که از نقطه‌ی تکیه‌گاه O، می‌گذرد؛ این حرکت را **حرکت تقدیمی** می‌نامند.

چرا سقوط نمی‌کند؟ چرا ژیروسکوپ چرخان در هوا می‌ماند و مانند ژیروسکوپ ناچرخان سقوط نمی‌کند؟ دلیلش این است که وقتی ژیروسکوپ چرخان را رها می‌کنیم گشتاور نیروی ناشی از $M\vec{g}$ باید تکانه‌ی زاویه‌ای آغازی را که دیگر صفر نیست و بلکه به دلیل چرخش ژیروسکوپ ناصفر است، تغییر دهد.

برای آنکه ببینیم این تکانه‌ی زاویه‌ای آغازی ناصفر چگونه به حرکت تقدیمی منجر می‌شود، ابتدا تکانه‌ی زاویه‌ای $\vec{L}$ ناشی از چرخش ژیروسکوپ را در نظر می‌گیریم. برای ساده شدن موضوع فرض می‌کنیم آهنگ چرخش ژیروسکوپ آن‌قدر زیاد است که تکانه‌ی زاویه‌ای ناشی از حرکت تقدیمی در مقایسه با $\vec{L}$ ناچیز است. در ضمن، فرض می‌کنیم که وقتی حرکت تقدیمی آغاز می‌شود میله‌ی ژیروسکوپ، مطابق شکل ۱۱-۲۲ ب، افقی است. بزرگی $\vec{L}$ از معادله‌ی ۱۱-۳۱ به دست می‌آید:

$$L = I\omega \tag{۱۱-۴۳}$$

که در آن I لختی دورانی ژیروسکوپ نسبت به میله‌ی آن و ω تندی زاویه‌ای دوران چرخ به دور این میله است. چنان که شکل ۱۱-۲۲ ب نشان می‌دهد، بردار $\vec{L}$ در طول میله قرار دارد. چون $\vec{L}$ با $\vec{r}$ موازی است، گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ باید بر $\vec{L}$ عمود باشد.

بنا به معادله‌ی ۱۱-۴۱ گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ موجب ایجاد تغییر $d\vec{L}$ در تکانه‌ی زاویه‌ای ژیروسکوپ در بازه‌ی زمانی dt می‌شود؛ یعنی

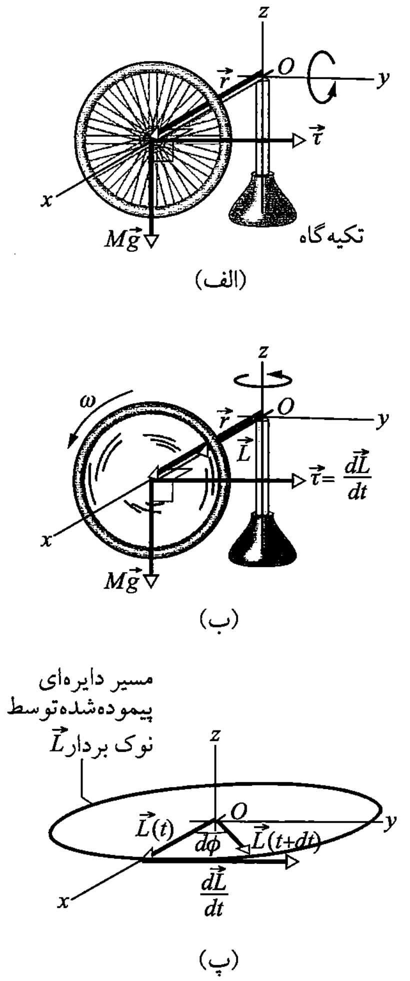
$$d\vec{L} = \vec{\tau}dt \tag{۱۱-۴۴}$$

اما در مورد یک ***ژیروسکوپ با چرخش سریع*** بزرگی $\vec{L}$ با توجه به معادله‌ی ۱۱-۴۳ ثابت است. بنابراین، گشتاور نیرو می‌تواند فقط جهت $\vec{L}$ را تغییر دهد، نه بزرگی آن را.

معادله‌ی ۱۱-۴۴ نشان می‌دهد که $d\vec{L}$ با $\vec{\tau}$ هم‌جهت و بر $\vec{L}$ عمود است. برای آنکه $\vec{L}$ بتواند در جهت $\vec{\tau}$ تغییر کند اما بزرگی L تغییر نکند، تنها راه این است که $\vec{L}$، مطابق شکل ۱۱-۲۲ پ، به دور محور z بچرخد. در این صورت، بزرگی $\vec{L}$ ثابت می‌ماند، نوک بردار $\vec{L}$ یک مسیر دایره‌ای می‌پیماید و $\vec{\tau}$ همیشه بر این مسیر مماس است. چون $\vec{L}$ همیشه باید در راستای میله باشد، میله باید در جهت $\vec{\tau}$ به دور محور z بچرخد و به این ترتیب، حرکت تقدیمی ایجاد می‌شود. چون ژیروسکوپ چرخان در پاسخ به هر تغییری در تکانه‌ی زاویه‌ای آغازی‌اش باید از شکل زاویه‌ای قانون نیوتون پیروی کند، به جای سرنگون شدن باید حرکت تقدیمی انجام دهد.

حرکت تقدیمی. برای پیدا کردن **آهنگ حرکت تقدیمی** Ω، ابتدا با استفاده کردن از معادله‌های ۱۱-۴۴ و ۱۱-۴۲، بزرگی $d\vec{L}$ را به دست می‌آوریم:

$$dL = \tau dt = Mgrdt \tag{۱۱-۴۵}$$



شکل ۱۱-۲۲ (الف) ژیروسکوپ ناچرخان بر اثر گشتاور نیروی $\vec{\tau}$ با چرخش در صفحه‌ی xz سقوط می‌کند. (ب) ژیروسکوپ با چرخش سریع با تکانه‌ی زاویه‌ای $\vec{L}$ به دور محور z حرکت تقدیمی انجام می‌دهد. حرکت تقدیمی این ژیروسکوپ در صفحه‌ی xy صورت می‌گیرد. (پ) تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای $d\vec{L}/dt$، منجر به دوران $\vec{L}$ به دور O می‌شود.

هنگامی که $\vec{L}$ در بازه‌ی زمانی dt به مقدار $d\vec{L}$ تغییر می‌کند، میله و $\vec{L}$ به اندازه‌ی زاویه‌ی $d\phi$ به دور محور z به پیش می‌رود. در شکل ۱۱-۲۲ پ، زاویه‌ی $d\phi$ خیلی بزرگ‌تر از مقدار واقعی نشان داده شده است. با استفاده کردن از معادله‌های ۱۱-۴۳ و ۱۱-۴۵، زاویه‌ی $d\phi$ چنین به دست می‌آید

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{Mgrdt}{I\omega}$$

از تقسیم کردن این رابطه به dt و قرار دادن $\Omega = d\phi/dt$، داریم

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega} \quad \text{(آهنگ حرکت تقدیمی)} \qquad (۴۶-۱۱)$$

این نتیجه به شرطی معتبر است که آهنگ چرخش ω سریع باشد. توجه کنید که وقتی ω افزایش می‌یابد، Ω کاهش پیدا می‌کند. در ضمن، توجه کنید که اگر نیروی گرانشی $M\vec{g}$ به ژیروسکوپ وارد نشود، حرکت تقدیمی ایجاد نمی‌شود، اما چون I تابعی از M است، جرم از معادله‌ی ۱۱-۴۶ حذف می‌شود؛ بنابراین، Ω مستقل از جرم است.

معادله‌ی ۱۱-۴۶ در مورد ژیروسکوپ چرخانی که میله‌اش با افق زاویه می‌سازد، نیز به کار می‌رود. این معادله برای یک فرفره‌ی چرخان هم معتبر است زیرا فرفره در اصل ژیروسکوپ چرخانی است که با راستای افقی زاویه می‌سازد.

مرور و چکیده‌ی مطالب

اجسام غلتان برای چرخی به شعاع R، که به طور هموار (بدون لغزیدن) می‌غلتد، داریم

$$v_{com} = \omega R \qquad (۲-۱۱)$$

که در آن v_{com} تندی خطی مرکزجرم چرخ و ω تندی زاویه‌ای چرخ به دور مرکز آن است. هم‌چنین، می‌توان تصور کرد که چرخ به طور لحظه‌ای به دور نقطه‌ی P واقع در سطح «جاده»، که محل تماس چرخ با جاده است، می‌چرخد. تندی زاویه‌ای چرخ به دور این نقطه برابر با تندی زاویه‌ای چرخ به دور مرکز آن است. انرژی جنبشی چرخ غلتان برابر است با

$$K = \frac{۱}{۲} I_{com}\omega^۲ + \frac{۱}{۲} M v_{com}^۲ \qquad (۵-۱۱)$$

که در آن I_{com} گشتاور لختی چرخ نسبت به مرکز آن و M جرم چرخ است. اگر چرخ شتاب پیدا کند، اما باز هم به طور هموار بغلتد، رابطه‌ی شتاب مرکز جرم آن $\vec{a}_{com}$، با شتاب زاویه‌ای نسبت به مرکز α، به صورت زیر است

$$a_{com} = \alpha R \qquad (۶-۱۱)$$

اگر چرخ به طور هموار از یک شیب‌راهه با زاویه‌ی شیب θ به پایین بغلتد، شتاب آن در راستای محور x واقع در روی شیب‌راهه برابر است با

$$a_{com,x} = -\frac{g\sin\theta}{۱ + I_{com}/MR^۲} \qquad (۱۰-۱۱)$$

خاصیت برداری گشتاور نیرو در دستگاه مختصات سه بعدی، ***گشتاور نیروی*** $\vec{\tau}$، کمیتی برداری است که نسبت به یک‌نقطه‌ی ثابت (به طور معمول مبداء مختصات) تعریف می‌شود؛ این بردار برابر است با

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (۱۴-۱۱)$$

که در آن $\vec{F}$ نیروی وارد شده به یک ذره و $\vec{r}$ بردار مکان معین کننده‌ی محل ذره نسبت به نقطه‌ی ثابت (یا مبداء مختصات) است. بزرگی $\vec{\tau}$ چنین به دست می‌آید

$$\tau = rF\sin\phi = rF_\perp = r_\perp F \qquad (۱۵-۱۱، ۱۶-۱۱ \text{ و } ۱۷-۱۱)$$

که در آن ϕ زاویه‌ی میان $\vec{F}$ و $\vec{r}$، $F_\perp$ مؤلفه‌ی $\vec{F}$ در راستای عمود بر $\vec{r}$ و $r_\perp$ بازوی گشتاور $\vec{F}$ است. جهت $\vec{\tau}$ از قاعده‌ی دست راست مربوط به حاصل ضرب برداری معین می‌شود.

تکانه‌ی زاویه‌ای یک ذره **تکانه‌ی زاویه‌ای** $\vec{\ell}$، ذره‌ای با تکانه‌ی خطی $\vec{p}$، جرم m و سرعت خطی $\vec{v}$، کمیتی برداری است که نسبت به یک نقطه‌ی ثابت (به طور معمول مبداء مختصات) تعریف می‌شود. معادله‌ی این بردار چنین نوشته می‌شود

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \qquad (۱۱-۱۸)$$

بزرگی $\vec{\ell}$ چنین به دست می‌آید

$$\ell = r\, mv \sin\phi \qquad (۱۱-۱۹)$$

$$\ell = rp_\perp = r\, mv_\perp \qquad (۱۱-۲۰)$$

$$\ell = r_\perp p = r_\perp mv \qquad (۱۱-۲۱)$$

که در آن ϕ زاویه‌ی میان $\vec{r}$ و $\vec{p}$، $p_\perp$ و $v_\perp$ مؤلفه‌های $\vec{p}$ و $\vec{v}$ در راستای عمود بر $\vec{r}$ و $r_\perp$ فاصله‌ی عمودی نقطه‌ی ثابت از امتداد $\vec{p}$ است. جهت $\vec{\ell}$ از قاعده‌ی دست راست مربوط به حاصل‌ضرب برداری معین می‌شود.

شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون قانون دوم نیوتون در شکل زاویه‌ای برای یک ذره چنین نوشته می‌شود

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{l}}{dt} \qquad (۱۱-۲۳)$$

که در آن $\vec{\tau}_{\text{net}}$ گشتاور نیروی برایند وارد شده به ذره و $\vec{\ell}$ تکانه‌ی زاویه‌ای ذره است.

تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه ذرات تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه ذرات $\vec{L}$، برابر با مجموع برداری تکانه‌های زاویه‌ای هر یک از ذره‌هاست:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \cdots + \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i \qquad (۱۱-۲۶)$$

آهنگ زمانی تغییر این تکانه‌ی زاویه‌ای برابر با گشتاور نیروی خارجی برایند وارد شده به دستگاه (مجموع برداری گشتاورهای ناشی از برهم کنش‌های ذرات دستگاه با ذرات خارج از دستگاه) است:

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{(دستگاه ذرات)} \qquad (۱۱-۲۹)$$

تکانه‌ی زاویه‌ای جسم صُلب تکانه‌ی زاویه‌ای یک جسم صُلب که به دور محور ثابتی می‌چرخد، برابر با مؤلفه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای آن در راستای موازی با محور دوران است:

$$L = I\omega \quad \text{(جسم صُلب، محور ثابت)} \qquad (۱۱-۳۱)$$

پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای اگر گشتاور نیروی خارجی برایند وارد شده به یک دستگاه صفر باشد، تکانه‌ی زاویه‌ای آن دستگاه $\vec{L}$، ثابت می‌ماند:

$$\vec{L} = \text{const.} \quad \text{(دستگاه منزوی)} \qquad (۱۱-۳۲)$$

یا

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \quad \text{(دستگاه منزوی)} \qquad (۱۱-۳۳)$$

این معادله **قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای** را بیان می‌کند.

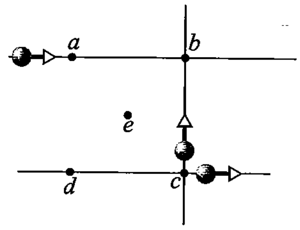
حرکت تقدیمی ژیروسکوپ ژیروسکوپ چرخان می‌تواند به دور یک محور قائم گذرنده از تکیه‌گاهش حرکت تقدیمی با آهنگ زیر انجام دهد

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega} \quad \text{(آهنگ حرکت تقدیمی)} \qquad (۱۱-۴۶)$$

که در آن M جرم ژیروسکوپ، r بازوی گشتاور، I لختی دورانی و ω آهنگ چرخش است.

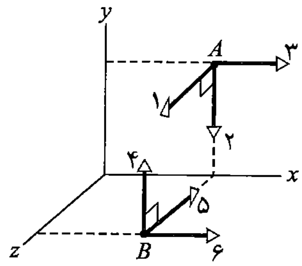
پرسش‌ها

۱ شکل ۱۱-۲۳ سه ذره با جرم‌های مساوی را نشان می‌دهد، که با تندی ثابت یکسان، مطابق بردارهای سرعت نشان داده شده، حرکت می‌کنند. نقطه‌های a، b، c و d یک مربع تشکیل می‌دهند و نقطه‌ی e در مرکز مربع قرار دارد. این نقطه‌ها را با توجه به بزرگی تکانه‌ی زاویه‌ای برایند دستگاه سه ذره‌ای که نسبت به این نقطه‌ها اندازه‌گیری می‌شود، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



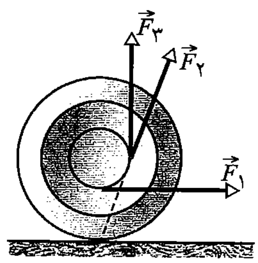
شکل ۱۱–۲۳ پرسش ۱.

۲ شکل ۱۱–۲۴ دو ذره‌ی A و B را با مختصات x، y و z (۱m، ۱m و صفر) و (۱m، صفر و ۱m) نشان می‌دهد. به هر ذره سه نیروی با بزرگی یکسان وارد می‌شود و هر کدام از نیروها با یکی از محورها موازی‌اند. (الف) کدام یک از نیروها نسبت به مبداء گشتاور نیرویی ایجاد می‌کند که با محور y موازی است؟ (ب) این نیروها را با توجه به بزرگی گشتاورهایی که نسبت به مبداء روی ذره‌ها به وجود می‌آورند، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۱۱–۲۴ پرسش ۲.

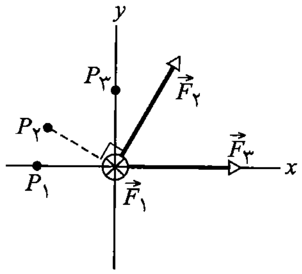
۳ اگر ریسمان متصل به یو یو در حال سکون نشان داده شده در شکل ۱۱–۲۵ را با نیروی (الف) $\vec{F}_2$ (خط اثر این نیرو از نقطه‌ی تماس یو یو با میز می‌گذرد)، (ب) $\vec{F}_1$ (خط اثر این نیرو از بالای نقطه‌ی تماس با میز می‌گذرد) و (پ) $\vec{F}_3$ (خط اثر این نیرو از سمت راست نقطه‌ی تماس می‌گذرد) بکشیم، یو یو چگونه حرکت می‌کند؟



شکل ۱۱–۲۵ پرسش ۳.

۴ بزرگی بردار مکان $\vec{r}$ ذره‌ای نسبت به یک نقطه‌ی معین، ۳m و بزرگی نیروی $\vec{F}$ وارد شده به ذره ۴N است. اگر بزرگی گشتاور نیروی حاصل (الف) صفر و (ب) ۱۲N·m باشد، زاویه‌ی میان بردارهای $\vec{r}$ و $\vec{F}$ چیست؟

۵ در شکل ۱۱–۲۶، سه نیرو با بزرگی یکسان به ذره‌ای واقع در مبداء وارد می‌شوند ($\vec{F}_1$ به طور عمود و به درون سوی صفحه‌ی شکل وارد می‌شود). این نیروها را با توجه به بزرگی گشتاورهای نیروی تولید شده نسبت به (الف) نقطه‌ی P_1، (ب) نقطه‌ی P_2 و (پ) نقطه‌ی P_3، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

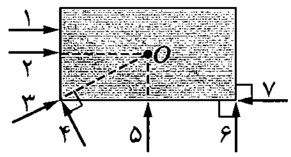


شکل ۱۱–۲۶ پرسش ۵.

۶ تکانه‌های زاویه‌ای یک ذره $\ell(t)$، در چهار حالت عبارت‌اند از (۱) $\ell = 3t + 4$؛ (۲) $\ell = -6t^2$؛ (۳) $\ell = 2$؛ (۴) $\ell = 4/t$. در کدام حالت، گشتاور نیروی برایند وارد شده به ذره (الف) صفر، (ب) مثبت و ثابت، (پ) منفی و با بزرگی در حال افزایش ($t > 0$) و (ت) منفی و با بزرگی در حال کاهش ($t > 0$) است؟

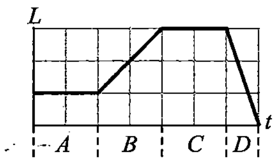
۷ سوسکی بر کناره‌ی یک قرص افقی، که مانند یک چرخ و فلک به طور پاد ساعت‌گرد می‌چرخد، قرار گرفته است. اگر سوسک در کناره‌ی قرص و در جهت دوران راه برود، آیا بزرگی کمیت‌های زیر (که نسبت به محور دوران اندازه‌گیری می‌شوند) افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد، یا ثابت می‌ماند (قرص هنوز در جهت پاد ساعت‌گرد می‌چرخد): (الف) تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه سوسک ـ قرص، (ب) تکانه‌ی زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای سوسک و (پ) تکانه‌ی زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای قرص؟ (ت) اگر سوسک در خلاف جهت دوران قرص راه برود، پاسخ‌ها چه خواهند بود؟

۸ شکل ۱۱-۲۷ یک تختال مربع مستطیل شکل را، که مانند چرخ و فلک می‌تواند به دور مرکزش در نقطه‌ی O بچرخد، با دید از بالا، نشان می‌دهد. در ضمن، این شکل هفت مسیر را نشان می‌دهد که در راستای آن‌ها می‌توان گلوله‌های آدامس جویده شده را (با تندی و جرم مساوی) پرتاب کرد تا به تختال ساکن بچسبند. (الف) این مسیرها را با توجه به تندی زاویه‌ای تختال (و آدامس) که پس از چسبیدن آدامس به دست خواهد آمد، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. (ب) با توجه به شکل ۱۱-۲۷، برای کدام مسیر تکانه‌ی زاویه‌ای تختال (و آدامس) نسبت به نقطه‌ی O منفی خواهد بود؟



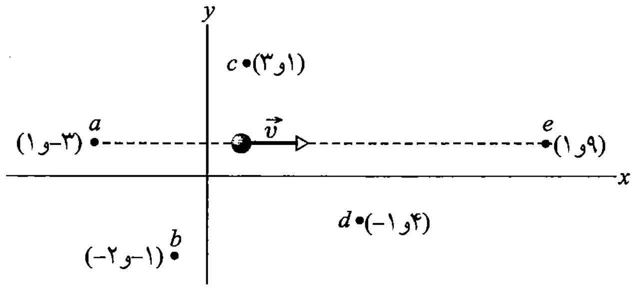
شکل ۱۱-۲۷ پرسش ۸

۹ شکل ۱۱-۲۸ نمودار بزرگی تکانه‌ی زاویه‌ای L، یک چرخ را برحسب زمان t نشان می‌دهد. با توجه به بزرگی گشتاور نیروی وارد شده به چرخ چهار بازه‌ی زمانی مشخص شده با حروف را از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۱۱-۲۸ پرسش ۹.

۱۰ شکل ۱۱-۲۹ ذره‌ای را در حال حرکت با سرعت ثابت $\vec{v}$ و پنج نقطه با مختصات x و y مربوط به آن‌ها نشان می‌دهد. این نقطه‌ها را با توجه به بزرگی تکانه‌ی زاویه‌ای ذره نسبت به آن‌ها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۱۱-۲۹ پرسش ۱۰.

۱۱ یک گلوله‌ی توپ و به یک تیله از حال سکون از یک سطح شیب‌دار به طور هموار به پایین می‌غلتد. آیا (الف) زمان رسیدن به پایین سطح و (ب) انرژی جنبشی انتقالی در پایین سطح، برای گلوله‌ی توپ نسبت به تیله بیشتر، کمتر، یا مساوی است؟

۱۲ یک استوانه‌ی برنجی توپر و یک استوانه‌ی چوبی توپر، دارای شعاع و جرم یکسان‌اند (استوانه‌ی چوبی درازتر است). هر دو استوانه از حال سکون از یک سطح شیب‌دار به پایین می‌غلتند. (الف) کدام استوانه ابتدا به پایین سطح می‌رسد، یا آنکه با هم می‌رسند؟ (ب) اکنون، استوانه‌ی چوبی کوتاه می‌شود تا با طول استوانه‌ی برنجی همساز شود، و درون استوانه‌ی برنجی در راستای محور (مرکزی) سوراخ می‌شود تا جرمش با استوانه‌ی چوبی همساز شود. کدام استوانه ابتدا به پایین سطح می‌رسد، یا آنکه با هم می‌رسند؟

مسئله‌ها

پودمان ۱۱-۱ حرکت غلتشی به صورت ترکیبی از حرکت‌های انتقالی و دورانی

* ۱ خودرویی با تندی $80\,km/h$ بر روی جاده‌ای تراز در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. قطر هر لاستیک خودرو $66\,cm$ است. نسبت به شخص نشسته در خودرو و به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، سرعت $\vec{v}$ (الف) در مرکز، (ب) در بالا و (پ) در پایین لاستیک، و بزرگی شتاب a، (ت) در مرکز، (ث) در بالا و (ج) در پایین هرلاستیک، چیست؟ نسبت به مسافر نشسته در کنار جاده و به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، سرعت $\vec{v}$، (چ) در مرکز، (ح) در بالا و (خ) در پایین لاستیک، و بزرگی شتاب a، (د) در مرکز، (ذ) در بالا و (ر) در پایین هر لاستیک، چیست؟

* ۲ خودرویی که با تندی ۸۰٫۰ km/h حرکت می‌کند دارای لاستیک‌هایی با قطر ۷۵٫۰ cm است. (الف) تندی زاویه‌ای این لاستیک‌ها نسبت به محورهای‌شان چقدر است؟ (ب) اگر این خودرو پس از ۳۰٫۰ دور چرخیدن لاستیک‌ها به‌طور یکنواخت (بدون لغزیدن) متوقف شود، بزرگی شتاب زاویه‌ای چرخ‌ها چقدر است؟ (پ) خودرو در طول مدت ترمز کردن چه مسافتی را می‌پیماید؟

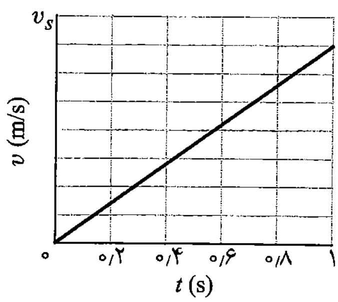
پودمان ۱۱-۲ نیروها و انرژی جنبشی در حرکت غلتشی

* ۳ طوقه‌ای به جرم ۱۴۰ kg بر روی یک سطح افقی چنان می‌غلتد، که تندی مرکز جرم آن ۰٫۱۵۰ m/s است. چه مقدار کار برای متوقف کردن طوقه باید انجام شود؟

* ۴ کره‌ای توپر و یکنواخت از سطح شیب‌داری به پایین می‌غلتد. (الف) زاویه‌ی شیب سطح چقدر باید باشد تا بزرگی شتاب خطی مرکز کره ۰٫۱۰ g بشود؟ (ب) اگر جسمی بی‌اصطکاک از این سطح شیب‌دار و با همان زاویه‌ی شیب به پایین بلغزد، آیا بزرگی شتاب آن بیشتر می‌شود، کمتر می‌شود، یا برابر با ۰٫۱۰ g خواهد بود؟ چرا؟

* ۵ خودرویی به جرم ۱۰۰۰ kg دارای چهار چرخ، هر یک به جرم ۱۰ kg، است. خودرو وقتی حرکت می‌کند، چه کسری از انرژی جنبشی کل آن به دوران چرخ‌ها به دور محورهای‌شان مربوط است؟ فرض کنید لختی دورانی هر چرخ برابر با لختی دورانی یک قرص یکنواخت به همان جرم و اندازه است. چرا در اینجا نیازی به دانستن شعاع چرخ‌ها نیست؟

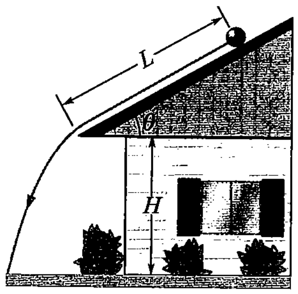
** ۶ شکل ۱۱-۳۰ نمودار تندی v برحسب زمان t را برای شیئی به جرم ۰٫۵۰۰ kg و شعاع ۶٫۰۰ cm نشان می‌دهد که



شکل ۱۱-۳۰ مسئله‌ی ۶.

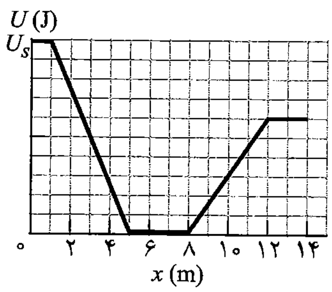
به‌طور هموار از یک شیب‌راهه‌ی ۳۰ درجه به پایین می‌غلتد. مقیاس محور قائم سرعت با مقدار v_s = ۴٫۰ m/s مشخص شده است. لختی دورانی شیء چیست؟

** ۷ در شکل ۱۱-۳۱، استوانه‌ای توپر به شعاع ۱۰ cm و جرم ۱۲ kg از بالای پشت بام خانه‌ای که دارای شیب θ = ۳۰° است، از حال سکون بدون لغزش به پایین می‌غلتد و مسافتی به اندازه‌ی L = ۶٫۰ m می‌پیماید. (الف) تندی زاویه‌ای دوران استوانه به دور محورش در موقع جدا شدن از پشت بام چقدر است؟ (ب) ارتفاع لبه‌ی بام H = ۵٫۰ m است. استوانه در چه فاصله‌ای افقی از لبه‌ی بام به زمین برخورد می‌کند؟



شکل ۱۱-۳۱ مسئله‌ی ۷.

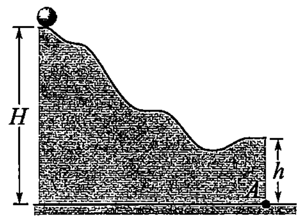
** ۸ شکل ۱۱-۳۲ نمودار انرژی پتانسیل $U(x)$ گلوله‌ای توپر را نشان می‌دهد که می‌تواند در طول محور x بغلتد. مقیاس محور U با مقدار U_s = ۱۰۰ J مشخص شده است. گلوله، که یکنواخت است و به طور هموار می‌غلتد، ۰٫۴۰۰ kg جرم دارد. این گلوله از فاصله‌ی x = ۷٫۰ m در جهت منفی محور x با انرژی مکانیکی ۷۵ J رها می‌شود. (الف) اگر گلوله بتواند به نقطه‌ی x = ۰ m برسد تندی‌اش در آنجا چیست و اگر نمی‌تواند برسد، نقطه‌ی برگشتش کجاست؟ اکنون، فرض کنید گلوله از فاصله‌ی x = ۷٫۰ m در جهت مثبت محور x با



شکل ۱۱-۳۲ مسئله‌ی ۸.

انرژی مکانیکی ۷۵ J رها می‌شود. (ب) اگر گلوله به نقطه‌ی $x = ۱۳\,\mathrm{m}$ برسد تندی‌اش در آنجا چیست، و اگر نمی‌تواند برسد، نقطه‌ی برگشتش کجاست؟

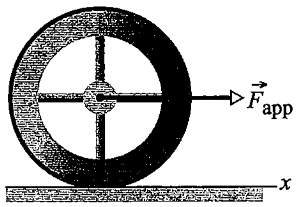
** ۹ در شکل ۱۱-۳۳، گلوله‌ای توپر از حال سکون (با شروع کردن از ارتفاع $H = ۶/۰\,\mathrm{m}$) به طور هموار می‌غلتد و در بخش افقی انتهای مسیر به ارتفاع $h = ۲/۰\,\mathrm{m}$، مسیر را ترک می‌کند. فاصله‌ی افقی نقطه‌ی برخورد گلوله با زمین تا نقطه‌ی A چقدر است؟



شکل ۱۱-۳۳ مسئله‌ی ۹.

** ۱۰ کره‌ای توخالی به شعاع $۰/۱۵\,\mathrm{m}$، با لختی دورانی $I = ۰/۰۴۰\,\mathrm{kg \cdot m^۲}$ نسبت به خط گذرنده از مرکز جرم کره، بدون لغزش از یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی شیب ۳۰ درجه به‌سمت بالا می‌غلتد. در مکان آغازی معینی انرژی جنبشی کل کره ۲۰ J است. (الف) چه مقدار از این انرژی جنبشی آغازی مربوط به حرکت دورانی است؟ (ب) تندی مرکز جرم کره در مکان آغازی چیست؟ (پ) انرژی جنبشی کل کره و (ت) تندی مرکز جرم کره، پس از پیمودن مسافت ۱/۰ m نسبت به مکان آغازی بر روی سطح شیب‌دار به سمت بالا، چقدر است؟

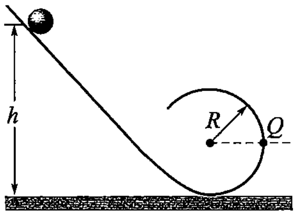
** ۱۱ در شکل ۱۱-۳۴، نیروی افقی و ثابت $\vec{F}_{app}$، به بزرگی ۱۰ N به چرخی به جرم ۱۰ kg و شعاع ۰/۳۰ m وارد می‌شود. این چرخ به طور هموار بر روی سطح افقی می‌غلتد و بزرگی شتاب مرکز جرمش $۰/۶۰\,\mathrm{m/s^۲}$ است. (الف) نیروی اصطکاک وارد شده به چرخ به‌صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟



شکل ۱۱-۳۴ مسئله‌ی ۱۱.

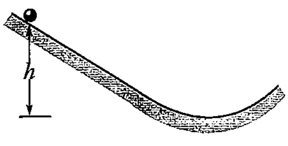
(ب) لختی دورانی چرخ نسبت به محور دوران گذرنده از مرکز جرم چقدر است؟

** ۱۲ در شکل ۱۱-۳۵، گلوله‌ی برنجی کوچکی به جرم ۰/۲۸۰ گرم از حال سکون از بالای بخش مستقیم مسیر رها می‌شود و به طور هموار در یک مسیر حلقه‌ای به پایین می‌غلتد. شعاع حلقه‌ی دایره‌ای $R = ۱۴/۰\,\mathrm{cm}$ و شعاع گلوله r $(r << R)$ است. (الف) ارتفاع h که گلوله باید از آنجا رها شود تا در بالاترین نقطه‌ی حلقه در آستانه‌ی ترک کردن مسیر قرار گیرد، چقدر است؟ اگر گلوله از ارتفاع $h = ۶/۰۰R$ رها شود، (ب) بزرگی و (پ) جهت مؤلفه‌ی نیروی افقی وارد شده به گلوله در نقطه‌ی Q چیست؟



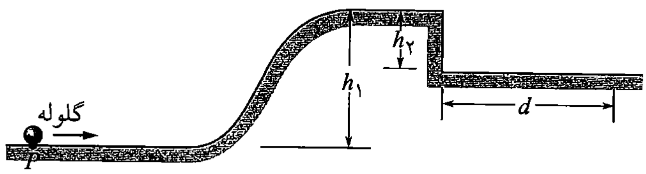
شکل ۱۱-۳۵ مسئله‌ی ۱۲.

*** ۱۳ ***گوی نایکنواخت.*** در شکل ۱۱-۳۶، گویی به‌جرم M و شعاع R از حال سکون به‌طور هموار از یک شیب‌راهه به پایین می‌غلتد و به مسیری دایره‌ای به شعاع ۰/۴۸ m وارد می‌شود. ارتفاع آغازی گوی $h = ۰/۳۶\,\mathrm{m}$ است. در ته مسیر دایره‌ای بزرگی نیروی عمودی وارد شده به گوی $۲/۰۰\,Mg$ است. این گوی دارای یک پوسته‌ی کروی بیرونی (با چگالی یکنواخت معین) است که به کره‌ی میانی (با چگالی یکنواخت متفاوت) چسبانده شده است. لختی دورانی این گوی را می‌توان به شکل عمومی $I = \beta MR^۲$ بیان کرد اما β همانند ضریب مربوط به کره‌ی با چگالی یکنواخت برابر با $\frac{۲}{۵}$ نیست. مقدار β را معین کنید.



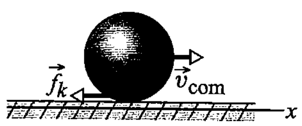
شکل ۱۱-۳۶ مسئله‌ی ۱۳.

*** ۱۴ در شکل ۱۱-۳۷، گلوله‌ی یکنواخت توپر و کوچکی قرار است از نقطه‌ی P به گونه‌ای پرتاب شود که به طور هموار در طول یک مسیر افقی بغلتد، از یک شیب‌راهه بالا برود، و به یک سطح تخت وارد شود. سپس، این گلوله سطح افقی را ترک می‌کند و در یک صفحه‌ی بازی به فاصله‌ی افقی d از لبه‌ی سمت راست سطح تخت می‌افتد. ارتفاع‌های قائم عبارت‌اند از $h_{۱} = ۵٫۰۰\ \text{cm}$ و $h_{۲} = ۱٫۶۰\ \text{cm}$. گلوله از نقطه‌ی P با چه تندی‌ای باید پرتاب شود تا در فاصله‌ی $d = ۶٫۰۰\ \text{cm}$ فرود آید؟



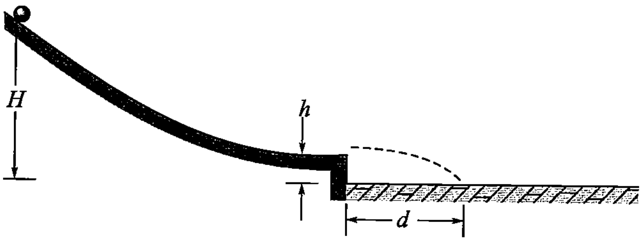
شکل ۱۱-۳۷ مسئله‌ی ۱۴.

*** ۱۵ بازیکنی توپ بولینگ به‌شعاع $R = ۱۱\ \text{cm}$ را در راستای یکی از خط‌های مسیر پرتاب می‌کند. این توپ (شکل ۱۱-۳۸) با تندی آغازی $v_{\text{com},۰} = ۸٫۵\ \text{m/s}$ و تندی زاویه‌ای آغازی $\omega_{۰} = ۰$ بر روی مسیر می‌لغزد. ضریب اصطکاک جنبشی میان توپ و مسیر ۰٫۲۱ است. نیروی اصطکاک جنبشی $\vec{f}_k$ وارد شده به توپ سبب ایجاد شتاب خطی در توپ می‌شود، که گشتاور نیروی ناشی از آن به توپ شتاب زاویه‌ای می‌دهد. وقتی تندی v_{com} به قدر کافی کاهش و تندی زاویه‌ای ω به قدر کافی افزایش می‌یابد، توپ از لغزش می‌افتد و سپس به طور هموار می‌غلتد. (الف) مقدار v_{com} برحسب ω چیست؟ در حین لغزش، (ب) شتاب خطی و (پ) شتاب زاویه‌ای توپ چیست؟ (ت) توپ چه مدت در حال لغزیدن بوده است؟ (ث) توپ چه مسافتی را در حال لغزیدن پیموده است؟ (ج) تندی خطی توپ در موقعی که غلتش به طور هموار آغاز می‌شود، چقدر است؟



شکل ۱۱-۳۸ مسئله‌ی ۱۵.

*** ۱۶ ***شیء استوانه‌ای نایکنواخت.*** در شکل ۱۱-۳۹، شیئی استوانه‌ای به جرم M و شعاع R از حال سکون به طور هموار از یک شیب‌راهه به پایین می‌غلتد و به یک بخش افقی وارد می‌شود. سپس، این شیء از شیب‌راهه خارج می‌شود و در یک سطح افقی در نقطه‌ای به فاصله‌ی $d = ۰٫۵۰۶\ \text{m}$ از انتهای شیب‌راهه فرود می‌آید. ارتفاع آغازی شیء $H = ۰٫۹۰\ \text{m}$ و ارتفاع انتهای شیب‌راهه $h = ۰٫۱۰\ \text{m}$ است. این شیء دارای یک پوسته‌ی استوانه‌ای بیرونی (با یک چگالی معین) است که بر روی استوانه‌ای میانی (با چگالی یکنواخت متفاوت) چسبانده شده است. لختی دورانی این شیء را می‌توان به شکل عمومی $I = \beta MR^{۲}$ بیان کرد، اما β همانند ضریب مربوط به استوانه‌ی با چگالی یکنواخت برابر با $\frac{۱}{۲}$ نیست. مقدار β را معین کنید.



شکل ۱۱-۳۹ مسئله‌ی ۱۶.

پودمان ۱۱-۳ طرز کار یو یو

* ۱۷ یو یویی دارای لختی دورانی $۹۵۰\ \text{g}\cdot\text{cm}^{۲}$ و جرم ۱۲۰ گرم است. شعاع محور یو یو $۳٫۲\ \text{mm}$ و طول نخ آن $۱۲۰\ \text{cm}$ است. یو یو از حال سکون تا انتهای نخ به پایین می‌غلتد. (الف) بزرگی شتاب خطی آن چقدر است؟ (ب) چه مدت طول می‌کشد تا یویو به انتهای نخ برسد؟ هنگام رسیدن یو یو به انتهای نخ، (پ) تندی خطی، (ت) انرژی جنبشی انتقالی، (ث) انرژی جنبشی دورانی و (ج) تندی زاویه‌ای آن، چقدر است؟

* ۱۸ در سال ۱۹۸۰، بر فراز خلیج سان فرانسیسکو[1] یک یو یوی بزرگ از یک جرثقیل رها شد. این یو یو ۱۱۶ کیلوگرمی دارای دو قرص یکنواخت به شعاع $۳۲\ \text{cm}$ بود که با یک محور استوانه‌ای به‌شعاع $۳٫۲\ \text{cm}$ به یکدیگر وصل شده بودند. بزرگی شتاب یویو در هنگام (الف) پایین رفتن و (ب) بالا رفتن، چقدر

1. San Francisco

بود؟ (پ) نیروی کشش طنابی که یویو بر روی آن می‌غلتید، چقدر بود؟ (ت) آیا این نیروی کشش به ۵۲kN، حد تحمل طناب نزدیک بود؟ فرض کنید نمونه‌ی بزرگ‌تری از این یویو (با همان شکل و از همان مواد، اما بزرگ‌تر) بسازید. (ث) آیا بزرگی شتاب یویوی شما در هنگام پایین رفتن، بزرگ‌تر از، کوچک‌تر از، یا مساوی با، شتاب یو یوی سانفرانسیسکو است؟ (ج) نیروی کشش طناب چطور؟

پودمان ۱۱-۴ مروری بر گشتاور نیرو

* ۱۹ یک کَک در دستگاه x، y و z در مختصات (۰، ۴٫۰m- و ۵٫۰m) قرار دارد ونیروهای $\vec{F}_1 = (3.0\,\mathrm{N})\hat{k}$ و $\vec{F}_2 = (-2.0\,\mathrm{N})\hat{j}$ به آن وارد می‌شوند. گشتاور نیروی وارد شده به این کک نسبت به مبداء مختصات، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟

* ۲۰ یک‌دانه‌ی آلو در دستگاه x، y و z در مختصات (۲٫۰m-، ۰ و ۴٫۰m) قرار دارد. گشتاور نیروی وارد شده به این آلو نسبت به مبداء مختصات، که از نیروی $\vec{F}$ با تنها مؤلفه‌ی (الف) $F_x = 6.0\,\mathrm{N}$، (ب) $F_x = -6.0\,\mathrm{N}$، (پ) $F_z = 6.0\,\mathrm{N}$، و (ت) $F_z = -6.0\,\mathrm{N}$، ناشی می‌شود، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟

* ۲۱ ذره‌ای در دستگاه x، y و z در مختصات (۰، ۴٫۰m- و ۳٫۰m) قرار دارد. گشتاور نیروی وارد شده به این ذره نسبت به مبداء مختصات، که از (الف) نیروی $\vec{F}_1$ با مؤلفه‌های $F_{1x} = 2.0\,\mathrm{N}$، $F_{1y} = F_{1z} = 0$ و (ب) نیروی $\vec{F}_2$، با مؤلفه‌های $F_{2x} = 0$، $F_{2y} = 2.0\,\mathrm{N}$، $F_{2z} = 4.0\,\mathrm{N}$، ناشی می‌شود، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟

** ۲۲ ذره‌ای تحت اثر یک‌نیروی وارد شده در دستگاه مختصات x، y و z حرکت می‌کند. وقتی بردار مکان این ذره $\vec{r} = (2.00\,\mathrm{m})\hat{i} - (3.00\,\mathrm{m})\hat{j} + (2.00\,\mathrm{m})\hat{k}$ است، نیروی وارد شده $\vec{F} = F_x\hat{i} + (7.00\,\mathrm{N})\hat{j} - (6.00\,\mathrm{N})\hat{k}$ و گشتاور نیروی ناشی از آن نسبت به مبداء مختصات $\vec{\tau} = (4.00\,\mathrm{N\cdot m})\hat{i} + (2.00\,\mathrm{N\cdot m})\hat{j} - (1.00\,\mathrm{N\cdot m})\hat{k}$ است. نیروی F_x را معین کنید.

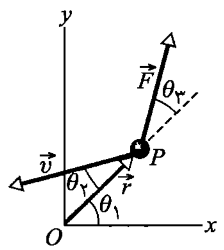
** ۲۳ نیروی $\vec{F} = (2.0\,\mathrm{N})\hat{i} - (3.0\,\mathrm{N})\hat{k}$ به سنگ‌ریزه‌ای با بردار مکان $\vec{r} = (0.50\,\mathrm{m})\hat{j} - (2.0\,\mathrm{m})\hat{k}$ نسبت به مبداء مختصات وارد می‌شود. گشتاور نیروی مؤثر بر سنگ‌ریزه به‌صورت نمادگذاری بردارهای یکه نسبت به (الف) مبداء و (ب) نقطه‌ای واقع در مختصات x، y و z (۲٫۰m، ۰ و ۳٫۰m-) چیست؟

** ۲۴ یک شیشه‌ی محتوی فلفل در دستگاه x، y و z در مختصات (۳٫۰m، ۲٫۰m- و ۴٫۰m) قرار دارد. گشتاور نیروی وارد شده به شیشه نسبت به مبداء مختصات تحت اثر، (الف) نیروی $\vec{F}_1 = (3.0\,\mathrm{N})\hat{i} - (4.0\,\mathrm{N})\hat{j} + (5.0\,\mathrm{N})\hat{k}$، (ب) نیروی $\vec{F}_2 = (-3.0\,\mathrm{N})\hat{i} - (4.0\,\mathrm{N})\hat{j} - (5.0\,\mathrm{N})\hat{k}$ و (پ) بردار مجموع $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟ (ت) محاسبه‌ی قسمت (پ) را، به جای گشتاور نیرو نسبت به مبداء، نسبت به نقطه‌ای واقع در مختصات x، y و z (۳٫۰m، ۲٫۰m و ۴٫۰m) تکرار کنید.

** ۲۵ نیروی $\vec{F} = (-8.0\,\mathrm{N})\hat{i} + (6.0\,\mathrm{N})\hat{j}$ به ذره‌ای با بردار مکان $\vec{r} = (3.0\,\mathrm{m})\hat{i} + (4.0\,\mathrm{m})\hat{j}$ وارد می‌شود. (الف) گشتاور نیروی وارد شده به ذره، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، نسبت به مبداء مختصات و (ب) زاویه‌ی میان بردارهای $\vec{r}$ و $\vec{F}$، چیست؟

پودمان ۱۱-۵ تکانه‌ی زاویه‌ای

* ۲۶ در لحظه‌ی نشان داده شده در شکل ۱۱-۴۰، ذره‌ی P به جرم ۲٫۰kg دارای بردار مکان $\vec{r}$ با بزرگی ۳٫۰m و زاویه‌ی $\theta_1 = 45°$، و بردار سرعت $\vec{v}$ با بزرگی ۴٫۰m/s و زاویه‌ی $\theta_2 = 30°$ است. این ذره تحت اثر نیروی $\vec{F}$ با بزرگی ۲٫۰N و زاویه‌ی $\theta_3 = 30°$ قرار می‌گیرد. هر سه بردار در صفحه‌ی



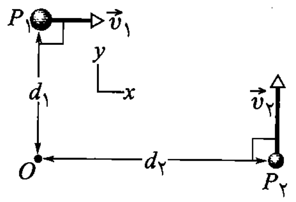
شکل ۱۱-۴۰ مسئله‌ی ۲۶.

xy واقع‌اند. (الف) بزرگی و (ب) جهت تکانه‌ی زاویه‌ای ذره‌ی P و نیز (پ) بزرگی و (ت) جهت گشتاور نیروی وارد شده به ذره‌ی P، نسبت به مبداء مختصات، چیست؟

* ۲۷ در یک‌لحظه، نیروی $\vec{F} = ۴/۰\hat{j}\,\mathrm{N}$ به‌شیئی به‌جرم ۰/۲۵kg وارد می‌شود که دارای بردار مکان $\vec{r} = (۲/۰\hat{i} - ۲/۰\hat{k})\mathrm{m}$ و بردار سرعت $\vec{v} = (-۵/۰\hat{i} + ۵/۰\hat{k})\mathrm{m/s}$ است. (الف) تکانه‌ی زاویه‌ای شیء و (ب) گشتاور نیروی وارد شده به شیء، نسبت به مبداء مختصات، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟

* ۲۸ شیء ذره مانندی به جرم ۲/۰kg در هنگام عبور از نقطه‌ی با مختصات (x و y) برابربا (۳/۰m و ۴/۰m−)، با مؤلفه‌های سرعت $v_x = ۳۰\,\mathrm{m/s}$ و $v_y = ۶۰\,\mathrm{m/s}$، حرکت می‌کند. درست در این لحظه، تکانه‌ی زاویه‌ای شیء نسبت به (الف) مبداء مختصات و (ب) نقطه‌ای واقع در دستگاه x و y در مختصات (۲/۰m− و ۲/۰m−)، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟

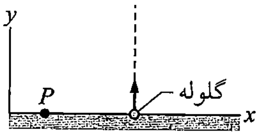
* ۲۹ در لحظه‌ی نشان داده شده در شکل ۱۱-۴۱، دو ذره در صفحه‌ی xy حرکت می‌کنند. ذره‌ی P_1 دارای جرم ۶/۵kg و تندی $v_1 = ۲/۲\,\mathrm{m/s}$ است و در فاصله‌ی $d_1 = ۱/۵\,\mathrm{m}$ از نقطه‌ی O واقع است. ذره‌ی P_2 دارای جرم ۳/۱kg و تندی $v_2 = ۳/۶\,\mathrm{m/s}$ است و در فاصله‌ی $d_2 = ۲/۸\,\mathrm{m}$ از نقطه‌ی O قرار دارد. (الف) بزرگی و (ب) جهت تکانه‌ی زاویه‌ای دو ذره نسبت به نقطه‌ی O، چیست؟



شکل ۱۱-۴۱ مسئله‌ی ۲۹.

** ۳۰ در لحظه‌ای که بردار جابه‌جایی شیئی به جرم ۲/۰۰kg نسبت به مبداء مختصات $\vec{d} = (۲/۰۰\mathrm{m})\hat{i} + (۴/۰۰\mathrm{m})\hat{j} - (۳/۰۰\mathrm{m})\hat{k}$ است، بردار سرعت شیء $\vec{v} = -(۶/۰۰\,\mathrm{m/s})\hat{i} + (۳/۰۰\,\mathrm{m/s})\hat{j} + (۳/۰۰\,\mathrm{m/s})\hat{k}$ است و شیء تحت تأثیر نیروی $\vec{F} = (۶/۰۰\mathrm{N})\hat{i} - (۸/۰۰\mathrm{N})\hat{j} + (۴/۰۰\mathrm{N})\hat{k}$ قرار دارد. مطلوب است تعیین (الف) شتاب شیء، (ب) تکانه‌ی زاویه‌ای شیء نسبت به مبداء، (پ) گشتاور نیروی وارد شده به شیء نسبت به مبداء و (ت) زاویه‌ی میان سرعت شیء و نیروی وارد شده به شیء.

** ۳۱ در شکل ۱۱-۴۲، گلوله‌ای به جرم ۰/۴۰۰kg با تندی آغازی ۴۰/۰m/s یک راست به بالاسو پرتاب می‌شود. تکانه‌ی زاویه‌ای گلوله نسبت به نقطه‌ی P واقع در فاصله‌ی افقی ۲/۰۰m از نقطه‌ی پرتاب در هنگام رسیدن گلوله به (الف) ارتفاع بیشینه و (ب) نیمه راه ارتفاع برگشت به زمین، چیست؟ گشتاور نیروی وارد شده به گلوله نسبت به نقطه‌ی P، که از نیروی گرانشی ناشی می‌شود، (پ) در ارتفاع بیشینه و در (ت) نیمه راه ارتفاع برگشت به زمین، چیست؟



شکل ۱۱-۴۲ مسئله‌ی ۳۱.

پودمان ۱۱-۶ شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون

* ۳۲ ذره‌ای تحت اثر دو گشتاور نیرو نسبت به مبداء مختصات قرار می‌گیرد، که یکی $\vec{\tau}_1$ دارای بزرگی ۲/۰N·m و همسو با محور x مثبت و دیگری $\vec{\tau}_2$ دارای بزرگی ۴/۰N·m و همسو با محور y منفی، است. اگر $\vec{\ell}$ تکانه‌ی زاویه‌ای ذره نسبت به مبداء باشد، بزرگی و جهت $d\vec{\ell}/dt$، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟

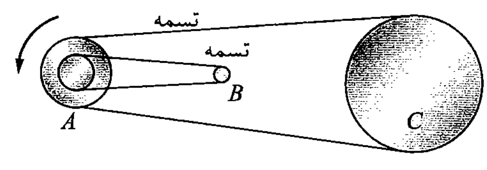
* ۳۳ در زمان $t = ۰$، ذره‌ای به جرم ۳/۰kg با سرعت $\vec{v} = (۵/۰\,\mathrm{m/s})\hat{i} - (۶/۰\,\mathrm{m/s})\hat{j}$ در نقطه‌ی با مختصات $x = ۳/۰\,\mathrm{m}$ و $y = ۸/۰\,\mathrm{m}$ قرار دارد. این ذره با نیروی ۷/۰N در جهت منفی محور x کشیده می‌شود. (الف) تکانه‌ی زاویه‌ای ذره، (ب) گشتاور نیروی وارد شده به ذره و (پ) آهنگ تغییر تکانه‌ی زاویه‌ای، نسبت به مبداء مختصات، چیست؟

* **۳۴** ذره‌ای، با دید در جهت مثبت محور z، باید در صفحه‌ی xy به دور مبداء مختصات در جهت ساعت‌گرد بچرخد. گشتاور نیروی وارد شده به ذره به ازای بزرگی گشتاور زاویه‌ای (الف) $۴/۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^{۲}/\text{s}$، (ب) $۴/۰t^{۲}\,\text{kg}\cdot\text{m}^{۲}/\text{s}$، (پ) $۴/۰\sqrt{t}\,\text{kg}\cdot\text{m}^{۲}/\text{s}$ و (ت) $(۴/۰/t^{۲})\,\text{kg}\cdot\text{m}^{۲}/\text{s}$، نسبت به مبداء، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟

** **۳۵** در زمان t، بردار $\vec{r} = ۴/۰t^{۲}\hat{i} - (۲/۰t + ۶/۰t^{۲})\hat{j}$ مکان ذره‌ای به جرم $۳/۰\,\text{kg}$ را نسبت به مبداء دستگاه مختصات xy به دست می‌دهد ($\vec{r}$ برحسب متر و t برحسب ثانیه است). (الف) رابطه‌ی مربوط به گشتاور نیروی وارد شده به ذره را نسبت به مبداء پیدا کنید. (ب) آیا بزرگی تکانه‌ی زاویه‌ای ذره نسبت به مبداء درحال افزایش یافتن، کاهش یافتن، یا بی‌تغییر ماندن است؟

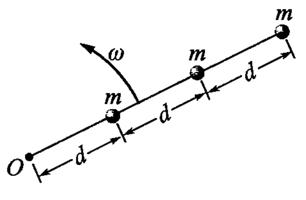
پودمان ۱۱-۷ تکانه‌ی زاویه‌ای جسم صُلب

* **۳۶** شکل ۱۱-۴۳ سه قرص یکنواخت چرخان را نشان می‌دهد که با تسمه‌هایی به هم وصل شده‌اند. یک تسمه روی لبه‌های قرص‌های A و C قرار گرفته و تسمه‌ی دیگر روی توپی مرکزی قرص A و لبه‌ی قرص B واقع شده است. این تسمه‌ها به طور هموار و بدون لغزش بر روی لبه‌ها و توپی حرکت می‌کنند. قرص A دارای شعاع R و توپی آن دارای شعاع $۰/۵۰۰۰R$ است؛ قرص B دارای شعاع $۰/۲۵۰۰R$ و قرص C دارای شعاع $۲/۰۰۰R$ است. قرص‌های B و C چگالی (جرم یکای حجم) و ضخامت یکسانی دارند. نسبت بزرگی تکانه‌ی زاویه‌ای قرص C به بزرگی تکانه‌ی زاویه‌ای قرص B، چیست؟



شکل ۱۱-۴۳ مسئله‌ی ۳۶.

* **۳۷** در شکل ۱۱-۴۴، سه ذره، هر یک به جرم $m = ۲۳\,\text{g}$، به‌وسیله‌ی سه میله‌ی با جرم ناچیز و به طول $d = ۱۲\,\text{cm}$ به‌یکدیگر بسته شده‌اند. این مجموعه‌ی صُلب با تندی زاویه‌ای $\omega = ۰/۸۵\,\text{rad/s}$ به دور نقطه‌ی O می‌چرخد. (الف) لختی دورانی مجموعه، (ب) بزرگی تکانه‌ی زاویه‌ای ذره‌ی میانی و (پ) بزرگی تکانه‌ی زاویه‌ای مجموعه، نسبت به نقطه‌ی O، چیست؟



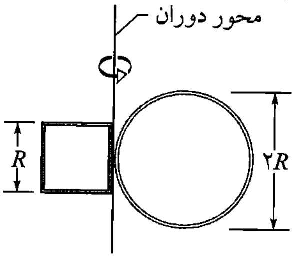
شکل ۱۱-۴۴ مسئله‌ی ۳۷.

* **۳۸** یک قرص سنگ ساب با لختی دورانی $۱/۲\times۱۰^{-۳}\,\text{kg}\cdot\text{m}^{۲}$ به یک دستگاه مته برقی، که موتورش گشتاور نیرویی به اندازه‌ی $۱۶\,\text{N}\cdot\text{m}$ نسبت به محور مرکزی قرص ایجاد می‌کند، وصل شده است. اگر گشتاور نیرو به مدت $۳۳\,\text{ms}$ وارد شود، بزرگی (الف) تکانه‌ی زاویه‌ای و (ب) سرعت زاویه‌ای قرص نسبت به محور مرکزی، چیست؟

* **۳۹** تکانه‌ی زاویه‌ای چرخ لنگری با لختی دورانی $۰/۱۴۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^{۲}$ نسبت به محور مرکزی‌اش در مدت $۱/۵۰\,\text{s}$ از $۳/۰۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^{۲}/\text{s}$ تا $۰/۸۰۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^{۲}/\text{s}$ کاهش می‌یابد. (الف) بزرگی گشتاور نیروی متوسط وارد شده به چرخ لنگر نسبت به محور مرکزی چرخ در این مدت چیست؟ (ب) با فرض ثابت بودن شتاب زاویه‌ای، در ظرف این مدت چرخ لنگر چه زاویه‌ای می‌پیماید؟

** **۴۰** قرصی با لختی دورانی $۷/۰۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^{۲}$ وقتی تحت تأثیر گشتاور نیروی متغیر $\tau = (۵/۰۰ + ۲/۰۰t)\,\text{N}\cdot\text{m}$ قرار می‌گیرد، مانند یک چرخ و فلک می‌چرخد. در زمان $t = ۱/۰۰\,\text{s}$ تکانه‌ی زاویه‌ای این قرص $۵/۰۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^{۲}/\text{s}$ است. تکانه‌ی زاویه‌ای آن در زمان $t = ۳/۰۰\,\text{s}$ چیست؟

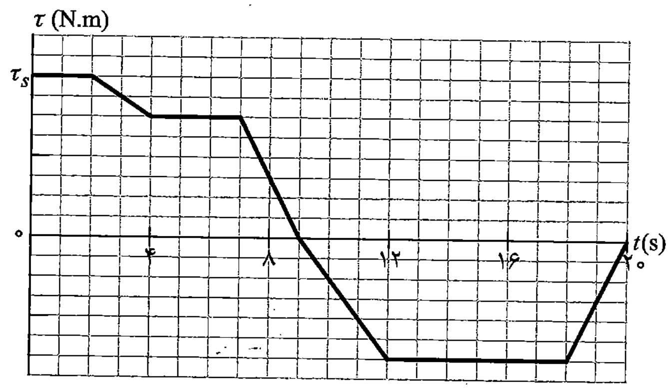
** **۴۱** شکل ۱۱-۴۵ یک ساختار صُلب، شامل طوقه‌ای به شعاع R و جرم m و یک مربع ساخته شده از چهار میله‌ی باریک، هر یک به ضلع R و جرم m، را نشان می‌دهد. این ساختار صُلب با تندی ثابت و با دوره‌ی تناوب $۲/۵\,\text{s}$ به دور یک محور



شکل ۱۱–۴۵ مسئله‌ی ۴۱.

قائم می‌چرخد. با فرض $R = ۰٫۵۰\,\text{m}$ و $m = ۲٫۰\,\text{kg}$، مطلوب است محاسبه‌ی (الف) لختی دورانی این ساختار نسبت به محور دوران و (ب) تکانه‌ی زاویه‌ای آن نسبت به همان محور.

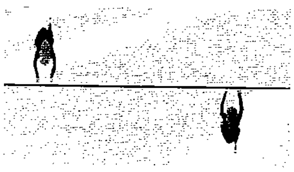
** ۴۲ شکل ۱۱–۴۶ نمودار گشتاور نیروی τ را نشان می‌دهد که به یک قرص در آغاز ساکن وارد می‌شود و می‌تواند آن را مانند یک چرخ و فلک به دور مرکزش بچرخاند. مقیاس محور قائم τ با $\tau_s = ۴٫۰\,\text{N}\cdot\text{m}$ مشخص شده است. تکانه‌ی زاویه‌ای این قرص نسبت به محور دوران در زمان‌های (الف) $t = ۷٫۰\,\text{s}$ و (ب) $t = ۲۰\,\text{s}$، چیست؟



شکل ۱۱–۴۶ مسئله‌ی ۴۲.

پودمان ۱۱–۸ پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای

* ۴۳ در شکل ۱۱–۴۷، دو اسکیت‌باز روی یخ، هر کدام به جرم $۵۰\,\text{kg}$، در امتداد دو مسیر موازی به‌فاصله‌ی $۳٫۰\,\text{m}$ از یکدیگر به هم نزدیک می‌شوند. دو اسکیت‌باز دارای سرعت‌های مخالف و بزرگی مساوی $۱٫۴\,\text{m/s}$ هستند. یکی از آن دو، یک سر تیر بلند و با جرمی ناچیز را در دست دارد و دیگری به محض رسیدن به تیر سر دیگر تیر را می‌گیرد. در نتیجه، اسکیت‌بازها به دور مرکز تیر می‌چرخند. فرض کنید اصطکاک میان اسکیت‌بازها



شکل ۱۱–۴۷ مسئله‌ی ۴۳.

و سطح ناچیز است. (الف) شعاع دایره‌ی چرخش، (ب) تندی زاویه‌ای اسکیت‌بازها و (پ) انرژی جنبشی دستگاه دو اسکیت‌باز، چیست؟ اکنون، اسکیت‌بازها با کشیدن تیر، فاصله‌ی خود را به $۱٫۰\,\text{m}$ کاهش می‌دهند. در این حالت، (پ) تندی زاویه‌ای آن‌ها و (ت) انرژی جنبشی دستگاه، چقدر است؟ (ث) افزایش یافتن انرژی جنبشی را چه چیزی تأمین می‌کند؟

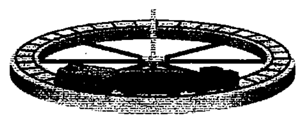
* ۴۴ یک سوسک تکزاسی به جرم $۰٫۱۷\,\text{kg}$ روی لبه‌ی یک میز گردان آشپزخانه (قرصی دایره‌ای که روی محوری قائم نصب شده است) به شعاع $۱۵\,\text{cm}$ با لختی دورانی $۵٫۰\times۱۰^{-۳}\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲$ و یاتاقان‌های بی‌اصطکاک، در جهت پادساعت‌گرد می‌دود. تندی سوسک (نسبت به زمین) $۲٫۰\,\text{m/s}$ است و میز با تندی زاویه‌ای $\omega_۰ = ۲٫۸\,\text{rad/s}$ در جهت ساعت‌گرد می‌چرخد. این سوسک خرده نانی را در کناره‌ی میز پیدا می‌کند، و البته متوقف می‌شود. (الف) تندی زاویه‌ای میز گردان پس از توقف سوسک چیست؟ (ب) آیا در حین توقف سوسک انرژی مکانیکی پایسته می‌ماند؟

* ۴۵ شخصی روی سکویی ایستاده است که با تندی زاویه‌ای $۱٫۲\,\text{rev/s}$ (بی‌اصطکاک) می‌چرخد. شخص در حالی که در هر دست خود آجری را نگه داشته است بازوها را به دو طرف باز می‌کند. لختی دورانی دستگاه، شامل شخص، آجرها و سکو نسبت به محور مرکزی $۶٫۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲$ است. اگر شخص با حرکت دادن آجرها لختی دورانی دستگاه را به $۲٫۰\,\text{kg}\cdot\text{m}^۲$ کاهش دهد، (الف) تندی زاویه‌ای سکو چقدر می‌شود و (ب) نسبت انرژی جنبشی جدید دستگاه به انرژی جنبشی اولی آن چقدر است؟ (پ) چه چیزی این انرژی جنبشی اضافی را تأمین می‌کند؟

* ۴۶ لختی دورانی یک ستاره‌ی چرخان در حال رُمبش، به $\frac{۱}{۳}$

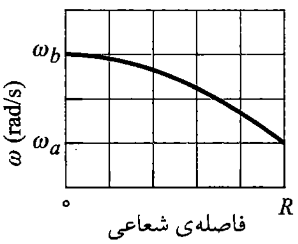
مقدار اولی خود کاهش می‌یابد. نسبت انرژی جنبشی دورانی جدید به انرژی جنبشی دورانی اولی چیست؟

* **۴۷** یک ریل قطار اسباب‌بازی بر روی چرخ بزرگی که با اصطکاک ناچیز می‌تواند به دور یک محور قائم بچرخد، نصب شده است (شکل ۱۱–۴۸). یک قطار اسباب‌بازی به جرم m بر روی ریل قرار داده می‌شود و در حالی که دستگاه در آغاز ساکن است، کلید برق قطار زده می‌شود. تندی قطار نسبت به ریل به $۰/۱۵\,m/s$ می‌رسد. اگر چرخ دارای جرم $۱/۱m$ و شعاع $۰/۴۳\,m$ باشد، تندی زاویه‌ای آن چقدر است؟ (چرخ را به‌صورت طوقه در نظر بگیرید و از جرم پره‌ها و توپی محور چرخ چشم‌پوشی کنید).



شکل ۱۱–۴۸ مسئله‌ی ۴۷.

* **۴۸** یک سوسک تکزاسی از مرکز یک قرص دایره‌ای (که مانند یک چرخ و فلک بدون گشتاورهای نیروی خارجی آزادانه می‌چرخد). به طرف لبه‌ی قرص به شعاع R حرکت می‌کند. شکل ۱۱–۴۹ نمودار تندی زاویه‌ای دستگاه سوسک ـ قرص را در حین حرکت کردن سوسک نشان می‌دهد. ($\omega_b = ۶/۰\,rad/s$ و $\omega_a = ۵/۰\,rad/s$) وقتی سوسک در لبه‌ی قرص در شعاع R قرار دارد، نسبت لختی دورانی سوسک به لختی دورانی قرص، که هر دو نسبت به محور دوران حساب می‌شوند، چیست؟



شکل ۱۱–۴۹ مسئله‌ی ۴۸.

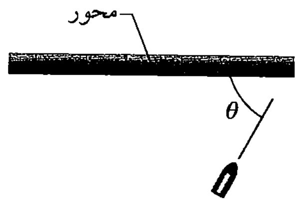
* **۴۹** دو قرص بر روی یاتاقان‌های کم اصطکاک متصل به یک محور (مانند یک چرخ و فلک) نصب شده‌اند و این قرص‌ها را می‌توان به هم نزدیک کرد تا جفت شوند و به صورت یک دستگاه واحد بچرخند. قرص اول را با لختی دورانی $۳/۳۰\,kg\cdot m^۲$ نسبت به محور مرکزی‌اش در جهت پادساعت‌گرد با تندی $۴۵۰\,rev/min$ می‌چرخانیم. قرص دوم را با لختی دورانی $۶/۶۰\,kg\cdot m^۲$ نسبت به محور مرکزی‌اش در جهت پادساعت‌گرد با تندی $۹۰۰\,rev/min$ می‌چرخانیم و سپس آن‌ها را با هم جفت می‌کنیم. (الف) تندی زاویه‌ای قرص‌ها پس از جفت شدن چقدر است؟ اکنون، اگر قرص دوم را در جهت ساعت‌گرد با تندی $۹۰۰\,rev/min$ بچرخانیم، (ب) تندی زاویه‌ای و (پ) جهت چرخش قرص‌ها پس از جفت شدن، چیست؟

* **۵۰** لختی دورانی چرخانه‌ی یک موتور الکتریکی نسبت به محورش $I_m = ۲/۰\times۱۰^{-۳}\,kg\cdot m^۲$ است. این موتور در یک کاوند فضایی، با لختی دورانی $I_p = ۱۲\,kg\cdot m^۲$ نسبت به محورش، به طور موازی با محور کاوند برای تغییر دادن سمت‌گیری آن نصب شده است. عده‌ی دورهایی را که چرخانه باید بزند تا کاوند به اندازه‌ی ۳۰ درجه به دور محورش بچرخد، حساب کنید.

* **۵۱** چرخی با تندی زاویه‌ای $۸۰۰\,rev/min$ روی محوری با لختی دورانی قابل چشم‌پوشی آزادانه می‌چرخد. چرخ دیگری که در آغاز ساکن و لختی دورانی‌اش دو برابر لختی دورانی چرخ اول است، ناگهان به همان محور جفت می‌شود. (الف) تندی زاویه‌ای ترکیب حاصل از محور و دو چرخ چقدر است؟ (ب) چه کسری از انرژی جنبشی دورانی اولی تلف می‌شود؟

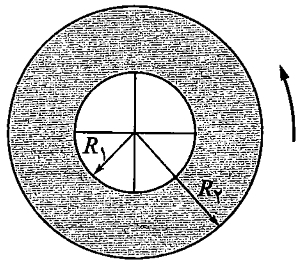
** **۵۲** سوسکی به جرم m بر کناره‌ی یک قرص یکنواخت به جرم $۴/۰۰m$ قرار دارد و قرص مانند یک چرخ و فلک (افقی)، می‌تواند آزادانه به دور محور گذرنده از مرکزش بچرخد. در آغاز سوسک و قرص با سرعت زاویه‌ای $۰/۲۶۰\,rad/s$ با هم می‌چرخند. سپس، سوسک نصف فاصله تا مرکز قرص را راه می‌رود. (الف) در این حالت، سرعت زاویه‌ای دستگاه سوسک ـ قرص چیست؟ (ب) نسبت انرژی جنبشی جدید دستگاه به انرژی جنبشی اولی آن، $K/K_۰$، چقدر است؟ (پ) عامل این تغییر انرژی جنبشی چیست؟

** ۵۳ میله‌ی باریک یکنواختی به طول ۰/۵۰۰ m و جرم ۴/۰۰ kg می‌تواند در یک صفحه‌ی افقی به دور محور قائم گذرنده از مرکزش بچرخد. در حالی که میله ساکن است، یک گلوله‌ی ۳/۰۰ گرمی در صفحه‌ی چرخش میله شلیک می‌شود و به یک سر میله برخورد می‌کند. راستای سرعت گلوله با میله، با دید از بالا، زاویه‌ی $\theta =$ ۶۰/۰° تشکیل می‌دهد (شکل ۱۱-۵۰). اگر گلوله در میله فرو رود و سرعت زاویه‌ای میله پس از برخورد ۱۰ rad/s شود، تندی گلوله درست پیش از برخورد چقدر بوده است؟



شکل ۱۱-۵۰ مسئله‌ی ۵۳.

** ۵۴ شکل ۱۱-۵۱ تصویر حلقه‌ای را از بالا نشان می‌دهد که مانند یک چرخ و فلک می‌تواند به دور مرکزش بچرخد. این حلقه دارای شعاع بیرونی $R_2 =$ ۰/۸۰۰ m، شعاع درونی $R_1 = \frac{R_2}{۲/۰۰}$ و جرم $M =$ ۸/۰۰ kg است و جرم میله‌های متقاطع واقع در مرکز ناچیز است. این حلقه ابتدا در حالی که گربه‌ای به جرم $m = \frac{M}{۴/۰۰}$ بر کناره‌ی بیرونی آن به شعاع R_2 نشسته است، با تندی زاویه‌ای ۸/۰۰ rad/s می‌چرخد. اگر گربه تا کناره‌ی درونی به شعاع R_1 بخزد، انرژی جنبشی دستگاه گربه ـ حلقه را چقدر افزایش می‌دهد؟



شکل ۱۱-۵۱ مسئله‌ی ۵۴.

** ۵۵ یک صفحه‌ی گرامافون افقی به جرم ۰/۱۰ kg و شعاع ۰/۱۰ m با تندی زاویه‌ای ۴/۷ rad/s آزادانه به دور محور قائم گذرنده از مرکز صفحه می‌چرخد. لختی دورانی صفحه نسبت به محور دوران ۵/۰×۱۰⁻⁴ kg·m² است. یک تکه خمیر شُل به جرم ۰/۰۲۰ kg به طور قائم از بالای صفحه می‌افتد و به لبه‌ی صفحه می‌چسبد. تندی زاویه‌ای صفحه درست پس از چسبیدن تکه‌ی خمیر به آن چقدر است؟

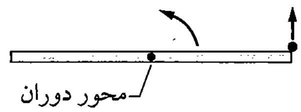
** ۵۶ در پرش طول پرنده‌ای با یک تکانه‌ی زاویه‌ای آغازی از زمین چنان بلند می‌شود که بدنش برای چرخیدن به طرف جلو تمایل پیدا می‌کند و احتمال دارد فرود او را خراب کند. او برای مقابله با این تمایل بازوهای کشیده‌اش رامی‌چرخاندتا تکانه‌ی زاویه‌ای را «کم کند» (شکل ۱۱-۱۸). در مدت ۰/۷۰۰ s، یک بازوی او ۰/۵۰۰ دور و بازوی دیگرش ۱/۰۰۰ دور می‌زند. هر بازو را به صورت یک میله‌ی باریک به جرم ۴/۰ kg و طول ۰/۶۰ m در نظر بگیرید که به دور یک انتهایش می‌چرخد. در چارچوب مرجع پرنده، بزرگی تکانه‌ی زاویه‌ای کل بازوها نسبت به محور دوران مشترک گذرنده از شانه‌های او چقدر است؟

** ۵۷ قرص یکنواختی به جرم ۱۰m و شعاع ۳/۰r، مانند یک چرخ و فلک (افقی)، می‌تواند آزادانه به دور محور مرکزی‌اش بچرخد. قرص یکنواخت کوچک‌تری به جرم m و شعاع r بر روی قرص بزرگ‌تر و هم مرکز با آن قرار دارد. در آغاز، این دو قرص با سرعت زاویه‌ای ۲۰ rad/s با هم می‌چرخند. سپس، در اثر یک آشفتگی اندک قرص کوچک‌تر بر روی قرص بزرگ‌تر می‌لغزد تا لبه‌ی بیرونی این قرص به لبه‌ی بیرونی قرص بزرگ‌تر برسد. از آن پس، دو قرص باز هم با یکدیگر (بدون لغزش) می‌چرخند. (الف) در این صورت، سرعت زاویه‌ای دوران آن‌ها به دور مرکز قرص بزرگ‌تر چقدر است؟ (ب) نسبت انرژی جنبشی جدید دستگاه دو قرص به انرژی جنبشی اولی آن، K/K_0، چیست؟

** ۵۸ یک سکوی افقی به شکل صفحه‌ای دایره‌ای، بر روی یاتاقان بی‌اصطکاکی به دور محور قائم گذرنده از مرکز صفحه می‌چرخد. سکو دارای جرم ۱۵۰ kg، شعاع ۲/۰ m و لختی دورانی ۳۰۰ kg·m² نسبت به محور دوران است. دانش‌آموزی به جرم ۶۰ kg از لبه‌ی سکو به آرامی به طرف مرکز آن راه

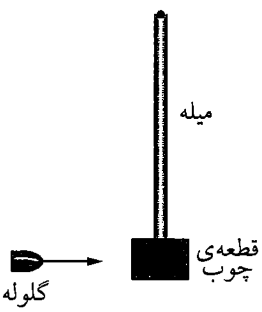
می‌رود. اگر تندی زاویه‌ای دستگاه در آغاز حرکت دانش‌آموز ۱/۵ rad/s باشد، تندی زاویه‌ای آن در هنگامی که فاصله‌ی دانش‌آموز از مرکز ۰/۵۰ m است، چیست؟

** ۵۹ شکل ۱۱-۵۲ تصویر میله‌ای باریک و یکنواخت به طول ۰/۸۰۰ m و جرم M را از بالا نشان می‌دهد، که با تندی زاویه‌ای ۲۰/۰ rad/s به طور افقی به دور محور گذرنده از مرکزش می‌چرخد. ذره‌ای به جرم $\frac{M}{۳/۰۰}$ که در آغاز به یک انتهای میله وصل شده بود، از میله جدا می‌شود و در لحظه‌ی جدا شدن، در راستای عمود بر میله حرکت می‌کند. اگر v_p، تندی ذره در لحظه‌ی جدا شدن از میله به اندازه‌ی ۶/۰۰ m/s بیش از تندی انتهای میله باشد، مقدار v_p چقدر است؟



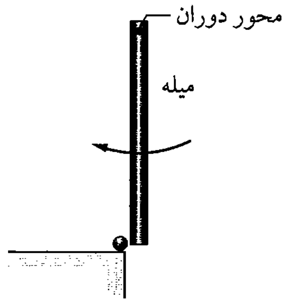
شکل ۱۱-۵۲ مسئله‌ی ۵۹.

** ۶۰ در شکل ۱۱-۵۳، گلوله‌ای ۱/۰ گرمی به سمت قطعه چوبی به جرم ۰/۵۰ kg، که در انتهای میله‌ی نایکنواختی به طول ۰/۶۰ m و جرم ۰/۵۰ kg قرار دارد، شلیک می‌شود. در این عمل، دستگاه قطعه ـ میله ـ گلوله در نقطه‌ی A به دور محور ثابتی می‌چرخد. لختی دورانی میله‌ی تنها نسبت به نقطه‌ی A برابر با ۰/۰۶۰ kg·m² است. قطعه چوب را به صورت یک ذره در نظر بگیرید. (الف) در این صورت، لختی دورانی دستگاه قطعه ـ میله ـ گلوله نسبت به نقطه‌ی A چقدر است؟ (ب) اگر تندی زاویه‌ای دوران این دستگاه به دور نقطه‌ی A درست پس از برخورد گلوله ۴/۵ rad/s باشد، تندی گلوله درست پیش از برخورد چقدر بوده است؟



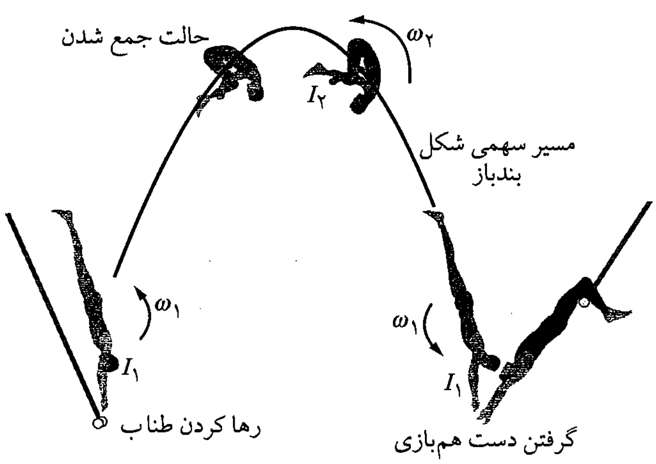
شکل ۱۱-۵۳ مسئله‌ی ۶۰.

** ۶۱ در شکل ۱۱-۵۴، میله‌ی یکنواختی (به طول ۰/۶۰ m و جرم ۱/۰ kg) با لختی دورانی ۰/۱۲ kg·m² در صفحه‌ی شکل به دور محور گذرنده از یک سر میله می‌چرخد. وقتی میله در حین تاب خوردن از پایین‌ترین مکان خود عبور می‌کند، انتهای میله با تکه خمیری به جرم ۰/۲۰ kg برخورد می‌کند و خمیر به انتهای میله می‌چسبد. اگر تندی زاویه‌ای میله درست پیش از برخورد ۲/۴ rad/s باشد، تندی زاویه‌ای دستگاه میله ـ خمیر درست پس از برخورد چقدر می‌شود؟



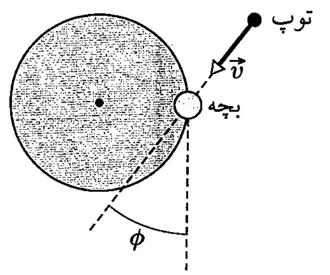
شکل ۱۱-۵۴ مسئله‌ی ۶۱.

*** ۶۲ بندبازی هنگام پریدن به سوی هم‌بازی خود یک پشتک چهار مرحله‌ای که به مدت $t = ۱/۸۷\,s$ طول می‌کشد، اجرا می‌کند. در یک چهارم اول و یک چهارم آخر این حرکت، بدن او، مطابق شکل ۱۱-۵۵، به صورت کشیده و دارای لختی دورانی $I_1 = ۱۹/۹\,kg\cdot m^2$ نسبت به مرکز جرم (خال در شکل) است. در مدت زمان باقی‌مانده‌ی حرکت، او در حالت جمع شده با لختی دورانی $I_2 = ۳/۹۳\,kg\cdot m^2$ است. در این حالت، ω_2، تندی زاویه‌ای او به دور مرکز جرمش، چقدر است؟



شکل ۱۱-۵۵ مسئله‌ی ۶۲.

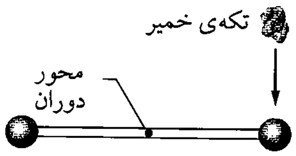
*** ۶۳ در شکل ۱۱-۵۶، بچه‌ای به جرم ۳۰kg بر لبه‌ی یک چرخ و فلک ساکن به شعاع ۲٫۰m ایستاده است. لختی دورانی چرخ و فلک نسبت به محور دوران $۱۵۰\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ است. در این حال، بچه توپی به جرم ۱٫۰kg را که از سوی دوستش پرتاب شده است، می‌گیرد توپ درست پیش از گرفته شدن دارای سرعت افقی $\vec{v}$ مساوی با ۱۲m/s است. چنان‌که شکل نشان می‌دهد، بردار سرعت با خط مماس بر لبه‌ی بیرونی چرخ و فلک، زاویه‌ی $\phi = ۳۷^\circ$ می‌سازد. تندی زاویه‌ای چرخ و فلک درست پس از گرفته شدن توپ چقدر است؟



شکل ۱۱-۵۶ مسئله‌ی ۶۳.

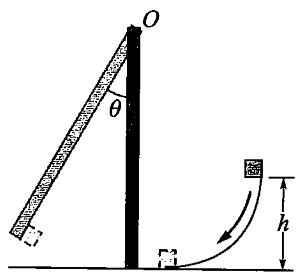
*** ۶۴ یک باله کار پرش همراه با چرخش (شکل ۱۱-۱۹ الف) را با تندی زاویه‌ای ω_i و لختی دورانی شامل دو بخش زیر انجام می‌دهد: $I_{(\text{پا})} = ۱٫۴۴\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ برای پای باز شده به بیرون‌سو تحت زاویه‌ی $\theta = ۹۰٫۰^\circ$ نسبت به بدن، $I_{(\text{تنه})} = ۰٫۶۶۰\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ برای بقیه‌ی بدن او (به طور عمده تنه). باله کار تقریباً در نزدیکی ارتفاع بیشینه، هر دو پای خود را تحت زاویه‌ی $\theta = ۳۰٫۰^\circ$ نسبت به بدنش نگه می‌دارد و تندی زاویه‌ای او ω_f است (شکل ۱۱-۱۹ ب). با این فرض که $I_{(\text{تنه})}$ تغییر نمی‌کند، نسبت ω_f / ω_i چیست؟

*** ۶۵ دو گلوله، هر یک به جرم ۲٫۰۰kg، به دو سر میله‌ی باریکی به طول ۵۰٫۰cm و جرم ناچیز وصل شده‌اند. میله آزادانه و بی‌اصطکاک در صفحه‌ای قائم به دور یک محور افقی گذرنده از مرکز می‌چرخد. در حالی که در آغاز میله افقی است (شکل ۱۱-۵۷)، یک تکه‌ی خمیر ۵۰٫۰ گرمی با تندی ۳٫۰۰m/s روی یکی از گلوله‌ها می‌افتد و به آن می‌چسبد. (الف) تندی زاویه‌ای دستگاه درست پس از برخورد تکه‌ی خمیر چقدر است؟ (ب) نسبت انرژی جنبشی دستگاه پس از برخورد، به انرژی جنبشی تکه‌ی خمیر درست پیش از برخورد چقدر است؟ (پ) این دستگاه تا پیش از رسیدن به توقف لحظه‌ای تحت چه زاویه‌ای می‌چرخد؟



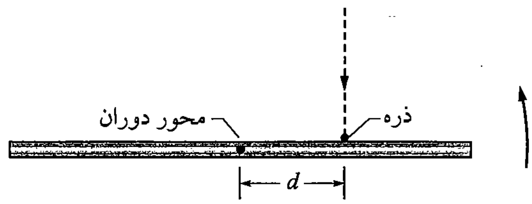
شکل ۱۱-۵۷ مسئله‌ی ۶۵.

*** ۶۶ در شکل ۱۱-۵۸، قطعه‌ی کوچکی به جرم ۵۰ گرم از ارتفاع $h = ۲۰\,\mathrm{cm}$ بر روی یک سطح بی‌اصطکاک به پایین می‌لغزد و با میله‌ی قائم یکنواختی به جرم ۱۰۰ گرم و طول ۴۰cm برخورد می‌کند و به آن می‌چسبد. میله پیش از رسیدن به توقف لحظه‌ای به دور نقطه‌ی چرخشگاه O به اندازه‌ی زاویه‌ی θ می‌چرخد. مقدار θ را پیدا کنید.



شکل ۱۱-۵۸ مسئله‌ی ۶۶.

*** ۶۷ شکل ۱۱-۵۹ تصویر میله‌ای یکنواخت و باریک به طول ۰٫۶۰۰m و جرم M را، با دید از بالا، نشان می‌دهد. این میله به طور افقی با تندی زاویه‌ی ۸۰٫۰rad/s در جهت پادساعت‌گرد به دور محور گذرنده از مرکزش می‌چرخد. ذره‌ای به جرم $\frac{M}{۳٫۰۰}$ در حال حرکت با تندی ۴۰٫۰m/s به طور افقی به این میله برخورد می‌کند و به آن می‌چسبد. در لحظه‌ای که ذره در فاصله‌ی d از مرکز به میله برخورد می‌کند، مسیر ذره بر میله عمود است. (الف) به ازای چه مقدار d میله و ذره پس از برخورد ساکن می‌شوند؟ (ب) اگر d از این مقدار بیشتر باشد، میله و ذره در چه جهتی خواهند چرخید؟



شکل ۱۱-۵۹ مسئله‌ی ۶۷.

پودمان ۱۱-۹ حرکت تقدیمی ژیروسکوپ

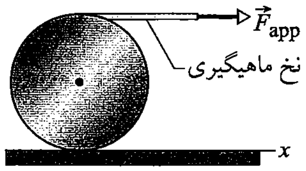
** ۶۸ فرفره‌ای با تندی ۳۰rev / s به دور محوری می‌چرخد که با راستای قائم زاویه‌ی ۳۰ درجه می‌سازد. جرم فرفره ۰٫۵۰kg، لختی دورانی آن نسبت به محور مرکزی‌اش $۵٫۰ \times ۱۰^{-۴} \mathrm{kg \cdot m^۲}$ و فاصله‌ی مرکزش تا نقطه‌ی چرخشگاه ۴٫۰cm است. اگر با دید از بالا چرخش در جهت ساعت‌گرد باشد، (الف) آهنگ حرکت تقدیمی و (ب) جهت حرکت تقدیمی، با دید از بالا، چیست؟

** ۶۹ ژیروسکوپی شامل یک قرص یکنواخت به شعاع ۵۰cm است که از مرکز بر روی محوری به طول ۱۱cm و جرم ناچیز نصب شده است. این‌محور افقی است و یک‌سر آن برروی زمین تکیه داده شده است. اگر این قرص با آهنگ ۱۰۰۰rev / min به دور محور بچرخد، آهنگ حرکت تقدیمی آن چقدر است؟

مسئله‌های بیشتر

۷۰ گلوله‌ای توپر و یکنواخت به طور هموار بر روی کف اتاق می‌غلتد و سپس از یک شیب‌راهه‌ای با شیب ۱۵٫۰ درجه بالا می‌رود. این گلوله پس از پیمودن ۱٫۵۰m در طول شیب‌راهه در یک‌لحظه متوقف می‌شود. تندی آغازی گلوله چقدر بوده است؟

۷۱ در شکل ۱۱-۶۰، نیروی افقی ثابت $\vec{F}_{app}$ با بزرگی ۱۲N از طریق یک نخ ماهیگیری پیچیده شده به دور یک استوانه‌ی توپر یکنواخت به استوانه وارد می‌شود. استوانه دارای جرم ۱۰kg و شعاع ۰٫۱۰m است و به طور هموار بر روی سطح افقی می‌غلتد. (الف) بزرگی شتاب مرکز جرم استوانه چقدر است؟ (ب) بزرگی شتاب زاویه‌ای استوانه در حرکت به دور مرکز جرم چقدر است؟ (پ) نیروی اصطکاک وارد شده به استوانه به‌صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟



شکل ۱۱-۶۰ مسئله‌ی ۷۱.

۷۲ لوله‌ای با جدار نازک بر روی سطح زمین می‌غلتد. نسبت انرژی جنبشی انتقالی به انرژی جنبشی دورانی آن به دور محور مرکزی موازی با طول لوله، چیست؟

۷۳ یک خودرو اسباب‌بازی به جرم ۳٫۰kg با سرعت معین $\vec{v} = -۲٫۰t^۳ \hat{i}$ m/s در راستای محور x حرکت می‌کند، که در آن t برحسب ثانیه است. به ازای $t > ۰$، (الف) تکانه‌ی زاویه‌ای خودرو $\vec{L}$ و (ب) گشتاور نیروی وارد شده به خودرو $\vec{\tau}$، که هر دو نسبت به مبداء مختصات حساب می‌شوند، چیست؟ بردارهای (پ) $\vec{L}$ و (ت) $\vec{\tau}$ را نسبت به نقطه‌ی با مختصات x، y و z (۲٫۰m، ۵٫۰m و ۰) معین کنید. بردارهای (ث) $\vec{L}$ و (ج) $\vec{\tau}$ را نسبت به نقطه‌ی با مختصات x، y و z (۲٫۰m، ۵٫۰m– و ۰) پیدا کنید.

۷۴ چرخی با تکانه‌ی زاویه‌ای $۶۰۰ \mathrm{kg \cdot m^۲/s}$ در جهت ساعت‌گرد به دور محور مرکزی‌اش می‌چرخد. در زمان $t = ۰$، یک گشتاور نیرو به بزرگی ۵۰N·m به چرخ وارد می‌شود و جهت چرخش آن را وارون می‌کند. در چه زمان t تندی زاویه‌ای چرخ صفر است؟

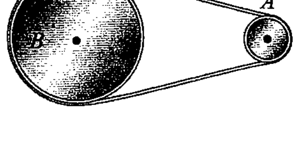
۷۵ در پارک بازی کودکان چرخ و فلک کوچکی به شعاع ۱٫۲m و جرم ۱۸۰kg وجود دارد. شعاع چرخش (مسئله‌ی ۷۹ فصل ۱۰ را ببینید) چرخ و فلک ۹۱٫۰cm است. بچه‌ای به جرم ۴۴٫۰kg در طول مسیری که بر چرخ و فلک مماس است، با تندی ۳٫۰۰m/s می‌دود و در حالی که چرخ و فلک ساکن است، روی آن می‌پرد. از اصطکاک میان یاتاقان‌ها و محور چرخ و فلک چشم‌پوشی کنید. مطلوب است محاسبه‌ی (الف) لختی دورانی چرخ و فلک نسبت به محور دوران آن، (ب) بزرگی تکانه‌ی زاویه‌ای بچه‌ی در حال دویدن نسبت به محور دوران چرخ و فلک و (پ) تندی زاویه‌ای چرخ و فلک و بچه، پس از پریدن بچه بر روی چرخ و فلک.

۷۶ قطعه‌ای سنگ گرانیت یکنواخت به شکل یک کتاب دارای وجهی به ابعاد ۲۰ cm و ۱۵ cm و ضخامتی ۱٫۲ cm است. چگالی (جرم یکای حجم) گرانیت $۲٫۶۴\,\mathrm{g/cm^3}$ است. این قطعه به دور محور عمود بر وجه و واقع در وسط فاصله‌ی میان مرکز و یکی از رأس‌ها می‌چرخد. تکانه‌ی زاویه‌ای قطعه نسبت به این محور $۰٫۱۰۴\,\mathrm{kg\cdot m^2/s}$ است. انرژی جنبشی دورانی قطعه در چرخش به دور این محور چقدر است؟

۷۷ دو ذره، هر یک به جرم $۲٫۹۰\times۱۰^{-۴}\,\mathrm{kg}$ و تندی ۵٫۴۶ m/s، در راستای دو خط موازی به فاصله‌ی جدایی ۴٫۲۰ cm، در دو جهت مخالف حرکت می‌کنند. (الف) بزرگی تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه دو ذره L، نسبت به نقطه‌ای واقع در وسط فاصله‌ی میان دو خط چقدر است؟ (ب) اگر نقطه‌ای که تکانه‌ی زاویه‌ای نسبت به آن حساب می‌شود در وسط فاصله‌ی میان دو خط موازی نباشد، آیا مقدار L تغییر می‌کند؟ اگر جهت حرکت یکی از ذره‌ها وارون شود، چه تغییری در (پ) پاسخ قسمت (الف) و (ت) پاسخ قسمت (ب) به وجود می‌آید؟

۷۸ چرخی به شعاع ۰٫۲۵۰ m که در آغاز با تندی ۴۳٫۰ m/s در حال غلتیدن حرکت می‌کند پس از پیمودن مسافت ۲۲۵ m متوقف می‌شود. مطلوب است محاسبه‌ی بزرگی‌های (الف) شتاب خطی و (ب) شتاب زاویه‌ای، چرخ. (پ) لختی دورانی چرخ نسبت به محور مرکزی‌اش $۰٫۱۵۵\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ است. بزرگی گشتاور نیرو نسبت به محور مرکزی را که از نیروی وارد شده به چرخ ناشی می‌شود، حساب کنید.

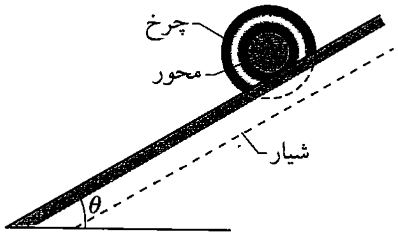
۷۹ در شکل ۱۱-۶۱، چرخ‌های A و B با یک تسمه‌ی بی‌لغزش به هم وصل شده‌اند. شعاع چرخ B، ۳٫۰۰ برابر شعاع چرخ A است. نسبت لختی‌های دورانی دو چرخ I_A/I_B، را در حالت‌هایی حساب کنید که دو چرخ دارای (الف) تکانه‌ی زاویه‌ای یکسان نسبت به محورهای مرکزی‌شان و (ب) انرژی جنبشی دورانی یکسان، باشند.



شکل ۱۱-۶۱ مسئله‌ی ۷۹.

۸۰ ذره‌ای به جرم ۲٫۵۰ kg، در حال حرکت با سرعت $(-۳٫۰۰\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{j}}$ روی یک سطح افقی، با ذره‌ی دیگری به جرم ۴٫۰۰ kg، که با سرعت $(۴٫۵۰\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{i}}$ روی یک سطح افقی در حرکت است، یک برخورد ناکشسان کامل انجام می‌دهد. این برخورد درنقطه‌ای بامختصات x و y (۰٫۵۰۰m– و ۰٫۱۰۰m–) صورت می‌گیرد. تکانه‌ی زاویه‌ای دو ذره‌ی چسبیده به هم نسبت به مبداء، پس از برخورد، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟

۸۱ چرخ یکنواختی به جرم ۱۰٫۰ kg و به شعاع ۰٫۴۰۰ m روی یک محور مرکزی بی‌جرم به طور محکم نصب شده است (شکل ۱۱-۶۲). شعاع این محور ۰٫۲۰۰ m و لختی دورانی ترکیب چرخ ـ محور نسبت به محور مرکزی $۰٫۶۰۰\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ است. این چرخ در آغاز دربالای یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی $\theta = ۳۰٫۰^\circ$ نسبت به راستای افقی، ساکن است؛ محور روی سطح شیب‌دار و خود چرخ در درون یک شیار تعبیه شده در سطح و بدون تماس با سطح قرار دارد. به محض رها شدن چرخ، محور در راستای سطح شیب‌دار و بی‌لغزش به طور هموار به سمت پایین می‌غلتد. وقتی ترکیب چرخ ـ محور به اندازه‌ی ۲٫۰۰ m بر روی سطح پایین می‌رود، (الف) انرژی جنبشی دورانی آن و (ب) انرژی جنبشی انتقالی آن، چیست؟



شکل ۱۱-۶۲ مسئله‌ی ۸۱.

۸۲ میله‌ای یکنواخت در صفحه‌ای افقی به دور یک محور قائم گذرنده از یک سر میله می‌چرخد. میله دارای طول ۶٫۰۰ m، وزن ۱۰٫۰ N و تندی دوران ۲۴۰ rev/min است. مطلوب است محاسبه‌ی (الف) لختی دورانی میله نسبت به محور دوران و (ب) بزرگی تکانه‌ی زاویه‌ای میله نسبت به این محور.

۸۳ کره‌ای توپر به وزن ۳۶٫۰ N بر روی یک سطح شیب‌دار با زاویه‌ی ۳۰٫۰ درجه به سمت بالا می‌غلتد. تندی انتقالی مرکز

جرم کره در پایین سطح شیب‌دار $۴/۹۰\,m/s$ است. (الف) انرژی جنبشی کره در پایین سطح شیب‌دار چیست؟ (ب) کره تا چه مسافتی از سطح شیب‌دار بالا می‌رود؟ (پ) آیا پاسخ قسمت (ب) به جرم کره بستگی دارد؟

۸۴ فرض کنید یویوی مسئله‌ی ۱۷ به جای غلتیدن از حال سکون، به‌گونه‌ای انداخته می‌شود که تندی آغازی‌اش در طول نخ به‌سمت پایین $۱/۳\,m/s$ باشد. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا یویو به انتهای نخ برسد؟ وقتی یو یو به انتهای نخ می‌رسد، (ب) انرژی جنبشی کل، (پ) تندی خطی، (ت) انرژی جنبشی انتقالی، (ث) تندی زاویه‌ای و (ج) انرژی جنبشی دورانی آن، چیست؟

۸۵ دختر بچه‌ای به جرم M بر کناره‌ی یک چرخ و فلک بی‌اصطکاک ساکن، به شعاع R و لختی دورانی I، ایستاده است. او سنگی به جرم m را به طور افقی در راستای مماس بر لبه‌ی بیرونی چرخ و فلک پرتاب می‌کند. تندی سنگ نسبت به زمین، v است. پس از این عمل، (الف) تندی زاویه‌ای چرخ و فلک و (ب) تندی خطی دختر بچه چقدر می‌شود؟

۸۶ جسمی به شعاع R و جرم m به طور هموار و با تندی v بر روی یک سطح افقی می‌غلتد. سپس، جسم از تپه‌ای تا ارتفاع بیشینه‌ی h بالا می‌رود. (الف) به ازای $h = ۳v^۲/۴g$، لختی دورانی جسم نسبت به محور گذرنده از مرکز جرم چقدر است؟ (ب) این جسم چه شکلی ممکن است داشته باشد؟

فصل ۱۲

تعادل و کشسانی

۱۲-۱ تعادل

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۲-۱ تفاوت میان تعادل و تعادل ایستایی را تمیز بدهید.

۱۲-۲ چهار شرط تعادل ایستایی را مشخص کنید.

۱۲-۳ مرکز گرانش و رابطه‌ی آن با مرکز جرم را توضیح دهید.

۱۲-۴ مختصات مرکز گرانش و مرکز جرم مربوط به توزیع معینی از ذرات را حساب کنید.

نکته‌های کلیدی

● یک جسم صُلب وقتی ساکن است، که در حال تعادل ایستا باشد. مجموع برداری نیروهای خارجی مؤثر بر چنین جسمی صفر است:

$$\vec{F}_{net} = ۰ \quad \text{(توازن نیروها)}$$

هرگاه تمام نیروها در صفحه‌ی xy قرار داشته باشند، این معادله‌ی برداری با دو معادله‌ی مؤلفه‌ای زیر هم‌ارز است

$$F_{net,x} = ۰ \text{ و } F_{net,y} = ۰ \quad \text{(توازن نیروها)}$$

● تعادل ایستا نیز ایجاب می‌کند که مجموع برداری گشتاورهای نیروی خارجی وارد شده به جسم نسبت به **هر** نقطه صفر باشد، یا

$$\vec{\tau}_{net} = ۰ \quad \text{(توازن گشتاورهای نیرو)}$$

هرگاه نیروها در صفحه‌ی xy قرار داشته باشند، همه‌ی بردارهای گشتاور نیرو با محور z موازی‌اند و معادله‌ی توازن گشتاورهای نیرو با تک معادله‌ی مؤلفه‌ای زیر هم‌ارز است

$$\tau_{net,z} = ۰ \quad \text{(توازن گشتاورهای نیرو)}$$

● نیروی گرانشی به هر عنصر یک جسم به‌طور فردی وارد می‌شود. اثر خالص تمام اثرهای فردی را با این تصور می‌توان پیدا کرد که به مرکز گرانش جسم یک نیروی هم‌ارز $\vec{F}_g$ وارد می‌شود. اگر شتاب گرانشی $\vec{g}$ برای همه‌ی عنصرهای جسم یکسان باشد، مرکز گرانش بر مرکز جرم منطبق است.

فیزیک در این باره چه می‌گوید؟

ساخته‌های دست بشر در برابر نیروهایی که به آن‌ها وارد می‌شوند، پایدار به نظر می‌رسند. به‌عنوان مثال، یک ساختمان باید در برابر نیروی گرانشی و نیروی باد پایدار باشد، و یک پل

باید در برابر نیروی گرانشی که آن را به سمت پایین می‌کشد و تکان‌های پی‌درپی ناشی از حرکت خودروها و کامیون‌ها، مقاومت نشان دهد. یکی از نکات مورد توجه دانش فیزیک بررسی دلیل پایدار بودن یک شیء در برابر نیروهای وارد شده به آن است. در این فصل کتاب دو جنبه‌ی اصلی پایداری را بررسی می‌کنیم. یکی از جنبه‌ها **تعادل** نیروها و گشتاورهای نیروی وارد شده به اشیای صُلب، و جنبه‌ی دیگر **کشسانی** اشیای ناصُلب، یعنی، خاصیت حاکم بر تغییر شکلی است که این اشیا می‌توانند پیدا کنند. پرداختن به این بخش از فیزیک به درستی، می‌تواند موضوعی برای مقاله‌های بی‌شماری در مجله‌های فیزیک و مهندسی فراهم کند. اما اگر پرداختن به این کار نادرست باشد، با مضمونی برای مقاله‌های بی‌شماری در روزنامه‌ها و مجله‌های حقوقی مواجه می‌شویم.

تعادل

اشیای زیر را در نظر بگیرید: (۱) کتابی که روی میز قرار دارد، (۲) قرص هاکی که با سرعت ثابت روی یک سطح بی‌اصطکاک می‌لغزد، (۳) پره‌های یک پنکه‌ی سقفی که می‌چرخند و (۴) چرخ دوچرخه‌ای که با تندی ثابت در مسیری مستقیم حرکت می‌کند. در هر یک از این چهار شیء:

۱. تکانه‌ی خطی $\vec{P}$ مرکز جرم ثابت است.

۲. تکانه‌ی زاویه‌ای $\vec{L}$ نسبت به مرکز جرم، یا نسبت به هر نقطه‌ی دیگر، نیز ثابت است.

در این شرایط، گفته می‌شود که این اشیا در حال **تعادل** هستند. پس، دو شرط تعادل عبارت‌اند از:

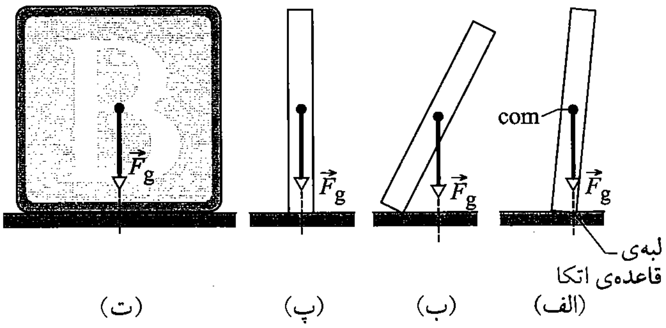
$$\vec{P} = \text{const.} \quad \text{و} \quad \vec{L} = \text{const.} \qquad (۱-۱۲)$$

در این فصل به حالت‌هایی توجه می‌کنیم که در آن‌ها مقادیر ثابت در معادله‌ی ۱۲-۱ صفرند؛ یعنی به طور کلی، به مطالعه‌ی اشیایی می‌پردازیم که در چارچوب مرجع مشاهده‌ی آن‌ها، این اشیا ـ به صورت انتقالی یا دورانی ـ حرکت نمی‌کنند. در این حالت گفته می‌شود که اشیا در حال **تعادل ایستا** هستند. از چهار شیئی که در آغاز این بخش نام بردیم، تنها یکی از آن‌ها ـ کتابی که روی میز قرار دارد ـ در حال تعادل ایستا است.

شکل ۱۲-۱ تصویری از یک تخته سنگ متوازن. اگرچه سرپا بودن تخته سنگ نامطمئن به نظر می‌رسد، در حال تعادل ایستا است.

تخته سنگ متوازن در شکل ۱۲-۱، نمونه‌ی دیگری از اشیایی است که، دست کم آن‌گونه که می‌بینیم، در حال تعادل ایستا است. ساختارهای بی‌شمار دیگری، مانند کلیساها، خانه‌ها، قفسه‌های کتاب، دکه‌های مواد غذایی، که مدت‌ها به حالت ایستا می‌مانند، نیز از این خاصیت برخوردارند.

همان‌طور که در پودمان ۸-۳ دیدیم، هرگاه جسمی پس از جابه‌جا شدن توسط نیرویی به حالت تعادل ایستای خود برگردد، می‌گوییم این جسم در حال ***تعادل ایستای پایدار*** است. گلوله‌ی کوچکی که در ته ظرفی نیمکره‌ای شکل قرار دارد، نمونه‌ای از این مورد است. اما اگر نیروی اندکی بتواند جسم را جابه‌جا و آن را از حال تعادل خارج کند، جسم در حال ***تعادل ایستای ناپایدار*** است.



شکل ۱۲-۲ (الف) یک تخته‌ی دومینو در حالی که مرکز جرمش در روی راستای قائم لبه‌ی قاعده‌ی اتکا و بالاتر از لبه است به حال توازن قرار دارد. راستای نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد شده به تخته از لبه‌ی قاعده‌ی اتکا می‌گذرد. (ب) اگر تخته حتی اندکی نسبت به سمت‌گیری توازن بچرخد، در آن صورت $\vec{F}_g$ گشتاور نیرویی وارد می‌کند که چرخش را افزایش می‌دهد. (پ) تخته‌ای که به طور قائم بر روی قاعده‌ی اتکای باریک خود قرار دارد، نسبت به تخته‌ی قسمت (الف) پایداری بیشتری دارد. (ت) قطعه‌ی مکعب شکل با قاعده‌ی اتکای بزرگ‌تر باز هم پایدارتر است.

تخته‌ی دومینو. برای مثال، فرض کنید یک تخته‌ی دو مینو (یک تخته‌ی کوچک خشتی) را در حالی که مرکز جرمش، مطابق شکل ۱۲-۲ الف، بالاتر از قاعده‌ی اتکای آن است، به حال توازن در می‌آوریم. گشتاور نیروی ناشی از نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد شده به تخته نسبت به قاعده‌ی اتکا صفر است، زیرا خط اثر $\vec{F}_g$ از این قاعده عبور می‌کند. بنابراین، تخته در حال تعادل است. البته، حتی نیروی اندک ناشی از آشفتگی احتمالی هم می‌تواند تعادل آن را به هم بزند. در حین حرکت کردن خط اثر $\vec{F}_g$ به سمت لبه‌ی قاعده‌ی اتکا (مانند شکل ۱۲-۲ ب)، گشتاور نیروی ناشی از $\vec{F}_g$، چرخش تخته را افزایش می‌دهد. بنابراین، تخته در شکل ۱۲-۲ الف، در حال تعادل ایستای ناپایدار است.

تخته‌ی دومینو در شکل ۱۲-۲ پ، خیلی هم ناپایدار نیست. برای واژگون شدن باید با نیرویی آن را چرخاند تا از وضعیت متوازن شکل ۱۲-۲ الف، که در آن مرکز جرم بالاتر از لبه‌ی قاعده‌ی اتکا قرار دارد، دور شود. یک نیروی اندک نمی‌تواند تخته را واژگون کند، اما با یک ضربه‌ی شدید انگشت قطعاً می‌توان این کار را انجام داد. (اگر آرایشی از این تخته‌های سر پا به طور زنجیروار در کنار هم چیده شود، یک ضربه‌ی انگشت به تخته‌ی اول می‌تواند همه‌ی تخته‌ها را بیندازد).

قطعه‌ی مکعب شکل. قطعه‌ی مکعب شکل ویژه‌ی بازی کودکان در شکل ۱۲-۲ ت باز هم پایدارتر است، زیرا مرکز جرم آن باید بیشتر حرکت کند تا از بالای لبه‌ی قاعده‌ی اتکا بگذرد. با یک ضربه‌ی انگشت ممکن است این قطعه واژگون نشود. (به همین جهت هرگز زنجیره‌ای از قطعه‌های مکعب شکل واژگون شونده دیده نشده است). کارگر ساختمانی که در شکل ۱۲-۳ دیده می‌شود، می‌تواند هم مانند تخته‌ی دومینو و هم مانند قطعه‌ی مکعب شکل

شکل ۱۲-۳ عکسی از یک کارگر ساختمانی متوازن بر روی یک تیر فولادی که به حال تعادل ایستا قرار دارد. تعادل کارگر در حال ایستادن در راستای موازی با تیر نسبت به راستای عمود بر تیر پایدارتر است.

بایستد. اگر کارگر طوری بایستد که خط وصل‌کننده‌ی کف پاهایش در راستای تیرآهن قرار گیرد قاعده‌ی اتکایش پهن و تعادلش پایدار است، اما اگر این خط عمود بر تیرآهن باشد قاعده‌ی اتکایش باریک و بدین جهت تعادلش ناپایدار است (و می‌تواند دستخوش وزش شدید باد قرار گیرد).

تحلیل تعادل ایستا در کارهای مهندسی بسیار مهم است. مهندس طراح باید تمام نیروها و گشتاورهای نیروی خارجی را که ممکن است به یک سازه وارد شوند، تمیز دهد و آن‌ها را شناسایی کند و با طراحی خوب و انتخاب خردمندانه‌ی مواد ساختمانی یقین حاصل کند که سازه‌های به کار رفته در زیر بارها پایدار خواهند ماند. این تحلیل لازم است تا مطمئن شویم که، مثلاً، پل‌ها بر اثر سنگینی وسایل نقلیه و وزش باد نمی‌رُمبند و اجزاء تحت فشار هواپیما در هنگام به زمین نشستن هواپیما می‌توانند ضربه‌ها و تکان‌های ناشی از فرود ناگهانی را تحمل کنند.

شرط‌های لازم تعادل

حرکت انتقالی یک جسم از قانون دوم نیوتون به شکل تکانه‌ی خطی، یعنی معادله‌ی ۹-۲۷، پیروی می‌کند:

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (۱۲-۲)$$

اگر جسم در حال تعادل انتقالی باشد ـ یعنی، اگر $\vec{P}$ ثابت باشد ـ در آن صورت $d\vec{P}/dt = 0$ و باید داشته باشیم

$$\vec{F}_{\text{net}} = 0 \quad \text{(توازن نیروها)} \qquad (۱۲-۳)$$

حرکت دورانی یک جسم از قانون دوم نیوتون به شکل تکانه‌ی زاویه‌ای، یعنی معادله‌ی ۱۱-۲۹، پیروی می‌کند:

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (۱۲-۴)$$

اگر جسم در حال تعادل دورانی باشد ـ یعنی، اگر $\vec{L}$ ثابت باشد ـ در آن صورت $d\vec{L}/dt = 0$، و باید داشته باشیم

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = 0 \quad \text{(توازن گشتاورهای نیرو)} \qquad (۱۲-۵)$$

بنابراین، دو شرط لازم برای آنکه یک جسم در حال تعادل باشد، عبارت‌اند از:

۱. مجموع برداری تمام نیروهای خارجی وارد شده به جسم باید صفر باشد.

۲. مجموع برداری تمام گشتاورهای نیروهای خارجی وارد شده به جسم، نسبت به *هر نقطه‌ی ممکن*، نیز باید صفر باشد.

واضح است که این شرط‌ها برای ***تعادل ایستا*** صادق‌اند. این شرط‌ها در حالت‌های تعادل کلی‌تر، که در آن‌ها $\vec{P}$ و $\vec{L}$ ثابت‌اند اما صفر نیستند، نیز معتبرند.

معادله‌های ۱۲–۳ و ۱۲–۵، که شکل برداری دارند، هر کدام با سه معادله‌ی مؤلفه‌ای مستقل مربوط به سه محور مختصات هم‌ارزند:

	توازن نیروها	توازن گشتاورهای نیرو
(۱۲–۶)	$F_{\text{net},x} = 0$	$\tau_{\text{net},x} = 0$
	$F_{\text{net},y} = 0$	$\tau_{\text{net},y} = 0$
	$F_{\text{net},z} = 0$	$\tau_{\text{net},z} = 0$

معادله‌های اصلی. در حالت‌هایی که نیروها در صفحه‌ی xy واقع‌اند، موضوع ساده‌تر می‌شود. به این معنی که فقط گشتاورهایی که می‌توانند به جسم وارد شوند، باید جسم را به دور یک محور موازی با محور z بچرخانند. با این فرض، یک معادله‌ی نیرو و دو معادله‌ی گشتاور نیرو از معادله‌های ۱۲–۶ حذف می‌شوند و داریم

$$F_{\text{net},x} = 0 \quad \text{(توازن نیروها)} \qquad (۱۲–۷)$$

$$F_{\text{net},y} = 0 \quad \text{(توازن نیروها)} \qquad (۱۲–۸)$$

$$\tau_{\text{net},z} = 0 \quad \text{(توازن گشتاورهای نیرو)} \qquad (۱۲–۹)$$

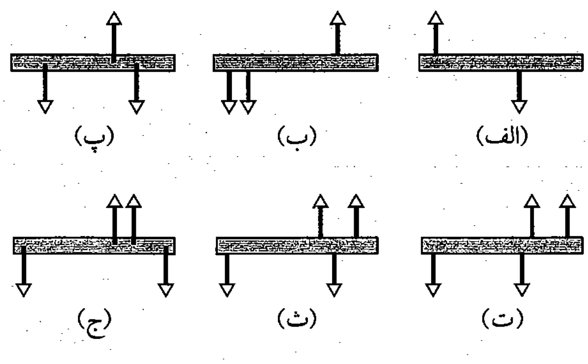
در اینجا $\tau_{\text{net},z} = 0$ گشتاور نیروی خالصی است که نیروهای خارجی نسبت به محور z ***یا هر*** محور موازی با آن به وجود می‌آورند.

یک‌قرص هاکی که با سرعت ثابت برروی سطح یخی می‌لغزد، از معادله‌های ۱۲–۷، ۱۲–۸ و ۱۲–۹ پیروی می‌کند و از این رو در حال تعادل است، ***اما نه در حال تعادل ایستا.*** در حالت تعادل ایستا، تکانه‌ی خطی قرص هاکی $\vec{P}$، نه تنها ثابت، بلکه باید صفر نیز باشد؛ قرص باید روی یخ ساکن باشد. بنابراین، برای تعادل ایستا شرط دیگری لازم است:

۳. تکانه‌ی خطی جسم $\vec{P}$، باید صفر باشد.

خودآزمایی ۱

شکل زیر شش تصویر مربوط به یک میله‌ی یکنواخت را، با دید از بالا، نشان می‌دهد که به آن دو، یا چند، نیرو به طور عمود وارد می‌شوند. اگر بزرگی‌های نیروها به طور مناسب انتخاب شوند (اما ناصفر باشند)، میله در کدام وضعیت می‌تواند به حال تعادل ایستا باشد؟



گرانیگاه

نیروی گرانشی وارد شده به یک جسم گسترده برابر با مجموع برداری نیروهای گرانشی وارد شده به عنصرهای فردی (اتم‌ها) تشکیل دهنده‌ی جسم است. به جای در نظر گرفتن همه‌ی آن عنصرهای فردی می‌توان گفت:

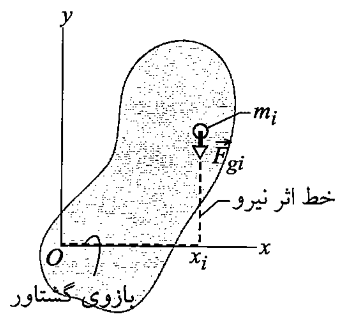
نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد شده به یک جسم، در عمل به تک نقطه‌ای وارد می‌شود، که گرانیگاه، یا مرکزگرانی جسم (با نماد cog) نام دارد.

در اینجا واژه‌ی «در عمل» به این معنی است که اگر نیروهای وارد شده به عنصرهای فردی را حذف و به جای آن‌ها نیروی $\vec{F}_g$ را در گرانیگاه قرار دهیم، نیروی برایند و گشتاور نیروی برایند (نسبت به هر نقطه‌ای) وارد شده به جسم تغییر نمی‌کند.

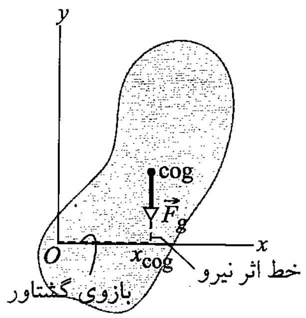
تاکنون فرض کردیم که نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ به مرکز جرم جسم (com) وارد می‌شود. این نکته با این فرض هم‌ارز است که بگوییم گرانیگاه جسم در مرکز جرم قرار دارد. یادآوری می‌شود برای جسمی به جرم M، نیروی $\vec{F}_g$ برابر است با $M\vec{g}$، که در آن $\vec{g}$ شتاب حاصل از نیروی وارد شده به جسم در حین سقوط آزاد است. در استدلالی که به عمل خواهد آمد، نشان داده می‌شود که:

اگر $\vec{g}$ برای تمام عنصرهای یک جسم یکسان باشد، گرانیگاه جسم (cog) بر مرکز جرم جسم (com) منطبق است.

این‌خاصیت تقریباً درهمه‌ی اشیای معمولی وجود دارد، زیرا $\vec{g}$ درنقاط مختلف سطح زمین فقط مقدار کمی تغییر می‌کند و بزرگی آن با افزایش‌یافتن ارتفاع اندکی کاهش می‌یابد. بنابراین، برای اشیایی مانند موش یا گوزن این فرض که نیروی گرانشی به‌مرکز جرم جسم وارد می‌شود موجه است. پس از استدلالی که در پی خواهد آمد می‌توان چنین فرضی را در نظر گرفت.



(الف)



(ب)

شکل ۱۲-۴ (الف) نمودار عنصری به جرم m_i در یک جسم گسترده. نیروی گرانشی $\vec{F}_{gi}$ وارد شده به این عنصر دارای بازوی گشتاور x_i نسبت به مبداء مختصات O است. (ب) گفته می‌شود که نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد شده به جسم، به گرانیگاه (cog) آن اثر می‌کند. بازوی گشتاور این نیرو نسبت به مبداء O، برابر با x_{cog} است.

اثبات منطبق بودن گرانیگاه بر مرکز جرم

نخست عنصرهای فردی یک جسم را در نظر می‌گیریم. شکل ۱۲-۴ الف جسم گسترده‌ای به جرم M، و یکی از عنصرهای آن به جرم m_i را نشان می‌دهد. نیروی گرانشی $\vec{F}_{gi}$ که به هر یک از این عنصرها وارد می‌شود برابر با $m_i\vec{g}_i$ است. شاخص پایین در $\vec{g}_i$ به این معنی است که *$\vec{g}_i$ شتاب گرانشی در محل عنصر i، است* (این مقدار برای عنصرهای دیگر می‌تواند متفاوت باشد).

در شکل ۱۲-۴ الف، هر نیروی $\vec{F}_{gi}$ گشتاور τ_i را نسبت به مبداء O به عنصر وارد می‌کند و بازوی گشتاور آن x_i است. با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۰-۴۱ $(\tau = r_\perp F)$

گشتاور نیروی τ_i را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\tau_i = x_i F_{gi} \tag{۱۰-۱۲}$$

در این صورت، گشتاور نیروی برایند وارد شده به تمام عنصرهای جسم برابر است با

$$\tau_{net} = \sum \tau_i = \sum x_i F_{gi} \tag{۱۱-۱۲}$$

اکنون، کل جسم را در نظر می‌گیریم. شکل ۱۲-۴ ب نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد شده به گرانیگاه جسم را نشان می‌دهد. این نیرو گشتاور نیروی τ را نسبت به نقطه‌ی O به جسم وارد می‌کند و بازوی گشتاور آن x_{cog} است. باز هم با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۰-۴۱، این گشتاور نیرو را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\tau = x_{cog} F_g \tag{۱۲-۱۲}$$

نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ وارد شده به جسم برابر با مجموع نیروهای گرانشی $\vec{F}_{gi}$ وارد شده به تمام عنصرهای جسم است. در نتیجه، به جای F_g در معادله‌ی ۱۲-۱۲ می‌توان $\sum F_{gi}$ را قرار داد و چنین نوشت

$$\tau = x_{cog} \sum F_{gi} \tag{۱۳-۱۲}$$

اکنون، یادآوری می‌کنیم که گشتاور نیروی ناشی از نیروی $\vec{F}_g$ وارد شده به گرانیگاه جسم برابر با گشتاور نیروی برایند ناشی از تمام نیروهای $\vec{F}_{gi}$ وارد شده به تمام عنصرهای جسم است. (این موضوع ناشی از تعریف گرانیگاه است). بنابراین، τ در معادله‌ی ۱۲-۱۳ برابر با τ_{net} در معادله‌ی ۱۲-۱۱ است. از ترکیب کردن این دو معادله می‌توان چنین نوشت:

$$x_{cog} \sum F_{gi} = \sum x_i F_{gi}$$

با قرار دادن $m_i g_i$ به جای F_{gi}، داریم

$$x_{cog} \sum m_i g_i = \sum x_i m_i g_i \tag{۱۴-۱۲}$$

در اینجا یک نکته‌ی کلیدی وجود دارد و آن این است که اگر شتاب‌های g_i مربوط به مکان‌های تمام عنصرها یکسان باشند، می‌توان g_i را از معادله حذف کرد و چنین نوشت

$$x_{cog} \sum m_i = \sum x_i m_i \tag{۱۵-۱۲}$$

مجموع $\sum m_i$، یعنی مجموع جرم‌های تمام عنصرها، برابر با جرم جسم M، است. بنابراین، معادله‌ی ۱۲-۱۵ را می‌توان چنین باز نوشت

$$x_{cog} = \frac{1}{M} \sum x_i m_i \tag{۱۶-۱۲}$$

جمله‌ی سمت راست این معادله، مختصه‌ی x_{com} مرکز جرم جسم (معادله‌ی ۹-۴) را به‌دست می‌دهد. به این ترتیب، آنچه را که می‌خواستیم ثابت کنیم، به دست آوردیم:

$$x_{cog} = x_{com} \tag{۱۷-۱۲}$$

۱۲-۲ چند مثال درباره‌ی تعادل ایستا

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۲-۵ شرط‌های نیرو و گشتاور نیروی مربوط به تعادل ایستا را به‌کار ببرید.

۱۲-۶ مشخص کنید که انتخاب هوشمندانه در مورد مکان مبدأ (برای حساب کردن گشتاورهای نیرو نسبت به آن) می‌تواند با حذف کردن یک یا چند نیروی نامعلوم از معادله‌ی گشتاور نیرو محاسبات را ساده کند.

نکته‌های کلیدی

- یک جسم صلب وقتی ساکن است، که در حال تعادل ایستا باشد. مجموع برداری نیروهای خارجی مؤثر بر چنین جسمی صفر است:

$$\vec{F}_{\text{net}} = ۰ \quad \text{(توازن نیروها)}$$

هرگاه تمام نیروها در صفحه‌ی xy قرار داشته باشند، این معادله‌ی برداری با دو معادله‌ی مؤلفه‌ای زیر هم‌ارز است

$$F_{\text{net},x} = ۰ \quad \text{و} \quad F_{\text{net},y} = ۰ \quad \text{(توازن نیروها)}$$

- تعادل ایستا نیز ایجاب می‌کند که مجموع برداری گشتاورهای نیروی خارجی وارد شده به جسم نسبت به **هر** نقطه صفر باشد، یا

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = ۰ \quad \text{(توازن گشتاورهای نیرو)}$$

هرگاه نیروها در صفحه‌ی xy قرار داشته باشند، همه‌ی بردارهای گشتاور نیرو با محور z موازی‌اند و معادله‌ی توازن گشتاورهای نیرو با تک معادله‌ی مؤلفه‌ای زیر هم‌ارز است

$$\tau_{\text{net},z} = ۰ \quad \text{(توازن گشتاورهای نیرو)}$$

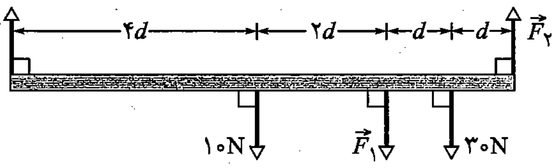
چند مثال درباره‌ی تعادل ایستا

در اینجا چهار مسئله‌ی نمونه‌ی مربوط به تعادل ایستا را بررسی می‌کنیم. در هر مسئله دستگاهی شامل یک یا چند شیء انتخاب می‌کنیم ومعادله‌های تعادل (معادله‌های ۱۲-۷، ۱۲-۸ و ۱۲-۹) را درباره‌ی آن‌ها به کار می‌بریم. همه‌ی نیروهای درگیر در تعادل در صفحه‌ی xy واقع‌اند، که به معنی موازی بودن گشتاورهای نیروی آن‌ها با محور z است. بنابراین، هنگام به کار بردن معادله‌ی ۱۲-۹، یعنی معادله‌ی توازن گشتاورهای نیرو، محوری موازی با محور z انتخاب و گشتاورهای نیرو را نسبت به آن حساب می‌کنیم. اگرچه معادله‌ی ۱۲-۹ در مورد **هر** ***محور انتخابی*** معتبر است، خواهیم دید که برخی انتخاب‌ها کاربرد معادله‌ی ۱۲-۹ را با حذف شدن یک یا چند جمله‌ی مربوط به نیروهای نامعلوم، آسان‌تر می‌کنند.

☑ خودآزمایی ۲

شکل زیر تصویر یک میله‌ی یکنواخت در حال تعادل ایستا را، با دید از بالا، نشان می‌دهد. (الف) آیا با استفاده کردن از معادله‌ی توازن نیروها می‌توان بزرگی نیروهای مجهول $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ را معین کرد؟ (ب) اگر بخواهیم بزرگی نیروی $\vec{F}_۲$ را با استفاده کردن از یک معادله

پیدا کنیم، محور دوران را در کجا باید انتخاب کنیم تا $\vec{F}_۱$ از معادله حذف شود؟ (پ) معلوم می‌شود که بزرگی $\vec{F}_۲$ برابر با ۶۵N است. در این صورت، بزرگی $\vec{F}_۱$ چقدر است؟



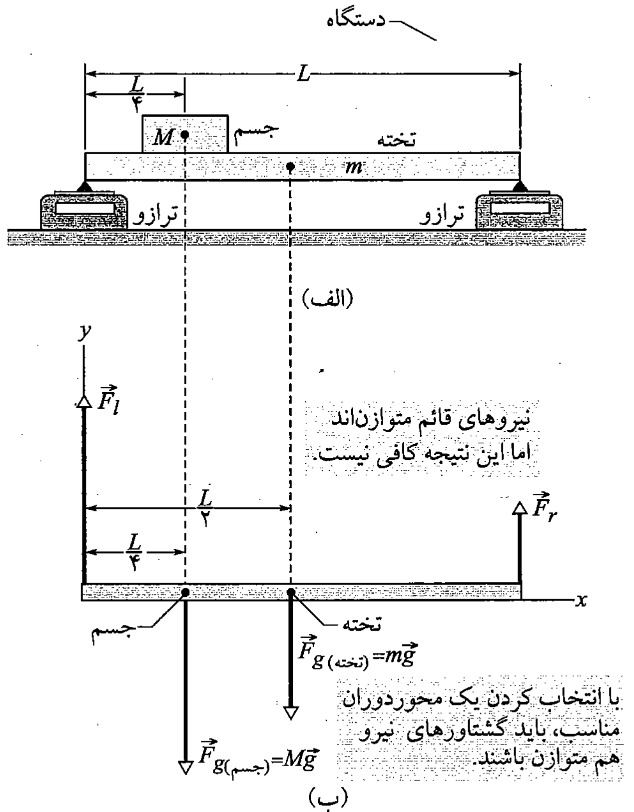
مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۲-۱ توازن یک تیر افقی

در شکل ۱۲-۵ الف، دو سر یک تیر تخته‌ای یکنواخت به طول L و جرم $m = ۱٫۸\,\mathrm{kg}$، روی دو ترازو قرار دارند. جسم یکنواختی به جرم $M = ۲٫۷\,\mathrm{kg}$ به حال سکون روی تیر قرار دارد و فاصله‌ی مرکز آن تا انتهای سمت چپ تیر $L/۴$ است. ترازوها چه مقادیری را نشان می‌دهند؟

نکته‌های کلیدی

مرحله‌های نخستین حل کردن **هر** مسئله‌ی مربوط به تعادل ایستا را چنین پیگیری کنید: دستگاهی را که باید مورد تحلیل قرار گیرد به روشنی معرفی کنید. سپس، نمودار جسم ـ آزاد دستگاه را رسم کنید و تمام نیروها را روی نمودار نشان دهید. اکنون، تیر و جسم را با هم، به عنوان دستگاه انتخاب کنید. آنگاه، نیروهای وارد شده به دستگاه را روی نمودار جسم ـ آزاد شکل ۱۲-۵ ب نشان دهید. (انتخاب دستگاه به تجربه نیاز دارد و اغلب ممکن است بیش از یک انتخاب خوب وجود داشته باشد). چون دستگاه در حال تعادل ایستا است، می‌توان از معادله‌های توازن نیروها (معادله‌های ۱۲-۷ و ۱۲-۸) و معادله‌ی توازن گشتاورهای نیرو (معادله‌ی ۱۲-۹) استفاده کرد.

محاسبات: نیروهای عمودی وارد شده به تیر از سوی ترازوها $\vec{F}_l$ در سمت چپ و $\vec{F}_r$ در سمت راست هستند. مقادیر مورد نظر که با ترازوها نشان داده می‌شوند، با بزرگی‌های این نیروها برابرند. نیروی گرانشی $\vec{F}_{g(\text{تیر})}$، به مرکز جرم تیر وارد می‌شود و برابر با $m\vec{g}$ است. به همین ترتیب، نیروی گرانشی $\vec{F}_{g(\text{جسم})}$، که به مرکز جرم جسم وارد می‌شود، برابر با $M\vec{g}$ است. اما برای ساده کردن شکل ۱۲-۵ ب جسم را با یک خال واقع در میان دو سر تیر نشان می‌دهیم و بردار $\vec{F}_{g(\text{جسم})}$ را طوری رسم می‌کنیم که دُم آن در همین محل باشد. [این جابه‌جایی $\vec{F}_{g(\text{جسم})}$ در راستای خط اثرش، گشتاور نیروی ناشی از $\vec{F}_{g(\text{جسم})}$ را نسبت به هر محور عمود بر شکل تغییر نمی‌دهد].



شکل ۱۲-۵ (الف) یک تیر تخته‌ای به جرم m جسمی به جرم M را نگه داشته است. (ب) نمودار جسم ـ آزاد نشان دهنده‌ی نیروهای وارد شده به ***دستگاه تیر + جسم***.

در اینجا نیروها مؤلفه‌ی x ندارند، در نتیجه، معادله‌ی ۱۲-۷ ($F_{net,x}=0$) هیچ اطلاعاتی به ما نمی‌دهد. برای مؤلفه‌های y از معادله‌ی ۱۲-۸ ($F_{net,y}=0$) استفاده می‌کنیم:

$$F_l + F_r - Mg - mg = 0 \qquad (12\text{-}18)$$

این معادله دو نیروی مجهول F_l و F_r دارد. در نتیجه، باید از معادله‌ی ۱۲-۹، یعنی معادله‌ی مربوط به توازن گشتاورهای نیرو استفاده کرد. این معادله را برای **هر** محور دوران عمود بر صفحه‌ی شکل ۱۲-۵ می‌توان به کار برد. محور دوران را طوری انتخاب می‌کنیم که از انتهای چپ تیر بگذرد. در ضمن، برای تعیین علامت گشتاورهای نیرو نیز از این قاعده‌ی کلی استفاده می‌کنیم: وقتی گشتاور نیرویی باعث چرخاندن جسم ساکنی به دور محور دوران می‌شود، علامتش در دوران ساعت‌گرد منفی و در دوران پادساعت‌گرد مثبت است. سرانجام، گشتاورهای نیرو را می‌توان از رابطه‌ی $r_\perp F$ به دست آورد. بازوی گشتاور $r_\perp$ برای $\vec{F_l}$ صفر، برای $M\vec{g}$ برابر با $L/4$، برای $m\vec{g}$ برابر با $L/2$ و برای $\vec{F_r}$ برابر با L است.

اکنون، معادله‌ی توازن ($\tau_{net,z}=0$) را می‌توان چنین نوشت

$$(0)(F_l) - (L/4)(Mg) - (L/2)(mg) + (L)(F_r) = 0$$

و از آنجا نتیجه می‌گیریم که

$$F_r = \frac{1}{4}Mg + \frac{1}{2}mg$$

$$F_r = \frac{1}{4}(2.7\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2) + \frac{1}{2}(1.8\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2) \Rightarrow$$

$$F_r = 15.44\,\text{N} \approx 15\,\text{N} \qquad \text{(پاسخ)}$$

اکنون، معادله‌ی ۱۲-۱۸ را نسبت به F_l حل و نتیجه‌ی حاصل را در آن جانشانی می‌کنیم

$$F_l = (M+m)g - F_r$$

$$F_l = (2.7\,\text{kg} + 1.8\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2) - 15.44\,\text{N} \Rightarrow$$

$$F_l = 28.66\,\text{N} \approx 29\,\text{N} \qquad \text{(پاسخ)}$$

به جنبه‌های راهبردی حل مسئله توجه کنید: وقتی معادله‌ای را برای توازن مؤلفه‌های نیرو می‌نویسیم، با دو مجهول درگیر می‌شویم و وقتی معادله‌ای را برای توازن گشتاورهای نیرو نسبت به یک ***محور اختیاری*** می‌نویسیم، باز هم با همان دو مجهول سروکار خواهیم داشت. اما چون محور را طوری انتخاب کرده‌ایم که از نقطه‌ی اثر یکی از نیروهای مجهول، در اینجا $\vec{F_l}$، می‌گذرد، چنین گرفتاری‌ای پیش نیامده است. این گونه انتخاب محور، آن نیرو را از معادله‌ی گشتاور نیرو حذف می‌کند و اجازه می‌دهد که بزرگی نیروی مجهول دیگر، F_r، را به دست آوریم. سپس، با استفاده کردن از معادله‌ی توازن مؤلفه‌های نیرو، بزرگی نیروی مجهول باقی‌مانده را پیدا می‌کنیم.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۲-۲ توازن بازوی جرثقیل

شکل ۱۲-۶ الف گاوصندوقی (به جرم $M=430\,\text{kg}$) را نشان می‌دهد که با طنابی (با جرم ناچیز) از بازوی جرثقیلی (به ابعاد $a=1.9\,\text{m}$ و $b=2.5\,\text{m}$) آویخته شده است. این بازو شامل یک تیر یکنواخت ($m=85\,\text{kg}$) متصل به لولا و یک کابل افقی (با جرم ناچیز) است.

(الف) نیروی کشش کابل T_c، چقدر است؟ به عبارت دیگر، بزرگی نیروی $\vec{T_c}$ وارد شده به تیر از سوی کابل چیست؟

نکته‌های کلیدی

در اینجا دستگاه فقط شامل تیر است و نیروهای وارد شده به آن در نمودار جسم ـ آزاد شکل ۱۲-۶ ب نشان داده شده‌اند. نیروی کابل $\vec{T_c}$ است. نیروی گرانشی وارد شده به تیر به مرکز جرم آن (در مرکز تیر) اثر می‌کند، که با هم‌ارز آن $m\vec{g}$ نشان داده شده است. نیروی وارد شده به تیر از سوی لولا دارای مؤلفه‌ی قائم $\vec{F_v}$ و مؤلفه‌ی افقی $\vec{F_h}$ است. نیروی نگهدارنده‌ی گاوصندوق توسط طناب $\vec{T_r}$ است. چون تیر، طناب و گاوصندوق ساکن‌اند، بزرگی $\vec{T_r}$ برابر با وزن گاوصندوق است، یعنی $T_r = Mg$. مبداء O دستگاه مختصات xy در محل لولا اختیار شده است. چون دستگاه در حال تعادل ایستا است، در نتیجه می‌توان معادله‌های توازن را درباره‌ی آن به‌کار برد.

محاسبات: ابتدا محاسبه را با معادله‌ی ۱۲-۹ $(\tau_{\text{net},z} = ۰)$ آغاز می‌کنیم. توجه کنید که در اینجا بزرگی نیروی $\vec{T}_c$ موردنظر است، نه نیروهای $\vec{F}_h$ و $\vec{F}_v$ که درنقطه‌ی O به‌لولا وارد می‌شوند. برای حذف‌کردن $\vec{F}_v$ و $\vec{F}_h$ ازمحاسبه‌ی گشتاور نیرو، باید گشتاورهای نیرو را نسبت به محور عمود بر صفحه‌ی شکل در نقطه‌ی O حساب کرد. در این صورت، بازوی گشتاور نیروهای $\vec{F}_h$ و $\vec{F}_v$ صفر خواهد بود. در شکل ۱۲-۶ ب، خط‌های اثر نیروهای $\vec{T}_c$، $\vec{T}_r$ و $m\vec{g}$ به صورت خط‌چین رسم شده‌اند، که بازوهای گشتاور متناظر آن‌ها، به ترتیب، عبارت‌اند از: a، b و $b/۲$.

با نوشتن رابطه‌ی گشتاورهای نیرو به صورت $r_{\perp}F$ و استفاده کردن از قاعده‌ی مربوط به علامت گشتاورهای نیرو، معادله‌ی توازن $\tau_{\text{net},z} = ۰$ چنین نوشته می‌شود

$$(a)(T_c) - (b)(T_r) - (\tfrac{۱}{۲}b)(mg) = ۰ \qquad (۱۹\text{-}۱۲)$$

با قرار دادن Mg به جای T_r و حل کردن معادله‌ی حاصل نسبت به T_c، خواهیم داشت

$$T_c = \frac{gb\,(M + \frac{m}{۲})}{a}$$

$$T_c = \frac{(۹/۸\,\text{m/s}^۲)(۲/۵\,\text{m})(۴۳۰\,\text{kg} + \frac{۸۵}{۲}\,\text{kg})}{۱/۹\,\text{m}} \Rightarrow$$

$$T_c = ۶۰۹۳\,\text{N} \approx ۶۱۰۰\,\text{N}$$ **(پاسخ)**

(ب) بزرگی F، نیروی برایند وارد شده به تیر از سوی لولا، را پیدا کنید.

نکته‌ی کلیدی

اکنون می‌خواهیم مؤلفه‌ی افقی F_h و مؤلفه‌ی قائم F_v را پیدا کنیم تا از ترکیب آن‌ها بتوانیم بزرگی نیروی برایند F را به‌دست آوریم. چون T_c در دست است، از معادله‌های توازن نیرو در مورد تیر استفاده می‌کنیم.

محاسبات: برای توازن تیر در راستای افقی رابطه‌ی $F_{\text{net},x} = ۰$ چنین نوشته می‌شود

$$F_h - T_c = ۰ \qquad (۲۰\text{-}۱۲)$$

در نتیجه، داریم

$$F_h = T_c = ۶۰۹۳\,\text{N}$$

برای توازن تیر در راستای قائم رابطه‌ی $F_{\text{net},y} = ۰$ چنین نوشته می‌شود

$$F_v - mg - T_r = ۰$$

با قرار دادن Mg به جای T_r و حل کردن معادله‌ی حاصل نسبت به F_v، داریم

$$F_v = (m + M)g = (۸۵\,\text{kg} + ۴۳۰\,\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^۲) \Rightarrow$$

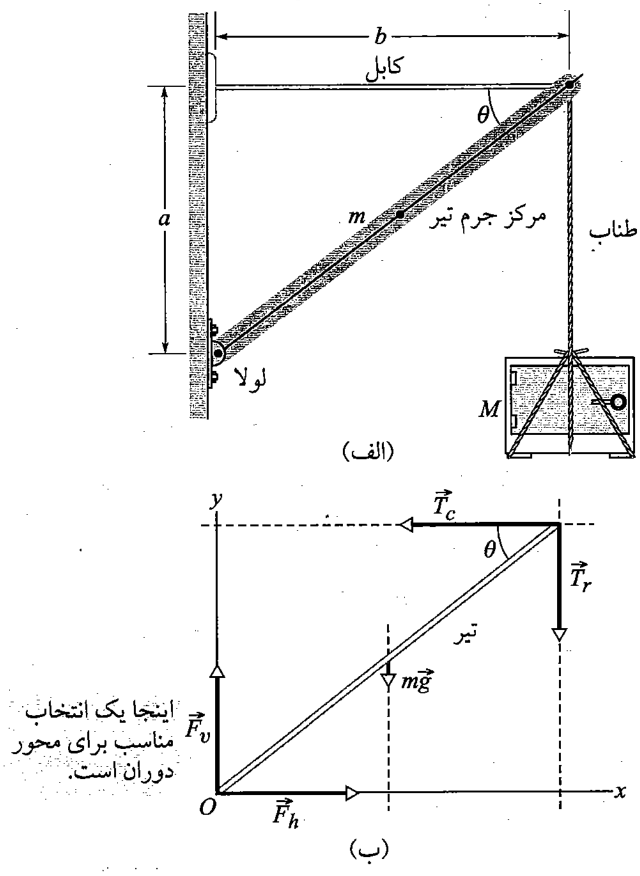
$$F_v = ۵۰۴۷\,\text{N}$$

اکنون، با استفاده کردن از قضیه‌ی فیثاغورس می‌توان نوشت

$$F = \sqrt{F_h^۲ + F_v^۲} = \sqrt{(۶۰۹۳\,\text{N})^۲ + (۵۰۴۷\,\text{N})^۲} \Rightarrow$$

$$F \approx ۷۹۰۰\,\text{N}$$ **(پاسخ)**

توجه کنید که F از ۵۰۰۰N، مجموع وزن‌های گاوصندوق و تیر، یا ۶۱۰۰N، نیروی کشش کابل افقی، بیشتر است.



شکل ۱۲-۶ (الف) گاوصندوق سنگینی از بازوی جرثقیلی شامل کابل فولادی افقی و یک تیر یکنواخت آویخته شده است. (ب) نمودار جسم ـ آزاد مربوط به تیر.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۲-۳ توازن نردبان لم داده شده

در شکل ۱۲-۷ الف، نردبانی به طول $L = ۱۲\,m$ و جرم $m = ۴۵\,kg$ به یک دیوار صاف (یعنی، دیوار بی‌اصطکاک با نردبان) لم داده است. انتهای بالایی نردبان در ارتفاع $h = ۹/۳\,m$ نسبت به کف زمین و انتهای پایینی آن روی کف (که بی‌اصطکاک نیست) واقع است. فاصله‌ی مرکز جرم نردبان از انتهای پایینی $L/۳$ است. آتش‌نشانی به جرم $M = ۷۲\,kg$ از نردبان آن‌قدر بالا می‌رود تا مرکز جرمش به فاصله‌ی $L/۲$ از انتهای پایینی برسد. در این صورت، بزرگی نیروهای وارد شده به نردبان از سوی دیوار و کف زمین چقدر است؟

نکته‌های کلیدی

نخست، دستگاه را به صورت آتش‌نشان و نردبان با هم، انتخاب و سپس نمودار جسم ـ آزاد شکل ۱۲-۷ ب را رسم می‌کنیم تا نیروهای واردشده به دستگاه را نشان دهیم. چون این دستگاه در حال تعادل ایستا است در مورد نیروها و گشتاورهای نیرو (معادله‌های ۱۲-۷ تا ۱۲-۹) می‌توان از معادله‌های تعادل استفاده کرد.

محاسبات: در شکل ۱۲-۷ ب، آتش‌نشان با یک خال واقع در روی نردبان نشان داده شده است. نیروی گرانشی وارد شده به آتش‌نشان را با $M\vec{g}$ نشان داده‌ایم و این بردار در راستای خط اثرش (خط رسم شده در امتداد بردار نیرو) آن‌قدر جابه‌جا شده است که دُم آن بر روی خال قرار گیرد. (این جابه‌جایی، گشتاور نیروی ناشی از $M\vec{g}$ را نسبت به هر محور عمود بر شکل تغییر نمی‌دهد. بنابراین، جابه‌جایی اثری در معادله‌ی توازن گشتاور نیروی مورد استفاده ندارد).

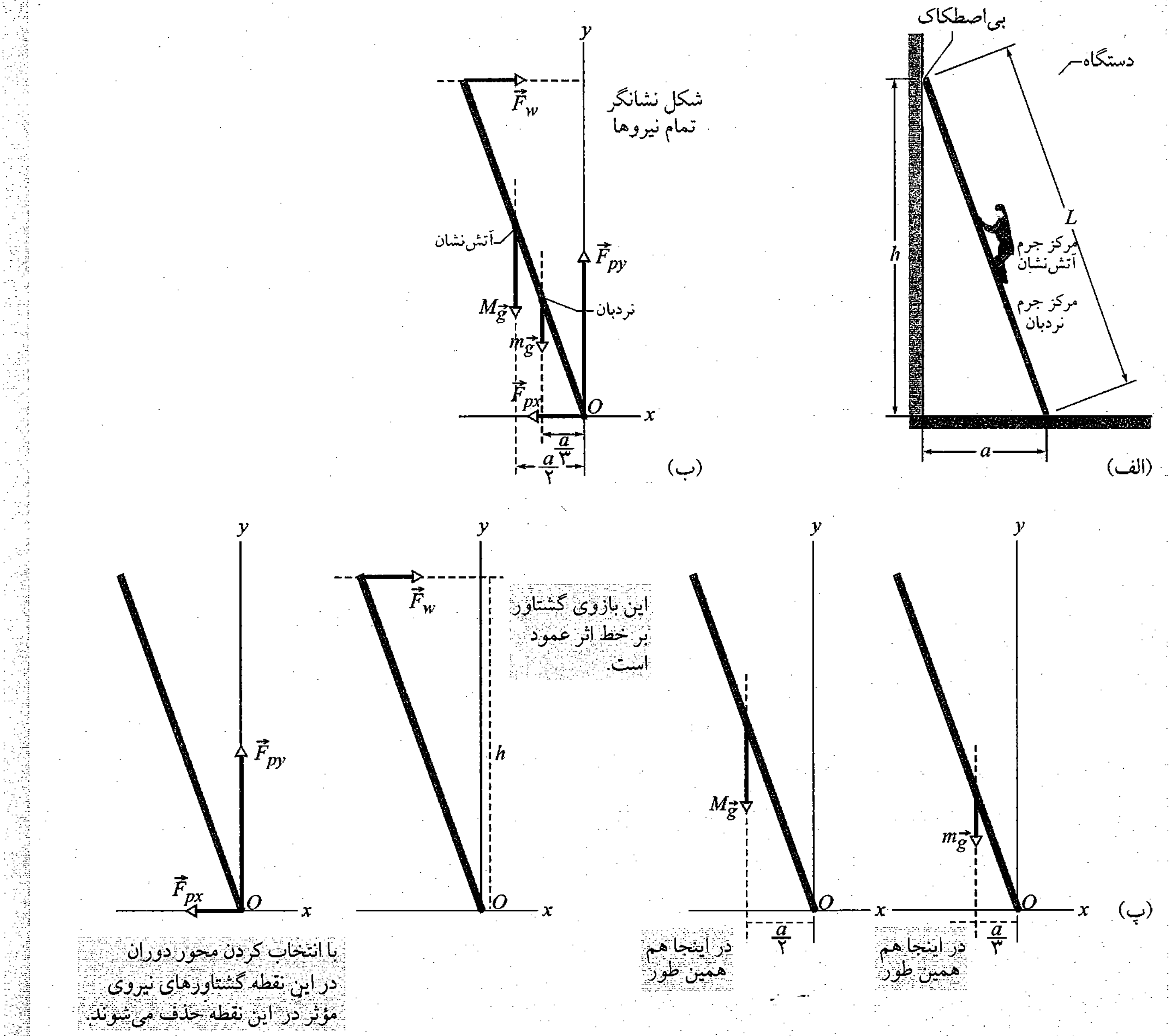
تنها نیروی وارد شده به نردبان از سوی دیوار نیروی افقی $\vec{F}_w$ است (در راستای دیوار بی‌اصطکاک نیروی اصطکاک نمی‌تواند وجود داشته باشد و در نتیجه دیوار هیچ نیروی قائمی به نردبان وارد نمی‌کند). نیروی $\vec{F}_p$ وارد شده به نردبان از کف زمین دو مؤلفه دارد: یک مؤلفه‌ی افقی $\vec{F}_{px}$، که یک نیروی اصطکاک ایستایی است، و یک مؤلفه‌ی قائم $\vec{F}_{py}$، که یک نیروی عمودی است.

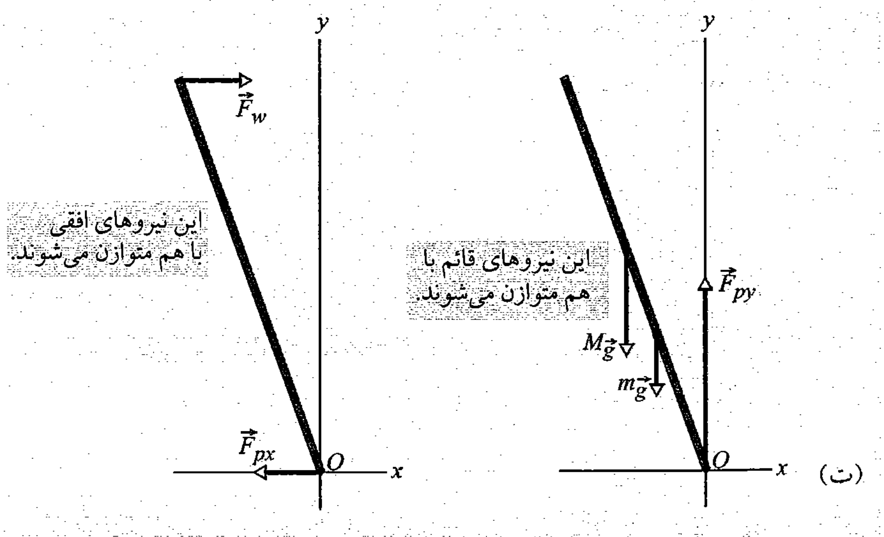
برای به کار بردن معادله‌های توازن از توازن گشتاور نیروی معادله‌ی ۱۲-۹ $(\tau_{net,z} = ۰)$ آغاز می‌کنیم. برای انتخاب کردن محور مربوط به حساب کردن گشتاورهای نیرو نسبت به آن محور توجه کنید که در دو انتهای نردبان نیروهای نامعلوم ($\vec{F}_w$ و $\vec{F}_p$) وجود دارند. برای حذف کردن، مثلاً، $\vec{F}_p$ از محاسبه، محور را در نقطه‌ی O به صورت عمود بر شکل (شکل ۱۲-۷ ب) درنظر می‌گیریم. هم‌چنین، مبداء دستگاه محورهای مختصات xy را هم در نقطه‌ی O قرار می‌دهیم. اکنون، می‌توانیم گشتاورهای نیرو نسبت به نقطه‌ی O را به وسیله‌ی یکی از معادله‌های ۱۰-۳۹ تا ۱۰-۴۱ به دست آوریم، اما در اینجا کاربرد معادله ۱۰-۴۱ $(\tau = r_\perp F)$ آسان‌تر است. ***با انتخاب کردن مکان مناسب برای مبداء مختصات محاسبه‌ی گشتاور نیرو را می‌توان بسیار آسان‌تر کرد.***

برای پیدا کردن $r_\perp$، بازوی گشتاور مربوط به نیروی افقی $\vec{F}_w$ وارد شده از سوی دیوار، خط اثر گذرنده از این بردار را رسم می‌کنیم (خط‌چین افقی نشان داده شده در شکل ۱۲-۷ پ). در این صورت، $r_\perp$ فاصله‌ی عمودی میان نقطه‌ی O و این خط اثر است. در شکل ۱۲-۷ پ، $r_\perp$ در راستای محور y قرار دارد و مقدارش برابر با ارتفاع h است. به همین ترتیب، خط‌های اثر مربوط به بردارهای نیروی گرانشی $M\vec{g}$ و $m\vec{g}$ را رسم می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که بازوهای گشتاور آن‌ها در راستای محور x قرار دارند. در شکل ۱۲-۷ الف، بازوهای گشتاور نشان داده شده برحسب فاصله‌ی a، به ترتیب، عبارت‌اند از $a/۲$ (آتش‌نشان تا نصف طول نردبان بالا رفته است) و $a/۳$ (مرکز جرم نردبان در یک سوم طول نردبان از پایین قرار دارد). بازوهای گشتاور مربوط به‌نیروهای $\vec{F}_{px}$ و $\vec{F}_{py}$ صفر هستند زیرا این نیروها به مبداء وارد می‌شوند.

اکنون، با نوشتن گشتاورهای نیرو به صورت $r_\perp F$، معادله‌ی توازن $\tau_{net,z} = ۰$ چنین نوشته می‌شود

$$-(h)(F_w) + (a/۲)(Mg) + (a/۳)(mg) + (۰)(F_{px}) + (۰)(F_{py}) = ۰ \qquad (۱۲-۲۱)$$





شکل ۱۲-۷ (الف) آتش‌نشانی تا وسط نردبانی که به دیوار بی‌اصطکاکی تکیه دارد، بالا رفته است. کف زمین زیر پایه‌ی نردبان بی‌اصطکاک نیست. (ب) نمودار جسم ـ آزاد نشان دهنده‌ی نیروهای وارد شده به ***دستگاه آتش‌نشان + نردبان***. مبداء دستگاه مختصات O، در نقطه‌ی اثر نیروی مجهول $\vec{F}_p$ (با مؤلفه‌های برداری $\vec{F}_{px}$ و $\vec{F}_{py}$) قرار دارد. (پ) شکل مربوط به محاسبه‌ی گشتاورهای نیرو. (ت) شکل مربوط به توازن نیروها.

(قاعده‌ی خود را به یاد بیاوریم: گشتاورهای نیروی مثبت متناظر با دوران پادساعت‌گرد و گشتاورهای نیروی منفی متناظر با دوران ساعت‌گرد هستند).

با استفاده کردن از قضیه‌ی فیثاغورس در مورد مثلث راست‌گوشه‌ی تشکیل شده با نردبان در شکل ۱۲-۷ الف، داریم

$$a = \sqrt{L^۲ - h^۲} = ۷/۵۸\,\mathrm{m}$$

در نتیجه، با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۲-۲۱، داریم

$$F_w = \frac{ga(\frac{M}{۲} + \frac{m}{۳})}{h}$$

$$F_w = \frac{(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲})(۷/۵۸\,\mathrm{m})(\frac{۷۲}{۲}\,\mathrm{kg} + \frac{۴۵}{۳}\,\mathrm{kg})}{۹/۳\,\mathrm{m}} \Rightarrow$$

$$F_w = ۴۰۷\,\mathrm{N} \approx ۴۱۰\,\mathrm{N} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

اکنون، لازم است از معادله‌های توازن نیرو و شکل ۱۲-۷ ت استفاده کنیم. با به کار بردن معادله‌ی $F_{\mathrm{net},x} = ۰$، داریم

$$F_w - F_{px} = ۰$$

و از آنجا، خواهیم داشت

$$F_{px} = F_w = ۴۱۰\,\mathrm{N} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

با استفاده کردن از معادله‌ی $F_{\mathrm{net},y} = ۰$، داریم

$$F_{py} - Mg - mg = ۰$$

که از آنجا، خواهیم داشت

$$F_{py} = (M + m)g = (۷۲\,\mathrm{kg} + ۴۵\,\mathrm{kg})(۹/۸\,\mathrm{m/s^۲}) \Rightarrow$$

$$F_{py} = ۱۱۴۶/۶\,\mathrm{N} \approx ۱۱۰۰\,\mathrm{N} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۲-۴ توازن برج لمیده‌ی پیزا

فرض می‌کنیم برج پیزا (در ایتالیا) به صورت استوانه‌ای توخالی یکنواخت به شعاع $R = ۹/۸\,\mathrm{m}$ و ارتفاع $h = ۶۰\,\mathrm{m}$ است. محل مرکز جرم این استوانه در ارتفاع $h/۲$ و در راستای محور مرکزی استوانه قرار دارد. استوانه در شکل ۱۲-۸ الف، به صورت قائم و در شکل ۱۲-۸ ب، به اندازه‌ی زاویه‌ی $\theta = ۵/۵°$ به راست‌سو (به سوی دیوار جنوبی برج) لمیده شده، و در نتیجه، مرکز جرم آن به اندازه‌ی d جابه‌جا شده است. فرض می‌کنیم زمین به این برج تنها دو نیرو وارد می‌کند. نیروی عمودی $\vec{F}_{NL}$ به دیوار سمت چپ (دیوار شمالی)، و نیروی عمودی F_{NR} به دیوار سمت راست (دیوار جنوبی) وارد می‌شود. بزرگی F_{NR} بر اثر این لمیدگی چند درصد افزایش می‌یابد.

نکته‌ی کلیدی

چون برج هنوز به حال ایستاده است، تعادل دارد، و در نتیجه مجموع گشتاورهای نیروی حساب شده نسبت به هر نقطه باید صفر باشد.

محاسبات: چون می‌خواهیم F_{NR} وارد شده به سمت راست را حساب کنیم و F_{NL} وارد شده به سمت چپ را نمی‌دانیم یا نمی‌خواهیم، برای محاسبه‌ی گشتاورهای نیرو از یک نقطه‌ی چرخشگاه واقع در سمت چپ استفاده می‌کنیم. نیروهای وارد شده به برج قائم در شکل ۱۲-۸ پ نشان داده شده‌اند. نیروی گرانشی $m\vec{g}$، که فرض می‌کنیم به com وارد می‌شود، دارای خط اثر قائم و بازوی گشتاور R (فاصله‌ی عمودی نقطه‌ی چرخشگاه تا خط اثر) است. گشتاور نیروی وابسته به این نیرو نسبت به نقطه‌ی چرخشگاه تمایل دارد یک دوران ساعت‌گرد ایجاد کند و در نتیجه منفی است. نیروی عمودی $\vec{F}_{NR}$ وارد شده به دیوار جنوبی نیز دارای خط اثر قائم و بازوی گشتاور $۲R$ است. گشتاور نیروی وابسته به این نیرو نسبت به نقطه‌ی چرخشگاه تمایل دارد یک دوران پادساعت‌گرد ایجاد کند و در نتیجه مثبت است. اکنون، معادله‌ی توازن گشتاورهای نیرو $(\tau_{\mathrm{net},z} = ۰)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$-(R)(mg) + (۲R)(F_{NR}) = ۰$$

که از آنجا، داریم

$$F_{NR} = \frac{۱}{۲}mg$$

ما باید می‌توانستیم این نتیجه را حدس بزنیم: چون مرکز جرم بر روی محور مرکزی (خط تقارن استوانه) واقع شده است، سمت

راست، نصف وزن استوانه را نگه می‌دارد.

در شکل ۱۲-۸ ب، مرکز جرم به اندازه‌ی

$$d = \frac{1}{2} h \tan\theta$$

به راست‌سو جابه‌جا شده است. تنها تغییر به وجود آمده در توازن معادله‌ی گشتاورهای نیرو این است که اکنون بازوی گشتاور مربوط به نیروی گرانشی $R+d$ و بزرگی نیروی عمودی در سمت راست دارای بزرگی جدید F'_{NR} است (شکل ۱۲-۸ ت). بنابراین، می‌توان نوشت

$$-(R+d)(mg) + (2R)(F'_{NR}) = 0$$

که از آنجا، داریم

$$F'_{NR} = \frac{R+d}{2R} mg$$

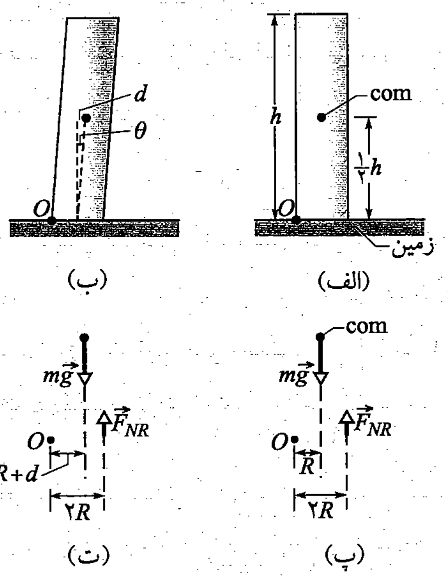
از تقسیم کردن این نتیجه‌ی جدید مربوط به نیروی عمودی طرف راست به نتیجه‌ی اولی می‌رسیم، و سپس با جانشانی مقدار d، داریم

$$\frac{F'_{NR}}{F_{NR}} = \frac{R+d}{R} = 1 + \frac{d}{R} = 1 + \frac{0/5\, h \tan\theta}{R}$$

با جانشانی مقادیر $h = 60\,\text{m}$، $R = 9/8\,\text{m}$ و $\theta = 5/5°$، خواهیم داشت

$$\frac{F'_{NR}}{F_{NR}} = 1/29$$

بنابراین، مدل ساده‌ی ما پیشگویی می‌کند که لمیدگی اگرچه به نسبت کم است، نیروی عمودی وارد شده به دیوار جنوبی برج در حدود ۳۰ درصد افزایش می‌یابد. یک خطر برای برج این است که این نیرو ممکن است به دیوار جنوبی فشار وارد کند و آن را به برون‌سو بترکاند. دلیل لمیدگی برج خاک تراکم‌پذیر زیر برج است، که با هر بارش باران وضعیت بدتر می‌شود. در سال‌های اخیر، مهندسان برج را پایدارسازی کرده‌اند و با برقرار کردن یک سیستم زهکشی لمیدگی برج را تا حدی وارون کرده‌اند.



شکل ۱۲-۸ مدل سازی استوانه‌ای برج پیزا: برج (الف) به صورت قائم و (ب) به صورت لمیده، که مرکز جرمش به راست‌سو جابه‌جا شده است. نمودار نیروها و بازوهای گشتاورها برای پیدا کردن گشتاورهای نیرو نسبت به نقطه‌ی چرخشگاه O برای استوانه‌ی (پ) قائم و (ت) لمیده.

۳-۱۲ کشسانی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۲-۷ توضیح دهید که وضعیت نامعین چیست.

۱۲-۸ معادله‌ی ربط دهنده‌ی تنش به کرنش و مدول یانگ مربوط به کشش و تراکم را به کار ببرید.

۱۲-۹ استقامت تسلیم و استقامت نهایی را از هم تمیز دهید.

۱۲-۱۰ معادله‌ی ربط دهنده‌ی تنش را به کرنش و مدول برشی مربوط به برش را به کار ببرید.

۱۲-۱۱ معادله‌ی ربط دهنده‌ی فشار شاره به کرنش و مدول کپه‌ای مربوط به تنش هیدرولیکی را به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

● برای توصیف رفتار کشسانی (تغییر شکل) اشیا در هنگام پاسخ دادن به نیروهای وارد شده سه مدول کشسانی به کار می‌روند. کرنش (تغییر طول نسبی) با تنش وارد شده (نیروی وارد شده به یکای سطح) از طریق مدول مناسب و بنابه رابطه‌ی عمومی تنش ـ کرنش، به طور خطی رابطه دارد:

کرنش × مدول = تنش

● وقتی شیئی تحت اثر کشش یا تراکم قرار می‌گیرد، رابطه‌ی تنش ـ کرنش چنین نوشته می‌شود

$$\frac{F}{A}=E\,\frac{\Delta L}{L}$$

که در آن $\Delta L / L$ کرنش کششی یا تراکمی شیء و F بزرگی نیروی وارد شده‌ی به وجود آورنده‌ی کرنش است. A مساحت مقطعی است که نیروی $\vec{F}$ (به طور عمود بر A) به آن وارد می‌شود و E مدول یانگ مربوط به شیء است. تنش برابر با F / A است.

● وقتی شیئی تحت اثر تنش برشی قرار می‌گیرد، رابطه‌ی تنش ـ کرنش به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{F}{A}=G\,\frac{\Delta x}{L}$$

که در آن $\Delta x / L$ کرنش برشی شیء، Δx جابه‌جایی یک انتهای شیء در جهت نیروی وارد شده‌ی $\vec{F}$ و G مدول برشی شیء است. تنش برابر با F / A است.

● وقتی شیئی بر اثر تنش وارد شده توسط یک شاره‌ی پیرامون تحت اثر تراکم هیدرولیکی قرار می‌گیرد، رابطه‌ی تنش ـ کرنش چنین نوشته می‌شود

$$p=B\,\frac{\Delta V}{V}$$

که در آن p فشار (تنش هیدرولیکی) وارد شده به شیء است که از شاره ناشی می‌شود، $\Delta V / V$ (کرنش) مقدار مطلق تغییر حجم نسبی شیء است که از فشار ناشی می‌شود و B مدول کپه‌ای (حجمی) شیء است.

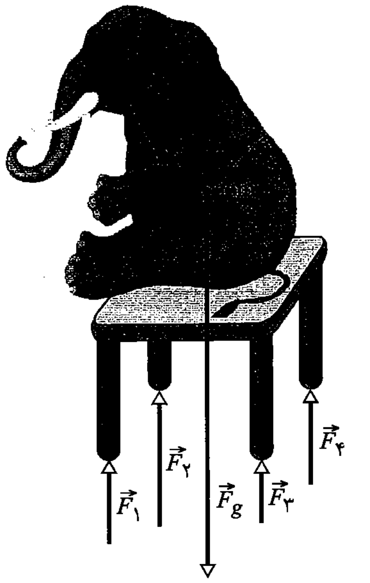
ساختارهای نامعین

در مسئله‌های این فصل فقط سه معادله‌ی مستقل، دو معادله برای توازن نیروها و یک معادله برای توازن گشتاورهای نیرو نسبت به یک محور دوران معین، در اختیار داشتیم. بنابراین، اگر مسئله‌ای بیش از سه مجهول داشته باشد، نمی‌توان آن را حل کرد.

خودرویی را در نظر بگیرید که در آن توزیع بار نامتقارن است. نیروهای وارد شده به هر یک از چهار چرخ خودرو ـ که با هم تفاوت دارند ـ چقدر است؟ باز هم نمی‌توان این نیروها را پیدا کرد، زیرا فقط سه معادله‌ی مستقل در دست است. به همین ترتیب، مسئله‌ی مربوط به تعادل یک میز با سه پایه را می‌توان حل کرد، اما مسئله‌ی یک میز با چهار پایه را نمی‌توان حل کرد. مسئله‌هایی از این دست را که در آن‌ها عده‌ی مجهول‌ها از عده‌ی معادله‌ها بیشتر است، **مسئله‌های نامعین** می‌نامند.

در دنیای واقعی باز هم برای مسئله‌های نامعین راه‌حل‌هایی وجود دارند. اگر چرخ‌های خودرویی را روی کفه‌های چهار ترازو قرار دهیم، هر ترازو عدد معینی را نشان می‌دهد که مجموع آن‌ها برابر با وزن خودرو است. پس چه چیزی مانع تلاش ما برای پیدا کردن تک تک نیروها با حل کردن معادله‌ها می‌شود؟

اشکال کار در این است که ـ بدون توجه خاص به اهمیت موضوع ـ فرض کردیم اجسامی که معادله‌های تعادل ایستا را در مورد آن‌ها به کار می‌بریم کاملاً صُلب هستند. منظور این است



شکل ۱۲-۹ میز یک ساختار نامعین است. بزرگی چهار نیروی وارد شده به پایه‌های میز متفاوت‌اند و آن‌ها را نمی‌توان تنها با استفاده کردن از قانون‌های تعادل ایستا به دست آورد.

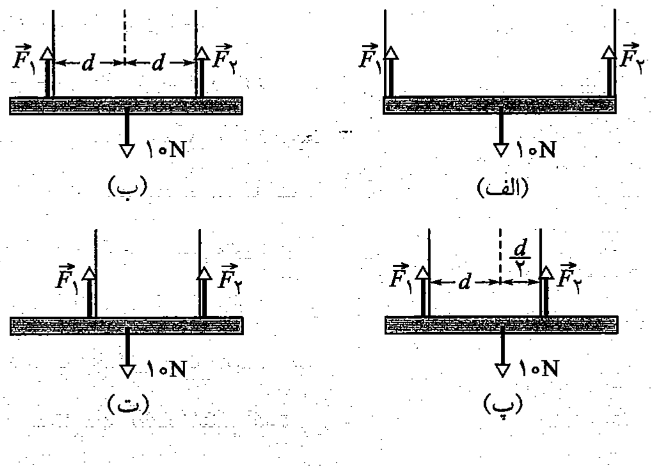
که وقتی اجسام تحت اثر نیروها قرار می‌گیرند تغییر شکل پیدا نمی‌کنند. باید تأکید کرد که چنین اجسامی وجود ندارند. مثلاً، چرخ‌های یک خودرو بر اثر بار وارد شده به آسانی تغییر شکل می‌دهند تا خودرو در وضعیت تعادل ایستا قرار گیرد.

ما اغلب، با لق خوردن میز غذا آشنایی داریم و برای رفع کردن لقی میز، به طور معمول، مقوای تاشده‌ای را در زیر یکی از پایه‌های آن قرار می‌دهیم. اما اگر فیل بزرگی روی چنین میزی بنشیند اطمینان داریم که میز، اگر نشکند، درست مانند چرخ‌های خودرو تغییر شکل می‌دهد. همه‌ی پایه‌های میز با کف زمین تماس پیدا می‌کنند، تمام نیروهای بالاسوی وارد شده به پایه‌های میز، مطابق شکل ۱۲-۹، دارای مقادیری معین (و متفاوت) هستند، و میز، دیگر لق نخواهد بود. البته اگر ما (یا فیل) باشیم به زمین می‌افتیم، اما در اصل، چگونه باید مقادیر نیروهای فردی وارد شده به پایه‌های میز در این حالت، یا وضعیت‌های مشابه را، که در آن‌ها تغییر شکل وجود دارد، پیدا کنیم؟

برای حل کردن این گونه مسئله‌های تعادل نامعین باید معادله‌های تعادل را با استفاده کردن از معلوماتی درباره‌ی ***کشسانی***، که شاخه‌ای از فیزیک و مهندسی است و چگونگی تغییر شکل اجسام واقعی را تحت اثر نیروی وارد شده توصیف می‌کند، کامل کرد.

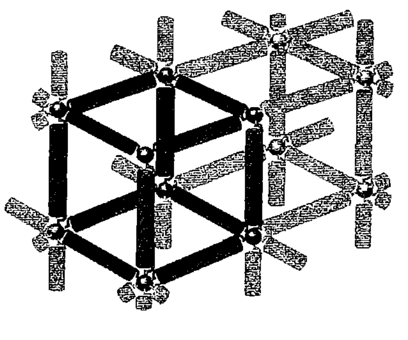
☑ خودآزمایی ۳

می‌خواهیم میله‌ای یکنواخت و افقی به وزن $10\,N$ را با استفاده کردن از دو سیم که نیروهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ را به میله وارد می‌کنند، از سقف بیاویزیم. شکل‌های زیر چهار آرایش مربوط به سیم‌ها را نشان می‌دهند. کدام یک از این آرایش‌ها، در صورت وجود، نامعین‌اند (به گونه‌ای که نتوان مقادیر عددی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ را به دست آورد)؟



کشسانی

وقتی عده‌ی زیادی اتم برای تشکیل دادن یک جسم جامد فلزی، نظیر میخ آهنی، به هم می‌پیوندند، در یک ***شبکه‌ی سه بعدی*** در موضع‌های تعادلی و به صورت آرایشی پی‌درپی قرار



شکل ۱۲-۱۰ اتم‌های یک جسم جامد فلزی در یک شبکه‌ی سه بعدی به صورتی پی‌درپی توزیع شده‌اند. فنرها نیروهای میان اتمی را نمایش می‌دهند.

می‌گیرند. در این آرایش فاصله‌ی تعادل هر اتم نسبت به نزدیک‌ترین اتم‌ها کاملاً معین شده است. اتم‌ها به وسیله‌ی نیروهای میان اتمی در کنار هم نگه داشته می‌شوند و مدلی مانند فنرهای ظریف شکل ۱۲-۱۰ به وجود می‌آورند. این شبکه بسیار صُلب است، و این، دلیل دیگری برای سفتی فوق‌العاده‌ی «فنرهای میان اتمی» است. به همین جهت ما بسیاری اشیای عادی، مانند نردبان فلزی، میز، قاشق و چنگال را کاملاً صُلب مشاهده می‌کنیم. البته برخی اشیای عادی، مانند شیلنگ آبیاری، یا دستکش‌های لاستیکی، هیچ وقت به نظر صُلب نمی‌آیند. اتم‌هایی که این اشیا را تشکیل می‌دهند شبکه‌ی صُلبی مانند شکل ۱۲-۱۰ ***تشکیل نمی‌دهند،*** بلکه به صورت زنجیره‌های مولکولی دراز و انعطاف‌پذیر ردیف شده‌اند، که هر زنجیره فقط به طرز ضعیفی به زنجیره‌های مجاور پیوند خورده است.

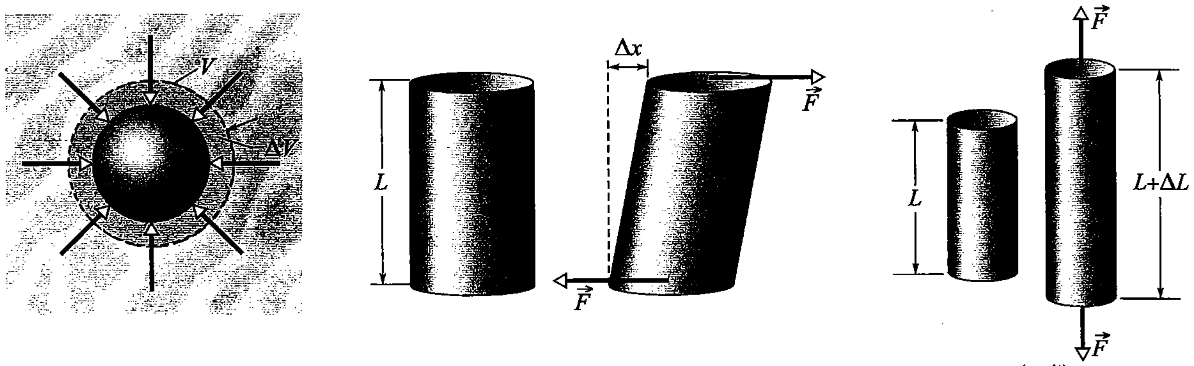
تمام اجسام «صُلب» واقعی تا حدی **کشسان** هستند، به این معنی که با کشیدن، هُل دادن، پیچاندن، یا فشردن می‌توان ابعاد آن‌ها را اندکی تغییر داد. برای درک کردن مرتبه‌ی بزرگی این تغییرات، میله‌ای فولادی قائم به طول ۱m و قطر ۱cm را که به سقف کارخانه‌ای وصل شده است در نظر می‌گیریم. اگر خودرو کوچکی را به انتهای آزاد میله بیاویزیم، میله در حدود ۰٫۵mm، یا به اندازه‌ی ۰٫۰۵ درصد، کشیده می‌شود. علاوه بر این، اگر خودرو را جدا کنیم، میله طول اولی خود را به دست می‌آورد.

اگر دو خودرو به میله بیاویزیم، میله به طور دائمی کشیده می‌شود و وقتی بارها حذف می‌شوند، میله به طول اولی خود برنمی‌گردد. اگر سه خودرو به میله بیاویزیم، میله گسیخته می‌شود. درست پیش از گسیختگی افزایش طول میله کمتر از ۰٫۲ درصد خواهد بود. اگرچه این مقدار تغییر شکل کوچک به نظر می‌رسد، در کارهای مهندسی اهمیت فراوان دارد. (اینکه بال هواپیما با وجود تحمل فشار در جای خود می‌ماند، دارای اهمیت آشکاری است).

سه نوع تغییر شکل. شکل ۱۲-۱۱ سه نوع تغییر ابعاد جسم صُلب را تحت اثر نیروهای وارد شده نشان می‌دهد. در شکل ۱۲-۱۱ الف، استوانه‌ای کشیده شده است. در شکل ۱۲-۱۱ ب، استوانه‌ای در اثر نیروی عمود بر محورش تغییر شکل یافته است، مانند آنکه یک بسته کارت یا یک کتاب را تغییر شکل بدهیم. در شکل ۱۲-۱۱ پ، یک شیء جامد که در شاره‌ای تحت فشار زیاد قرار گرفته از هر سو به طور یکنواخت متراکم شده است. آنچه در این سه نوع تغییر شکل مشترک است، **تنش**، یا نیروی تغییر شکل دهنده‌ی وارد شده به یکای سطح است که **کرنش**، یا تغییر شکل واحد، را ایجاد می‌کند. در شکل ۱۲-۱۱، شکل‌های (الف) ***تنش کششی*** (وابسته به کشیدگی)، (ب) ***تنش برشی***، و (پ) ***تنش هیدرولیکی*** را نشان می‌دهند.

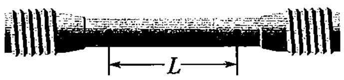
تنش‌ها و کرنش‌ها در سه وضعیت شکل ۱۲-۱۱، شکل‌های متفاوتی دارند، اما ـ در گستره‌ی کاربردهای مفید مهندسی ـ تنش و کرنش با یکدیگر متناسب‌اند. ثابت تناسب را **مدول کشسانی (ضریب کشسانی)** می‌نامند و می‌توان نوشت

$$\text{تنش} = \text{مدول} \times \text{کرنش} \qquad (۱۲-۲۲)$$



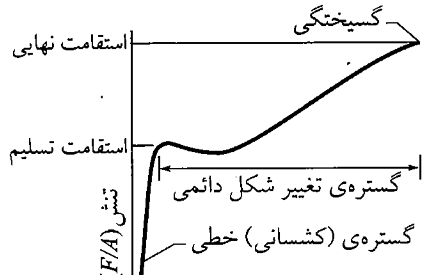
(پ) (ب) (الف)

شکل ۱۲-۱۱ (الف) استوانه‌ای که تحت اثر ***تنش کششی*** قرار می‌گیرد، طولش به اندازه‌ی ΔL افزایش می‌یابد. (ب) استوانه‌ای که تحت اثر ***تنش برشی*** واقع می‌شود، مانند یک بسته‌ی کارت به‌اندازه‌ی Δx تغییر شکل می‌دهد. (پ) کره‌ی توپری که تحت اثر ***تنش هیدرولیکی*** یکنواخت ناشی از یک شاره واقع می‌شود، حجمش به اندازه‌ی ΔV متراکم می‌شود. تمام تغییر شکل‌ها به نحوی اغراق‌امیز نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۲-۱۲ تصویر یک نمونه‌ی آزمون، که برای تعیین منحنی تنش ـ کرنش، مانند شکل ۱۲-۱۳، به کار می‌رود. در آزمون تنش ـ کرنش کششی، تغییر طول ΔL مربوط به طول معین L اندازه‌گیری می‌شود.

در یک آزمایش استاندارد مربوط به خواص کششی، تنش کششی وارد شده به یک استوانه‌ی آزمون (نظیر استوانه‌ی شکل ۱۲-۱۲) را به آرامی از صفر تا نقطه‌ی گسیختگی استوانه افزایش می‌دهند و کرنش را با دقت اندازه‌گیری و تغییرات آن را رسم می‌کنند. نتیجه‌ی حاصل نمودار تنش برحسب کرنش مطابق شکل ۱۲-۱۳، است. در گستره‌ی وسیعی از تنش‌های وارد شده رابطه‌ی تنش ـ کرنش خطی است و نمونه‌ی مورد آزمایش پس از حذف شدن تنش ابعاد اولی خود را به دست می‌آورد. در همین گستره است که می‌توان از معادله‌ی ۱۲-۲۲ استفاده کرد. اگر تنش از **استقامت تسلیم** S_y، فراتر رود، نمونه به طور دائم تغییر شکل می‌دهد. اگر افزایش یافتن تنش ادامه یابد، نمونه به طور ناگهانی گسیخته می‌شود، که تنش مربوط را **استقامت نهایی** S_u، می‌نامند.



شکل ۱۲-۱۳ منحنی تنش ـ کرنش مربوط به یک نمونه‌ی آزمون فولادی، شبیه نمونه‌ی شکل ۱۲-۱۲. یک نمونه در موقع مساوی شدن تنش با ***استقامت تسلیم ماده***، تغییر شکل دائمی پیدا می‌کند و در موقع مساوی شدن تنش با ***استقامت نهایی*** ماده، گسیخته می‌شود.

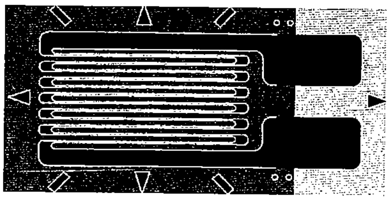
کشش و تراکم

در کشش یا تراکم ساده تنش وارد شده به یک شیء به صورت F/A تعریف می‌شود که در آن F بزرگی نیروی عمودی وارد شده به مساحت A از شیء است. کرنش، یا تغییر شکل واحد، کمیت بی‌بعد $\Delta L/L$ است، که تغییر نسبی (یا گاهی درصد تغییر) طول نمونه است. اگر نمونه میله‌ای دراز باشد و تنش از استقامت تسلیم تجاوز نکند، در اثر وارد کردن یک تنش معین به میله نه تنها کل میله بلکه هر بخش آن نیز دارای کرنش یکسان می‌شود. چون کرنش بی‌بعد است ابعاد مدول در معادله‌ی ۱۲-۲۲ همان ابعاد تنش، یعنی نیرو به یکای سطح است.

مدول تنش‌های کششی و تراکمی را **مدول یانگ** می‌نامند و در کارهای مهندسی آن را با نماد E نشان می‌دهند. در نتیجه، معادله‌ی ۱۲-۲۲ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{F}{A} = E\,\frac{\Delta L}{L} \qquad (۱۲\text{-}۲۳)$$

در یک نمونه، کرنش $\Delta L / L$ را اغلب می‌توان با یک **_پیمانه‌ی کرنش_** (شکل ۱۲-۱۴) به‌راحتی اندازه‌گیری کرد. این وسیله‌ی ساده و مفید را می‌توان به طور مستقیم با چسب به اسباب در حال کار چسبانید. اساس کار این وسیله مبتنی بر اصلی است که خواص الکتریکی آن را به کرنش حاصل ربط می‌دهد.



شکل ۱۲-۱۴ تصویری از یک پیمانه‌ی کرنش با ابعاد کلی $9/8mm$ در $4/6mm$. این پیمانه با چسب به شیئی که باید کرنش آن اندازه‌گیری شود، چسبانده می‌شود؛ این پیمانه همان کرنشی را تحمل می‌کند که به شیء وارد می‌شود. مقاومت الکتریکی پیمانه برحسب کرنش تغییر و بدین وسیله امکان اندازه‌گیری کرنش‌های تا ۳ درصد را فراهم می‌کند.

اگرچه مدول یانگ مربوط به یک شیء ممکن است برای کشش و تراکم تقریباً یکسان باشد، اما استقامت نهایی شیء برای دو نوع تنش می‌تواند متفاوت باشد. مثلاً بتون از نظر تراکم بسیار مقاوم است اما از نظر کشش بسیار ضعیف است و تقریباً هیچ‌گاه برای این منظور به‌کار نمی‌رود. جدول ۱۲-۱ مدول یانگ و خاصیت‌های کشسانی دیگر مربوط به برخی مواد مورد استفاده در مهندسی را نشان می‌دهد.

برش

در شرایط برش، تنش باز هم نیروی وارد شده به یکای سطح است، اما در اینجا بردار نیرو به جای عمود بودن بر سطح در خود سطح قرار دارد. کرنش نسبت بی‌بعد $\Delta x / L$ است، که کمیت‌های مربوط به آن در شکل ۱۲-۱۱ ب تعریف شده‌اند. مدول متناظر این حالت، که در کارهای مهندسی با نماد G نشان داده می‌شود، **مدول برشی** نام دارد. در مورد برش، معادله‌ی ۱۲-۲۲ چنین نوشته می‌شود

$$\frac{F}{A} = G\,\frac{\Delta x}{L} \qquad (۱۲-۲۴)$$

تنش‌های برشی در انداختن تسمه روی محورهایی که زیر بار سنگین می‌چرخند و هم‌چنین، در شکستگی استخوان بر اثر خم شدن، نقش بسیار مهمی دارند.

تنش هیدرولیکی

در شکل ۱۲-۱۱ پ، تنش p، فشار شاره‌ی وارد شده به شیء است. چنان که در فصل ۱۴ (جلد دوم کتاب) خواهیم دید، فشار برابر با نیروی وارد شده به یکای سطح است. در یک نمونه، کرنش برابر با $\Delta V / V$ است، که در آن V حجم اولی نمونه و ΔV مقدار مطلق تغییر حجم است. در اینجا مدول متناظر با نماد B، **مدول کپه‌ای (مدول حجمی)** ماده نامیده می‌شود. در این حالت گفته می‌شود که شیء تحت اثر **_تراکم هیدرولیکی_** قرار دارد و فشار می‌تواند **_تنش هیدرولیکی_** نامیده شود. در اینجا، معادله‌ی ۱۲-۲۲ را می‌توان چنین نوشت

$$p = B\,\frac{\Delta V}{V} \qquad (۱۲-۲۵)$$

مدول کپه‌ای برای آب، $2/2\times10^{9}N/m^{2}$ و برای فولاد $1/6\times10^{11}N/m^{2}$ است. فشار در ته اقیانوس آرام در عمق متوسط ۴۰۰۰ متری برابر با $4/0\times10^{7}N/m^{2}$ است. تراکم نسبی $\Delta V / V$ یک حجم از آب که از این فشار ناشی می‌شود، ۱/۸ درصد و برای یک شیء فولادی فقط در حدود ۰/۰۲۵ درصد است. به طور کلی، جامدات ـ با شبکه‌ی اتمی صُلب

خود ـ نسبت به مایعات، که اتم‌ها یا مولکول‌های تشکیل دهنده‌ی آن‌ها با ذرات مجاور پیوند ضعیفی دارند، کمتر تراکم‌پذیرند.

جدول ۱۲-۱ برخی خاصیت‌های کشسانی چند ماده‌ی انتخابی مهم در کاربردهای مهندسی

ماده	چگالی ρ $(\mathrm{kg/m^3})$	مدول یانگ E $(10^9\,\mathrm{N/m^2})$	استقامت نهایی S_u $(10^6\,\mathrm{N/m^2})$	استقامت تسلیم S_y $(10^6\,\mathrm{N/m^2})$
فولاد[1]	۷۸۶۰	۲۰۰	۴۰۰	۲۵۰
آلومینیوم	۲۷۱۰	۷۰	۱۱۰	۹۵
شیشه	۲۱۹۰	۶۵	۵۰[2]	–
بتون[3]	۲۳۲۰	۳۰	۴۰[2]	–
چوب[4]	۵۲۵	۱۳	۵۰[2]	–
استخوان	۱۹۰۰	۹[2]	۱۷۰[2]	–
پلی استایرن	۱۰۵۰	۳	۴۸	–

۱. فولاد ساختمانی (ASTM-A36) ۲. در تراکم ۳. استقامت زیاد ۴. صنوبر داگلاس

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۲-۵ تنش و کرنش میله‌ی کشیده شده

یک سر میله‌ی فولادی به شعاع $R = ۹/۵\,\mathrm{mm}$ و طول $L = ۸۱\,\mathrm{cm}$ را به گیره‌ای می‌بندیم. سپس به سر دیگر میله نیرویی به بزرگی $F = ۶۲\,\mathrm{kN}$ به طور عمود بر سطح مقطع میله (به طور یکنواخت در سرتاسر سطح مقطع) وارد می‌کنیم و میله را در راستای دور شدن از گیره می‌کشیم. تنش وارد شده به این میله و افزایش طول ΔL و کرنش میله چقدر است؟

نکته‌های کلیدی

(۱) چون نیرو به طور یکنواخت به وجه انتهایی میله عمود است، تنش برابر با نسبت بزرگی نیرو F، به مساحت A است. این نسبت همان نسبت در سمت چپ معادله‌ی ۱۲-۲۳ است. (۲) افزایش طول ΔL، بنا به معادله‌ی ۱۲-۲۳ $(F/A = E\Delta L/L)$ به تنش و مدول یانگ بستگی دارد. (۳) کرنش از نسبت افزایش طول به طول آغازی L به دست می‌آید.

محاسبات: برای پیدا کردن تنش، داریم

$$\text{تنش} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{۶/۲\times ۱۰^۴\,\mathrm{N}}{(\pi)(۹/۵\times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{m})^۲} \Rightarrow$$

$$\text{تنش} = ۲/۲\times ۱۰^۸\,\mathrm{N/m^2} \qquad \text{(پاسخ)}$$

استقامت تسلیم مربوط به فولاد ساختمانی $۲/۵\times ۱۰^۸\,\mathrm{N/m^2}$ است. در نتیجه، این میله به نحو خطرناکی به استقامت تسلیم خود نزدیک شده است.

مقدار مدول یانگ مربوط به فولاد در جدول ۱۲-۱ داده شده است. بنابراین، افزایش طول از معادله‌ی ۱۲-۲۳ به دست می‌آید:

$$\Delta L = \frac{(F/A)L}{E} = \frac{(۲/۲\times ۱۰^۸\,\mathrm{N/m^2})(۰/۸۱\,\mathrm{m})}{۲/۰\times ۱۰^{۱۱}\,\mathrm{N/m^2}} \Rightarrow$$

$$\Delta L = ۸/۹\times ۱۰^{-۴}\,\mathrm{m} = ۰/۸۹\,\mathrm{mm} \qquad \text{(پاسخ)}$$

برای کرنش، داریم

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{۸/۹\times ۱۰^{-۴}\,\mathrm{m}}{۰/۸۱\,\mathrm{m}} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta L}{L} = ۱/۱\times ۱۰^{-۳} = ۰/۱۱\,\% \qquad \text{(پاسخ)}$$

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۲-۶ توازن یک میز لَق

طول هر یک از سه پایه‌ی یک میز $1/00\,\text{m}$ و طول پایه‌ی چهارم به اندازه‌ی $d = 0/50\,\text{mm}$ بلندتر است. در نتیجه، میز اندکی لق می‌خورد. استوانه‌ای فولادی به‌جرم $M = 290\,\text{kg}$ را به طور قائم روی این میز (که جرمش خیلی کمتر از M است) قرار می‌دهیم، به گونه‌ای که هر چهار پایه فشرده می‌شوند و میز به حال تراز می‌ماند و دیگر لق نمی‌خورد. پایه‌های میز استوانه‌هایی چوبی با مساحت مقطع $A = 1/0\,\text{cm}^2$ هستند و مدول یانگ برابر است با $E = 1/3 \times 10^{10}\,\text{N/m}^2$. بزرگی نیروهای وارد شده به پایه‌های میز از سوی کف اتاق چیست؟

نکته‌های کلیدی

مجموع میز و استوانه‌ی فولادی را به عنوان دستگاه در نظر می‌گیریم. در این صورت، وضعیت دستگاه مانند شکل ۱۲-۹ است، با این تفاوت که در اینجا استوانه‌ای فولادی روی میز قرار گرفته است. اگر سطح میز به حال تراز بماند، پایه‌ها باید به صورت زیر متراکم شوند: هر یک از پایه‌های کوتاه باید به مقدار مساوی (در اینجا به اندازه‌ی ΔL_3) و با نیروی یکسان F_3 متراکم شوند. تنها پایه‌ی بلند باید به مقدار بیشتر ΔL_4 و با نیروی بزرگ‌تر F_4 متراکم شود. به عبارت دیگر، برای یک میز تراز شده باید داشته باشیم

$$\Delta L_4 = \Delta L_3 + d \qquad (۱۲-۲۶)$$

با توجه به معادله‌ی ۱۲-۲۳، رابطه‌ی تغییر طول با نیروی به‌وجود آورنده‌ی این تغییر را می‌توان به‌صورت $\Delta L = FL/AE$ نوشت، که در آن L طول اولی یک پایه است. با استفاده کردن از این رابطه می‌توان ΔL_4 و ΔL_3 در معادله‌ی ۱۲-۲۶ را جانشانی کرد. اما توجه کنید که به طور تقریبی می‌توان طول اولی L هر چهار پایه را مساوی گرفت.

محاسبات: پس از جانشانی‌ها و تقریب‌زنی، داریم

$$\frac{F_4L}{AE} = \frac{F_3L}{AE} + d \qquad (۱۲-۲۷)$$

این معادله را نمی‌توان حل کرد، چون دارای دو مجهول F_3 و F_4 است.

برای به دست آوردن معادله‌ی دیگری که شامل F_3 و F_4 باشد، می‌توان از محور قائم y استفاده کرد و معادله‌ی توازن نیروهای قائم ($F_{\text{net},y} = 0$) را چنین نوشت

$$3F_3 + F_4 - Mg = 0 \qquad (۱۲-۲۸)$$

در این رابطه Mg برابر با بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به دستگاه است. (به **سه پایه** نیروی $\vec{F}_3$ وارد می‌شود). برای حل کردن هم‌زمان معادله‌های ۱۲-۲۷ و ۱۲-۲۸ به منظور تعیین، مثلاً F_3، نخست از معادله‌ی ۱۲-۲۸ استفاده می‌کنیم و رابطه‌ی $F_4 = Mg - 3F_3$ را به دست می‌آوریم. با جانشانی این مقدار در معادله‌ی ۱۲-۲۷ و انجام دادن عملیات جبری لازم، خواهیم داشت

$$F_3 = \frac{Mg}{4} - \frac{dAE}{4L}$$

$$F_3 = \frac{(290\,\text{kg})(9/8\,\text{m/s}^2)}{4} - \frac{(5/0 \times 10^{-4}\,\text{m})(10^{-4}\,\text{m}^2)(1/3 \times 10^{10}\,\text{N/m}^2)}{4(1/00\,\text{m})} \Rightarrow$$

$$F_3 = 548\,\text{N} \approx 5/5 \times 10^2\,\text{N} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

اکنون، با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۲-۲۸، داریم

$$F_4 = Mg - 3F_3 = (290\,\text{kg})(9/8\,\text{m/s}^2) - 3(548\,\text{N}) \Rightarrow$$

$$F_4 \approx 1/2\,\text{kN} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

می‌توان نشان داد برای آنکه این پیکربندی به حال تعادل برسد، پایه‌های کوتاه به اندازه‌ی $0/42\,\text{mm}$ و پایه‌ی بلند به اندازه‌ی $0/92\,\text{mm}$ متراکم می‌شوند.

مرور و چکیده‌ی مطالب

تعادل ایستا یک جسم صُلب وقتی ساکن است، که در حال تعادل ایستا باشد. برای این جسم مجموع برداری نیروهای خارجی وارد شده صفر است:

$$\vec{F}_{\rm net} = 0 \quad \text{(توازن نیروها)} \qquad (۱۲-۳)$$

اگر همه‌ی نیروها در صفحه‌ی xy قرار داشته باشند، این معادله‌ی برداری با دو معادله‌ی مؤلفه‌ای زیر هم‌ارز است:

$$F_{{\rm net},x} = 0 \text{ و } F_{{\rm net},y} = 0 \quad \text{(توازن نیروها)} \qquad (۱۲-۷، ۱۲-۸)$$

هم‌چنین، تعادل ایستا ایجاب می‌کندکه جمع برداری گشتاورهای نیروی خارجی وارد شده به جسم نسبت به **هر** نقطه‌ای صفر باشد، یعنی

$$\vec{\tau}_{\rm net} = 0 \quad \text{(توازن گشتاورهای نیرو)} \qquad (۱۲-۵)$$

اگر نیروها در صفحه‌ی xy قرار داشته باشند، تمام بردارهای گشتاور نیرو با محور z موازی‌اند و معادله‌ی ۱۲-۵ با تنها معادله‌ی مؤلفه‌ای زیر هم‌ارز است:

$$\tau_{{\rm net},z} = 0 \quad \text{(توازن گشتاورهای نیرو)} \qquad (۱۲-۹)$$

گرانیگاه نیروی گرانشی به طور فردی به هر عنصر یک جسم وارد می‌شود. اثر خالص تمام اثرهای فردی را با این تصور می‌توان به دست آورد که $\vec{F}_g$، نیروی گرانشی کل هم‌ارز، به نقطه‌ی خاصی به نام **گرانیگاه** وارد شود. اگر شتاب گرانشی $\vec{g}$ برای تمام عنصرهای جسم یکسان باشد، گرانیگاه در مرکز جرم جسم واقع است.

مدول‌های کشسانی برای توصیف رفتار کشسانی (تغییر شکل) اشیا در پاسخ به نیروهای وارد شده از سه **مدول کشسانی** استفاده می‌شود. **کرنش** (تغییر نسبی طول) از طریق یک مدول مناسب و طبق رابطه‌ی کلی زیر، با **تنش** (نیروی وارد شده به یکای سطح) رابطه‌ی خطی دارد:

$$\text{تنش} = \text{مدول} \times \text{کرنش} \qquad (۱۲-۲۲)$$

کشش و تراکم وقتی شیئی تحت اثر کشش یا تراکم قرار می‌گیرد، معادله‌ی ۱۲-۲۲ چنین نوشته می‌شود

$$\frac{F}{A} = E\,\frac{\Delta L}{L} \qquad (۱۲-۲۳)$$

که در آن $\Delta L / L$ کرنش کششی یا تراکمی شیء، F بزرگی نیروی وارد شده‌ی $\vec{F}$، که کرنش را به وجود می‌آورد، A مساحت مقطعی است که $\vec{F}$ (به طور عمود بر A، مطابق شکل ۱۲-۱۱ الف) به آن وارد می‌شود و E **مدول یانگ** مربوط به شیء است. تنش برابر با F/A است.

برش وقتی شیئی تحت اثر تنش برشی قرار می‌گیرد، معادله‌ی ۱۲-۲۲ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\frac{F}{A} = G\,\frac{\Delta x}{L} \qquad (۱۲-۲۴)$$

که در آن $\Delta x / L$ کرنش برشی شیء، Δx جابه‌جایی یک سر شیء در جهت نیروی وارد شده‌ی $\vec{F}$ (مطابق شکل ۱۲-۱۱ ب)، و G **مدول برشی** است. تنش برابر با F/A است.

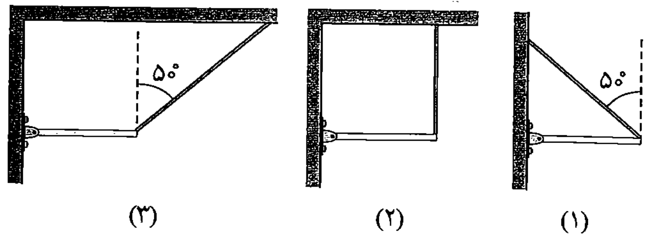
تنش هیدرولیکی وقتی به یک شیء تحت اثر تنش وارد شده از سوی شاره‌ی پیرامون تحت اثر ***تراکم هیدرولیکی*** اثر می‌کند، معادله‌ی ۱۲-۲۲ می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$p = B\,\frac{\Delta V}{V} \qquad (۱۲-۲۵)$$

که در آن p فشار (***تنش هیدرولیکی***) وارد شده به شیء است که از شاره ناشی می‌شود، $\Delta V / V$ (کرنش) مقدار مطلق تغییر حجم نسبی شیء ناشی از فشار و B **مدول کپه‌ای** شیء است.

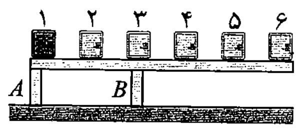
پرسش‌ها

۱ شکل ۱۲-۱۵ سه حالت را نشان می‌دهد که میله‌ای افقی از یک سر به دیوار لولا شده و سر دیگر آن با ریسمانی نگه‌داشته شده است. بدون انجام دادن محاسبه‌ی کتبی این حالت‌ها را با توجه به بزرگی (الف) نیروی وارد شده به میله از سوی ریسمان، (ب) نیروی قائم وارد شده به میله از سوی لولا و (پ) نیروی افقی وارد شده به میله از سوی لولا، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



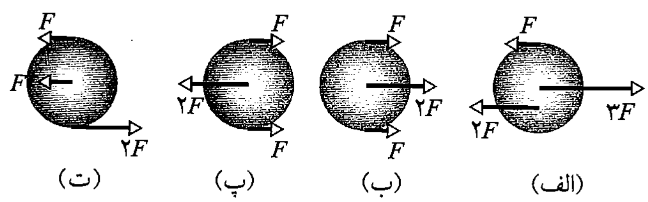
شکل ۱۲-۱۵ پرسش ۱.

۲ در شکل ۱۲-۱۶، یک تیر صُلب به دو پایه‌ی متصل به زمین وصل شده است. گاوصندوق کوچک، اما سنگینی را، به نوبت، در شش محل نشان داده شده قرار می‌دهیم. فرض کنید جرم تیر در مقایسه با جرم گاوصندوق ناچیز است. (الف) محل‌ها را با توجه به نیروی وارد شده به پایه‌ی A از سوی گاوصندوق، از بیشترین تا کمترین مقدار نیروی فشاری و از کمترین تا بیشترین مقدار نیروی کششی، مرتب کنید و نشان دهید در کجا (در صورت وجود) این نیرو صفر است. (ب) این محل‌ها را با توجه به نیروی وارد شده به پایه‌ی B مرتب کنید.



شکل ۱۲-۱۶ پرسش ۲.

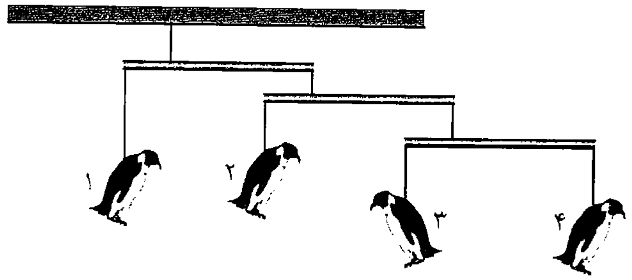
۳ شکل ۱۲-۱۷، با دید از بالا، چهار تصویر مربوط به قرص‌های یکنواخت چرخان را، که برروی یک‌سطح بی‌اصطکاک می‌لغزند، نشان می‌دهد. سه نیرو با بزرگی‌های F، $2F$ یا $3F$ به لبه، مرکز یا وسط فاصله‌ی میان لبه و مرکز هر قرص وارد می‌شوند. بردارهای نیرو همراه با قرص‌ها می‌چرخند و در «تصویرهای لحظه‌ای» شکل ۱۲-۱۷، جهت آن‌ها به سمت چپ یا به سمت راست است. کدام یک از قرص‌ها در حال تعادل‌اند؟



شکل ۱۲-۱۷ پرسش ۳.

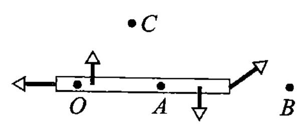
۴ نردبانی به یک دیوار بی‌اصطکاک تکیه دارد، اما به خاطر وجود اصطکاک میان آن و کف زمین نمی‌افتد. فرض کنید پای نردبان را به سمت دیوار جابه‌جا می‌کنید. معین کنید آیا کمیت‌های زیر (از لحاظ بزرگی) بیشتر می‌شوند، کمتر می‌شوند، یا ثابت می‌مانند: (الف) نیروی عمودی وارد شده به نردبان از کف زمین، (ب) نیروی وارد شده به نردبان از سوی دیوار، (پ) نیروی اصطکاک ایستایی وارد شده به نردبان از کف زمین، و (ت) مقدار بیشینه‌ی نیروی اصطکاک ایستایی $f_{s,\max}$.

۵ شکل ۱۲-۱۸ یک اسباب بازی جنبان شامل پنگوئن‌ها را، که از سقف آویخته شده است، نشان می‌دهد. میله‌ها افقی و دارای جرم ناچیزند و طول سمت راست آن‌ها نسبت به سیم نگهدارنده سه برابر طول سمت چپ است. جرم پنگوئن ۱ برابر است با $m_1 = 48\,\text{kg}$. جرم (الف) پنگوئن ۲، (ب) پنگوئن ۳ و (پ) پنگوئن ۴، چقدر است؟



شکل ۱۲-۱۸ پرسش ۵.

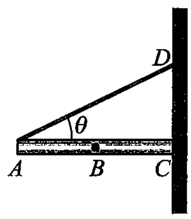
۶ شکل ۱۲-۱۹، با دید از بالا، تصویر یک خط‌کش چوبی را، که چهار نیرو به آن وارد می‌شوند، نشان می‌دهد. فرض کنید محور دوران را در نقطه‌ی O انتخاب و گشتاورهای این نیروها را نسبت به محور حساب می‌کنید و درمی‌یابید که این گشتاورهای نیرو در حال توازن‌اند. اگر محور دوران را در (الف) نقطه‌ی A (روی خط‌کش)، (ب) نقطه‌ی B (در راستای خط‌کش)، یا (پ) نقطه‌ی C (در یک‌طرف خط‌کش) انتخاب کنید، آیا گشتاورهای نیرو در حال توازن خواهند بود؟ (ت) اکنون فرض کنید درمی‌یابید که گشتاورهای نیرو نسبت به نقطه‌ی O در حال



شکل ۱۲-۱۹ پرسش ۶.

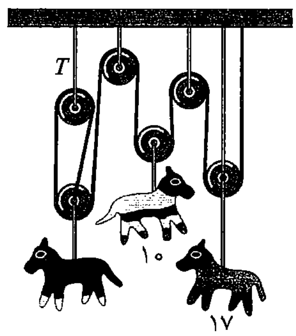
توازن نیستند. آیا نقطه‌ی دیگری وجود دارد که گشتاورهای نیرو نسبت به آن در حال توازن باشند؟

۷ در شکل ۱۲-۲۰، میله‌ی ساکن AC به جرم $5\,kg$ با یک طناب و با وجود اصطکاک میان دیوار و میله نگه داشته شده است. این میله یکنواخت و دارای طول $1m$ و زاویه‌ی $\theta = 30°$ است. (الف) اگر بخواهید بزرگی نیروی $\vec{T}$، وارد شده به میله از سوی طناب را با یک تک معادله به دست آورید، محور دوران را در کدام یک از نقطه‌های مشخص شده با حروف باید قرار دهید؟ با انتخاب کردن این محور و مثبت بودن گشتاورهای نیروی پادساعت‌گرد، علامت (ب) گشتاور نیروی τ_W، ناشی از وزن میله و (پ) گشتاور نیروی τ_r، ناشی از نیروی کشش وارد شده به میله از سوی طناب، چیست؟ (ت) آیا بزرگی τ_r نسبت به بزرگی τ_W بیشتر، کمتر یا با آن مساوی است؟



شکل ۱۲-۲۰ پرسش ۷.

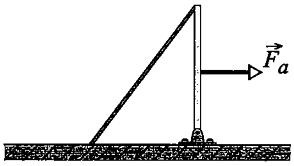
۸ سه اسب اسباب بازی به مجموعه‌ای (ساکن) از قرقره‌ها و ریسمان‌های بی‌جرم، مطابق شکل ۱۲-۲۱، آویخته شده‌اند. ریسمان درازی از سقف در سمت راست تا پایین‌ترین قرقره در سمت چپ مجموعه را در برگرفته و بر روی هر قرقره نیم دور پیچیده شده است. چند ریسمان کوتاه هم قرقره‌ها را از سقف، یا اسب‌ها را از قرقره‌ها آویخته‌اند. وزن دو تا از اسب‌ها (برحسب نیوتون) در شکل داده شده است. (الف) وزن اسب



شکل ۱۲-۲۱ پرسش ۸

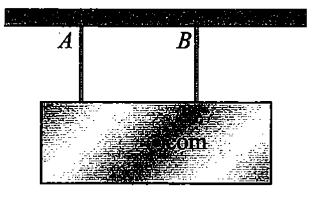
سوم چقدر است؟ (*راهنمایی*: وقتی ریسمانی به اندازه‌ی نیم دور روی قرقره می‌پیچد، قرقره را با نیروی برایندی به بالا می‌کشد که دو برابر نیروی کشش ریسمان است). (ب) نیروی کشش یک ریسمان کوتاه که با T مشخص شده، چقدر است؟

۹ در شکل ۱۲-۲۲، میله‌ی قائمی در سرپایینی لولا شده و سربالایی آن به یک کابل وصل شده است. قرار است نیروی افقی $\vec{F}_a$، مطابق شکل، به میله وارد شود. اگر نقطه‌ی اثر این نیرو به سمت بالای میله حرکت کند، آیا نیروی کشش کابل افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد یا ثابت می‌ماند؟



شکل ۱۲-۲۲ پرسش ۹.

۱۰ شکل ۱۲-۲۳ یک جسم افقی را نشان می‌دهد که از دو سیم A و B آویخته شده است. دو سیم به جز در طول اولی‌شان مشابه‌اند. مرکز جرم جسم به سیم B نسبت به سیم A نزدیک‌تر است. (الف) با اندازه‌گیری گشتاورهای نیرو نسبت به مرکز جرم جسم توضیح دهید آیا بزرگی گشتاور نیروی ناشی از سیم A نسبت به بزرگی گشتاور نیروی ناشی از سیم B، بیشتر است، کمتر است، یا مساوی است. (ب) کدام سیم نیروی بیشتری به جسم وارد می‌کند؟ (پ) اکنون، اگر طول سیم‌ها یکسان باشد، کدام سیم در اول کوتاه‌تر (پیش از آویخته شدن جسم) بوده است؟

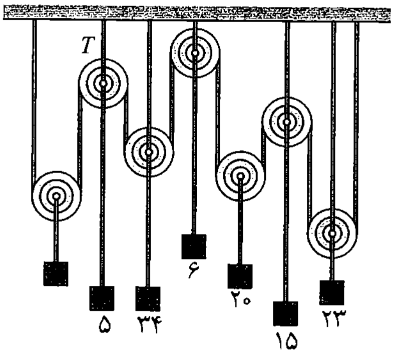


شکل ۱۲-۲۳ پرسش ۱۰.

۱۱ جدول زیر، طول‌های آغازی و تغییر طول سه میله را پس از وارد شدن نیروها به دو سر میله‌ها و ایجاد کرنش نشان می‌دهد. این میله‌ها را با توجه به کرنش آن‌ها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

میله	طول آغازی	تغییر طول
A	$۲L_۰$	$\Delta L_۰$
B	$۴L_۰$	$۲\Delta L_۰$
C	$۱۰L_۰$	$۴\Delta L_۰$

۱۲ یک متخصص فیزیک درمانی مجموعه‌ی (ساکن) متشکل از قرقره‌ها و طناب‌های بی‌جرم نشان داده شده در شکل ۱۲-۲۴ را ساخته است. یک طناب دراز به دور همه‌ی قرقره‌ها پیچیده شده است و طناب‌های کوتاه‌تر قرقره‌ها را از سقف یا وزنه‌ها را از قرقره‌ها آویخته‌اند. وزن وزنه‌ها به جز یکی (برحسب نیوتون) مشخص شده‌اند. (الف) وزن این‌وزنه چیست؟ (*راهنمایی:* وقتی یک طناب مانند شکل زیر نیم دور به دور قرقره پیچیده می‌شود، قرقره را با نیروی برایند دو برابر کشش طناب به بالا می‌کشد). (ب) نیروی کشش طناب کوتاه مشخص شده با T چقدر است؟



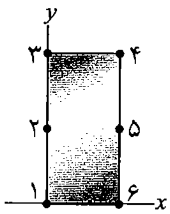
شکل ۱۲-۲۴ پرسش ۱۲.

مسئله‌ها

پودمان ۱۲-۱ تعادل

* ۱ چون g در گستره‌ی خیلی از ساختارها به مقدار بسیار کم تغییر می‌کند، گرانیگاه هر ساختار در عمل بر مرکز جرم آن منطبق است. در اینجا به مثالی تخیلی اشاره می‌کنیم که در آن g به نحوی قابل ملاحظه تغییر می‌کند. شکل ۱۲-۲۵ آرایه‌ای از شش ذره، هر یک به جرم m، را نشان می‌دهد که بر لبه‌ی یک ساختار صُلب با جرم ناچیز نصب شده‌اند. فاصله‌ی میان ذره‌های مجاور در راستای لبه $۲/۰۰\,m$ است. جدول زیر مقدار g (برحسب $m/s^۲$) را در محل هر ذره به دست می‌دهد. با استفاده کردن از دستگاه مختصات نشان داده شده، (الف) مختصه‌ی x مرکز جرم، یعنی x_{com} و (ب) مختصه‌ی y مرکز جرم، یعنی y_{com}، دستگاه شش ذره‌ای را معین کنید. سپس (پ) مختصه‌ی x گرانیگاه، یعنی x_{cog}، و (ت) مختصه‌ی y گرانیگاه، یعنی y_{cog}، دستگاه شش ذره‌ای را پیدا کنید.

ذره	g	ذره	g
۱	۸/۰۰	۴	۷/۴۰
۲	۷/۸۰	۵	۷/۶۰
۳	۷/۶۰	۶	۷/۸۰

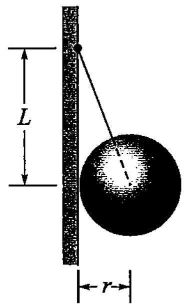


شکل ۱۲-۲۵ مسئله‌ی ۱.

پودمان ۱۲-۲ چند مثال درباره‌ی تعادل ایستا

* ۲ فاصله‌ی دو محور جلو و عقب خودرویی به جرم $۱۳۶۰\,kg$ برابر با $۳/۰۵\,m$ است. گرانیگاه خودرو به فاصله‌ی $۱/۷۸\,m$ پشت محور جلو قرار دارد. اگر خودرو در روی زمینی تراز واقع شده باشد، مطلوب است تعیین، بزرگی نیروی وارد شده از سوی زمین به (الف) هر یک از چرخ‌های جلو (با فرض یکسان بودن) و (ب) هر یک از چرخ‌های عقب (با فرض یکسان بودن).

* ۳ در شکل ۱۲-۲۶، کره‌ی یکنواختی به جرم $m = ۰/۸۵\,kg$ و شعاع $r = ۴/۲\,cm$ به وسیله‌ی طنابی با جرم ناچیز به دیواری بی‌اصطکاک وصل شده است. نقطه‌ی اتصال طناب به اندازه‌ی $L = ۸/۰\,cm$ بالاتر از مرکز کره قرار دارد. مطلوب است تعیین،



شکل ۱۲-۲۶ مسئله‌ی ۳.

(الف) نیروی کشش طناب و (ب) نیروی وارد شده به کره از سوی دیوار.

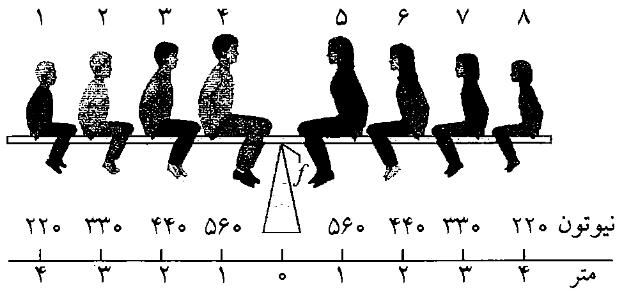
❋ ۴ زه کمانی از وسط آن‌قدر کشیده می‌شود که نیروی کشش آن با نیروی وارد شده توسط کمان کش برابر می‌شود. زاویه‌ی میان دو نیمه‌ی زه چقدر است؟

❋ ۵ طنابی به جرم ناچیز در میان دو پایه به فاصله‌ی $۳/۴۴\,m$ از یکدیگر به طور افقی کشیده شده است. هرگاه شیئی به وزن $۳۱۶۰\,N$ را به وسط این طناب بیاویزیم طناب به اندازه‌ی $۳۵/۰\,cm$ شکم دادگی پیدا می‌کند. نیروی کشش طناب چقدر است؟

❋ ۶ چوب بستی به جرم $۶۰\,kg$ و طول $۵/۰\,m$ به وسیله‌ی دو کابل قائم متصل به هر یک از دو سر به طور افقی نگه داشته شده است. شیشه پاک‌کنی به جرم $۸۰\,kg$ در نقطه‌ای به فاصله‌ی $۱/۵\,m$ از یک سر چوب بست ایستاده است. نیروی کشش (الف) در کابل نزدیک‌تر و (ب) در کابل دورتر نسبت به شیشه پاک کن، چقدر است؟

❋ ۷ کارگر شیشه پاک کنی به جرم $۷۵\,kg$ برای انجام دادن کار خود از نردبانی به جرم $۱۰\,kg$ و طول $۵/۰\,m$ استفاده می‌کند. او سرپایینی نردبان را به فاصله‌ی $۲/۵\,m$ از دیوار قرار می‌دهد و سربالایی آن را به یک شیشه‌ی ترک خورده تکیه می‌دهد و از نردبان بالا می‌رود. از اصطکاک میان نردبان و شیشه‌ی پنجره چشم‌پوشی و فرض کنید که پای نردبان نمی‌لغزد. وقتی شیشه در آستانه‌ی شکستن قرار می‌گیرد، (الف) بزرگی نیروی وارد شده به شیشه از سوی نردبان، (ب) بزرگی نیروی وارد شده به نردبان از سوی زمین و (پ) زاویه‌ی نیروی وارد شده به نردبان (نسبت به راستای افقی)، چیست؟

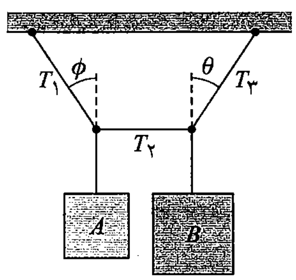
❋ ۸ گروهی از جوانان که در شکل ۱۲-۲۷، وزن‌شان برحسب نیوتون مشخص شده است روی الاکلنگی به حال توازن نشسته‌اند. کدام یک از این افراد بیشترین گشتاور را نسبت به ***نقطه‌ی اتکای*** f (الف) به برون سوی صفحه‌ی شکل و (ب) به درون سوی صفحه‌ی شکل، ایجاد می‌کند؟



شکل ۱۲-۲۵ مسئله‌ی ۸.

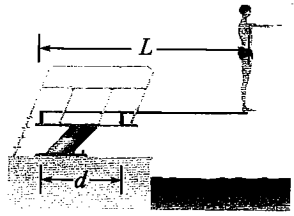
❋ ۹ خط‌کشی چوبی یک متری در نشانه‌ی $۵۰/۰\,cm$ روی لبه‌ی تیز چاقویی به طور افقی به حال توازن قرار دارد. هرگاه دو سکه‌ی $۵/۰$ گرمی را روی نشانه‌ی $۱۲/۰\,cm$ قرار دهیم، متوجه می‌شویم که برای ایجاد توازن باید خط‌کش در نشانه‌ی $۴۵/۵\,cm$ بر روی چاقو قرار گیرد. جرم خط‌کش چوبی چقدر است؟

❋ ۱۰ دستگاه شکل ۱۲-۲۸ در حال تعادل و ریسمان میانی کاملاً افقی است. وزن جسم A برابر با $۴۰\,N$، وزن جسم B، برابر با $۵۰\,N$ و زاویه‌ی ϕ، برابر با ۳۵ درجه است. مطلوب است تعیین، (الف) نیروی کشش $T_۱$، (ب) نیروی کشش $T_۲$، (پ) نیروی کشش $T_۳$ و (ت) زاویه‌ی θ.



شکل ۱۲-۲۸ مسئله‌ی ۱۰.

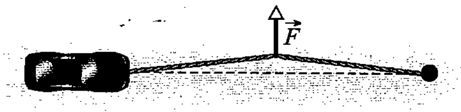
❋ ۱۱ شکل ۱۲-۲۹ شیرجه‌رویی به وزن $۵۸۰\,N$ را نشان می‌دهد که در سر یک تخته‌ی شیرجه به‌طول $L = ۴/۵\,m$ و جرم ناچیز،



شکل ۱۲-۲۹ مسئله‌ی ۱۱.

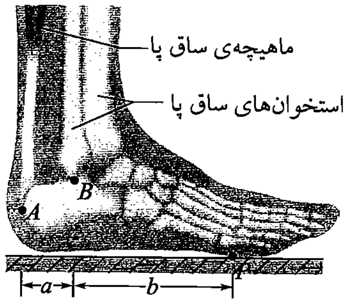
ایستاده است. این تخته به دو پایه به فاصله‌ی $d = ۱٫۵\ \mathrm{m}$ از یکدیگر وصل شده است. از میان نیروهای وارد شده به تخته‌ی شیرجه، (الف) بزرگی و (ب) جهت (بالا یا پایین) نیرویی که پایه‌ی چپ و (پ) بزرگی و (ت) جهت (بالا یا پایین) نیرویی که پایه‌ی راست به تخته‌ی شیرجه وارد می‌کند، چیست؟ (ث) کدام پایه (چپ یا راست) تحت کشش و (ج) کدام پایه‌ی تحت فشار قرار می‌گیرد؟

* **۱۲** در شکل ۱۲-۳۰، شخصی می‌کوشد تا خودرو خود را از گِل و لای کنار جاده بیرون بکشد. او یک سر طنابی را به سپر جلو خودرو گره می‌زند و سر دیگر طناب را به تیر چراغ برقی که در کنار جاده در فاصله‌ی ۱۸ متری قرار دارد، محکم می‌بندد. سپس او طناب را با نیروی $۵۵۰\ \mathrm{N}$ از وسط به یک سو هُل می‌دهد. در نتیجه، مرکز طناب به اندازه‌ی $۰٫۳۰\ \mathrm{m}$ جابه‌جا می‌شود و خودرو اندکی حرکت می‌کند. بزرگی نیروی وارد شده به خودرو از سوی طناب چقدر است (طناب اندکی کش می‌آید)؟



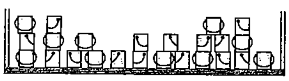
شکل ۱۲-۳۰ مسئله‌ی ۱۲.

* **۱۳** شکل ۱۲-۳۱ ساختار تشریحی ساق، پنجه، و پاشنه‌ی پای شخصی را در حال ایستادن روی پنجه‌ی پا و بلند شدن پاشنه از کف زمین نشان می‌دهد، به گونه‌ای که پا فقط در نقطه‌ی P، نشان داده شده در شکل با زمین تماس دارد. فرض کنید $a = ۵٫۰\ \mathrm{cm}$، $b = ۱۵\ \mathrm{cm}$، و وزن شخص $W = ۹۰۰\ \mathrm{N}$ است. از میان نیروهای وارد شده به پای شخص، (الف) بزرگی و (ب) جهت (بالا یا پایین) نیرویی که ماهیچه‌ی ساق پا به نقطه‌ی A وارد می‌کند و (پ) بزرگی و (ت) جهت (بالا یا پایین) نیرویی که استخوان‌های ساق پا به نقطه‌ی B وارد می‌کنند، چیست؟



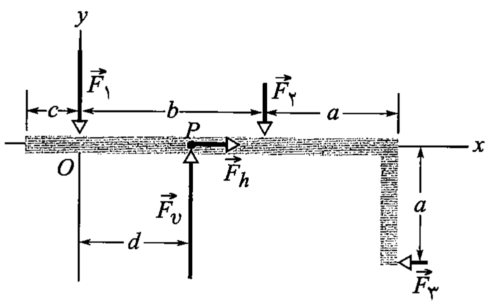
شکل ۱۲-۳۱ مسئله‌ی ۱۳.

* **۱۴** در شکل ۱۲-۳۲، چوب بستی به طول $۲٫۰۰\ \mathrm{m}$ و جرم یکنواخت $۵۰٫۰\ \mathrm{kg}$، به‌وسیله‌ی دو کابل از یک ساختمان آویزان شده است. روی این چوب بست عده‌ی زیادی سطل پر از رنگ قرار داده‌اند که جرم کل آن‌ها $۷۵٫۰\ \mathrm{kg}$ است. نیروی کشش کابل سمت راست $۷۲۲\ \mathrm{N}$ است. مرکز جرم دستگاه شامل سطل‌های رنگ به چه فاصله‌ی افقی از ***این*** کابل قرار دارد؟



شکل ۱۲-۳۲ مسئله‌ی ۱۴.

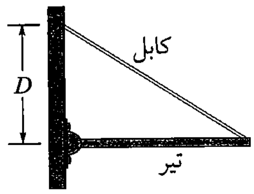
* **۱۵** نیروهای $\vec{F}_1$، $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_3$ به ساختار شکل ۱۲-۳۳، که از بالا دیده می‌شود، وارد می‌شوند. می‌خواهیم با وارد کردن یک نیروی چهارم در نقطه‌ای مانند P، این ساختار را به حال تعادل در آوریم. مؤلفه‌های برداری نیروی چهارم، $\vec{F}_h$ و $\vec{F}_v$ هستند. می‌دانیم که $a = ۲٫۰\ \mathrm{m}$، $b = ۳٫۰\ \mathrm{m}$، $c = ۱٫۰\ \mathrm{m}$، $F_1 = ۲۰\ \mathrm{N}$، $F_2 = ۱۰\ \mathrm{N}$ و $F_3 = ۵٫۰\ \mathrm{N}$. (الف) F_h، (ب) F_v و (پ) d، را پیدا کنید.



شکل ۱۲-۳۳ مسئله‌ی ۱۵.

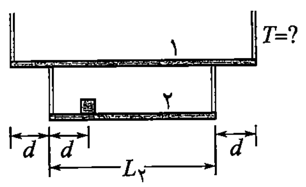
* ۱۶ صندوق مکعب شکل یکنواختی، که طول هر ضلعش ۰٫۷۵۰m است، ۵۰۰N وزن دارد. این صندوق روی یک پهلو بر کف زمین خوابیده است و در مقابل آن مانع ثابت بسیار کوچکی قرار دارد. کمترین ارتفاع از کف زمین، که در آن باید یک نیروی افقی ۳۵۰ نیوتونی به صندوق وارد شود، تا صندوق در آستانه‌ی چپه شدن قرار گیرد، چقدر است؟

* ۱۷ در شکل ۱۲-۳۴، یک تیر ساختمانی به وزن ۵۰۰N و طول ۳٫۰m به طور افقی معلق است. این تیر در سمت چپ به دیوار لولا شده و طرف راست به وسیله‌ی کابلی نگه داشته شده است. کابل در فاصله‌ی D بالاتر از لولا به دیوار وصل شده است. کمترین نیروی کششی که باعث پاره شدن کابل می‌شود، ۱۲۰۰N است. (الف) فاصله‌ی D متناظر با این نیروی کشش چقدر است؟ (ب) برای جلوگیری از پاره شدن کابل آیا D باید از این مقدار بیشتر باشد یا کمتر؟



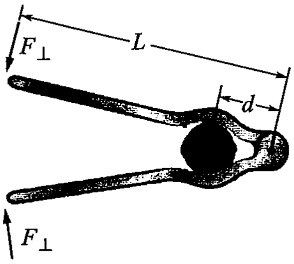
شکل ۱۲-۳۴ مسئله‌ی ۱۷.

* ۱۸ در شکل ۱۲-۳۵، داربست افقی ۲ با جرم یکنواخت $m_2 = ۳۰٫۰kg$ و طول $L_2 = ۲٫۰۰m$، از داربست افقی ۱ با جرم یکنواخت $m_1 = ۵۰٫۰kg$ آویخته شده است. جعبه‌ای پر از میخ به جرم ۲۰٫۰kg روی داربست ۲ به فاصله‌ی $d = ۰٫۵۰۰m$ از انتهای چپ قرار داده شده است. نیروی کشش نشان داده شده در کابل T، چقدر است؟



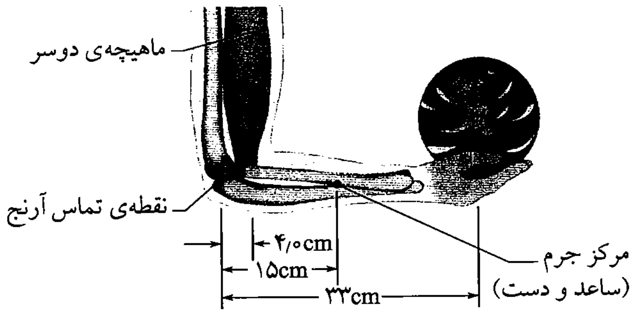
شکل ۱۲-۳۵ مسئله‌ی ۱۸.

* ۱۹ برای شکستن فندق با یک فندق شکن باید دست کم نیرویی با بزرگی ۴۰N به دو طرف فندق وارد کنیم. برای فندق‌شکن شکل ۱۲-۳۶، با ابعاد $L = ۱۲cm$ و $d = ۲٫۶cm$، مؤلفه‌ی $F_\perp$ (عمود بر دسته‌ها) متناظر با این نیروی با بزرگی ۴۰N چیست؟



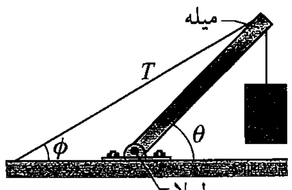
شکل ۱۲-۳۶ مسئله‌ی ۱۹.

* ۲۰ یک بازیکن بولینگ توپی (به جرم $M = ۷٫۲kg$) را در کف دست خود نگه داشته است (شکل ۱۲-۳۷). بازوی بازیکن قائم و ساعد او (به جرم ۱٫۸kg) افقی است. بزرگی (الف) نیروی وارد شده به ساعد از سوی ماهیچه‌ی دو سر و (ب) نیروی میان ساختارهای استخوانی در نقطه‌ی تماس آرنج، چیست؟



شکل ۱۲-۳۷ مسئله‌ی ۲۰.

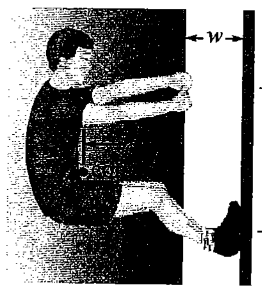
** ۲۱ دستگاه نشان داده شده در شکل ۱۲-۳۸، در حال تعادل است. قطعه‌ای بتونی به‌جرم ۲۲۵kg از انتهای میله‌ی یکنواختی به جرم ۴۵٫۰kg آویخته شده است. به ازای زاویه‌های $\phi = ۳۰٫۰°$ و $\theta = ۴۵٫۰°$، (الف) نیروی کشش کابل T و



شکل ۱۲-۳۸ مسئله‌ی ۲۱.

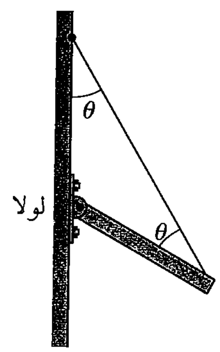
مؤلفه‌های (ب) افقی و (پ) قائم نیروی وارد شده به میله از سوی لولا را، پیدا کنید.

** ۲۲ در شکل ۱۲-۳۹، صخره‌نوردی به جرم ۵۵kg هنگام صعود از یک شکاف با روش تکیه دادن به عقب، با دست‌ها یک دیوار شکاف را به عقب می‌کشد و با پاها به دیوار مقابل فشار می‌دهد. پهنای شکاف $w =$ ۰/۲۰m و فاصله‌ی افقی مرکز جرم صخره‌نورد تا شکاف $d =$ ۰/۴۰m است. ضریب اصطکاک ایستایی میان دست‌ها و صخره $\mu_1 =$ ۰/۴۰ و میان پوتین‌های صخره‌نورد و صخره $\mu_2 =$ ۱/۲ است. (الف) کمترین نیروی کشش افقی دست‌ها و نیروی فشاری پاها چقدر باید باشد تا صخره‌نورد به حالت پایدار قرار گیرد؟ (ب) برای کشش افقی در قسمت (الف)، فاصله‌ی قائم h در میان پاها و دست‌ها چقدر باید باشد؟ اگر صخره نم‌دار باشد، به گونه‌ای که μ_1 و μ_2 کاهش یابند، (پ) پاسخ مربوط به قسمت (الف) و (ت) پاسخ مربوط به قسمت (ب)، چه تغییری می‌کند؟



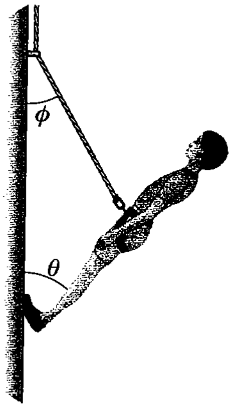
شکل ۱۲-۳۹ مسئله‌ی ۲۲.

** ۲۳ در شکل ۱۲-۴۰، یک سر تیر یکنواختی به وزن ۲۲۲N با لولایی به دیواری وصل شده است. سر دیگر تیر به وسیله‌ی سیمی نگه‌داشته شده است که با دیوار و تیر زاویه‌ی $\theta =$ ۳۰/۰° می‌سازد. (الف) نیروی کشش سیم، (ب) مؤلفه‌ی افقی و (پ) مؤلفه‌ی قائم نیروی وارد شده به تیر از سوی لولا را، پیدا کنید.



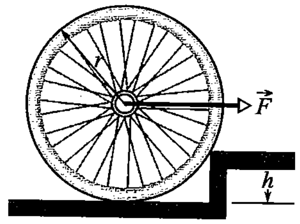
شکل ۱۲-۴۰ مسئله‌ی ۲۳.

** ۲۴ در شکل ۱۲-۴۱، صخره‌نوردی به وزن ۵۳۳/۸N با یک طناب متصل به کمربند صخره‌نوردی‌اش مهار شده است. نیروی کشش طناب که به صخره‌نورد وارد می‌شود دارای خط اثری است که از مرکز جرم او می‌گذرد. زاویه‌های نشان داده شده عبارت‌اند از $\theta =$ ۴۰/۰° و $\phi =$ ۳۰/۰°. اگر پای صخره‌نورد در آستانه‌ی لغزیدن بر روی دیوار قائم باشد، ضریب اصطکاک ایستایی میان کفش‌های صخره‌نوردی او و دیوار چیست؟



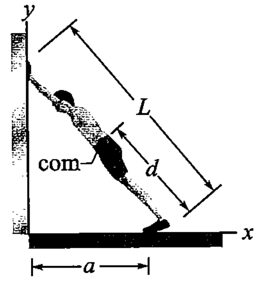
شکل ۱۲-۴۱ مسئله‌ی ۲۴.

** ۲۵ در شکل ۱۲-۴۲، بزرگی نیروی (ثابت) $\vec{F}$ که در راستای افقی به محور چرخ وارد می‌شود، چقدر باید باشد تا چرخ را از مانعی به ارتفاع $h =$ ۳/۰۰cm بالا ببرد؟ شعاع چرخ را $r =$ ۶/۰۰cm و جرم چرخ را $m =$ ۰/۸۰۰kg فرض کنید.



شکل ۱۲-۴۲ مسئله‌ی ۲۵.

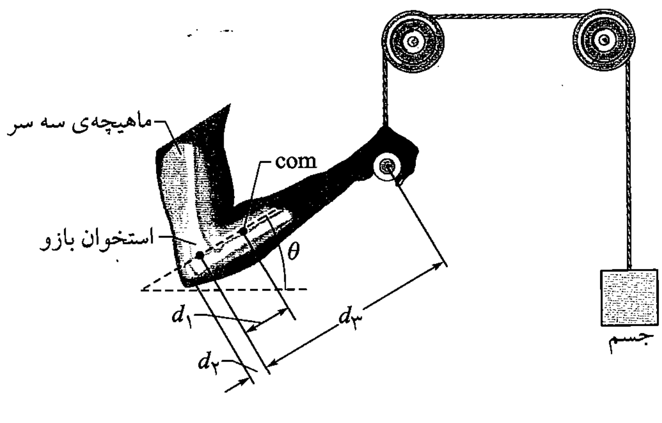
** ۲۶ در شکل ۱۲-۴۳، صخره‌نوردی به یک دیوار یخی با اصطکاک ناچیز تکیه داده است. فاصله‌ی a برابر با ۰/۹۱۴m، فاصله‌ی L برابر با ۲/۱۰m و فاصله‌ی مرکز جرم صخره‌نورد تا محل تماس پاهایش با زمین $d =$ ۰/۹۴۰m است. اگر او در



شکل ۱۲-۴۳ مسئله‌ی ۲۶.

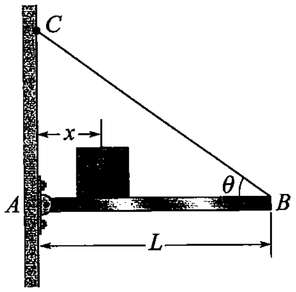
آستانه‌ی لغزیدن باشد، ضریب اصطکاک ایستایی میان پاهای او و زمین چقدر است؟

** ۲۷ در شکل ۱۲-۴۴، جسمی به جرم ۱۵ kg به وسیله‌ی دستگاهی از قرقره‌ها در جای خود ثابت مانده است. بازوی شخص قائم است و ساعد او تحت زاویه‌ی $\theta =$ °۳۰ نسبت به راستای افقی قرار دارد. جرم ساعد و دست با هم ۲٫۰ kg و فاصله‌ی مرکز جرم آن از نقطه‌ی تماس استخوان ساعد و استخوان بازو $d_1 =$ ۱۵ cm است. ماهیچه‌ی سه سر یک نیروی قائم بالاسو در نقطه‌ای واقع در فاصله‌ی $d_2 =$ ۲٫۵ cm در پشت نقطه‌ی تماس وارد می‌کند. فاصله‌ی d_3 برابر با ۳۵ cm است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (بالا یا پایین) نیروی وارد شده به ساعد از سوی ماهیچه‌ی سه سر و (پ) بزرگی و (ت) جهت (بالا یا پایین) نیروی وارد شده به ساعد از سوی استخوان بازو، چیست؟



شکل ۱۲-۴۴ مسئله‌ی ۲۷.

** ۲۸ در شکل ۱۲-۴۵، میله‌ای یکنواخت به طول $L =$ ۳٫۰۰ m و وزن ۲۰۰ N را در نظر بگیرید. هم‌چنین، وزن

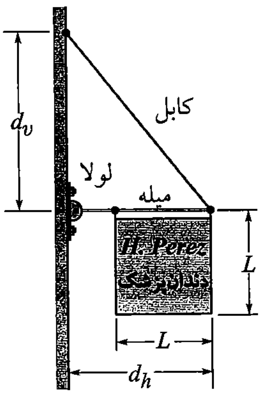


شکل ۱۲-۴۵ مسئله‌های ۲۸ و ۳۴.

جسم $W =$ ۳۰۰ N و زاویه‌ی θ برابر با ۳۰٫۰ درجه است. در شکل سیم می‌تواند نیروی کشش بیشینه‌ی ۵۰۰ N را تحمل کند. (الف) مقدار بیشینه‌ی ممکن فاصله‌ی x پیش از پاره شدن سیم چقدر است؟ اگر جسم در این x بیشینه قرار داشته باشد، (ب) مؤلفه‌ی افقی و (پ) مؤلفه‌ی قائم نیروی وارد شده به میله از سوی لولا در نقطه‌ی A، چیست؟

** ۲۹ دَری به ارتفاع ۲٫۱ m در راستای محور قائم y به بالاسو و پهنای ۰٫۹۱ m در راستای محور افقی x به بیرون سوی کناره‌ی لولا شده‌ی دَر است. یک لولا در فاصله‌ی ۰٫۳۰ m از بالا و یک لولا در فاصله‌ی ۰٫۳۰ m از پایین نصب شده است و هر لولا نصف جرم دَر را تحمل می‌کند. جرم دَر ۲۷ kg است. نیروهای وارد شده به دَر (الف) در لولای بالایی و (ب) در لولای پایینی، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟

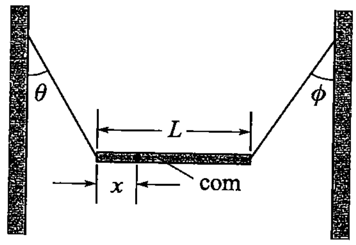
** ۳۰ در شکل ۱۲-۴۶، تابلو مربع شکل یکنواختی به جرم ۵۰٫۰ kg و ضلع $L =$ ۲٫۰۰ m ازمیله‌ای به‌طول $d_h =$ ۳٫۰۰ m با جرم ناچیز آویخته شده است. کابلی انتهای میله را به نقطه‌ای از دیوار واقع در فاصله‌ی $d_v =$ ۴٫۰۰ m بالای لولای اتصال



شکل ۱۲-۴۶ مسئله‌ی ۳۰.

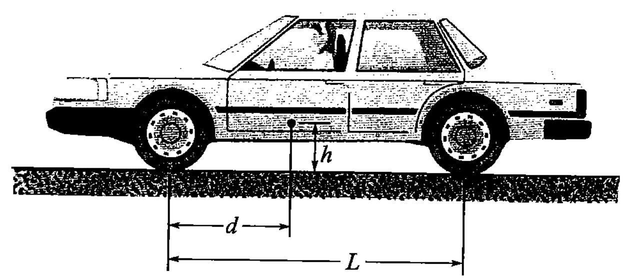
میله و دیوار وصل می‌کند. (الف) نیروی کشش کابل چقدر است؟ (ب) بزرگی و (پ) جهت (چپ یا راست) مؤلفه‌ی افقی نیروی وارد شده به میله از سوی دیوار و (ت) بزرگی و (ث) جهت (بالا یا پایین) مؤلفه‌ی قائم این نیرو، چیست؟

** ۳۱ میله‌ی نایکنواختی از دو ریسمان با جرم ناچیز، مطابق شکل ۱۲-۴۷، آویخته شده و به طور افقی در حال سکون است. زاویه‌ی یک ریسمان با راستای قائم $\theta = ۳۶/۹^\circ$ و زاویه‌ی ریسمان دیگر $\phi = ۵۳/۱^\circ$ است. اگر طول میله L، برابر با $۶/۱۰\,m$ باشد، x، فاصله‌ی انتهای سمت چپ تا مرکز جرم میله را حساب کنید.



شکل ۱۲-۴۷ مسئله‌ی ۳۱.

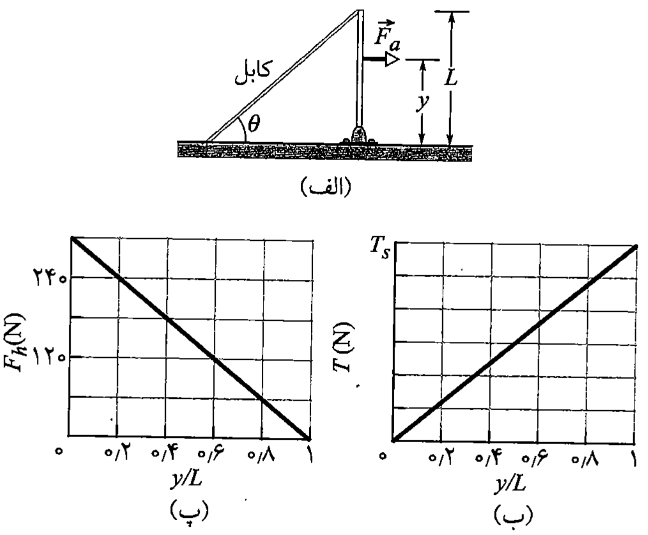
** ۳۲ در شکل ۱۲-۴۸، راننده‌ی خودرویی در جاده‌ای افقی برای یک توقف اضطراری چنان ترمز می‌کند که منجر به قفل شدن چهار چرخ می‌شود و خودرو بر روی جاده می‌لغزد. ضریب اصطکاک میان لاستیک‌ها و جاده ۰/۴۰ است. فاصله‌ی میان محورهای چرخ‌های جلو و عقب خودرو $L = ۴/۲\,m$ است و مرکز جرم خودرو در فاصله‌ی $d = ۱/۸\,m$ پشت محور جلو و به فاصله‌ی $h = ۰/۷۵\,m$ بالاتر از سطح جاده قرار دارد. وزن خودرو ۱۱kN است. مطلوب است تعیین بزرگی (الف) شتاب ناشی از ترمز کردن خودرو، (ب) نیروی عمودی وارد شده به هریک از چرخ‌های عقب، (پ) نیروی عمودی واردشده



شکل ۱۲-۴۸ مسئله‌ی ۳۲.

به هر یک از چرخ‌های جلو، (ت) نیروی ترمز وارد شده به هر یک از چرخ‌های عقب و (ث) نیروی ترمز وارد شده به هر یک از چرخ‌های جلو. (*راهنمایی*: خودرو، اگرچه، دارای تعادل انتقالی نیست، از لحاظ دورانی ***دارای تعادل است***).

** ۳۳ شکل ۱۲-۴۹ الف تیر قائم یکنواختی به طول L را نشان می‌دهد که سر پایین آن به زمین لولا شده است. نیروی افقی $\vec{F}_a$ در فاصله‌ی y از سر پایین به‌میله واردمی‌شود. این میله به‌حالت قائم باقی می‌ماند زیرا یک کابل تحت زاویه‌ی θ به سر بالایی آن وصل شده است. شکل ۱۲-۴۹ ب نمودار نیروی کشش T مربوط به کابل را برحسب تابعی از مکان وارد شدن نیرو به صورت کسری از طول تیر، y/L، نشان می‌دهد. مقیاس محور نیروی T با مقدار $T_s = ۶۰۰\,N$ مشخص شده است. شکل ۱۲-۴۹ پ نمودار بزرگی F_h، نیروی افقی وارد شده به تیر از سوی لولا را، باز هم برحسب تابعی از y/L، نشان می‌دهد. (الف) زاویه‌ی θ و (ب) بزرگی نیروی $\vec{F}_a$ را حساب کنید.



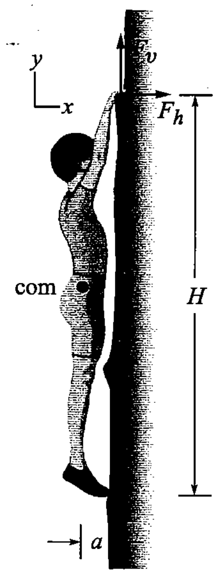
شکل ۱۲-۴۹ مسئله‌ی ۳۳.

** ۳۴ در شکل ۱۲-۴۵، میله‌ی باریک و افقی AB به وزن ناچیز و طول L در نقطه‌ی A به دیوار لولا شده است. این میله در نقطه‌ی B به وسیله‌ی سیم باریک BC که با راستای افقی زاویه‌ی θ می‌سازد، نگه داشته شده است. جسمی به وزن W می‌تواند در طول این میله حرکت کند و فاصله‌ی مکان مرکز جرم جسم تا دیوار با x معین می‌شود. مطلوب است تعیین

(الف) نیروی کشش سیم، و (ب) مؤلفه‌ی افقی و (پ) مؤلفه‌ی قائم نیروی وارد شده به میله از سوی لولا در نقطه‌ی A، به‌صورت تابعی از x.

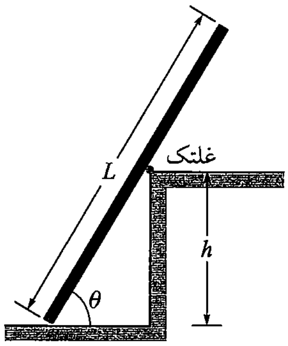
** ۳۵ وزن یک جعبه‌ی مکعب شکل محتوی شن ۸۹۰ N است. می‌خواهیم با وارد کردن یک نیروی افقی به یکی از لبه‌های بالایی جعبه، آن را «بغلتانیم». (الف) نیروی کمینه‌ی لازم چقدر است؟ (ب) ضریب اصطکاک ایستایی کمینه‌ی لازم میان جعبه و کف زمین چقدر است؟ (پ) اگر راه مؤثرتری برای غلتاندن جعبه وجود دارد، کمترین نیروی ممکن برای غلتاندن جعبه را که باید به طور مستقیم به آن وارد شود، پیدا کنید. (***راهنمایی:*** در آغاز چپه شدن جعبه نیروی عمودی به کجا وارد می‌شود؟)

** ۳۶ شکل ۱۲-۵۰ صخره‌نوردی به جرم ۷۰ kg را نشان می‌دهد که با گرفتن ***لبه‌ی افقی کم عمق*** دیوار صخره فقط با یک دست آویزان شده است. (او برای آنکه نیفتد باید انگشت‌ها را به پایین فشار دهد). پاهای صخره‌نورد در فاصله‌ی H = ۲٫۰m پایین‌تر از محل درگیری انگشت‌هایش بدون هیچ تکیه‌گاهی با دیوار صخره‌ای تماس پیدا می‌کند. فاصله‌ی مرکز جرم او تا دیوار a = ۰٫۲۰m است. فرض کنید نیرویی که لبه‌ی دیوار صخره‌ای به انگشت‌های نگهدارنده‌ی صخره‌نورد وارد می‌کند، به طور مساوی بین چهار انگشت تقسیم می‌شود. مقدار (الف) مؤلفه‌ی افقی F_h و (ب) مؤلفه‌ی قائم F_v، وارد شده به هر یک از انگشت‌های او چقدر است؟



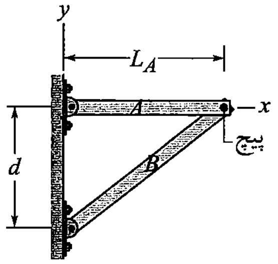
شکل ۱۲-۵۰ مسئله‌ی ۳۶.

** ۳۷ در شکل ۱۲-۵۱، یک الوار یکنواخت به طول L = ۶٫۱۰m و وزن ۴۴۵ N از یک سر بر روی زمین و از سر دیگر بر روی غلتک بی‌اصطکاکی واقع در بالای دیواری به ارتفاع h = ۳٫۰۵m به حال سکون قرار دارد. این الوار به ازای $\theta \geq$ ۷۰° در حال تعادل می‌ماند و به ازای $\theta <$ ۷۰° می‌لغزد. ضریب اصطکاک ایستایی میان الوار و زمین را پیدا کنید.



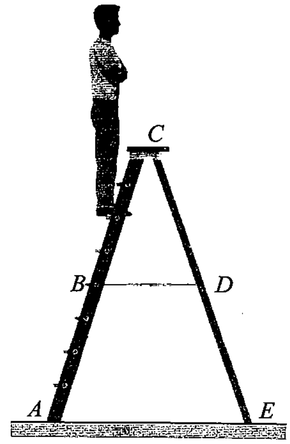
شکل ۱۲-۵۱ مسئله‌ی ۳۷.

** ۳۸ در شکل ۱۲-۵۲، تیرهای یکنواخت A و B از یک سر به دیوار لولا شده‌اند و سر دیگر آن‌ها با یک پیچ سفت نشده به‌هم وصل شده است. (هیچ گشتاور نیرویی از یک تیر به تیر دیگر وارد نمی‌شود). تیر A دارای طول L_A = ۲٫۴۰m و جرم ۵۸٫۰kg، و تیر B دارای جرم ۶۸٫۰kg است. فاصله‌ی میان دو لولا d = ۱٫۸۰m است. نیروی وارد شده (الف) به تیر A ناشی از لولای مربوط، (ب) به تیر A ناشی از پیچ، (پ) به تیر B ناشی از لولای مربوط و (ت) به تیر B ناشی از پیچ، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟



شکل ۱۲-۵۲ مسئله‌ی ۳۸.

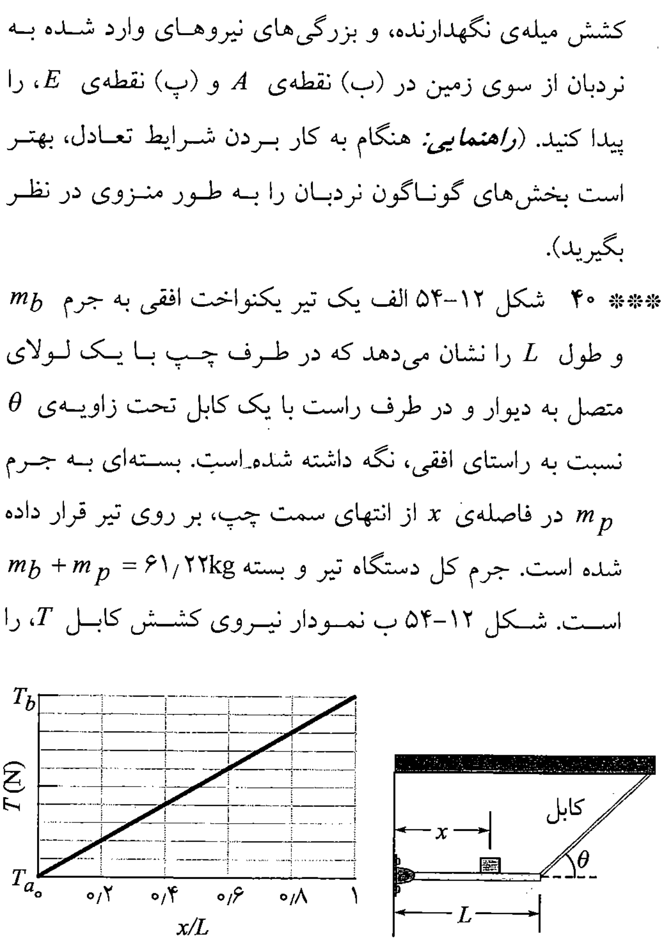
*** ۳۹ در نردبان دو طرفه‌ی شکل ۱۲-۵۳، طول‌های AC و CE، هر کدام برابر با ۲٫۴۴m هستند و در نقطه‌ی C به هم لولا شده‌اند. میله‌ی نگهدارنده‌ی BD به‌طول ۰٫۷۶۲m به وسط



شکل ۱۲-۵۳ مسئله‌ی ۳۹.

نردبان وصل شده است. شخصی به وزن ۸۵۴N در طول نردبان به اندازه‌ی ۱٫۸۰m بالا می‌رود. با فرض آنکه کف زمین بی‌اصطکاک و جرم نردبان قابل چشم‌پوشی است، (الف) نیروی کشش میله‌ی نگهدارنده، و بزرگی‌های نیروهای وارد شده به نردبان از سوی زمین در (ب) نقطه‌ی A و (پ) نقطه‌ی E، را پیدا کنید. (***راهنمایی:*** هنگام به کار بردن شرایط تعادل، بهتر است بخش‌های گوناگون نردبان را به طور منزوی در نظر بگیرید).

*** ۴۰ شکل ۱۲-۵۴ الف یک تیر یکنواخت افقی به جرم m_b و طول L را نشان می‌دهد که در طرف چپ با یک لولای متصل به دیوار و در طرف راست با یک کابل تحت زاویه‌ی θ نسبت به راستای افقی، نگه داشته شده است. بسته‌ای به جرم m_p در فاصله‌ی x از انتهای سمت چپ، بر روی تیر قرار داده شده است. جرم کل دستگاه تیر و بسته $m_b + m_p$ = ۶۱٫۲۲kg است. شکل ۱۲-۵۴ ب نمودار نیروی کشش کابل، T، را



(ب) (الف)

شکل ۱۲-۵۴ مسئله‌ی ۴۰.

برحسب تابعی از مکان بسته به صورت کسری از طول تیر، x / L، نشان می‌دهد. مقیاس محور نیروی T با مقدار T_b = ۷۰۰N و T_a = ۵۰۰N مشخص شده است. (الف) زاویه‌ی θ، (ب) جرم m_b و (پ) جرم m_p، را حساب کنید.

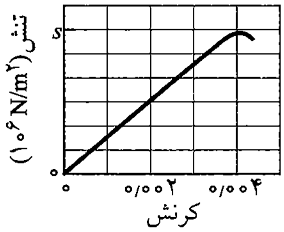
*** ۴۱ صندوق مکعب شکلی به ضلع ۱٫۲m محتوی یک قطعه‌ی ماشین آلات است؛ مرکز جرم صندوق و محتویات آن ۰٫۳۰m متر بالاتر از مرکز هندسی صندوق واقع است. این صندوق روی شیب‌راهه‌ای که با راستای افقی زاویه‌ی θ می‌سازد قرار دارد. وقتی θ از صفر به تدریج افزایش می‌یابد، به زاویه‌ای می‌رسیم که به‌ازای آن صندوق چپه می‌شود، یا شروع به لغزیدن به‌پایین می‌کند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان شیب‌راهه و صندوق μ_s برابر با ۰٫۶۰ باشد، (الف) آیا صندوق چپه می شود یا می‌لغزد و (ب) به ازای چه زاویه‌ای از θ این اتفاق می‌افتد؟ به ازای μ_s = ۰٫۷۰، (پ) آیا صندوق چپه می‌شود یا می‌لغزد و (ت) به ازای چه زاویه‌ای از θ این اتفاق می‌افتد؟ (***راهنمایی:*** در آغاز چپه شدن صندوق، نیروی عمودی به کجا وارد می‌شود؟)

*** ۴۲ در شکل ۱۲-۷ و مسئله‌ی نمونه‌ی مربوط به آن، ضریب اصطکاک ایستایی میان نردبان و کف زمین μ_s، را ۰٫۵۳ بگیرید. آتش‌نشان تا چه طولی (برحسب درصد) باید از نردبان بالا برود تا نردبان در آستانه‌ی لغزیدن قرار گیرد؟

پودمان ۱۲-۳ کشسانی

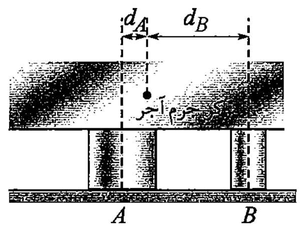
* ۴۳ یک میله‌ی آلومینیومی افقی به قطر ۴٫۸cm به اندازه‌ی ۵٫۳cm از یک دیوار بیرون آمده است. شیئی به جرم ۱۲۰۰kg به انتهای میله آویخته می‌شود. مدول برشی آلومینیوم $۳٫۰ \times ۱۰^{۱۰}$N/m² است. با چشم‌پوشی از جرم میله، (الف) تنش برشی وارد شده به میله و (ب) انحراف قائم انتهای میله نسبت به وضعیت افقی، را پیدا کنید.

* ۴۴ شکل ۱۲-۵۵ منحنی تنش ـ کرنش مربوط به یک ماده را نشان می‌دهد. مقیاس محور تنش با مقدار s = ۳۰۰ برحسب یکای $۱۰^{۶}$N/m² مشخص شده است. (الف) مدول یانگ و (ب) استقامت تسلیم تقریبی این ماده چیست؟



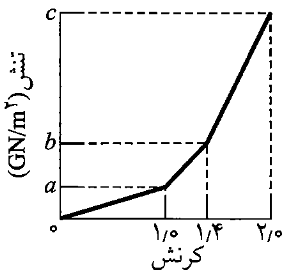
شکل ۱۲-۵۵ مسئله‌ی ۴۴.

۴۵ ●● در شکل ۱۲-۵۶، یک آجر سربی به طور افقی روی استوانه‌های A و B قرار دارد. رابطه‌ی مساحت‌های وجه‌های بالایی استوانه‌ها به صورت $A_A = ۲A_B$، و رابطه‌ی مدول‌های یانگ استوانه‌ها به صورت $E_A = ۲E_B$ است. طول استوانه‌ها پیش از قرار گرفتن آجر بر روی آن‌ها یکسان است. چه کسری از جرم آجر توسط (الف) استوانه‌ی A و (ب) استوانه‌ی B، تحمل می‌شود؟ فاصله‌ی افقی مرکز جرم آجر تا محورهای استوانه‌های A و B، به‌ترتیب، d_A و d_B است. (پ) نسبت d_A / d_B چیست؟



شکل ۱۲-۵۶ مسئله‌ی ۴۵.

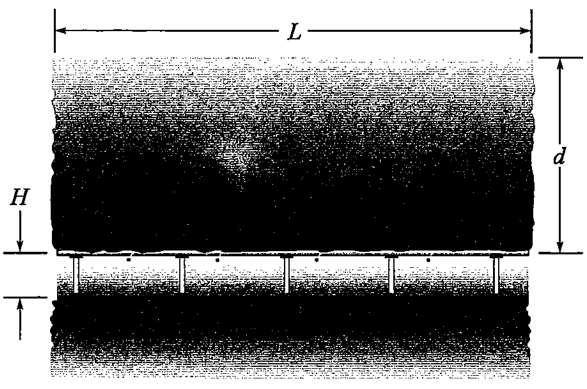
۴۶ ●● شکل ۱۲-۵۷ نمودار تقریبی تغییرات تنش برحسب کرنش مربوط به یک تار عنکبوت را نشان می‌دهد که تا نقطه‌ی گسیختگی به ازای کرنش ۲/۰۰ ادامه یافته است. مقیاس محور قائم شکل با مقادیر $a = ۰/۱۲ \mathrm{GN/m^۲}$، $b = ۰/۳۰ \mathrm{GN/m^۲}$، و $c = ۰/۸۰ \mathrm{GN/m^۲}$ مشخص شده است. فرض کنید طول آغازی تار عنکبوت ۰/۸۰ cm، مساحت مقطع آغازی آن $۸/۰ \times ۱۰^{-۱۲} \mathrm{m^۲}$ و حجم تار (در حین کشیده شدن) ثابت است. هم‌چنین، فرض کنید که وقتی یک تک تار حشره‌ای در حال پرواز را به‌دام می‌اندازد انرژی جنبشی حشره به کشیده‌شدن تار تبدیل می‌شود. (الف) چقدر انرژی جنبشی می‌تواند این تار را در آستانه‌ی پاره شدن قرار دهد؟ انرژی جنبشی مربوط به



شکل ۱۲-۵۷ مسئله‌ی ۴۶.

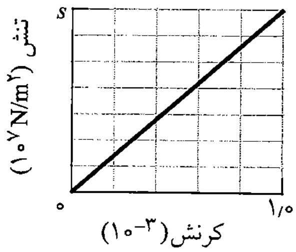
(ب) یک مگس میوه به جرم ۶/۰۰ mg و تندی ۱/۷۰ m/s و (پ) یک زنبور عسل به جرم ۰/۳۸۸ g و تندی ۰/۴۲۰ m/s، چقدر است؟ آیا (ت) مگس میوه و (ث) زنبور عسل می‌تواند تار عنکبوت را پاره کند؟

۴۷ ●● تونلی به‌طول $L = ۱۵۰ \mathrm{m}$، ارتفاع $H = ۷/۲ \mathrm{m}$ و پهنای ۵/۸ m (با سقف تخت) باید در عمق ۶۰ متری زمین ساخته شود (شکل ۱۲-۵۸ را ببینید). کل سقف تونل باید با ستون‌های فولادی با مقطع مربع شکل، که مساحت مقطع هر یک ۹۶۰ cm^۲ است، نگه داشته شود. هر ۱/۰ cm^۳ ماده‌ی زمین ۲/۸ گرم جرم دارد. (الف) وزن کل ماده‌ای از زمین که ستون‌ها باید آن را نگه دارند، چقدر است؟ (ب) چند ستون لازم است تا تنش تراکمی وارد شده به هر یک از آن‌ها به اندازه‌ی نصف استقامت نهایی باشد؟



شکل ۱۲-۵۸ مسئله‌ی ۴۷.

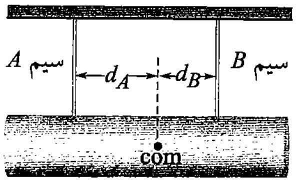
۴۸ ●● شکل ۱۲-۵۹ نمودارتغییرات تنش برحسب کرنش مربوط به یک سیم آلومینیومی را نشان می‌دهد که توسط ماشینی از دو انتها در جهت‌های مخالف کشیده شده است. مقیاس محور تنش با مقدار $s = ۷/۰$ برحسب یکای $۱۰^۷ \mathrm{N/m^۲}$ مشخص شده



شکل ۱۲-۵۹ مسئله‌ی ۴۸.

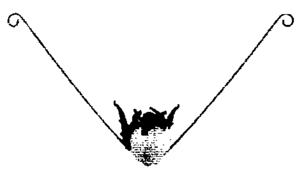
است. طول آغازی این سیم ۰٫۸۰۰m و مساحت مقطع آغازی آن $۲٫۰۰×۱۰^{-۶}m^۲$ است. نیروی ماشین چقدر کار بر روی این سیم انجام می‌دهد تا کرنش $۱٫۰۰×۱۰^{-۳}$ را تولید کند؟

** ۴۹ در شکل ۱۲-۶۰، تیر یکنواختی به جرم ۱۰۳kg به وسیله‌ی دو سیم فولادی A و B آویخته شده و شعاع مقطع هر سیم ۱٫۲۰mm است. سیم A در آغاز ۲٫۵۰m طول دارد و به اندازه‌ی ۲٫۰۰mm کوتاه‌تر از سیم B است. در این حال تیر به صورت افقی قرار دارد. بزرگی نیروی وارد شده به تیر از سوی (الف) سیم A و (ب) سیم B، چقدر است؟ (پ) نسبت d_A / d_B چیست؟



شکل ۱۲-۶۰ مسئله‌ی ۴۹.

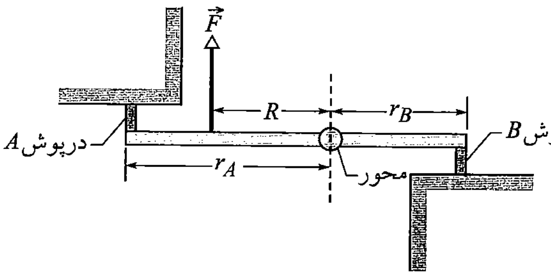
*** ۵۰ شکل ۱۲-۶۱ حشره‌ای را نشان می‌دهد که در وسط یک تار عنکبوت گیر افتاده است. این تار تحت تنش $۸٫۲۰×۱۰^۸ N/m^۲$ و کرنش ۲٫۰۰ پاره می‌شود. این تار در آغاز به صورت افقی، با طول ۲٫۰۰cm و مساحت مقطع $۸٫۰۰×۱۰^{-۱۲}m^۲$ بود. هنگامی که تار بر اثر وزن حشره کشیده



شکل ۱۲-۶۱ مسئله‌ی ۵۰.

می‌شود حجم آن ثابت می‌ماند. اگر وزن حشره بتواند تار را در آستانه‌ی پاره شدن قرار دهد، جرم حشره چقدر است؟ (ساختار تار عنکبوت به گونه‌ای است که اگر حشره‌ای مانند زنبور عسل در آن گیر بیفتد، پاره می‌شود).

*** ۵۱ شکل ۱۲-۶۲ تصویر میله‌ی صُلبی را، با دید از بالا، نشان می‌دهد که به دور محوری قائم تا جایی می‌چرخد که دو درپوش لاستیکی A و B به فاصله‌ی $r_A = ۷٫۰cm$ و $r_B = ۴٫۰cm$ از محور را به دیوارهای صُلب مقابل فشار دهد. این دو درپوش در آغاز بی‌آنکه فشرده شده باشند با دیوارها تماس دارند. اکنون، نیروی $\vec{F}$ با بزرگی ۲۲۰N در فاصله‌ی $R = ۵٫۰cm$ از محور، به طور عمود بر محور وارد می‌شود. بزرگی نیروی فشار دهنده‌ی (الف) درپوش A و (ب) درپوش B، چقدر است؟

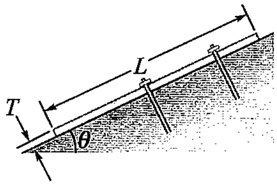


شکل ۱۲-۶۲ مسئله‌ی ۵۱.

مسئله‌های بیشتر

۵۲ صخره‌نوردی به جرم ۹۵kg پس از سقوط، خودش را در انتهای طنابی به طول ۱۵m و به قطر ۹٫۶mm می‌یابد که به اندازه‌ی ۲٫۸cm کش آمده است. (الف) کرنش، (ب) تنش و (پ) مدول یانگ مربوط به طناب را حساب کنید.

۵۳ در شکل ۱۲-۶۳، یک تختال مستطیل شکل از سنگ لوح بر روی بستری سنگی با شیب $\theta = ۲۶°$ قرار گرفته است. این تختال دارای طول $L = ۴۳m$، ضخامت $T = ۲٫۵m$ و پهنای $W = ۱۲m$ است و هر $۱٫۰cm^۳$ آن ۳٫۲ گرم جرم دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان این تختال و بستر سنگی ۰٫۳۹ است. (الف) مؤلفه‌ی نیروی گرانشی وارد شده به تختال در راستای موازی با بستر سنگی را حساب‌کنید. (ب) بزرگی نیروی اصطکاک ایستایی وارد شده به تختال را پیدا کنید. مقایسه‌ی

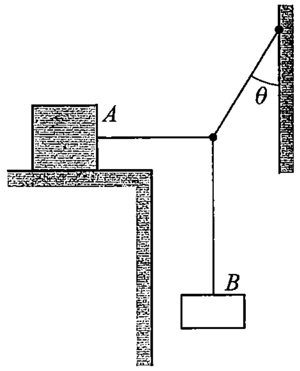


شکل ۱۲-۶۳ مسئله‌ی ۵۳.

نیروهای به دست آمده در قسمت‌های (الف) و (ب) نشان می‌دهند که تختال در معرض خطر لغزیدن است. در این صورت، فقط برآمدگی‌های اتفاقی بستر سنگی می‌توانند مانع لغزیدن تختال شوند. (پ) برای پایدار کردن تختال پیچ‌هایی را در راستای عمود بر سطح بستر نصب می‌کنند (در شکل دو پیچ دیده می‌شوند). اگر هر پیچ دارای مساحت مقطع ۶٫۴ cm^2 باشد و تحت اثر تنش برشی ۳٫۶×۱۰^{8} N/m^2 بریده شود، کمترین عده‌ی پیچ‌های مورد نیاز چند است؟ فرض کنید این پیچ‌ها اثری در نیروی عمود بر سطح ندارند.

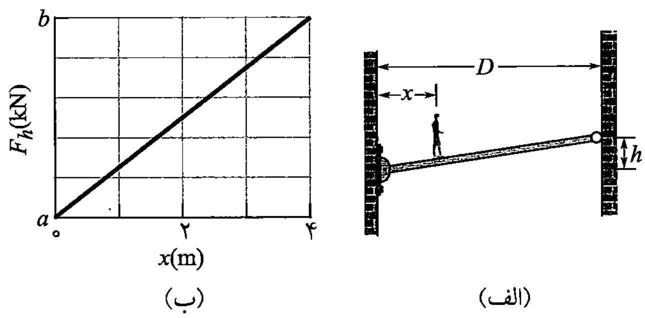
۵۴ نردبان یکنواختی به طول ۵٫۰ m و به وزن ۴۰۰ N به دیوار قائم بی‌اصطکاکی تکیه داده شده است. ضریب اصطکاک ایستایی میان سطح زمین و پایه‌ی نردبان ۰٫۴۶ است. بیشترین فاصله‌ی پای نردبان از دیوار چقدر می‌تواند باشد به گونه‌ای که نردبان بی‌درنگ نلغزد؟

۵۵ در شکل ۱۲-۶۴، جسم A (به جرم ۱۰ kg) در حال تعادل است، اما اگر جسم B (به جرم ۵٫۰ kg) اندکی سنگین‌تر می‌بود جسم A شروع به لغزیدن می‌کرد. به ازای زاویه‌ی $\theta =$ ۳۰°، ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم A و سطح زیر آن چیست؟



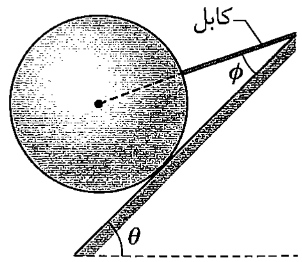
شکل ۱۲-۶۴ مسئله‌ی ۵۵.

۵۶ شکل ۱۲-۶۵ الف یک شیب‌راهه‌ی یکنواخت میان دو ساختمان را نشان می‌دهد که امکان حرکت کردن بین دو ساختمان در اثر بادهای قوی را فراهم می‌کند. انتهای چپ این شیب‌راهه به دیوار لولا شده است؛ در انتهای سمت راست شیب‌راهه غلتکی وجود دارد که می‌تواند در طول دیوارساختمان بغلتد. از سوی ساختمان هیچ نیروی قائمی به غلتک وارد نمی‌شود و تنها یک نیروی افقی. با بزرگی F_h به غلتک اثر می‌کند. فاصله‌ی افقی میان دو ساختمان $D =$ ۴٫۰۰m و خیز این شیب‌راهه $h =$ ۰٫۴۹۰m است. شخصی بر روی شیب‌راهه از چپ به راست حرکت می‌کند. شکل ۱۲-۶۵ ب نمودار تغییرات F_h برحسب تابعی از x، فاصله‌ی افقی شخص تا ساختمان سمت چپ را نشان می‌دهد. مقیاس محور F_h با مقدار $a =$ ۲۰kN و $b =$ ۲۵kN مشخص شده است. جرم (الف) شیب‌راهه و (ب) شخص، چیست؟



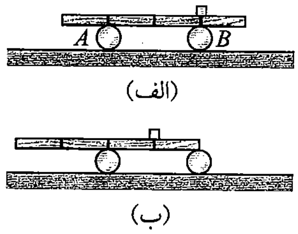
شکل ۱۲-۶۵ مسئله‌ی ۵۶.

۵۷ در شکل ۱۲-۶۶، کره‌ای به جرم ۱۰ kg با یک کابل بر روی سطح شیب‌دار بی‌اصطکاکی با زاویه‌ی شیب $\theta =$ ۴۵° نسبت به راستای افقی، نگه داشته شده است. زاویه‌ی ϕ برابر با ۲۵ درجه است. نیروی کشش کابل را حساب کنید.



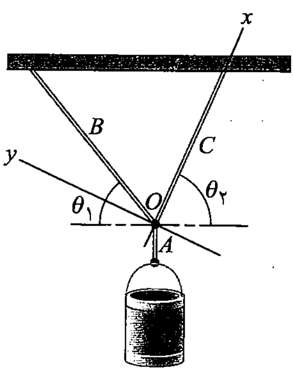
شکل ۱۲-۶۶ مسئله‌ی ۵۷.

۵۸ در شکل ۱۲-۶۷ الف، تیر یکنواختی به جرم $۴۰٫۰\,kg$ به طور متقارن بر روی دو غلتک قرار گرفته است. خط‌های قائم در طول تیر فاصله‌ی یکسانی دارند. دو تا از این خط‌ها درست بر روی غلتک‌ها قرار گرفته‌اند؛ بسته‌ای به جرم $۱۰٫۰\,kg$ درست بر روی غلتک B واقع شده است. بزرگی نیروهای وارد شده به تیر از سوی (الف) غلتک A و (ب) غلتک B، چقدر است؟ اکنون، تیر را آن‌قدر به طرف چپ می‌لغزانیم که انتهای سمت راست آن بر روی غلتک B قرارگیرد (شکل ۱۲-۶۷ ب). در این صورت، بزرگی نیروهای وارد شده به تیر از سوی (پ) غلتک A و (ت) غلتک B، چقدر است؟ سپس، تیر را به طرف راست می‌غلتانیم. فرض کنید طول تیر $۰٫۸۰۰\,m$ است. (ث) در چه فاصله‌ی افقی ـ میان بسته و غلتک B، تیر در آستانه‌ی از دست دادن تماس با غلتک A قرار می‌گیرد؟



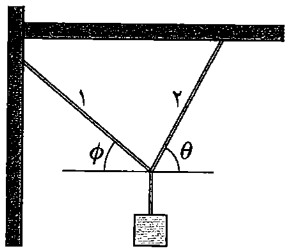
شکل ۱۲-۶۷ مسئله‌ی ۵۸.

۵۹ در شکل ۱۲-۶۸، یک سطل ساختمان‌سازی به جرم $۸۱۷\,kg$ از کابلی متصل به دوکابل دیگر درنقطه‌ی O، آویخته شده است. این دو کابل با راستای افقی زاویه‌های $\theta_1 = ۵۱٫۰^\circ$ و $\theta_2 = ۶۶٫۰^\circ$ می‌سازند. مطلوب است تعیین نیروی کشش، (الف) کابل A، (ب) کابل B و(پ) کابل C (*راهنمایی*: برای پرهیزکردن از حل دو معادله‌ی دو مجهولی، محورها را مطابق شکل انتخاب کنید).



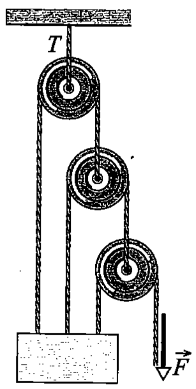
شکل ۱۲-۶۸ مسئله‌ی ۵۹.

۶۰ در شکل ۱۲-۶۹، بسته‌ای به جرم m از ریسمان کوتاهی آویخته شده و این ریسمان به ریسمان ۱ متصل به دیوار و ریسمان ۲ متصل به سقف گره خورده است. زاویه‌ی ریسمان ۱ نسبت به راستای افقی $\phi = ۴۰^\circ$ و زاویه‌ی ریسمان ۲ نسبت به راستای افقی θ است. (الف) به ازای چه مقدار θ نیروی کشش در ریسمان ۲ کمینه می‌شود؟ (ب) این نیروی کشش کمینه در ریسمان ۲ را برحسب mg حساب کنید.



شکل ۱۲-۶۹ مسئله‌ی ۶۰.

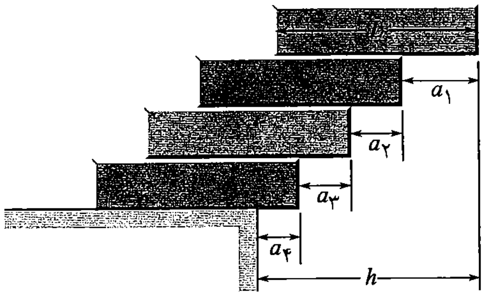
۶۱ در شکل ۱۲-۷۰، نیروی $\vec{F}$ جسمی به جرم $۶٫۴۰\,kg$ و هم‌چنین قرقره‌ها را به حال تعادل نگه داشته است. جرم و اصطکاک قرقره‌ها ناچیز است. نیروی کشش T وارد شده به کابل بالایی را حساب کنید. (*راهنمایی*: وقتی کابلی به اندازه‌ی نیم دور روی قرقره می‌پیچد، بزرگی نیروی برایند وارد شده به قرقره دو برابر نیروی کشش کابل است).



شکل ۱۲-۷۰ مسئله‌ی ۶۱.

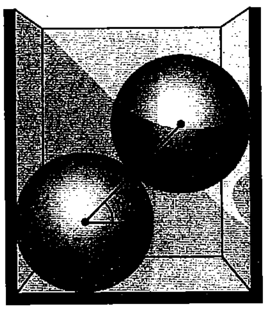
۶۲ یک بالابر معدن باتک کابلی فولادی به‌قطر $۲٫۵\,cm$ نگه‌داشته شده است. جرم کل اتاقک این بالابر و مسافرهایش $۶۷۰\,kg$ است. افزایش طول کابل در حالتی که بالابر از کابلی، (الف) به طول $۱۲\,m$ و (ب) به طول $۳۶۲\,m$، آویخته شده است، چیست؟ (از جرم کابل چشم‌پوشی کنید).

۶۳ چهار آجر مشابه و یکنواخت، هر یک به طول L، طوری روی هم چیده شده‌اند (شکل ۱۲-۷۱) که بخشی از یک آجر از آجر زیری خود جلوتر رفته است. مطلوب است تعیین بیشینه‌ی مقادیر (الف) a_1، (ب) a_2، (پ) a_3، (ت) a_4 و (ث) h، برحسب L، به گونه‌ای که این مجموعه در حال تعادل باشد.



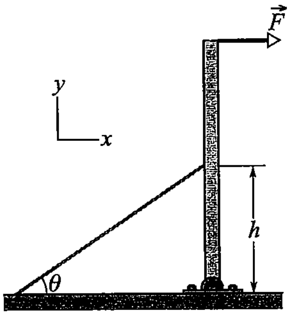
شکل ۱۲-۷۱ مسئله‌ی ۶۳.

۶۴ در شکل ۱۲-۷۲، دو کره‌ی یکنواخت، مشابه و بی‌اصطکاک، هر یک به جرم m، درون یک ظرف مکعب مستطیل شکل قرار گرفته‌اند. خط وصل کننده‌ی مرکزهای این دو کره با راستای افقی زاویه‌ی ۴۵ درجه می‌سازد. بزرگی نیروهای وارد شده به کره‌ها را از سوی (الف) ته ظرف، (ب) دیوار سمت چپ ظرف، (پ) دیوار سمت راست ظرف و (ت) یک کره به کره‌ی دیگر، پیدا کنید. (*راهنمایی*: نیرویی که یک کره به کره‌ی دیگر وارد می‌کند، در راستای خط وصل کننده‌ی مرکزهای آن‌ها قرار دارد).



شکل ۱۲-۷۲ مسئله‌ی ۶۴.

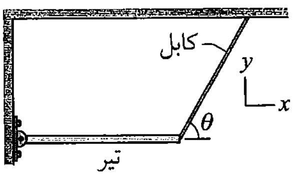
۶۵ در شکل ۱۲-۷۳، تیر یکنواختی به وزن ۶۰N و طول ۳٫۲m از سر پایین به زمین لولا شده است و به سر بالایی آن نیروی افقی $\vec{F}$ به بزرگی ۵۰N وارد می‌شود. این تیر به وسیله‌ی کابلی که با سطح زمین زاویه‌ی $\theta = ۲۵°$ می‌سازد و در ارتفاع



شکل ۱۲-۷۳ مسئله‌ی ۶۵.

$h = ۲٫۰\,m$ به تیر وصل شده است به حالت قائم نگه داشته می‌شود. (الف) نیروی کشش کابل و (ب) نیروی وارد شده به تیر از سوی لولا، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟

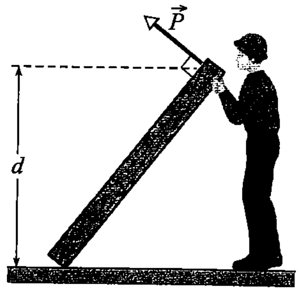
۶۶ تیر یکنواختی دارای طول ۵٫۰m و جرم ۵۳kg است. در شکل ۱۲-۷۴، این تیر به وسیله‌ی یک لولا و یک کابل تحت زاویه‌ی $\theta = ۶۰°$، به طور افقی نگه داشته شده است. نیروی وارد شده به تیر از سوی لولا، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟



شکل ۱۲-۷۴ مسئله‌ی ۶۶.

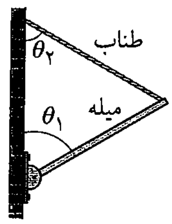
۶۷ طول هرضلع یک‌مکعب مسی توپر ۸۵٫۵cm است. چه مقدار تنش باید به این‌مکعب واردشود تا طول هرضلع آن به ۸۵٫۰cm کاهش یابد؟ مدول کپه‌ای مس $۱٫۴ \times ۱۰^{۱۱} N/m^2$ است.

۶۸ یک کارگر ساختمانی تلاش می‌کند تا یک تیر یکنواخت را از روی زمین بلند کند و به حالت قائم در آورد. این تیر ۲٫۵۰m طول و ۵۰۰N وزن دارد. در یک لحظه، کارگر با وارد کردن نیروی $\vec{P}$ به‌طور عمود بر تیر، مطابق شکل ۱۲-۷۵، تیر را به‌طور موقت طوری نگه می‌دارد که یک‌سر آن در ارتفاع $d = ۱٫۵۰\,m$ از سطح زمین قرار گیرد. (الف) بزرگی نیروی $\vec{P}$ چقدر است؟ (ب) بزرگی نیروی (برایند) وارد شده به تیر از سوی کف زمین چقدر است؟ (پ) مقدار کمینه‌ی ضریب اصطکاک ایستایی میان تیر و سطح زمین چقدر می‌تواند باشد تا تیر در این‌حالت نلغزد؟



شکل ۱۲-۷۵ مسئله‌ی ۶۸.

۶۹ در شکل ۱۲-۷۶، میله‌ی یکنواختی به جرم m از سر پایینی به دیوار لولا شده و سر بالایی آن با یک طناب متصل به دیوار نگه داشته شده است. به ازای $\theta_1 = ۶۰^\circ$، مقدار زاویه‌ی θ_2 چقدر باید باشد تا نیروی کشش طناب برابر با $mg / ۲$ شود؟

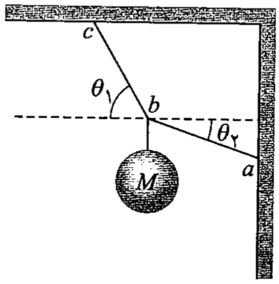


شکل ۱۲-۷۶ مسئله‌ی ۶۹.

۷۰ شخصی به جرم ۷۳kg بر روی یک پل افقی به طول L ایستاده است. فاصله‌ی شخص از یک سر پل $L / ۴$ است. این پل یکنواخت است و ۲٫۷kN وزن دارد. بزرگی نیروهای قائم وارد شده به پل از سوی (الف) پایه‌ی دورتر به شخص و (ب) پایه‌ی نزدیک‌تر به شخص، چیست؟

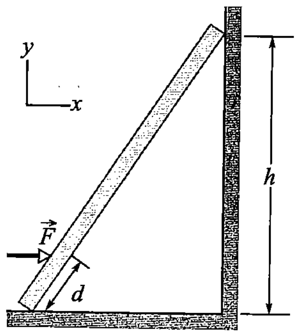
۷۱ مکعب یکنواختی به ضلع ۸٫۰cm بر روی کف افقی زمین قرار دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان مکعب و زمین μ است. نیروی افقی $\vec{P}$ در فاصله‌ی ۷٫۰cm بالاتر از سطح زمین و در روی خط میانی قائم به یکی از وجه‌های مکعب وارد می‌شود. سپس، بزرگی $\vec{P}$ به تدریج افزایش پیدا می‌کند. در حین افزایش دادن نیرو، به ازای چه مقادیری از μ، مکعب (الف) شروع به لغزیدن می‌کند و (ب) شروع به چپه شدن می‌کند؟ (*راهنمایی*: در لحظه‌ی چپه شدن نقطه‌ی اثر نیروی عمودی کجاست؟).

۷۲ دستگاه نشان داده شده در شکل ۱۲-۷۷، در حال تعادل است. زاویه‌ها $\theta_1 = ۶۰^\circ$ و $\theta_2 = ۲۰^\circ$ هستند و جرم گلوله $M = ۲٫۰\,\text{kg}$ است. نیروی کشش (الف) در ریسمان ab و (ب) در ریسمان bc، چقدر است؟



شکل ۱۲-۷۷ مسئله‌ی ۷۲.

۷۳ نردبان یکنواختی دارای طول ۱۰m و وزن ۲۰۰N است. سر نردبان، مطابق شکل ۱۲-۷۸، به دیواری قائم بی‌اصطکاک در ارتفاع $h = ۸٫۰\,\text{m}$ بالای زمین لم داده است. به این نردبان در فاصله‌ی $d = ۲٫۰\,\text{m}$ از پایه (در راستای نردبان) نیروی افقی $\vec{F}$ وارد می‌شود. (الف) اگر بزرگی نیرو $F = ۵۰\,\text{N}$ باشد، نیروی وارد شده به نردبان از سوی زمین، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟ (ب) به ازای $F = ۱۵۰\,\text{N}$، نیروی وارد شده به نردبان از سوی زمین، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟ (پ) فرض کنید ضریب اصطکاک ایستایی میان نردبان و زمین ۰٫۳۸ است؛ به ازای چه مقدار کمینه‌ی بزرگی نیروی F، پایه‌ی نردبان شروع به حرکت کردن به سوی دیوار می‌کند؟

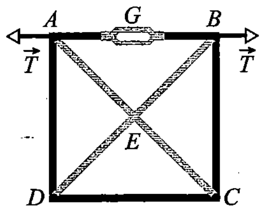


شکل ۱۲-۷۸ مسئله‌ی ۷۳.

۷۴ یک ترازوی دوکفه‌ای از میله‌ای صُلب با جرم ناچیز ساخته شده که به هریک ازسرهای آن کفه‌ای آویخته شده است. میله به

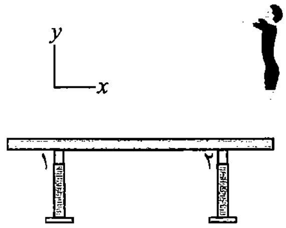
نقطه‌ای غیر از مرکزش تکیه کرده است و می‌تواند آزادانه به‌دور آن نقطه دوران کند. این ترازو با دوجرم نامساوی قرارگرفته در کفه‌هایش به حال توازن در می‌آید. وقتی جرم نامعلوم m را در کفه‌ی سمت چپ قرار می‌دهیم، با قرار دادن جرم m_1 در کفه‌ی سمت راست ترازو متوازن می‌شود؛ اگر جرم m را در کفه‌ی سمت راست قرار دهیم، این بار ترازو با قرار دادن جرم m_2 در کفه‌ی سمت چپ متوازن می‌شود. نشان دهید که $m = \sqrt{m_1 m_2}$.

۷۵ در شکل ۱۲-۷۹، قاب مربع شکل صُلب شامل چهار میله‌ی تشکیل‌دهنده‌ی ضلع‌های AB، BC، CD و DA و دو میله‌ی تشکیل دهنده‌ی قطرهای AC و BD است، که دو میله‌ی قطری در نقطه‌ی E به آزادی از روی هم عبور کرده‌اند. میله‌ی AB به کمک پیچ تنظیم G به گونه‌ای تحت کشش قرار می‌گیرد که گویی دو سر میله با نیروهای $T = ۵۳۵\,\mathrm{N}$ به طور افقی به برون سو کشیده شده‌اند. (الف) کدام یک از میله‌های دیگر تحت کشش قرار دارند؟ بزرگی (ب) نیروهای ایجاد کننده‌ی کشش در این میله‌ها و (پ) نیروهای ایجاد کننده‌ی تراکم در میله‌های دیگر، چیست؟ (*راهنمایی*: حل کردن این مسئله با در نظر گرفتن تقارن می‌تواند به ساده‌سازی قابل ملاحظه‌ای منجر شود).



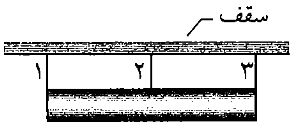
شکل ۱۲-۷۹ مسئله‌ی ۷۵.

۷۶ یک ژیمناستیک کار به جرم $۴۶/۰\,\mathrm{kg}$ در انتهای چوب موازنه‌ی یکنواختی، مانند شکل ۱۲-۸۰ ایستاده است. طول این چوب $۵/۰۰\,\mathrm{m}$ و جرم آن $۲۵۰\,\mathrm{kg}$ (بدون احتساب جرم دو پایه) است. فاصله‌ی هر یک از پایه‌ها از دو سر چوب $۰/۵۴۰\,\mathrm{m}$ است. نیروهایی را که (الف) پایه‌ی ۱ و (ب) پایه‌ی ۲، به چوب موازنه وارد می‌کنند، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، به‌دست آورید.



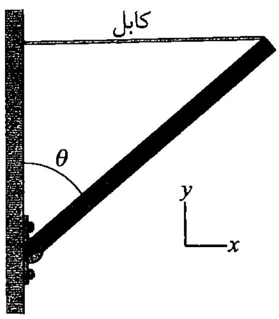
شکل ۱۲-۸۰ مسئله‌ی ۷۶.

۷۷ شکل ۱۲-۸۱ استوانه‌ای افقی به جرم $۳۰۰\,\mathrm{kg}$ را نشان می‌دهد. این استوانه به وسیله‌ی سه سیم فولادی به سقف آویخته شده است. سیم‌های ۱ و ۳ به دو سر استوانه متصل‌اند و سیم ۲ به مرکز استوانه وصل شده است. مساحت مقطع هر یک از سیم‌ها $۲/۰۰\times۱۰^{-۶}\,\mathrm{m^2}$ است. در آغاز (پیش از آویخته شدن استوانه) طول سیم‌های ۱ و ۳ برابر با $۲/۰۰۰۰\,\mathrm{m}$ و طول سیم ۲ به اندازه‌ی $۶/۰۰\,\mathrm{mm}$ درازتر است. اکنون، (پس از آویخته شدن استوانه) هر سه سیم کش آمده‌اند. نیروی کشش (الف) در سیم ۱ و (ب) در سیم ۲، چیست؟



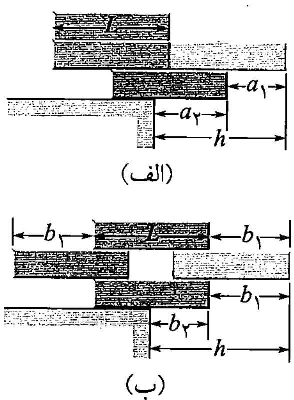
شکل ۱۲-۸۱ مسئله‌ی ۷۷.

۷۸ در شکل ۱۲-۸۲ میله‌ای یکنواخت به طول $۱۲/۰\,\mathrm{m}$ به وسیله‌ی یک کابل افقی و یک لولا تحت زاویه‌ی $\theta = ۵۰/۰^\circ$ نگه داشته شده است. نیروی کشش در این کابل $۴۰۰\,\mathrm{N}$ است. (الف) نیروی گرانشی وارد شده به میله و (ب) نیروی وارد شده به میله از سوی لولا، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟



شکل ۱۲-۸۲ مسئله‌ی ۷۸.

۷۹ چهار آجر مشابه و یکنواخت، هر یک به طول L، مطابق شکل ۱۲-۸۳، در روی یک میز به دو طریق بر روی هم چیده شده‌اند (با مسئله‌ی ۶۳ مقایسه کنید). می‌خواهیم مقدار پیش رفتگی h نسبت به لبه‌ی میز در هر دو آرایش بیشینه باشد. مقادیر بهینه‌ی فاصله‌های a_1، a_2، b_1 و b_2 را معین و مقدار h را برای هر دو آرایش حساب کنید.



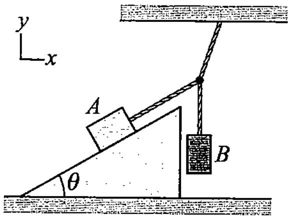
شکل ۱۲-۸۳ مسئله‌ی ۷۹.

۸۰ یک میله‌ی آلومینیومی استوانه‌ای با طول آغازی ۰٫۸۰۰۰ m و شعاع مقطع ۱۰۰۰٫۰ μm، از یک سر به گیره‌ای بسته شده و از سر دیگر با یک ماشین کشش به طور موازی با طول استوانه کشیده می‌شود. با این فرض که چگالی میله (جرم یکای حجم) تغییر نمی‌کند، بزرگی نیرویی که لازم است ماشین وارد کند تا شعاع میله به ۹۹۹٫۹ μm کاهش یابد، چقدر است؟ (تأثیر این نیرو از استقامت تسلیم فراتر نمی‌رود).

۸۱ تیری به طول L توسط سه نفر حمل می‌شود، یکی از سه نفر یک انتهای تیر را گرفته است و دو نفر دیگر تیر را در میان خودشان روی یک میله‌ی عرضی عمود بر تیر چنان قرار داده‌اند که وزن تیر در بین سه نفر به طور مساوی تقسیم شده است. این میله‌ی عرضی در چه فاصله‌ای از سر آزاد تیر باید قرار گیرد؟ (از جرم میله چشم‌پوشی کنید).

۸۲ تیر (با مقطع مربعی) نشان داده شده در شکل ۱۲-۶ الف و مسئله‌ی نمونه‌ی مربوط به آن را در نظر می‌گیریم، ضخامت تیر را چقدر باید انتخاب کنیم تا تنش تراکمی وارد شده به آن $\frac{1}{6}$ استقامت نهایی باشد؟

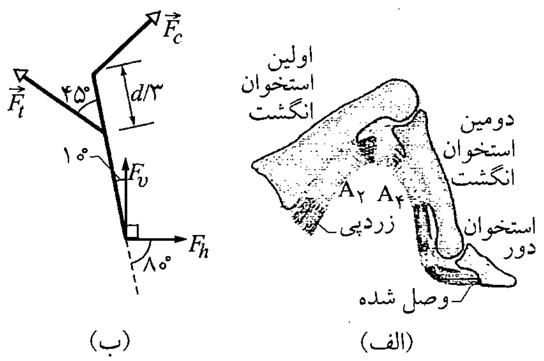
۸۳ شکل ۱۲-۸۴ آرایش ساکنی از دو جعبه‌ی گچ رنگی و سه طناب را نشان می‌دهد. جعبه‌ی A به جرم ۱۱٫۰ kg بر روی شیب‌راهه‌ای با زاویه‌ی $\theta =$ ۳۰٫۰° قرار دارد و جعبه‌ی B به جرم ۷٫۰۰ kg از یک طناب آویزان است. طناب متصل به جعبه‌ی A با سطح شیب‌راهه، که بی‌اصطکاک است، موازی است. (الف) نیروی کشش طناب بالایی چقدر است و (ب) زاویه‌ی این طناب با راستای افقی چیست؟



شکل ۱۲-۸۴ مسئله‌ی ۸۳.

۸۴ تاب موقتی با درست کردن یک حلقه در یک سر طناب و بستن سر دیگر آن به یک شاخه‌ی درخت، ساخته می‌شود. کودکی در این حلقه نشسته و طناب به طور قائم آویخته شده است؛ در این حال پدر کودک او را با نیروی افقی می‌کشد و کودک را به یک طرف جابه‌جا می‌کند. درست پیش از رها شدن کودک از حال سکون، زاویه‌ی طناب با راستای قائم ۱۵ درجه و نیروی کشش طناب ۲۸۰ N است. (الف) وزن کودک چقدر است؟ (ب) بزرگی نیروی (افقی) پدر که درست پیش از رها شدن، به کودک وارد می‌شود چیست؟ (پ) در هنگامی که نیروی بیشینه‌ی افقی وارد شده به کودک از سوی پدر ۹۳ N است، زاویه‌ی بیشینه‌ی طناب با راستای قائم چقدر می‌تواند باشد؟

۸۵ شکل ۱۲-۸۵ الف جزئیات انگشت صخره نورد در شکل ۱۲-۵۰ را در هنگام بالا رفتن نشان می‌دهد. زردپی انتهای ماهیچه‌های ساعد به استخوان دور انگشت وصل شده است. این زردپی در مسیر خود از چند غلاف راهبر به نام ***قرقره*** عبور می‌کند. قرقره‌ی A_2 به اولین استخوان انگشت و قرقره‌ی A_4 به دومین استخوان انگشت وصل شده است. برای کشیده شدن انگشت به سوی کف دست، ماهیچه‌های ساعد زردپی را از طریق این قرقره‌ها می‌کشند، درست مانند ریسمان‌های یک



شکل ۱۲-۸۵ مسئله‌ی ۸۵.

عروسک خیمه شب‌بازی که می‌تواند کشیده شود تا بخش‌های مختلف عروسک حرکت کنند. شکل ۱۲-۸۵ ب نمودار ساده شده‌ای از دومین استخوان انگشت به طول d است. نیروی کشش زردپی $\vec{F_t}$، در نقطه‌ای به این استخوان وارد می‌شود که زردپی به قرقره‌ی $A_۴$ وارد می‌شود و فاصله‌ی زردپی آن در راستای استخوان $d/۳$ است. اگر مؤلفه‌های نیرو در هر یک از چهار انگشت پیچیده شده در شکل ۱۲-۵۰ به صورت $F_h = ۱۳/۴N$ و $F_v = ۱۶۲/۴N$ باشند، بزرگی $\vec{F_t}$ چیست؟ این نتیجه احتمالاً قابل تحمل است، اما اگر صخره‌نورد تنها با یک یا دو انگشت آویزان شود، قرقره‌های $A_۲$ و $A_۴$ ممکن است پاره شوند، و این، یک بیماری متداول در میان صخره‌نوردهاست.

۸۶ در سقفی یک دَر فرار به مساحت $۰/۹۱m^۲$ دارای جرم $۱۱kg$ است که از یک طرف لولا شده است و در طرف مقابل دستگیره‌ای دارد. اگر گرانیگاه دَر تا مرکز به اندازه‌ی $۱۰cm$ به طرف لولا فاصله داشته باشد، بزرگی‌های نیروهایی که دَر به (الف) دستگیره و (ب) لولا وارد می‌کنند، چقدر است؟

۸۷ ذره‌ای تحت تأثیر نیروهای (برحسب نیوتون) $\vec{F_۱} = ۸/۴۰\hat{i} - ۵/۷۰\hat{j}$ و $\vec{F_۲} = ۱۶/۰\hat{i} + ۴/۱۰\hat{j}$ قرار می‌گیرد. (الف) مؤلفه‌ی x و (ب) مؤلفه‌ی y نیروی $\vec{F_۳}$ که با مجموع این نیروها متوازن می‌شود، چیست؟ (پ) زاویه‌ی $\vec{F_۳}$ نسبت به محور $+x$ چقدر است؟

۸۸ ارتفاع برج لمیده‌ی پیزا $۵۹/۱m$ و قطر آن $۷/۴۴m$ است. نوک این برج به اندازه‌ی $۴/۰۱m$ نسبت به راستای قائم جابه‌جا شده است. این برج را به صورت استوانه‌ای یکنواخت در نظر بگیرید. (الف) چه مقدار جابه‌جایی اضافی در بالای نوک برج موجب می‌شود برج را در آستانه‌ی چپه شدن قرار دهد؟ (ب) در این صورت زاویه‌ی برج با راستای قائم چقدر خواهد بود؟

فصل ۱۳

گرانش

۱۳-۱ قانون گرانش نیوتون

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۳-۱ قانون گرانش نیوتون را برای ربط دادن نیروی گرانشی میان دو ذره به جرم‌ها و فاصله‌ی جدایی آن‌ها به کار ببرید.

۱۳-۲ مشخص کنید که یک پوسته‌ی کروی یکنواخت از ماده یک ذره‌ی واقع درخارج پوسته را چنان جذب می‌کند که گویی همه‌ی جرم پوسته به صورت یک ذره در مرکزش متمرکز شده است.

۱۳-۳ برای نشان دادن نیروی گرانشی مؤثر بر یک ذره از سوی ذره‌ی دیگر، یا یک توزیع کروی یکنواخت از ماده، نمودار جسم ـ آزاد را رسم کنید.

نکته‌های کلیدی

● در عالم، هر ذره ذره‌ای دیگر را با یک نیروی گرانشی جذب می‌کند، که بزرگی‌اش برابر است با

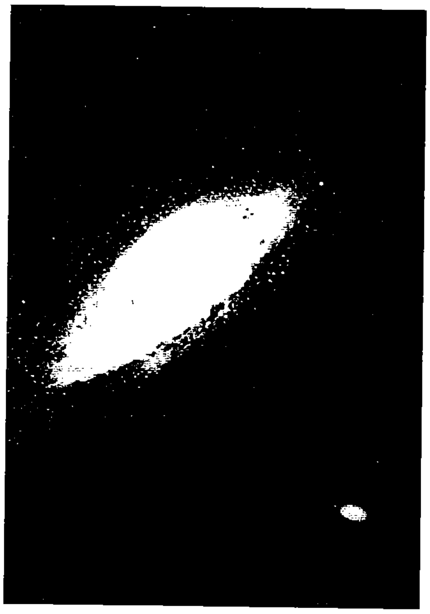
$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \text{(قانون گرانش نیوتون)}$$

که در آن m_1 و m_2 جرم‌های ذره‌ها، r فاصله‌ی میان آن‌ها و G (برابر با $6/67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$) ثابت گرانش است.

● نیروی گرانشی میان اجسام گسترده، با جمع کردن (انتگرال‌گیری) نیروهای وارد شده به ذرات فردی درون اجسام به دست می‌آید. اما اگر یکی از این اجسام پوسته‌ای کروی یکنواخت، یا جسم توپری با تقارن کروی باشد، نیروی گرانشی برایندی را که به یک جسم ***خارجی*** وارد می‌کند، می‌توان به گونه‌ای حساب کرد که همه‌ی جرم پوسته، یا جسم توپر، در مرکزش واقع شده است.

فیزیک در این باره چه می‌گوید؟

یکی از هدف‌های دیرینه‌ی دانش فیزیک، درک ماهیت نیروی گرانشی بوده است ـ نیرویی که ما را روی زمین، ماه را در مدار خود به دور زمین، و زمین را در مدار خود به دور خورشید نگه‌می‌دارد. این نیرو در سراسر کهکشان راه شیری نیز اثرمی‌کند و در این کهکشان میلیاردها میلیارد



شکل ۱۳-۱ عکسی از کهکشان امرأةالمسلسله، که در فاصله‌ی $۲/۳\times ۱۰^۶$ سال نوری از زمین واقع شده است و با چشم غیرمسلح به زحمت دیده می‌شود. این کهکشان خیلی شبیه کهکشان خودمان، راه شیری، است.

ستاره و عده‌ی بی‌شماری از مولکول‌ها و ذرات گرد و غبار میان ستاره‌ها را در کنار هم نگه می‌دارد. زمین در جایی نزدیک به کناره‌ی این مجموعه‌ی قرص مانند از ستاره‌ها و سایر مواد در فاصله‌ی $۲/۶\times ۱۰^۴$ سال نوری (برابر با $۲/۵\times ۱۰^{۲۰} m$) از مرکز کهکشان قرار دارد و به آرامی به دور آن گردش می‌کند.

نیروی گرانشی به فضای میان کهکشان‌ها هم می‌رسد و گروه کهکشان‌های محلی را در کنار هم نگه می‌دارد؛ این گروه علاوه بر کهکشان راه شیری، کهکشان امرأة المسلسله[1]، یا زن به زنجیر بسته (شکل ۱۳-۱)، در فاصله‌ی $۲/۳\times ۱۰^۶$ سال نوری از زمین، و هم‌چنین، چندین کهکشان کوتوله‌ی سفید نزدیک‌تر، مانند ابر ماژلانی بزرگ[2] را هم شامل می‌شود. این گروه محلی بخشی از اَبَر خوشه‌ی[3] کهکشان‌های محلی است که با نیروی گرانشی به سوی ناحیه‌ی پر جرمی از فضا به نام رباینده‌ی بزرگ[4]، کشیده می‌شود. به نظر می‌رسد این ناحیه در فاصله‌ای در حدود $۳/۰\times ۱۰^۸$ سال نوری از زمین و در سمت مخالف کهکشان راه شیری قرار دارد. دامنه‌ی تأثیر نیروی گرانشی حتی از این حد هم فراتر می‌رود، زیرا همین نیروست که می‌کوشد کل عالم در حال انبساط را در کنار هم نگه دارد.

این نیرو مسئول ایجاد اسرارآمیزترین ساختار عالم، یعنی ***سیاه‌چاله***[5]، نیز هست. وقتی ستاره‌ای خیلی بزرگ‌تر از خورشید ما در اثر تمام شدن سوخت خاموش می‌شود، نیروی گرانشی میان تمام ذرات آن می‌تواند موجب شود ستاره در خودش برُمبد و در نتیجه یک سیاه‌چاله به وجود آید. نیروی گرانشی در سطح چنین ستاره‌ی رمبیده‌ای به قدری قوی است که، نه ذرات دیگر و نه نور، می‌توانند از سطح آن فرار کنند (از این رو، آن را «سیاه‌چاله» نامیده‌اند). هر ستاره‌ای که بیش از حد به سیاه‌چاله‌ای نزدیک شود، ممکن است بر اثر نیروی گرانشی قوی سیاه‌چاله از هم بپاشد و پاره‌های آن به درون سیاه‌چاله کشیده شوند. گیراندازی‌های گوناگونی از این نوع منجر به پدید آمدن یک ***سیاه‌چاله‌ی اَبَرسنگین*** می‌شود. امروزه وجود این‌گونه غول‌های اسرارآمیز در عالم عادی به نظر می‌رسد. در واقع، چنین غولی در مرکز کهکشان راه شیری ما پنهان شده است ـ این سیاه‌چاله قوس A^* نام دارد و جرمش در حدود $۳/۷\times ۱۰^۶$ برابر جرم خورشید است. نیروی گرانشی در نزدیکی این سیاه‌چاله چنان قوی است که موجب می‌شود ستاره‌ها به دور این سیاه‌چاله حرکت کنند و یک مدار را در مدت کوتاه ۱۵/۲ سال بپیمایند.

نیروی گرانشی گرچه هنوز هم به طور کامل شناخته نشده است، نقطه‌ی آغاز شناخت آن را باید ***قانون گرانش ایزاک نیوتون*** بدانیم.

قانون گرانش نیوتون

پیش از به دست آوردن معادله‌ها اجازه دهید درباره‌ی چیزی بیندیشیم که انتظار داریم

1. Andromeda 2. Large Magellanic Cloud 3. Supercluster 4. Great Attractor 5. black hole

همین‌گونه باشد. ما در روی زمین، به تقریب، به صورت سرپا نگه داشته شده‌ایم، اما این نیرو آن‌قدر قوی نیست که برای رفتن به مدرسه بخزیم (اگرچه گاهی ممکن است خانه را به صورت خزیده ترک کنیم) و آن‌قدر هم ضعیف نیست که موقع گام برداشتن سرمان به سقف بخورد. این نیرو، به تقریب، عمود بر زمین به ما وارد می‌شود به گونه‌ای که بر روی زمین می‌مانیم، اما (مانند آنکه در هنگام نشستن سر کلاس ناجور است) به سوی یکدیگر، یا اشیای پیرامون خود، کشیده نمی‌شویم (وگرنه عبارت «رسیدن به اتوبوس» معنی دیگری پیدا می‌کرد). این جاذبه آشکارا بستگی به این دارد که در بدن ما و اشیای دیگر چقدر «ماده» موجود است. زمین «ماده»ی زیادی دارد و جاذبه‌ی بزرگی تولید می‌کند، اما یک فرد دیگر «ماده»ی اندکی دارد و جاذبه‌ای کمتر (حتی ناچیز) تولید می‌کند. علاوه بر این، این «ماده» همیشه «ماده»ی دیگر را جذب می‌کند و هرگز آن را دفع نمی‌کند (وگرنه یک عطسه‌ی شدید می‌توانست ما را در مداری به دور زمین قرار دهد).

در گذشته مردم به وضوح می‌دانستند که به پایین‌سو کشیده می‌شوند (به ویژه، هنگامی که راه می‌رفتند یا به زمین می‌افتادند)، و باور آن‌ها این بود که این نیروی پایین‌سو یگانه و مختص زمین است و به حرکت ظاهری اشیای نجومی موجود در آسمان ربطی ندارد. اما در سال ۱۶۶۵/۱۰۴۴ **آیزاک نیوتون**[1] ۲۳ ساله متوجه شد که این نیرو مسئول نگهداری ماه در مدار خودش است. در واقع، او نشان داد که هر جسم موجود در عالم هر جسم دیگر را جذب می‌کند. این تمایل اجسام برای حرکت کردن به سوی یکدیگر **گرانش** نامیده شد، و «ماده»ی مربوط به آن، جرم هر جسم است. اگر این افسانه درست باشد که یک سیب در حال سقوط سبب شد تا نیوتون **قانون گرانش** خود را ارائه دهد، پس، میان جرم سیب و جرم زمین جاذبه‌ای وجود دارد. این جاذبه محسوس است زیرا جرم زمین بسیار زیاد است، اما این نیروی جاذبه در حدود $۰/۸\,\mathrm{N}$ است. جاذبه‌ی میان دو فردی که در اتوبوس در کنار هم ایستاده‌اند (خوشبختانه) بسیار کم (کمتر از $۱\mu\mathrm{N}$) و نامحسوس است.

محاسبه‌ی جاذبه‌ی گرانشی میان اشیای گسترده‌ای مانند دو فرد، مشکل است. در اینجا به قانون نیروی نیوتون در میان دو ***ذره*** (که اندازه ندارند) توجه می‌کنیم. فرض کنید جرم‌های آن‌ها $m_۱$ و $m_۲$ و فاصله‌ی میان آن‌ها r باشد. در نتیجه، بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به هر فرد به خاطر حضور فرد دیگر، برابر است با

$$F = G\frac{m_۱ m_۲}{r^۲} \quad \text{(قانون گرانش نیوتون)} \qquad (۱۳-۱)$$

که در آن G **ثابت گرانش** است:

$$G = ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{N \cdot m^۲ / kg^۲}$$
$$G = ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{m^۳ / kg \cdot s^۲} \qquad (۱۳-۲)$$

در شکل ۱۳-۲ الف، $\vec{F}$ نیروی گرانشی است که به ذره‌ی ۱ (با جرم $m_۱$) از سوی ذره‌ی ۲

1. Isaac Newton

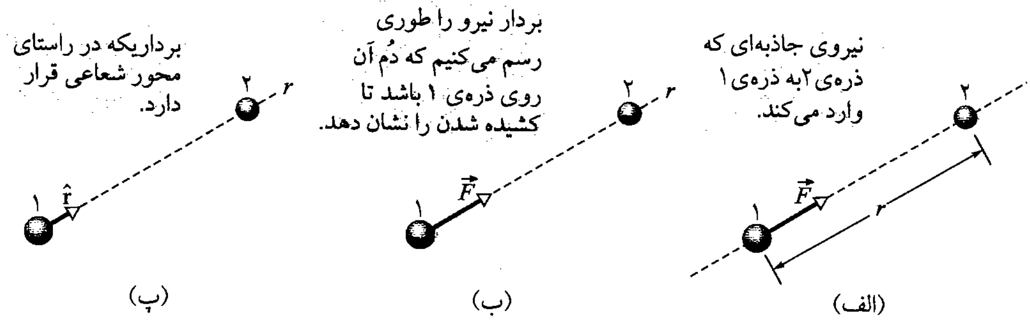
(با جرم m_2) وارد می‌شود. این نیرو به‌سوی ذره‌ی ۲ است و ***نیروی جاذبه*** نامیده می‌شود زیرا ذره‌ی ۱ به سوی ذره‌ی ۲ جذب می‌شود. بزرگی این نیرو از معادله‌ی ۱۳-۱ به دست می‌آید. نیروی $\vec{F}$ را می‌توان در جهت مثبت یک محور r توصیف کرد که به طور شعاعی از ذره‌ی ۱ تا ذره‌ی ۲ رسم شده است (شکل ۱۳-۲ ب). هم‌چنین، $\vec{F}$ را می‌توان با استفاده کردن از یک بردار یکه‌ی شعاعی $\hat{r}$ (بردار بی‌بُعد با بزرگی ۱) نیز توصیف کرد و این نیرو در راستای محور r ***به برون سوی*** ذره‌ی ۱ است (شکل ۱۳-۲ پ). بنابراین، نیروی وارد شده به ذره‌ی ۱ بنا به معادله‌ی ۱۳-۱، برابر است با

$$\vec{F} = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\hat{r} \qquad (۱۳-۳)$$

نیروی گرانشی وارد شده به ذره‌ی ۲ از سوی ذره‌ی ۱ از لحاظ بزرگی دارای همان نیرویی است که به ذره‌ی ۱، اما در سوی مخالف، وارد می‌شود. این دو نیرو یک زوج نیروی قانون سوم نیوتون را تشکیل می‌دهند و می‌توان گفت که همان نیروی گرانشی میان آن دو ذره است که بزرگی‌اش از معادله‌ی ۱۳-۱ به دست می‌آید. این نیروی میان دو ذره، توسط اشیای دیگر، حتی اگر در بین دو ذره واقع شده باشند، تغییر نمی‌کند. به عبارت دیگر، هیچ شیئی نمی‌تواند مانع تأثیر نیروی گرانشی ناشی از یک ذره روی ذره‌ی دیگر شود.

شدت نیروی گرانشی ـ یعنی، میزان قدرتی که با آن دو ذره با جرم‌های معین و به فاصله‌ی جدایی معین همدیگر را جذب می‌کنند ـ به مقدار ثابت گرانش G، بستگی دارد. اگر G ـ با رویداد نامنتظره‌ای ـ ناگهان ۱۰ برابر بزرگ‌تر شود، ما بر اثر نیروی گرانشی به سطح زمین فشرده می‌شویم. هرگاه G به اندازه‌ی ۱۰ برابر کوچک‌تر شود، جاذبه‌ی زمین چنان ضعیف می‌شود که می‌توانیم با یک جهش خود را به بالای یک ساختمان بلند برسانیم.

ناذره‌ها. گرچه قانون گرانش نیوتون دقیقاً در مورد ذرات به کار می‌رود، آن را درباره‌ی اشیای حقیقی نیز می‌توان به کار برد، به شرط آنکه ابعاد اشیا در مقایسه با فاصله‌ی میان آن‌ها کوچک باشد. ماه و زمین آن‌قدر از هم دورند، که با یک تقریب خوب، می‌توان آن‌ها را مانند ذره درنظر گرفت. اما در این صورت، موضوع سیب و زمین چه می‌شود؟ در ارتباط با سیب،



شکل ۱۳-۲ (الف) نیروی گرانشی $\vec{F}$ که به ذره‌ی ۱ از سوی ذره‌ی ۲ وارد می‌شود، یک نیروی جاذبه است زیرا ذره‌ی ۱ به سوی ذره‌ی ۲ جذب می‌شود. (ب) نیروی $\vec{F}$ در راستای محور مختصه‌ی شعاعی r از ذره‌ی ۱ به ذره‌ی ۲ وارد می‌شود. (پ) نیروی $\vec{F}$ در جهت بردار یکه‌ی $\hat{r}$ در راستای محور r اثر می‌کند.

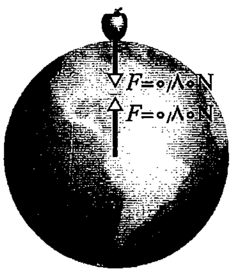
با توجه به سطح گسترده و هموار زمین که در زیر سیب تا افق ادامه می‌یابد، به طور مسلم زمین را نمی‌توان مانند یک ذره در نظر گرفت.

نیوتون مسئله‌ی سیب ـ زمین را با اثبات قضیه‌ی مهمی به نام ***قضیه‌ی پوسته*** حل کرد:

پوسته‌ی کروی یکنواختی از ماده، یک ذره‌ی واقع در بیرون پوسته را چنان جذب می‌کند که گویی تمام جرم آن در مرکزش متمرکز شده است.

زمین را می‌توان ترکیبی از پوسته‌هایی پنداشت که یکی درون دیگری قرار دارد و هر پوسته مانند آنکه جرمش در مرکز قرار دارد، ذره‌ی بیرون از سطح زمین را جذب می‌کند. بنابراین، در ارتباط با سیب، زمین مانند ***ذره‌ای رفتار می‌کند*** که در مرکزش واقع شده و دارای همان جرم زمین است.

زوج نیروی قانون سوم. فرض می‌کنیم، مطابق شکل ۱۳-۳، زمین سیبی را با نیروی ۰/۸۰ نیوتون به سمت پایین می‌کشد. در این صورت، سیب باید با نیرویی به بزرگی ۰/۸۰ نیوتون، که به مرکز زمین وارد می‌شود، زمین را به سمت بالا بکشد. با توجه به فصل ۵، می‌دانیم که این نیروها یک زوج نیروی قانون سوم نیوتون تشکیل می‌دهند. این نیروها، اگرچه از نظر بزرگی یکسان‌اند، اما وقتی سیب را رها می‌کنیم شتاب‌های متفاوتی به وجود می‌آورند. شتاب مربوط به سیب در حدود $۹/۸\,m/s^2$ است. این، همان شتاب آشنای سقوط یک جسم در نزدیکی سطح زمین است. شتاب اندازه‌گیری شده برای زمین در چارچوب مرجع متصل به مرکز جرم دستگاه سیب ـ زمین تنها در حدود $۱\times۱۰^{-۲۵}m/s^2$ است.



شکل ۱۳-۳ سیب زمین را با نیرویی به سمت بالا می‌کشد و زمین درست با نیرویی به همان اندازه، سیب را به سمت پایین می‌کشد.

خودآزمایی ۱

ذره‌ای به نوبت در بیرون چهار شیء، هر کدام به جرم m، قرار داده می‌شود. این اشیا عبارت‌اند از: (۱) یک کره‌ی بزرگ توپر و یکنواخت، (۲) یک پوسته‌ی کروی بزرگ و یکنواخت، (۳) یک کره‌ی کوچک توپر و یکنواخت و (۴) یک پوسته‌ی کوچک یکنواخت. در هر حالت، فاصله‌ی میان ذره و مرکز جرم شیء d است. این اشیا را با توجه به بزرگی نیروی گرانشی که به ذره وارد می‌کنند، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

۲-۱۳ گرانش و اصل برهم نهی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۳-۴ هرگاه به ذره‌ای بیش از یک نیروی گرانشی وارد شود، نمودار جسم ـ آزاد نشان دهنده‌ی آن نیروها را رسم کنید و دُم بردارهای نیرو را بر روی ذره قرار دهید.

۱۳-۵ هرگاه به ذره‌ای بیش از یک نیروی گرانشی وارد شود، نیروی برایند را با جمع کردن نیروهای فردی به صورت بردار، پیدا کنید.

نکته‌های کلیدی

● نیروهای گرانشی از اصل برهم نهی پیروی می‌کنند؛ یعنی هرگاه n ذره برهم کنش داشته باشند نیروی برایند $\vec{F}_{۱,\text{net}}$ مؤثر بر ذره‌ی شماره ۱ به طور هم‌زمان برابر با مجموع نیروهای وارد شده به آن ذره از سوی همه‌ی ذرات دیگر است:

$$\vec{F}_{۱,\text{net}} = \sum_{i=۲}^{n} \vec{F}_{۱i}$$

که در آن مجموع، مجموع برداری نیروهای $\vec{F}_{۱i}$ واردشده به ذره‌ی ۱ از سوی ذرات ۲، ۳ ، ... ، n است.

● نیروی گرانشی $\vec{F}_۱$ وارد شده به یک ذره از سوی جسمی گسترده، با تقسیم کردن جسم به واحدهای جرم دیفرانسیلی dm، که هر یک نیروی دیفرانسیلی $d\vec{F}$ را به ذره وارد می‌کنند، و سپس با انتگرال گرفتن روی تمام واحدها برای تعیین مجموع آن نیروها به دست می‌آید:

$$\vec{F}_۱ = \int d\vec{F}$$

گرانش و اصل برهم نهی

گروهی از ذرات را در اختیار داریم. می‌خواهیم نیروی گرانشی خالص (یا برایند) وارد شده به هر یک از سوی ذرات دیگر را با استفاده کردن از **اصل برهم نهی** پیدا کنیم. این اصل، یک اصل کلی است که می‌گوید، یک اثر خالص برابر با مجموع اثرهای فردی است. در اینجا، برمبنای این اصل باید نخست نیروی وارد شده به ذره‌ی مورد نظر از سوی ذرات دیگر را محاسبه و سپس، مانند کاری که در فصل‌های پیش انجام دادیم، نیروی برایند را با جمع کردن نیروها به طریق برداری معین کنیم.

اکنون به دو نکته‌ی مهم در جمله‌ی آخر (که شاید با سرعت خوانده باشید) توجه کنید. (۱) نیروها بردارند و می‌توانند جهت‌های متفاوت داشته باشند و از این رو، باید آن‌ها را ***مانند بردارها با هم جمع کنیم*** و جهت‌های‌شان را در نظر بگیریم. (اگر دو نفر شما را در جهت‌های مخالف بکشند نیروی برایند آن‌ها متفاوت با حالتی خواهد بود که شما را در یک جهت بکشند). (۲) ما نیروهای فردی را با هم ***جمع می‌کنیم***. به این نکته فکر کنید که اگر نیروی برایند به ضریبی بستگی داشت که از نیرویی به نیروی دیگر و بسته به موقعیت آن‌ها تغییر می‌کرد، یا اگر وجود یک نیرو به گونه‌ای بزرگی نیروی دیگر را تقویت می‌کرد، چگونه زندگی در دنیا ناممکن می‌شد. نه؛ خوشبختانه، دنیا فقط به جمع برداری ساده‌ی نیروها نیاز دارد.

برای n ذره‌ی برهم کنش کننده روی ذره‌ی ۱، اصل برهم نهی مربوط به نیروهای گرانشی را می‌توان چنین نوشت

$$\vec{F}_{۱,\text{net}} = \vec{F}_{۱۲} + \vec{F}_{۱۳} + \vec{F}_{۱۴} + \vec{F}_{۱۵} + \cdots + \vec{F}_{۱n} \qquad (۴-۱۳)$$

در اینجا $\vec{F}_{۱,\text{net}}$ نیروی خالص وارد شده به ذره‌ی ۱ از سوی ذرات دیگر است. مثلاً، $\vec{F}_{۱۳}$ نیروی وارد شده به ذره‌ی ۱ از سوی ذره‌ی ۳ است. معادله‌ی بالا را می‌توان به صورت یک مجموع برداری فشرده‌تر نوشت:

$$\vec{F}_{1,\mathrm{net}} = \sum_{i=2}^{n} \vec{F}_{1i} \qquad (۱۳-۵)$$

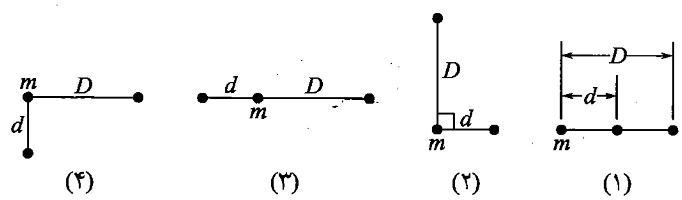
اشیای حقیقی. حال، درباره‌ی نیروی گرانشی وارد شده به ذره از سوی یک شیء حقیقی (گسترده) چه باید کرد؟ برای تعیین این نیرو شیء را به پاره‌های به نسبت کوچک، که بتوان آن‌ها را ذره پنداشت، تقسیم می‌کنیم و سپس با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۳-۵ مجموع برداری نیروهای وارد شده به ذره از سوی همه‌ی پاره‌ها را به دست می‌آوریم. درحالت حدی، شیء گسترده را به پاره‌های دیفرانسیلی به جرم dm، که هر کدام نیروی دیفرانسیلی $d\vec{F}$ را به ذره وارد می‌کنند، می‌توان تقسیم کرد. در این حالت حدی، معادله‌ی مجموع ۱۳-۵ به انتگرال تبدیل می‌شود، و داریم

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F} \qquad (۱۳-۶)$$

در اینجا انتگرال روی کل شیء گسترده گرفته می‌شود و شاخص پایین « net» حذف شده است. اگر شیء کره‌ای یکنواخت یا پوسته‌ای کروی باشد، با فرض آنکه جرم شیء در مرکزش متمرکز شده است، می‌توان انتگرال‌گیری معادله‌ی ۱۳-۶ را کنار گذاشت و از معادله‌ی ۱۳-۱ استفاده کرد.

خودآزمایی ۲

در شکل زیر، چهار آرایش از سه ذره‌ی با جرم‌های مساوی را نشان می‌دهد. (الف) این آرایش‌ها را با توجه به بزرگی نیروی گرانشی برایند وارد شده به ذره‌ی مشخص شده با m از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. (ب) در آرایش ۲، راستای نیروی برایند به خط با طول d نزدیک‌تر است یا به خط با طول D؟



مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۳-۱ نیروی گرانشی برایند دو بعدی سه ذره

شکل ۱۳-۴ الف آرایشی از سه ذره را نشان می‌دهد، که در آن جرم ذره‌ی ۱ برابر با $m_1 = ۶/۰\,\mathrm{kg}$، جرم ذره‌های ۲ و ۳ برابر با $m_2 = m_3 = ۴/۰\,\mathrm{kg}$ و $a = ۲/۰\,\mathrm{cm}$ است. نیروی گرانشی $\vec{F}_{1,\mathrm{net}}$، که به ذره‌ی ۱ از سوی ذره‌های دیگر وارد می‌شود، چیست؟

نکته‌های کلیدی

(۱) چون چند ذره وجود دارد، بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به ذره‌ی ۱ از سوی ذره‌های دیگر را می‌توان از معادله‌ی ۱۳-۱ $(F = Gm_1m_2/r^2)$ به‌دست آورد. (۲) جهت هریک از نیروهای

گرانشی وارد شده به ذره‌ی ۱، به سوی ذره‌ی به وجود آورنده‌ی آن نیرو است. (۳) چون نیروها در راستای یک محور قرار ندارند برای به دست آوردن نیروی برایند آن‌ها به سادگی ***نمی‌توانیم*** بزرگی‌های آن‌ها یا مؤلفه‌های آن‌ها را با هم جمع یا از هم کم کنیم، بلکه باید نیروها را به صورت برداری با هم جمع کنیم.

محاسبات: با توجه به معادله‌ی ۱۳-۱، بزرگی نیروی $\vec{F}_{۱۲}$ که به ذره‌ی ۱ از سوی ذره‌ی ۲ وارد می‌شود، برابر است با

$$F_{۱۲} = G\frac{m_۱ m_۲}{a^۲} \qquad (۱۳-۷)$$

$$F_{۱۲} = \frac{(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{m^۳/kg\cdot s^۲})(۶/۰\,\mathrm{kg})(۴/۰\,\mathrm{kg})}{(۰/۰۲۰\,\mathrm{m})^۲} \Rightarrow$$

$$F_{۱۲} = ۴/۰۰\times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{N}$$

به همین ترتیب، بزرگی نیروی $\vec{F}_{۱۳}$ که به ذره‌ی ۱ از سوی ذره‌ی ۳ وارد می‌شود، برابر است با

$$F_{۱۳} = G\frac{m_۱ m_۳}{(۲a)^۲} \qquad (۱۳-۸)$$

$$F_{۱۳} = \frac{(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{m^۳/kg\cdot s^۲})(۶/۰\,\mathrm{kg})(۴/۰\,\mathrm{kg})}{(۰/۰۴۰\,\mathrm{m})^۲} \Rightarrow$$

$$F_{۱۳} = ۱/۰۰\times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{N}$$

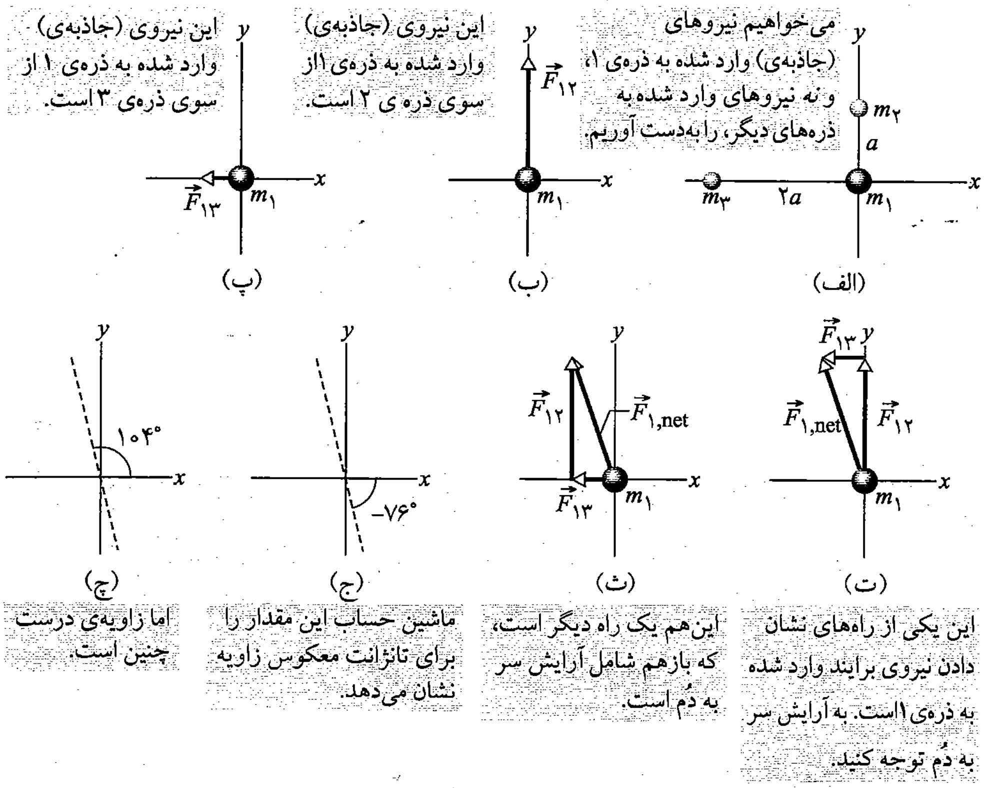
نیروی $\vec{F}_{۱۲}$ در جهت مثبت محور y قرار دارد (شکل ۱۳-۴ ب) و فقط دارای مؤلفه‌ی y نیرو، یعنی $F_{۱۲}$، است. به همین ترتیب، نیروی $\vec{F}_{۱۳}$ در جهت منفی محور x قرار دارد و فقط دارای مؤلفه‌ی x نیرو، یعنی $-F_{۱۳}$، است (شکل ۱۳-۴ پ). (به‌این نکته‌ی مهم توجه کنید: ما در نمودارهای نیرو دُم بردار نیرو را روی ذره‌ای رسم می‌کنیم که به آن نیرو وارد می‌شود. اگر نیروها را به گونه‌ای دیگر رسم کنیم، به ویژه در امتحان، مرتکب خطا خواهیم شد).

برای تعیین نیروی برایند $\vec{F}_{۱,\mathrm{net}}$ وارد شده به ذره‌ی ۱، باید دو نیرو را به صورت برداری با هم جمع کنیم (شکل‌های ۱۳-۴ ت و ث). ما این کار را با یک ماشین حساب ویژه‌ی محاسبات برداری هم می‌توانیم انجام دهیم. اما در اینجا $-F_{۱۳}$ و $F_{۱۲}$ خود مؤلفه‌های x و y نیروی $\vec{F}_{۱,\mathrm{net}}$ هستند. بنابراین، با استفاده کردن از معادله‌ی ۳-۶ ابتدا بزرگی و سپس جهت $\vec{F}_{۱,\mathrm{net}}$ را معین می‌کنیم. بزرگی این نیرو برابر است با

$$F_{۱,\mathrm{net}} = \sqrt{(F_{۱۲})^۲ + (-F_{۱۳})^۲}$$

$$F_{۱,\mathrm{net}} = \sqrt{(۴/۰۰\times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{N})^۲ + (-۱/۰۰\times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{N})^۲} \Rightarrow$$

$$F_{۱,\mathrm{net}} = ۴/۱\times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{N} \qquad \text{(پاسخ)}$$



شکل ۱۳-۴ (الف) نمودار آرایشی از سه ذره. نمودار نیروی وارد شده به ذره‌ی ۱ از سوی (ب) ذره‌ی ۲ و (پ) ذره‌ی ۳. (ت) تا (چ) روش‌های مختلف ترکیب نیروها برای به دست آوردن بزرگی و سمت‌گیری نیروی برایند.

زاویه‌ی $\vec{F}_{1,\text{net}}$ نسبت به محور x مثبت، بـا اسـتفاده کـردن از معادله‌ی ۳-۶ چنین به دست می‌آید

$$\theta = \tan^{-1}\frac{F_{12}}{-F_{13}} = \tan^{-1}\frac{4/00\times10^{-6}\text{N}}{-1/00\times10^{-6}\text{N}} = -76^\circ$$

آیا پاسخ به دست آمده منطقی است (شکل ۱۳-۴ ج)؟ نه، چـون راستای $\vec{F}_{1,\text{net}}$ باید در بین راستاهای $\vec{F}_{12}$ و $\vec{F}_{13}$ واقع شود. با توجه به فصل ۳ یادآوری می‌شود که صفحه‌ی ماشین حساب تنها یکی از دو پاسخ ممکن تابع $\tan^{-1}$ را نمایش می‌دهد. با افزودن ۱۸۰ درجه به پاسخ به دست آمده پاسخ دیگری نیز پیدا می‌شـود، که برابر است با

$$-76^\circ + 180^\circ = 104^\circ \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

که زاویه‌ای منطقـی بـرای جهـت نیـروی $\vec{F}_{1,\text{net}}$ اسـت (شـکل ۱۳-۴ ج).

۳-۱۳ گرانش در نزدیکی سطح زمین

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۳-۶ تفاوت میان شتاب سقوط آزاد و شتاب گرانشی را تمیز دهید.

۱۳-۷ شتاب گرانشی در نزدیکی و در بیـرون یـک جسـم نجـومی کروی یکنواخت را حساب کنید.

۱۳-۸ تفاوت میان وزن اندازه‌گیری شده و بزرگی نیروی گرانشی را تمیز دهید.

نکته‌های کلیدی

- شتاب گرانشی a_g یک ذره (به جرم m) تنها از نیروی گرانشی وارد شده به آن ناشی می‌شود. وقتی ذره در فاصله‌ی r از مرکز یک جسم کروی یکنواخت به جرم M قرار دارد، بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به آن F، از معادله‌ی ۱۳-۱ به دست می‌آید. بنابراین، بـا استفاده کردن از قانون دوم نیوتون:

$$F = ma_g$$

داریم

$$a_g = \frac{GM}{r^2}$$

- چون جرم زمین به طور یکنواخت توزیع نشده است، چون زمین کره‌ی کامل نیست، و چون زمیـن مـی‌چرخـد، شـتاب سـقوط آزاد واقعی $\vec{g}$ یک ذره در نزدیکی زمین، اندکی با شتاب گرانشی $\vec{a}_g$ و وزن ذره (مساوی با mg) با بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به آن، تفاوت دارد.

گرانش در نزدیکی سطح زمین

فرض می‌کنیم زمین کره‌ای یکنواخت بـا جـرم M اسـت. در ایـن صـورت، بزرگـی نیـروی گرانشی مؤثر از سوی زمین به ذره‌ای به جرم m، واقع در بیـرون و بـه فاصـله‌ی r از مرکـز زمین، با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۳-۱ برابر است با

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{۱۳-۹}$$

اگر ذره را رها کنیم، تحت اثر نیروی گرانشی $\vec{F}$ با شتابی کـه **شـتاب گرانشـی** $\vec{a}_g$، نامیـده

جدول ۱۳-۱ تغییرات a_g برحسب ارتفاع از سطح زمین

ارتفاع (km)	$a_g (m/s^2)$	نمونه‌ی ارتفاع
۰	۹/۸۳	سطح زمین به طور متوسط
۸/۸	۹/۸۰	قله‌ی اورست
۳۶/۶	۹/۷۱	بالاترین صعود با بالون سرنشین‌دار
۴۰۰	۸/۷۰	مدار شاتل فضایی
۳۵۷۰۰	۰/۲۲۵	مدار ماهواره‌ی مخابراتی

می‌شود، به سوی مرکز زمین سقوط می‌کند. بنا به قانون دوم نیوتون رابطه‌ی میان بزرگی‌های F و a_g چنین است

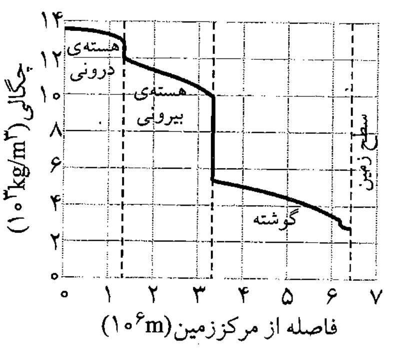
$$F = ma_g \tag{۱۳-۱۰}$$

اکنون، با جانشانی F از معادله‌ی ۱۳-۹ در معادله‌ی ۱۳-۱۰ و حل کردن معادله نسبت به a_g، داریم

$$a_g = \frac{GM}{r^2} \tag{۱۳-۱۱}$$

جدول ۱۳-۱ مقادیر محاسبه شده‌ی a_g را برای ارتفاع‌های مختلف بالای سطح زمین نشان می‌دهد. توجه کنید که a_g حتی در ارتفاع ۴۰۰km نیز قابل توجه است.

از پودمان ۵-۱ به بعد با چشم‌پوشی از دوران واقعی زمین فرض شده است که زمین یک چارچوب مرجع لَخت است. این ساده‌سازی به ما اجازه داده است که فرض کنیم برای یک ذره شتاب سقوط آزاد واقعی g، همان شتاب گرانشی (یعنی، در اینجا همان a_g) است. علاوه بر این، فرض کردیم که g دارای مقدار ثابت $۹/۸\,m/s^2$ در روی زمین است. اما g اندازه‌گیری شده با a_g حساب شده با معادله‌ی ۱۳-۱۱، به سه دلیل تفاوت دارد: (۱) جرم زمین به طور یکنواخت توزیع نشده است، (۲) زمین کره‌ی کامل نیست، و (۳) زمین می‌چرخد. علاوه بر این، چون g با a_g تفاوت دارد، وزن اندازه‌گیری شده‌ی یک ذره mg، به همان دلیل ذکر شده، با بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به ذره، بنا به معادله‌ی ۱۳-۹، متفاوت است. اکنون این سه دلیل را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



شکل ۱۳-۵ نمودار تغییرات چگالی زمین به صورت تابعی از فاصله تا مرکز. در این نمودار محدوده‌های هسته‌ی جامد درونی، هسته‌ی عمدتاً مایع بیرونی، و گوشته‌ی جامد، نشان داده شده‌اند، اما پوسته‌ی زمین نازک‌تر از آن است که بتوان آن را به وضوح در روی نمودار نشان داد.

۱. ***جرم زمین به طور یکنواخت توزیع نشده است.*** چگالی (جرم یکای حجم) زمین، مطابق شکل ۱۳-۵، در راستای شعاع زمین تغییر می‌کند و چگالی پوسته (بخش بیرونی) در روی زمین از ناحیه‌ای به ناحیه‌ی دیگر متغیر است. در نتیجه، g نیز در روی سطح زمین از ناحیه‌ای به ناحیه‌ی دیگر تغییر می‌کند.

۲. ***زمین کره‌ی کامل نیست.*** زمین تقریباً شکلی بیضی‌وار دارد که در قطب‌ها تخت و در استوا برآمده است. شعاع استوایی زمین (از نقطه‌ی مرکز تا استوا) ۲۱km بزرگ‌تر از شعاع قطبی آن (از نقطه‌ی مرکز تا قطب شمال یا قطب جنوب) است. بنابراین، یک نقطه‌ی واقع در

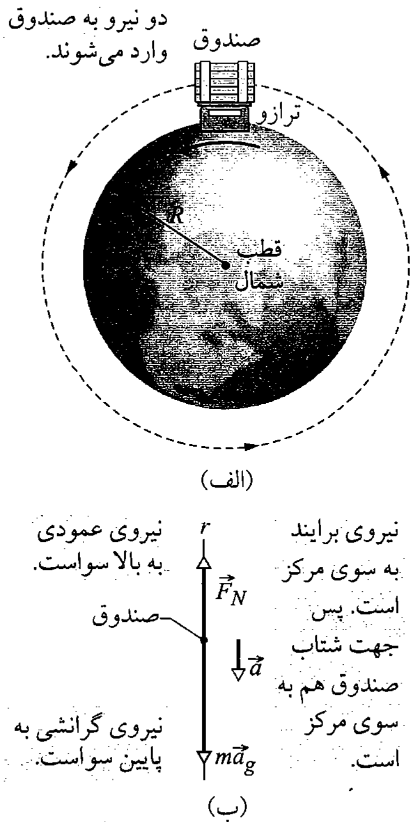
قطب نسبت به نقطه‌ی واقع در استوا به هسته‌ی چگال زمین نزدیک‌تر است. این، یکی از دلیل‌های افزایش یافتن شتاب سقوط آزاد g در سطح دریا، هنگام رفتن از استوا به سوی قطب شمال یا قطب جنوب است، هنگام حرکت کردن به سوی یکی از قطب‌ها، در واقع به مرکز زمین نزدیک‌تر می‌شویم، در نتیجه، بنا به قانون گرانش نیوتون، g افزایش می‌یابد.

۳. ***زمین می‌چرخد.*** محور دوران زمین از قطب‌های شمال و جنوب زمین می‌گذرد. یک شیء واقع در هر جای سطح زمین به جز در قطب‌ها بر روی دایره‌ای به دور محور دوران می‌چرخد و در نتیجه، دارای یک شتاب مرکزگرا به سوی مرکز دایره است. این شتاب نیاز به یک نیروی برایند مرکزگرا دارد، که آن هم به سوی مرکز زمین است.

برای آنکه ببینیم چرخش زمین چگونه سبب اختلاف میان g و a_g می‌شود، وضعیت ساده‌ای را که در آن صندوقی به جرم m در استوا روی ترازویی قرار دارد، بررسی می‌کنیم. شکل ۱۳-۶ الف این وضعیت را، که از نقطه‌ای واقع در بالای قطب شمال دیده می‌شود، نشان می‌دهد.

شکل ۱۳-۶ ب نمودار جسم ـ آزاد مربوط به صندوق را نشان می‌دهد، که در آن دو نیرو در راستای محور شعاعی r و گذرنده از مرکز زمین، به صندوق وارد می‌شوند. نیروی عمودی $\vec{F}_N$ که از سوی ترازو به صندوق وارد می‌شود، در جهت مثبت محور r و به برون سو است. نیروی گرانشی که با هم ارز خود $m\vec{a}_g$ نشان داده شده، به درون سو است. چون در حین دوران زمین، صندوق بر روی دایره‌ای به دور مرکز زمین حرکت می‌کند دارای شتاب مرکزگرای $\vec{a}$، به سوی مرکز زمین است. با توجه به معادله‌ی ۱۰-۲۳ $(a_r = \omega^2 r)$ می‌دانیم که این شتاب مرکزگرا برابر است با $\omega^2 R$، که در آن ω تندی زاویه‌ای و R شعاع دایره (تقریباً، شعاع زمین) است. بنابراین، با استفاده کردن از قانون دوم نیوتون در راستای محور r $(F_{\text{net},r} = ma_r)$، داریم

$$F_N - ma_g = m(-\omega^2 R) \qquad (۱۳\text{-}۱۲)$$



شکل ۱۳-۶ (الف) نمایش وضعیت یک صندوق بر روی ترازوی واقع در استوای زمین، که توسط یک ناظر واقع بر محور دوران از بالای قطب شمال دیده می‌شود. (ب) نمودار جسم ـ آزاد مربوط به صندوق با محور شعاعی r که از مرکز زمین به برون سو است. نیروی گرانشی وارد شده به صندوق با نیروی هم‌ارز خود $m\vec{a}_g$، نمایش داده شده است. نیروی عمودی وارد شده به صندوق از سوی ترازو $\vec{F}_N$ است. به خاطر چرخش زمین، صندوق یک شتاب مرکزگرای $\vec{a}$ دارد که به سوی مرکز زمین است.

بزرگی نیروی عمودی F_N، برابر با وزن صندوق mg، است که ترازو نشان می‌دهد. با قرار دادن mg به جای F_N معادله‌ی ۱۳-۱۲ چنین نوشته می‌شود

$$mg = ma_g - m(\omega^2 R) \qquad (۱۳\text{-}۱۳)$$

این معادله را می‌توان چنین بیان کرد:

$$\left(\text{وزن اندازه‌گیری شده}\right) = \left(\text{بزرگی نیروی گرانشی}\right) - \left(\text{حاصل‌ضرب جرم در شتاب مرکزگرا}\right)$$

در نتیجه، به دلیل چرخش زمین، وزن اندازه‌گیری شده، به واقع، از بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به صندوق کمتر است.

برای تعیین رابطه‌ی میان g و a_g، از دو طرف معادله‌ی ۱۳-۱۳، m را حذف می‌کنیم:

$$g = a_g - \omega^2 R \qquad (۱۳\text{-}۱۴)$$

این معادله را می‌توان چنین بیان کرد:

$$\left(\text{شتاب مرکزگرا}\right) - \left(\text{شتاب گرانشی}\right) = \left(\text{شتاب سقوط آزاد}\right)$$

در نتیجه، به دلیل چرخش زمین، شتاب سقوط آزاد اندازه‌گیری شده، به واقع، از شتاب گرانشی کمتر است.

در استوا. اختلاف میان شتاب‌های g و a_g برابر با $\omega^{۲}R$ است و در استوا بیشترین مقدار را دارد (یک دلیلش این است که در استوا شعاع دایره‌ی پیموده شده توسط صندوق از جاهای دیگر بیشتر است). برای تعیین این اختلاف می‌توان از معادله‌ی ۱۰-۵ $(\omega = \Delta\theta / \Delta t)$ و شعاع زمین $R = ۶٫۳۷ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m}$، استفاده کرد. در یک دور چرخش زمین θ برابربا ۲π رادیان و Δt در حدود ۲۴ ساعت است. با استفاده کردن از این مقادیر (و تبدیل ساعت به ثانیه) نتیجه می‌گیریم که g تنها به اندازه‌ی $۰٫۰۳۴\,\mathrm{m/s^{۲}}$ (که در مقایسه با $۹٫۸\,\mathrm{m/s^{۲}}$ کوچک است) از a_g کمتر است. بنابراین، چشم‌پوشی از اختلاف میان g و a_g در بیشتر اوقات توجیه‌پذیر است. به همین ترتیب، چشم‌پوشی از اختلاف میان وزن و بزرگی نیروی گرانشی هم اغلب قابل توجیه است.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۳-۲ اختلاف شتاب گرانشی میان سر و پا

(الف) فضانوردی با قد $h = ۱٫۷۰\,\mathrm{m}$ در یک شاتل فضایی، که در مداری به فاصله‌ی $r = ۶٫۷۷ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m}$ از مرکز زمین، به دور زمین می‌گردد، به طور «راست قد» قرار دارد. اختلاف شتاب گرانشی میان محل کف پا و محل سَر فضانورد چیست؟

نکته‌های کلیدی

زمین را می‌توان، به تقریب، کره‌ای یکنواخت به جرم M_E درنظر گرفت. در این صورت، با توجه به معادله‌ی ۱۳-۱۱ شتاب گرانشی در فاصله‌ی r از مرکز زمین برابر است با

$$a_g = \frac{GM_E}{r^{۲}} \qquad (۱۳\text{-}۱۵)$$

معادله‌ی ۱۳-۱۵ را دوبار باید به کار برد: یکی برای پای فضانورد به ازای $r = ۶٫۷۷ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m}$ و دیگری برای سَر او، به ازای $r = ۶٫۷۷ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m} + ۱٫۷۰\,\mathrm{m}$. با این حال، ماشین حساب ممکن است در هر دو بار مقدار یکسانی برای a_g نشان دهد و اختلاف صفر باشد، زیرا h در مقابل r بسیار کوچک است. اما در اینجا رهیافت دیگری هم وجود دارد که می‌تواند به ما کمک کند. نکته این است که چون میان r مربوط به محل‌های پا و سَر فضانورد تغییر دیفرانسیلی dr وجود دارد، می‌توان از معادله‌ی ۱۳-۱۵ نسبت به r دیفرانسیل گرفت

محاسبات: با دیفرانسیل گرفتن از معادله‌ی ۱۳-۱۵، داریم

$$da_g = -۲\frac{GM_E}{r^{۳}}dr \qquad (۱۳\text{-}۱۶)$$

که در آن da_g تغییر دیفرانسیلی شتاب گرانشی ناشی از تغییر دیفرانسیلی r، یعنی dr، است. در مورد فضانورد، داریم $dr = h$ و $r = ۶٫۷۷ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m}$. با جانشانی داده‌ها در معادله‌ی ۱۳-۱۶، خواهیم داشت

$$da_g = -۲\frac{(۶٫۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{m^{۳}/kg.s^{۲}})(۵٫۹۸ \times ۱۰^{۲۴}\,\mathrm{kg})}{(۶٫۷۷ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m})^{۳}}(۱٫۷۰\,\mathrm{m}) \Rightarrow$$

$$da_g = -۴٫۳۷ \times ۱۰^{-۶}\,\mathrm{m/s^{۲}} \qquad \text{(پاسخ)}$$

در اینجا مقدار M_E از پیوست پ کتاب گرفته شده است. این نتیجه نشان می‌دهد که شتاب گرانشی (به سوی زمین) در محل پای فضانورد اندکی از شتاب گرانشی (به سوی زمین) در محل سَر او بزرگ‌تر است. این اختلاف شتاب (که اغلب ***اثر کشندی***

نامیده می‌شود) تمایل دارد که قد فضانورد را بکشد، اما اختلاف چنان ناچیز است که او هرگز متوجه این موضوع نمی‌شود و خیلی کمتر از آن است که درد ایجاد کند.

(ب) اکنون، اگر فضانورد همین حالت «راست قد» را در گردش بر روی مداری به شعاع $r = ۶/۷۷ \times ۱۰^{۶}\text{m}$ به دور سیاه چاله‌ای به جرم $M_h = ۱/۹۹ \times ۱۰^{۳۱}\text{kg}$ (که ۱۰ برابر جرم خورشید است) داشته باشد، اختلاف شتاب گرانشی میان محل پا و محل سَر او چیست؟ سیاه چاله یک سطح ریاضیاتی (*افق رویداد*) به شعاع $R_h = ۲/۹۵ \times ۱۰^{۴}\text{m}$ دارد. هیچ چیز، حتی نور، هم نمی‌تواند از این سطح یا از جایی واقع در درون آن فرار کند. توجه کنید که فضانورد کاملاً در بیرون از سطح (در فاصله‌ی $r = ۲۲۹ R_h$) قرار دارد.

محاسبات: باز هم باید dr، تغییر دیفرانسیلی r میان سَر فضانورد را به کار برد و از معادله‌ی ۱۳-۱۶ استفاده کرد. اما در اینجا به جای M_E باید $M_h = ۱/۹۹ \times ۱۰^{۳۱}\text{kg}$ را قرار داد. در نتیجه، داریم

$$da_g = -۲\frac{(۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\text{m}^۳/\text{kg.s}^۲)(۱/۹۹ \times ۱۰^{۳۱}\text{kg})}{(۶/۷۷ \times ۱۰^{۶}\text{m})^۳}(۱/۷۰\text{m}) \Rightarrow$$

$$da_g = -۱۴/۵\,\text{m/s}^۲ \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

این نتیجه نشان می‌دهد که شتاب گرانشی (به سوی سیاه‌چاله) در محل پای فضانورد نسبت به محل سر او خیلی زیادتر است. نتیجه‌های حاصل از کشیده شدن بدن تحمل‌پذیر اما دردآور است. هرگاه فضانورد به سیاه‌چاله نزدیک‌تر شود تمایل به کشیده شدن بدن به شدت افزایش خواهد یافت.

۱۳-۴ گرانش در درون زمین

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۳-۹ مشخص کنید که پوسته‌ی یکنواختی از ماده هیچ‌گونه نیروی گرانشی برایندی به ذره‌ی واقع شده در درون خود وارد نمی‌کند.

۱۳-۱۰ نیروی گرانشی مؤثر بر یک ذره‌ی واقع شده در شعاع معینی از درون کره‌ای یکنواخت از ماده و بدون چرخش را حساب کنید.

نکته‌های کلیدی

- پوسته‌ی یکنواخت از ماده هیچ نیروی گرانشی ***برایندی*** به ذره‌ی واقع شده در درون خود وارد نمی‌کند.
- نیروی گرانشی $\vec{F}$، مؤثر بر یک ذره‌ی واقع شده در درون کره‌ای توپر و یکنواخت، در فاصله‌ی r از مرکز کره، فقط از جرم M_{ins} «کره‌ی درونی» به شعاع r ناشی می‌شود:

$$M_{\text{ins}} = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ \rho = \frac{M}{R^۳} r^۳$$

که در آن ρ چگالی کره‌ی توپر، R شعاع و M جرم کره است. این جرم درونی را می‌توانیم به جرم ذره‌ای نسبت دهیم که در مرکز کره‌ای توپر قرار دارد و سپس قانون گرانش نیوتون را برای ذره‌ها به کار ببریم. معلوم می‌شود که بزرگی نیروی وارد شده به جرم m برابر است با

$$F = \frac{GmM}{R^۳} r$$

گرانش در درون زمین

قضیه‌ی پوسته‌ی نیوتون را درباره‌ی وضعیتی که در آن ذره‌ای در درون یک پوسته‌ی یکنواخت

قرار دارد نیز می‌توان به کار برد، تا نشان داده شود که:

پوسته‌ی مادی یکنواخت هیچ نیروی گرانشی برایندی به ذره‌ی واقع در درون خود وارد نمی‌کند.

هشدار: معنی گزاره‌ی بالا ***این نیست*** که نیروهای گرانشی وارد شده به ذره از سوی اجزاء مختلف پوسته به نحو سحرآمیزی ناپدید می‌شوند، بلکه به این معنی است که ***برایند*** بردارهای نیروهای وارد شده به ذره از سوی همه‌ی اجزاء پوسته صفراست.

اگر جرم زمین به طور یکنواخت توزیع شده بود، نیروی گرانشی وارد شده به یک ذره در سطح زمین بیشینه می‌شد و با دور شدن ذره از سطح زمین کاهش پیدا می‌کرد. هرگاه ذره به سوی اعماق زمین، مثلاً، در طول یک معدن عمیق، حرکت کند، نیروی گرانشی به دو دلیل تغییر می‌کند. (۱) نیرو به خاطر نزدیک‌تر شدن ذره به مرکز زمین افزایش می‌یابد. (۲) نیرو کاهش می‌یابد، چون پوسته‌ی مادی واقع در بیرون مکان شعاعی ذره هیچ نیروی برایندی به ذره وارد نمی‌کند.

برای پیدا کردن رابطه‌ی نیروی گرانشی درون زمین یکنواخت، فرض کنید از طرح ***قطب تا قطب***، داستان تخیلی علمی قدیمی **جورج گریفیت**[1] استفاده می‌کنیم. سه کاشف تلاش می‌کنند با قرار گرفتن در محفظه‌ای در درون یک تونل ایجاد شده به طور طبیعی در زمین (و البته تخیلی)، یک راست از قطب جنوب به قطب شمال بروند. شکل ۱۳-۷ این محفظه (به جرم m) را در حال قرار گرفتن در فاصله‌ی r از مرکز زمین نشان می‌دهد. در آن حالت، نیروی گرانشی ***برایند*** وارد شده به محفظه مربوط به جرم M_{ins} درون کره‌ای به شعاع r (جرم محصور شده توسط خط‌چین) است، نه جرم پوسته‌ی کروی بیرونی (بیرون خط‌چین). علاوه بر این، می‌توان فرض کرد که جرم درونی M_{ins} به صورت ذره‌ای در مرکز زمین متمرکز شده است. بنابراین، برای بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به محفظه معادله‌ی ۱۳-۱ را می‌توان چنین نوشت

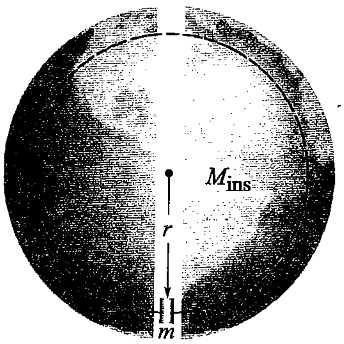
$$F = \frac{GmM_{ins}}{r^{2}} \qquad (۱۳-۱۷)$$

چون چگالی ρ را یکنواخت فرض می‌کنیم، می‌توانیم جرم درونی را برحسب جرم کل زمین M، و شعاع آن R، بنویسیم:

$$\frac{\text{جرم کل}}{\text{حجم کل}} = \frac{\text{جرم درونی}}{\text{حجم درونی}} = \text{چگالی}$$

$$\rho = \frac{M_{ins}}{\frac{4}{3}\pi r^{3}} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^{3}}$$

با حل کردن این معادله نسبت به M_{ins}، داریم



شکل ۱۳-۷ محفظه‌ای به جرم m از حال سکون در تونلی که قطب‌های جنوب و شمال زمین را به هم وصل می‌کند، سقوط می‌کند. وقتی محفظه در فاصله‌ی r از مرکز زمین قرار دارد، جرم بخشی از زمین که شامل کره‌ای با این شعاع است، برابر با M_{ins} است.

1. George Griffith

$$M_{\text{ins}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{M}{R^3} r^3 \qquad (۱۸-۱۳)$$

با جانشانی رابطه‌ی دوم مربوط به M_{ins} در معادله‌ی ۱۳-۱۷، بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به محفظه به صورت تابعی از فاصله‌ی r از مرکز زمین به دست می‌آید:

$$F = \frac{GmM}{R^3} r \qquad (۱۹-۱۳)$$

بر پایه‌ی داستان گریفیت، وقتی محفظه به مرکز زمین می‌رسد، نیروی گرانشی وارد شده به کاشفان به مقدار هشدار دهنده‌ی زیادی می‌رسد، اما درست در مرکز زمین ناگهان فقط به طور لحظه‌ای، این نیرو از میان می‌رود. با توجه به معادله‌ی ۱۳-۱۹ ملاحظه می‌شود که، در واقع، هر چه محفظه به مرکز زمین نزدیک‌تر می‌شود، بزرگی نیرو به طور خطی کاهش می‌یابد، تا آنکه در مرکز زمین صفر می‌شود. گریفیت دست کم توانست صفر بودن مقدار نیرو در مرکز را به درستی به دست آورد.

معادله‌ی ۱۳-۱۹ می‌تواند برحسب بردار نیروی $\vec{F}$ و بردار مکان محفظه $\vec{r}$، در راستای محور شعاعی امتداد یافته از مرکز زمین نیز نوشته شود. اگر مجموعه‌ی کمیت‌های ثابت در معادله‌ی ۱۳-۱۹ را برابر با K بگیریم، می‌توانیم نیرو را به صورت برداری زیر بنویسیم

$$\vec{F} = -K\vec{r} \qquad (۲۰-۱۳)$$

در این معادله علامت منفی نشان می‌دهد که بردارهای $\vec{F}$ و $\vec{r}$ دارای جهت‌های مخالف‌اند. معادله‌ی ۱۳-۲۰ از لحاظ شکل بیان کننده‌ی **قانون هوک** (معادله‌ی ۷-۲۰، $\vec{F} = -k\vec{d}$) است. بنابراین، در شرایط آرمانی داستان، محفظه مانند یک جسم متصل به فنر حول مرکز نوسان واقع در مرکز زمین نوسان می‌کند. پس از آنکه محفظه از قطب جنوب به سوی مرکز زمین سقوط می‌کند، با عبور کردن از مرکز زمین به سفر خود به سوی قطب شمال ادامه می‌دهد (چنان‌که گریفیت می‌گوید) و دوباره برمی‌گردد و این چرخه تکرار می‌شود.

در مورد زمین واقعی، که توزیع جرم آن نایکنواخت است (شکل ۱۳-۵)، نیروی وارد شده به محفظه در هنگام پایان رفتن در آغاز ***افزایش*** می‌یابد. سپس در یک عمق معین نیرو به یک مقدار بیشینه می‌رسد و فقط بعد از آن که محفظه به مقدار بیشتری پایین می‌رود نیرو شروع به کاهش یافتن می‌کند.

۵-۱۳ انرژی پتانسیل گرانشی

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۳-۱۱ انرژی پتانسیل گرانشی یک دستگاه ذرات (یا کره‌های یکنواختی که می‌توانند به صورت ذره در نظر گرفته شوند) را حساب کنید.

۱۳-۱۲ مشخص کنید که هرگاه ذره‌ای که تحت تأثیر یک نیروی گرانشی قرار دارد، از نقطه‌ای آغازی تا نقطه‌ای پایانی حرکت کند، کار انجام شده توسط آن نیرو (و در نتیجه تغییر انرژی

پتانسیل گرانشی) مستقل از مسیر پیموده شده است.

۱۳-۱۳ با استفاده کردن از نیروی گرانشی وارد شده به یک ذره‌ی واقع شده در نزدیکی یک جسم نجومی (یا جسم دیگری که در جای خود ثابت است)، کار انجام شده توسط آن نیرو را در هنگام حرکت کردن جسم حساب کنید.

۱۴-۱۳ قانون پایستگی انرژی مکانیکی (شامل انرژی پتانسیل گرانشی) را برای ذره‌ای که نسبت به یک جسم نجومی (یا جسم دیگری که در جای خود ثابت است) در حال حرکت کردن است، به کار ببرید.

۱۵-۱۳ انرژی لازم مربوط به فرار یک ذره را از یک جسم نجومی (که به طور معمول کره‌ای یکنواخت فرض می‌شود) توضیح دهید.

۱۶-۱۳ تندی فرار یک ذره را در هنگام ترک کردن یک جسم نجومی حساب کنید.

نکته‌های کلیدی

- انرژی پتانسیل گرانشی $U(r)$ یک دستگاه دو ذره‌ای، با جرم‌های M و m به فاصله‌ی r از یکدیگر، برابر با کار انجام شده با علامت منفی توسط نیروی گرانشی هر ذره روی ذره‌ی دیگر است وقتی که فاصله‌ی میان دو ذره از بی‌نهایت (بسیار زیاد) تا r تغییر می‌کند. این انرژی برابر است با

$$U=-\frac{GMm}{r} \quad \text{(انرژی پتانسیل گرانشی)}$$

- اگر دستگاهی شامل بیش از دو ذره باشد، انرژی پتانسیل گرانشی کل آن U، برابر با مجموع انرژی‌های پتانسیل تمام زوج ذره‌هاست.

به عنوان مثال، برای سه ذره با جرم‌های m_1، m_2 و m_3، داریم

$$U=-\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}}+\frac{Gm_1m_3}{r_{13}}+\frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right)$$

- یک شیء به شرطی می‌تواند از جاذبه‌ی گرانشی یک جسم نجومی با جرم M و شعاع R فرار کند (یعنی، به فاصله‌ای نامتناهی برسد) که تندی شیء در نزدیکی سطح جسم دست کم برابر با تندی فرار باشد، که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$v=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

انرژی پتانسیل گرانشی

در پودمان ۸-۱، انرژی پتانسیل گرانشی یک دستگاه ذره ـ زمین را مورد بحث قرار دادیم. در آنجا ذره را در نزدیکی سطح زمین در نظر گرفتیم، به گونه‌ای که بتوانیم نیروی گرانشی را ثابت بگیریم. سپس، یک پیکربندی مرجع از دستگاه را، که دارای انرژی پتانسیل گرانشی صفر است، اختیار کردیم. در این پیکربندی، ذره اغلب، در سطح زمین قرار داشت. برای ذراتی که در سطح زمین قرار نداشتند، با کاهش یافتن فاصله‌ی میان ذره و زمین انرژی پتانسیل گرانشی کاهش می‌یافت.

در اینجا، موضوع را گسترش می‌دهیم و U، انرژی پتانسیل گرانشی دو ذره به جرم‌های m و M و فاصله‌ی جدایی r را در نظر می‌گیریم. در این حالت، باز هم یک پیکربندی مرجع با مقدار U برابر با صفر اختیار می‌کنیم. اما برای ساده شدن معادله‌ها، فاصله‌ی r در پیکربندی مرجع، اکنون، آن‌قدر بزرگ است که، به تقریب، ***بی‌نهایت*** است. در این شرایط هم انرژی پتانسیل گرانشی با کاهش یافتن فاصله‌ی جدایی ذرات، کاهش پیدا می‌کند. چون به ازای $r=\infty$، داریم $U=0$، انرژی پتانسیل برای هر فاصله‌ی معین منفی است و با نزدیک‌تر شدن ذرات به یکدیگر رفته رفته منفی‌تر می‌شود.

با این واقعیت‌هایی که در ذهن داریم و بعداً برایمان ثابت خواهد شد، انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه دو ذره‌ای از معادله‌ی زیر به دست می‌آید

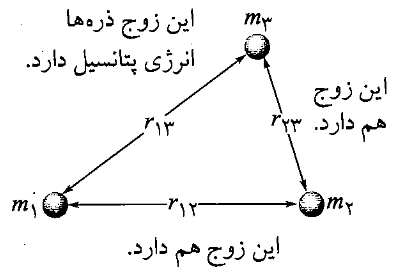
$$U = -\frac{GMm}{r} \quad \text{(انرژی پتانسیل گرانشی)} \qquad (۲۱-۱۳)$$

توجه کنید که با رسیدن r به بی‌نهایت، $U(r)$ به صفر می‌رسد و به ازای هر مقدار معین r، مقدار $U(r)$ منفی است.

زبان موضوع. انرژی پتانسیل حاصل از معادله‌ی ۱۳-۲۱ خاصیتی از یک دستگاه دو ذره‌ای است نه خاصیت هر ذره به تنهایی. برای تقسیم کردن این انرژی هیچ راهی وجود ندارد و نمی‌توان گفت که از این انرژی چه مقدار متعلق به این ذره و چه مقدار متعلق به ذره‌ی دیگر است. با وجود این، به ازای $m << M$، چنان‌که در مورد زمین (به جرم M) و گوی بیس‌بال (به جرم m) صادق است، گاهی از «انرژی پتانسیل گوی بیس‌بال» سخن می‌گوییم. در این شرایط، موضوع را می‌توان نادیده گرفت، زیرا وقتی یک گوی بیس‌بال در نزدیکی زمین حرکت می‌کند، تغییر انرژی پتانسیل دستگاه زمین - گوی، تقریباً به طور کامل به صورت تغییر انرژی جنبشی گوی بیس‌بال ظاهر می‌شود. در این حال، تغییر انرژی جنبشی زمین چنان ناچیز است که درخور اندازه‌گیری نیست. بدین جهت، در پودمان ۱۳-۷ سخن از «انرژی پتانسیل یک ماهواره‌ی مصنوعی» به میان خواهد آمد، که به دور زمین گردش می‌کند، زیرا جرم ماهواره خیلی کوچک‌تر از جرم زمین است. اما وقتی از انرژی پتانسیل اجسام با جرم‌های قابل مقایسه صحبت می‌کنیم باید مواظب باشیم که اجسام را مانند یک دستگاه در نظر بگیریم.

دستگاه چند ذره‌ای. اگر دستگاهی شامل بیش از دو ذره باشد، باید با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۳-۲۱ انرژی پتانسیل گرانشی هر زوج ذره را به نوبت بدون در نظر گرفتن وجود ذرات دیگر حساب و سپس نتیجه‌های حاصل را به طور جبری با هم جمع کرد. به عنوان مثال، با کاربرد معادله‌ی ۱۳-۲۱ درباره‌ی هر کدام از سه زوج ذرات شکل ۱۳-۸ انرژی پتانسیل دستگاه چنین به دست می‌آید

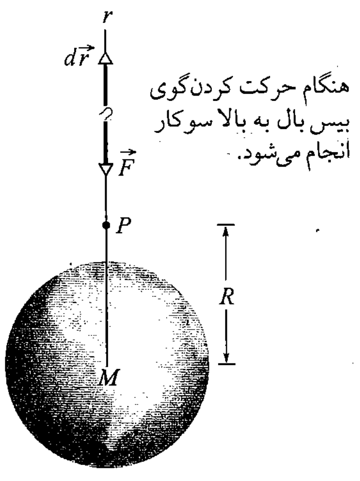
$$U = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right) \qquad (۲۲-۱۳)$$



شکل ۱۳-۸ مجموعه‌ی سه ذره یک دستگاه تشکیل می‌دهند. ***انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه*** برابر با مجموع انرژی‌های پتانسیل گرانشی همه‌ی سه زوج ذره است.

اثبات معادله‌ی ۱۳-۲۱

فرض کنید گوی بیس‌بالی را در راستای نشان داده شده در شکل ۱۳-۹، یک راست به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. می‌خواهیم رابطه‌ی انرژی پتانسیل گرانشی گوی U، را در نقطه‌ی P، واقع در مسیر حرکت گوی و در فاصله‌ی شعاعی R از مرکز زمین، پیدا کنیم. برای این کار، نخست W، کار انجام شده روی گوی توسط نیروی گرانشی را در حین حرکت گوی از نقطه‌ی P تا یک فاصله‌ی بزرگ (بی‌نهایت) از زمین، معین می‌کنیم. چون نیروی گرانشی $\vec{F}(r)$ یک نیروی متغیر است (بزرگی آن به r بستگی دارد)، باید برای تعیین کار از روش یاد شده در پودمان ۷-۵ استفاده کنیم. مقدار کار با استفاده کردن از نمادگذاری برداری چنین به دست می‌آید



شکل ۱۳-۹ گوی بیس‌بال پرتاب شده از زمین به سمت بالا، از نقطه‌ی P واقع در فاصله‌ی شعاعی R از مرکز زمین، عبور می‌کند. در شکل، $\vec{F}$ نیروی گرانشی مؤثر بر گوی بیس‌بال و $d\vec{r}$، بردارجابه‌جایی دیفرانسیلی، نشان داده شده است. هر دو بردار در راستای محور شعاعی r قرار دارند.

$$W = \int_R^\infty \vec{F}(r)\cdot d\vec{r} \qquad (۱۳-۲۳)$$

این انتگرال شامل ضرب نرده‌ای (یا نقطه‌ای) نیروی $\vec{F}(r)$ و بردار جابه‌جایی دیفرانسیلی $d\vec{r}$ در طول مسیر گوی بیس‌بال است. این ضرب برداری را می‌توان چنین بسط داد

$$\vec{F}(r)\cdot d\vec{r} = F(r)dr\cos\phi \qquad (۱۳-۲۴)$$

که در آن ϕ زاویه‌ی میان بردارهای $\vec{F}(r)$ و $d\vec{r}$ است. با قرار دادن زاویه‌ی ۱۸۰ درجه به‌جای ϕ و استفاده کردن ازمعادله‌ی ۱۳-۱ برای $F(r)$، معادله‌ی ۱۳-۲۴ چنین نوشته می‌شود

$$\vec{F}(r)\cdot d\vec{r} = -\frac{GMm}{r^2}dr$$

که در آن M جرم زمین و m جرم گوی بیس‌بال است.

پس از جانشانی این معادله در معادله‌ی ۱۳-۲۳ و انتگرال‌گیری، داریم

$$W = -GMm\int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr = \left[\frac{GMm}{r}\right]_R^\infty = 0-\frac{GMm}{R} \Rightarrow$$

$$W = -\frac{GMm}{R} \qquad (۱۳-۲۵)$$

که در آن W کار لازم برای حرکت دادن گوی بیس‌بال از نقطه‌ی P (واقع در فاصله‌ی R) تا بی‌نهایت است. بنا به معادله‌ی ۸-۱ ($\Delta U = -W$) کار را برحسب انرژی پتانسیل هم می‌توان به صورت زیر نوشت

$$U_\infty - U = -W$$

چون انرژی پتانسیل در بی‌نهایت (U_∞) برابر با صفر و در نقطه‌ی P، برابر با U است. با جانشانی W در معادله‌ی ۱۳-۲۵، این معادله به صورت زیر در می‌آید

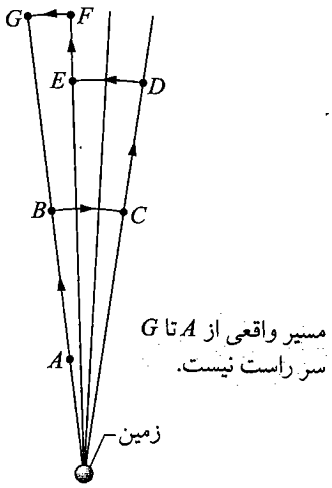
$$U = W = -\frac{GMm}{R}$$

اگر r را به جای R قرار دهیم همان معادله‌ی ۱۳-۲۱ به دست می‌آید.

وابسته نبودن انرژی پتانسیل به مسیر

در شکل ۱۳-۱۰، یک گوی بیس‌بال در طول مسیری متشکل از سه خط شعاعی و سه کمان دایره‌ای (به مرکز زمین) از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی G حرکت می‌کند. می‌خواهیم W کار کل انجام شده توسط نیروی گرانشی زمین $\vec{F}$، را که در حین حرکت کردن از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی G به گوی وارد می‌شود، معین کنیم. کار انجام شده در طول هر کمان دایره‌ای صفر است، زیرا در هر نقطه نیروی $\vec{F}$ بر کمان عمود است. بنابراین، W فقط مجموع کارهایی است که توسط $\vec{F}$ در راستای سه طول شعاعی انجام می‌شود.

اکنون، در ذهن خود فرض کنید که طول کمان‌های دایره کاهش می‌یابد و به صفر می‌رسد، در این صورت، گوی به طور مستقیم فقط در طول یک مسیر شعاعی از A تا G حرکت می‌کند. آیا این عمل مقدار W را تغییر می‌دهد؟ نه. چون در طول کمان‌ها کاری انجام نمی‌شود و صفر شدن آن‌ها مقدار کار را تغییر نمی‌دهد. بنابراین، با آنکه مسیر کاملاً متفاوت



شکل ۱۳-۱۰ یک گوی بیس‌بال در نزدیکی زمین، در طول مسیری متشکل از خط‌های شعاعی و کمان‌های دایره‌ای از نقطه‌ی A تا نقطه‌ی G حرکت می‌کند.

است، اما کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ ثابت می‌ماند.

نتیجه‌ی یاد شده در پودمان ۸-۱ به نحوی کلی مورد بحث قرار گرفت. نکته‌ی مهم این است که نیروی گرانشی یک نیروی پایستار است. بنابراین، کار انجام شده توسط نیروی گرانشی روی ذره‌ای که از نقطه‌ی آغازی i تا نقطه‌ی پایانی f حرکت می‌کند، از مسیر پیموده شده‌ی واقعی در میان این دو نقطه مستقل است. با استفاده کردن از معادله‌ی ۸-۱، ΔU، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی از نقطه‌ی i تا نقطه‌ی f چنین به دست می‌آید.

$$\Delta U = U_f - U_i = -W \tag{۱۳-۲۶}$$

چون W، کار انجام شده توسط نیروی پایستار از مسیر واقعی مستقل است، ΔU، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی هم ***از مسیر پیموده شده‌ی واقعی مستقل است.***

رابطه‌ی میان انرژی پتانسیل و نیرو

در ضمن اثبات معادله‌ی ۱۳-۲۱ تابع انرژی پتانسیل $U(r)$ را با استفاده کردن از تابع نیروی $\vec{F}(r)$، به دست آوردیم. ما می‌توانیم راه دیگری را هم در پیش بگیریم، یعنی، با استفاده کردن از تابع انرژی پتانسیل می‌توانیم تابع نیرو را استنتاج کنیم. با توجه به‌معادله‌ی ۸-۲۲ $[F(x) = -dU(x)/dx]$ می‌توان نوشت

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right) \Rightarrow$$

$$F = -\frac{GMm}{r^2} \tag{۱۳-۲۷}$$

این معادله همان قانون گرانش نیوتون (معادله‌ی ۱۳-۱) را بیان می‌کند. در اینجا علامت منفی نشان می‌دهد که نیروی وارد شده به جرم m در راستای شعاع و به درون سو، یعنی به سوی جرم M، است.

تندی فرار

هرگاه پرتابه‌ای را به بالاسو پرتاب کنیم، به طور معمول، حرکت آن کند می‌شود، به طور لحظه‌ای متوقف می‌شود و دوباره به زمین برمی‌گردد. با وجود این، تندی آغازی کمینه‌ای وجود دارد که به ازای آن، پرتابه همیشه بالا می‌رود و، از لحاظ نظری، فقط در بی‌نهایت به‌حالت سکون درمی‌آید. این تندی آغازی را **تندی فرار** (از زمین) می‌نامند.

پرتابه‌ای به جرم m را در نظر بگیرید که سطح یک سیاره (یا هر جسم یا دستگاه نجومی دیگر) را با تندی فرار v ترک می‌کند. این پرتابه دارای انرژی جنبشی K برابر با $\frac{1}{2}mv^2$ و انرژی پتانسیل U است، که از معادله‌ی ۱۳-۲۱ به دست می‌آید:

$$U = -\frac{GMm}{R}$$

در این معادله M جرم سیاره و R شعاع آن است.

وقتی پرتابه به بی‌نهایت می‌رسد می‌ایستد و دیگر انرژی جنبشی ندارد. پرتابه انرژی

پتانسیل هم ندارد، زیرا فاصله‌ی بی‌نهایت بین دو جسم، از شرایط پیکربندی انرژی پتانسیل صفر است. در نتیجه، انرژی کل پرتابه در بی‌نهایت صفر است. با توجه به اصل پایستگی انرژی، انرژی کل در سطح زمین نیز باید صفر باشد، به گونه‌ای که می‌توان نوشت

$$K+U=\frac{1}{2}mv^2+\left(-\frac{GMm}{R}\right)=0$$

در نتیجه، داریم

$$v=\sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad (۱۳-۲۸)$$

توجه کنید که تندی فرار v، به جهتی که تحت آن پرتابه از سطح سیاره پرتاب شده است، بستگی ندارد. با وجود این، اگر پرتابه از سکوی پرتاب در جهت چرخش سیاره به دور محور خود پرتاب شود رسیدن به تندی فرار آسان‌تر است. به عنوان مثال، برای استفاده کردن از مزیت تندی رو به خاور $1500\,\mathrm{km/h}$ ناشی از چرخش رو به خاور زمین، موشک‌ها را در دماغه‌ی کاناورال[1] به سمت خاور پرتاب می‌کنند.

تندی فرار یک پرتابه از هر جسم نجومی را با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۳-۲۸ می‌توان معین کرد، به شرط آنکه در معادله جرم M و شعاع R آن جسم جانشانی شود. جدول ۱۳-۲ برخی تندی‌های فرار از اجسام نجومی را نشان می‌دهد.

☑ خودآزمایی ۳

گلوله‌ای به جرم m را از کره‌ای به جرم M دور می‌کنیم. (الف) آیا انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه گلوله ـ کره افزایش می‌یابد یا کاهش؟ (ب) آیا کار انجام شده توسط نیروی گرانشی میان گلوله و کره مثبت است یا منفی؟

جدول ۱۳-۲ برخی تندی‌های فرار از اجسام نجومی

جسم	جرم (kg)	شعاع (m)	تندی فرار (km/s)
سِرِس[1]	$1{,}17\times10^{21}$	$3{,}8\times10^{5}$	۰٫۶۴
ماه (قمر زمین)	$7{,}36\times10^{22}$	$1{,}74\times10^{6}$	۲٫۳۸
زمین	$5{,}98\times10^{24}$	$6{,}37\times10^{6}$	۱۱٫۲
مشتری	$1{,}90\times10^{27}$	$7{,}15\times10^{7}$	۵۹٫۵
خورشید	$1{,}99\times10^{30}$	$6{,}96\times10^{8}$	۶۱۸
شعرای یمانی B[2]	2×10^{30}	1×10^{7}	۵۲۰۰
ستاره‌ی نوترونی[3]	2×10^{30}	1×10^{4}	2×10^{5}

۱. سنگین‌ترین سیارک است.
۲. ***کوتوله‌ی سفید***[2] (ستاره‌ای در مرحله‌ی پایانی تکوین) که با ستاره‌ی درخشان ***شَعرای یمانی***[3] همراه است.
۳. هسته‌ی رُمبیده‌ی یک ستاره که پس از انفجار ستاره در یک رویداد ***ابرنواختر***[4]، باقی می‌ماند.

1. Cape Canaveral 2. white dwarf 3. Sirius 4. supernova

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۳-۳ انرژی مکانیکی سیارک در حال سقوط از فضا

سیارکی در حال حرکت کردن یک راست به سوی زمین دارای تندی $12\,\text{km/s}$ نسبت به زمین است. در این هنگام فاصله‌ی سیارک از مرکز زمین ۱۰ برابر شعاع زمین است. با چشم‌پوشی از اثرهای جو زمین روی سیارک، تندی سیارک v_f، را در موقع رسیدن به سطح زمین پیدا کنید.

نکته‌های کلیدی

چون از اثرهای جو روی سیارک چشم‌پوشی شده است، انرژی مکانیکی دستگاه سیارک ـ زمین در حین سقوط پایسته است. در نتیجه، انرژی مکانیکی پایانی دستگاه (هنگام رسیدن سیارک به سطح زمین) با انرژی مکانیکی آغازی برابر است:

$$K_f + U_f = K_i + U_i \qquad (۱۳-۲۹)$$

هم‌چنین، اگر دستگاه را منزوی فرض کنیم، در حین سقوط سیارک تکانه‌ی خطی دستگاه پایسته می‌ماند. بنابراین، تغییر تکانه‌ی خطی سیارک و تغییر تکانه‌ی خطی زمین از لحاظ بزرگی برابر و از لحاظ علامت مخالف‌اند. اما، چون جرم زمین درمقایسه با جرم سیارک به نسبت بزرگ است، تغییر تندی زمین نسبت به تغییر تندی سیارک درخور چشم‌پوشی است. از این رو، تغییر انرژی‌جنبشی زمین نیز درخور چشم‌پوشی است. بنابراین، می‌توان فرض کرد که انرژی‌های جنبشی مربوط به معادله‌ی ۱۳-۲۹ همان انرژی‌های جنبشی سیارک به تنهایی، هستند.

محاسبات: فرض کنید جرم سیارک را با m و جرم زمین را با M (مساوی با $5{,}98\times10^{24}\,\text{kg}$) نمایش دهیم. سیارک در آغاز در فاصله‌ی $10R_E$ و در پایان در فاصله‌ی R_E است، که R_E (مساوی با $6{,}37\times10^{6}\,\text{m}$) شعاع زمین است. با جانشانی U از معادله‌ی ۱۳-۲۱ و $\frac{1}{2}mv^2$ به جای K، معادله‌ی ۱۳-۲۹ را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{R_E} = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GMm}{10R_E}$$

پس از ساده کردن معادله و جانشانی داده‌ها، داریم

$$v_f^2 = v_i^2 + \frac{2GM}{R_E}\left(1-\frac{1}{10}\right)$$

$$v_f^2 = (12\times10^3\,\text{m/s})^2 + \frac{2(6{,}67\times10^{-11}\,\text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2)(5{,}98\times10^{24}\,\text{kg})}{6{,}37\times10^{6}\,\text{m}}(0{,}9)$$

$$v_f^2 = 2{,}567\times10^{8}\,\text{m}^2/\text{s}^2 \Rightarrow$$

$$v_f = 1{,}60\times10^{4}\,\text{m/s} = 16\,\text{km/s} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

با این تندی، سیارک نباید چنان بزرگ باشد که در هنگام برخورد به زمین آسیب قابل ملاحظه‌ای وارد کند. اگر سیارک فقط ۵ متر پهنا داشته باشد، در برخورد با زمین می‌تواند انرژی‌ای در حدود انرژی انفجار بمب هسته‌ای هیروشیما آزاد کند. در حدود ۵۰۰ میلیون سیارک با این ابعاد در نزدیکی مدار زمین یافت می‌شوند، که موضوعی نگران کننده است. در سال ۱۹۹۴/۱۳۷۳ یکی از این سیارک‌ها به جو زمین وارد شد و در ارتفاع ۲۰ کیلومتری جزیره‌ای دور افتاده واقع در اقیانوس آرام جنوبی منفجر شد (که اعلام انفجار هسته‌ای از سوی شش ماهواره‌ی نظامی را به دنبال داشت).

۱۳-۶ سیاره‌ها و ماهواره‌ها: قانون‌های کپلر

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۳-۱۷ سه قانون کپلر را مشخص کنید.

۱۳-۱۸ مشخص کنید که کدام قانون کپلر هم‌ارز با قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای است.

۱۳-۱۹ در روی نمودار یک‌مدار بیضی شکل، نیم قطر بزرگ بیضی،

خروج از مرکز، نقاط اوج، حضیض و کانون را مشخص کنید.

۱۳-۲۰ رابطه‌ی میان نیم قطر بزرگ، خروج از مرکز، اوج و حضیض را برای یک مدار بیضی شکل، به کار ببرید.

۱۳-۲۱ رابطه‌ی کپلر میان دوره‌ی تناوب مداری و شعاع و جرم جسم نجومی را برای یک ماهواره‌ی طبیعی یا مصنوعی در حال دوران، به کار ببرید.

نکته‌های کلیدی

- حرکت ماهواره‌های طبیعی یا مصنوعی، از قانون‌های کپلر پیروی می‌کنند:

۱. *قانون مدارها.* همه‌ی سیاره‌ها در مدارهای بیضی شکلی که خورشید در یکی از کانون‌های آن‌ها قرار دارد، حرکت می‌کنند.

۲. *قانون مساحت‌ها.* خط وصل کننده‌ی هر سیاره به خورشید در بازه‌های زمانی مساوی مساحت‌های مساوی را جارو می‌کند. (این بیان با قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای هم‌ارز است).

۳. *قانون دوره‌های تناوب.* مجذور دوره‌ی تناوب گردش هر سیاره T، با مکعب نیم قطر بزرگ مدار گردش a، متناسب است. در مورد مدارهای دایره‌ای با شعاع r، داریم

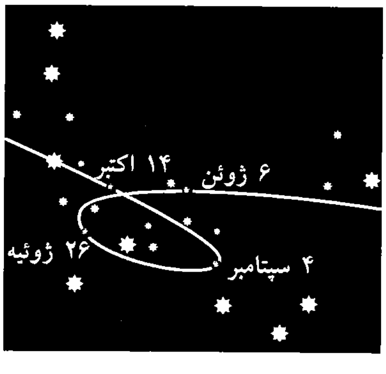
$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)r^3 \quad \text{(قانون دوره‌های تناوب)}$$

که در آن M جرم جسم جذب کننده ـ یعنی خورشید در حالت منظومه‌ی شمسی است. برای مدارهای سیاره‌ای بیضی شکل، به جای r مقدار نیم قطر بزرگ a، قرار داده می‌شود.

سیاره‌ها و ماهواره‌ها: قانون‌های کپلر

سیاره‌ها، که به ظاهر بر روی پهنه‌ای از ستاره‌ها پرسه می‌زنند، از همان سپیده دم تاریخ حرکتشان شکلی معماگونه داشته است. به ویژه مسیر حرکت حلقه ـ در ـ حلقه‌ی مریخ، که در شکل ۱۳-۱۱ نشان داده شده بهت‌آور بوده است. **یوهانس کپلر**[1] (۱۶۳۰-۱۵۷۱) پس از عمری مطالعه، قانون‌هایی به طور آروینی تدوین کرد که بر این حرکت‌ها حاکم‌اند. **تیکو براهه**[2] (۱۶۰۱-۱۵۴۶) آخرین اخترشناس بزرگی است که مشاهدات خود را بدون کمک تلسکوپ انجام داده است. براهه اطلاعات وسیعی را گردآوری کرد و کپلر توانست بر پایه‌ی آن‌ها سه قانون مربوط به حرکت سیاره‌ها را، که اکنون به نام وی شناخته می‌شوند، استنتاج کند. بعدها، **آیزاک نیوتون** (۱۷۲۷-۱۶۴۲) نشان داد که **قانون گرانش** او به **قانون‌های کپلر** منجر می‌شوند.

در این بخش قانون‌های کپلر را به نوبت مورد بحث قرار می‌دهیم. گرچه در اینجا این قانون‌ها درباره‌ی سیاره‌های گردش کننده به دور خورشید به کار برده می‌شوند، این قانون‌ها درباره‌ی قمرهای طبیعی یا مصنوعی گردش کننده پیرامون زمین یا هر جسم سنگین دیگری هم، به خوبی صدق می‌کنند.



شکل ۱۳-۱۱ نمودار مسیر سیاره‌ی مریخ در حین حرکت کردن در پهنه‌ی صورت فلکی جُدی در طی سال ۱۹۷۱. در نمودار، مکان مریخ در چهار روز انتخاب شده نشانه‌گذاری شده است. مریخ و زمین، هر دو، در مدارهایی به دور خورشید می‌گردند و ما مکان مریخ را نسبت به زمین می‌بینیم، برخی اوقات دیدن ما به مشاهده‌ی یک حلقه‌ی ظاهری در مسیر حرکت مریخ منجر می‌شود.

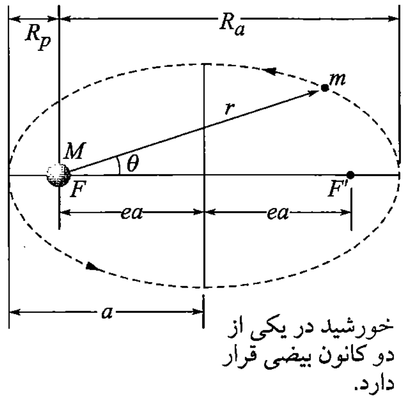
۱. قانون مدارها: همه‌ی سیاره‌ها در روی مدارهایی بیضی شکل حرکت می‌کنند که خورشید در یکی از کانون‌های بیضی قرار دارد.

شکل ۱۳-۱۲ سیاره‌ای به جرم m را نشان می‌دهد که در روی مداری به دور خورشید به جرم

1. Johannes Kepler   2. Tycho Brahe

M حرکت می‌کند. فرض می‌کنیم که $m << M$. در نتیجه، مرکز جرم دستگاه سیاره ـ خورشید تقریباً در مرکز خورشید قرار دارد.

مدار شکل ۱۳-۱۲ با نسبت دادن a به **نیم‌قطر بزرگ** و e به **خروج از مرکز** توصیف می‌شود. تعریف e چنان است که ea برابر با فاصله‌ی مرکز بیضی از هر یک از کانون‌های F و F' باشد. با این تعریف ***خروج از مرکز صفر متناظر با یک دایره است***، که در آن دو کانون بر تک نقطه‌ی مرکزی منطبق می‌شوند. خروج از مرکز مدارهای سیاره‌ها بزرگ نیست؛ در نتیجه، اگر مدارها برحسب مقیاس رسم شوند به صورت دایره دیده می‌شوند. خروج از مرکز بیضی شکل ۱۳-۱۲ که به خاطر واضح بودن به نحو اغراق‌آمیزی رسم شده، ۰/۷۴ است. خروج از مرکز مدار زمین فقط ۰/۰۱۶۷ است.



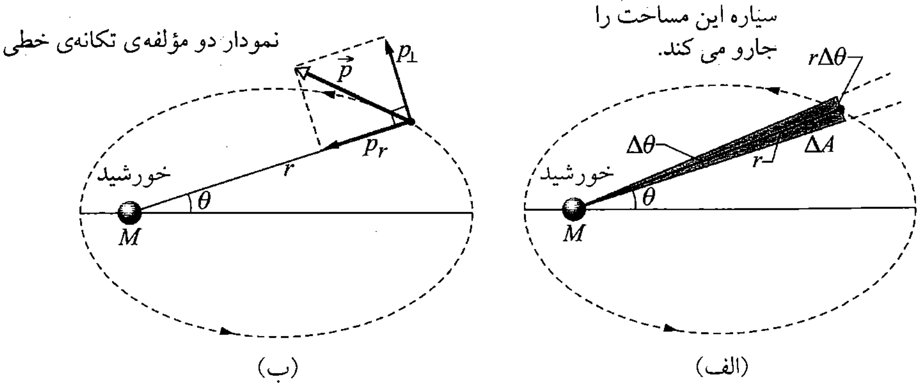
شکل ۱۳-۱۲ سیاره‌ای به جرم m بر روی مداری بیضی شکل به دور خورشید می‌گردد. خورشید به جرم M در یکی از کانون‌های بیضی F، قرار دارد و کانون دیگر F'، در فضای تهی واقع است. فاصله‌ی هر کانون از مرکز بیضی ea است، که در آن e خروج از مرکز بیضی است. در شکل، a نیم‌قطر بزرگ بیضی، R_p فاصله‌ی نقطه‌ی حضیض (نزدیک‌ترین نقطه‌ی مسیر به خورشید) و R_a فاصله‌ی نقطه‌ی اوج (دورترین نقطه‌ی مسیر به خورشید)، نیز نشان داده شده‌اند.

۲. قانون مساحت‌ها: خط وصل کننده‌ی هر سیاره به خورشید، در صفحه‌ی مدار سیاره در زمان‌های مساوی مساحت‌های مساوی را جارو می‌کند؛ یعنی، آهنگ dA/dt که با آن مساحت A جارو می‌شود، ثابت است.

از لحاظ کیفی، بر پایه‌ی قانون دوم کپلر سیاره در دورترین فاصله به خورشید کُند و در نزدیک‌ترین فاصله به خورشید تند حرکت می‌کند. چنان‌که معلوم است، قانون دوم کپلر، به‌طور کلی، با قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای هم‌ارز است، و اکنون این موضوع را ثابت می‌کنیم.

در شکل ۱۳-۱۳ الف، مساحت مثلث سایه خورده تقریباً برابر با مساحت جاور شده در زمان Δt توسط خط وصل کننده‌ی خورشید و سیاره است، که به فاصله‌ی r از هم قرار دارند. ΔA تقریباً مساحت مثلثی با قاعده‌ی $r\Delta\theta$ و ارتفاع r است. چون مساحت مثلث برابر با حاصل‌ضرب نصف قاعده در ارتفاع است، داریم $\Delta A \approx \frac{1}{2}r^2\Delta\theta$. مقدار ΔA وقتی دقیق می‌شود که Δt (و در نتیجه $\Delta\theta$) به سمت صفر میل کند. در این صورت، آهنگ لحظه‌ای جارو شدن برابر است با

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega \qquad (۱۳-۳۰)$$



شکل ۱۳-۱۳ (الف) در زمان Δt، خط وصل کننده‌ی سیاره به خورشید r، با پیمودن زاویه‌ی $\Delta\theta$ مساحت ΔA (سطح سایه‌خورده) را جارو می‌کند. (ب) نمودار تکانه‌ی خطی سیاره $\vec{p}$، ومؤلفه‌های $\vec{p}$.

که در آن ω تندی زاویه‌ای خط چرخان وصل کننده‌ی خورشید به سیاره است.

شکل ۱۳-۱۳ ب تکانه‌ی خطی سیاره $\vec{p}$، و مؤلفه‌های شعاعی و عمودی آن را نشان می‌دهد. با توجه به معادله‌ی ۱۱-۲۰ $(L = rp_{\perp})$ بزرگی تکانه‌ی زاویه‌ای سیاره $\vec{L}$، نسبت به خورشید از حاصل‌ضرب r در $p_{\perp}$، مؤلفه‌ی عمودی $\vec{p}$، به دست می‌آید. برای سیاره‌ای به جرم m، داریم

$$L = rp_{\perp} = (r)(mv_{\perp}) = (r)(m\omega r) \Rightarrow$$

$$L = mr^{2}\omega \qquad (۱۳-۳۱)$$

که در آن به جای $v_{\perp}$، هم‌ارز آن ωr نوشته شده است (معادله‌ی ۱۰-۱۸). پس از حذف کردن $r^{2}\omega$ بین معادله‌های ۱۳-۳۰ و ۱۳-۳۱، داریم

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \qquad (۱۳-۳۲)$$

اگر چنان‌که کپلر می‌گوید، dA/dt ثابت باشد، معادله‌ی ۱۳-۳۲ نشان می‌دهد که L نیز ثابت و تکانه‌ی زاویه‌ای پایسته است. بدین ترتیب، قانون دوم کپلر به واقع هم‌ارز قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای است.

۳. قانون دوره‌های تناوب: مجذور دوره‌ی تناوب گردش هر سیاره با مکعب نیم‌قطر بزرگ مدار سیاره متناسب است.

برای نشان دادن این موضوع مدار دایره‌ای با شعاع r شکل ۱۳-۱۴ را در نظر می‌گیریم (شعاع یک دایره هم‌ارز نیم‌قطر بزرگ یک بیضی است). با استفاده کردن از قانون دوم نیوتون $(F = ma)$ در مورد سیاره‌ی گردش کننده در شکل ۱۳-۱۴، داریم

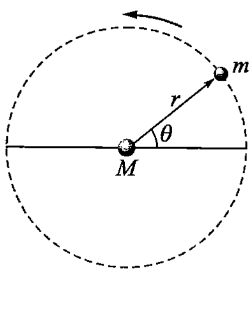
$$\frac{GMm}{r^{2}} = (m)(\omega^{2}r) \qquad (۱۳-۳۳)$$

در اینجا بزرگی F با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۳-۱ و شتاب مرکزگرای $\omega^{2}r$ با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۰-۲۳ جانشانی شده است. اگر با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۰-۲۰، کمیت $\frac{2\pi}{T}$ را، که T دوره‌ی تناوب حرکت است، به‌جای ω قرار دهیم، قانون سوم کپلر با معادله‌ی زیر بیان می‌شود:

$$T^{2} = \left(\frac{4\pi^{2}}{GM}\right)r^{3} \quad \text{(قانون دوره‌های تناوب)} \qquad (۱۳-۳۴)$$

کمیت درون پرانتز ثابت است و تنها به جرم M جسم مرکزی، که سیاره به دور آن می‌گردد، بستگی دارد.

معادله‌ی ۱۳-۳۴ در مورد مدارهای بیضی شکل نیز صادق است، به شرط آنکه r را با a، نیم‌قطر بزرگ بیضی، جانشین کنیم. بنا به قانون سوم کپلر نسبت T^{2}/a^{3} برای هر مداری که سیاره روی آن به دور یک‌جسم سنگین معین می‌گردد، در اساس، مقدار یکسانی دارد. جدول ۱۳-۳ نشان می‌دهدکه چگونه این قانون درباره‌ی مدارهای سیاره‌های منظومه‌ی شمسی صدق می‌کند.



شکل ۱۳-۱۴ سیاره‌ای به جرم m بر روی مداری دایره‌ای به شعاع r به دور خورشید حرکت می‌کند.

جدول ۱۳-۳ قانون دوره‌های تناوب مربوط به منظومه‌ی شمسی

سیاره	نیم‌قطر بزرگ a ($۱۰^{۱۰}$m)	دوره‌ی تناوب T (y)	$T^۲/a^۳$ ($۱۰^{-۳۴}y^۲/m^۳$)
عطارد	۵/۷۹	۰/۲۴۱	۲/۹۹
زهره	۱۰/۸	۰/۶۱۵	۳/۰۰
زمین	۱۵/۰	۱/۰۰	۲/۹۶
مریخ	۲۲/۸	۱/۸۸	۲/۹۸
مشتری	۷۷/۸	۱۱/۹	۳/۰۱
زحل	۱۴۳	۲۹/۵	۲/۹۸
اورانوس	۲۸۷	۸۴/۰	۲/۹۸
نپتون	۴۵۰	۱۶۵	۲/۹۹
پلوتو	۵۹۰	۲۴۸	۲/۹۹

خودآزمایی ۴

ماهواره‌ی ۱ در مدار دایره‌ای معینی به دور سیاره‌ای می‌گردد و در همین حال ماهواره‌ی ۲ مدار دایره‌ای بزرگ‌تری را دور می‌زند. کدام ماهواره دارای، (الف) دوره‌ی تناوب طولانی‌تر، و (ب) تندی بیشتر، است؟

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۳-۴ قانون دوره‌های تناوب کپلر، دنباله‌دار هالی

دنباله‌دار هالی، که با دوره‌ی تناوب ۷۶ سال به دور خورشید می‌گردد، در سال ۱۹۸۶/۱۳۶۵ به نزدیک‌ترین فاصله از خورشید، یعنی، به ***فاصله‌ی حضیض*** R_p برابر با $۸/۹\times۱۰^{۱۰}$m رسیده است. جدول ۱۳-۳ نشان می‌دهد که این فاصله بین فاصله‌ی مدارهای عطارد و زهره قرار دارد.

(الف) دورترین فاصله‌ی این دنباله‌دار از خورشید، یعنی، ***فاصله‌ی اوج*** آن R_a، چقدر است؟

نکته‌های کلیدی

با توجه به شکل ۱۳-۱۲، داریم $R_a + R_p = ۲a$، که در آن a نیم‌قطر بزرگ مدار بیضی شکل است. بنابراین، اگر ابتدا a را پیدا کنیم، می‌توانیم R_a را به دست آوریم. در اینجا از طریق قانون دوره‌های تناوب (معادله‌ی ۱۳-۳۴) با قرار دادن نیم‌قطر بزرگ a به جای r، می‌توان a را به دوره‌ی تناوب داده شده ربط داد.

محاسبات: با انجام دادن این جانشانی و سپس حل کردن معادله‌ی حاصل نسبت به a، داریم

$$a=\left(\frac{GMT^۲}{۴\pi^۲}\right)^{\frac{۱}{۳}} \qquad (۱۳\text{-}۳۵)$$

اگر جرم خورشید $M = ۱/۹۹\times۱۰^{۳۰}$kg، و دوره‌ی تناوب دنباله‌دار $T = ۷۶\,y = ۲/۴\times۱۰^۹$s را درمعادله‌ی ۱۳-۳۵ جانشانی کنیم، نتیجه می‌گیریم که $a = ۲/۷\times۱۰^{۱۲}$m. اکنون، می‌توان نوشت

$$R_a = ۲a - R_p$$

$$R_a = (۲)(۲/۷\times۱۰^{۱۲}\text{m}) - ۸/۹\times۱۰^{۱۰}\text{m} \Rightarrow$$

$$R_a = ۵/۳\times۱۰^{۱۲}\text{m} \qquad \text{(پاسخ)}$$

جدول ۱۳-۳ نشان می‌دهد که فاصله‌ی به دست آمده از نیم‌قطر بزرگ مدار پلوتو اندکی کمتر است. بنابراین، فاصله‌ی دنباله‌دار هالی تا خورشید دورتر از فاصله‌ی پلوتو نخواهد بود.

(ب) خروج از مرکز مدار دنباله‌دار هالی e، چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

در اینجا می‌توانیم e، a و R_p را از طریق شکل ۱۳-۱۲، به هم ربط بدهیم که به صورت $ea = a - R_p$ است.

محاسبه: داریم

$$e = \frac{a - R_p}{a} = 1 - \frac{R_p}{a} \qquad (۱۳\text{-}۳۶)$$

$$e = 1 - \frac{8.9 \times 10^{10}\,\text{m}}{2.7 \times 10^{12}\,\text{m}} \Rightarrow$$

$$e = 0.97 \qquad \text{(پاسخ)}$$

مدار این دنباله‌دار، با خروج از مرکز نزدیک به واحد، یک بیضی باریک و کشیده است.

۱۳-۷ مدارها و انرژی ماهواره‌ها

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۳-۲۲ انرژی پتانسیل گرانشی، انرژی جنبشی و انرژی کل مربوط به ماهواره‌ی در حال گردش در مداری دایره‌ای به دور یک جسم نجومی را حساب کنید.

۱۳-۲۳ انرژی کل مربوط به ماهواره‌ی در حال گردش در یک مدار بیضی شکل را حساب کنید.

نکته‌های کلیدی

- وقتی یک سیاره یا ماهواره‌ای به جرم m در مداری دایره‌ای به شعاع r حرکت می‌کند، انرژی پتانسیل آن U و انرژی جنبشی آن K، از معادله‌های زیر به دست می‌آیند

$$K = \frac{GMm}{2r} \quad \text{و} \quad U = -\frac{GMm}{r}$$

در نتیجه انرژی مکانیکی $E = K + U$ برابر است با

$$E = -\frac{GMm}{2r}$$

برای یک مدار بیضی شکل با نیم قطر بزرگ a، داریم

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

مدارها و انرژی ماهواره‌ها

هنگامی که یک ماهواره در مسیر بیضی شکل خود زمین را دور می‌زند، تندی آن، یعنی مشخص کننده‌ی انرژی جنبشی K، و فاصله‌ی آن از مرکز زمین، یعنی مشخص کننده‌ی انرژی پتانسیل U، هر دو، با دوره‌ی تناوب معینی افت و خیز پیدا می‌کنند. اما انرژی مکانیکی ماهواره E، ثابت می‌ماند (چون جرم ماهواره خیلی کوچک‌تر از جرم زمین است، U و E مربوط به دستگاه زمین ـ ماهواره را فقط به ماهواره نسبت می‌دهیم).

انرژی پتانسیل دستگاه با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۳-۲۱ (به ازای $U = 0$ در فاصله‌ی جدایی بی‌نهایت) به دست می‌آید:

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

در اینجا r شعاع مدار است، که فعلاً مدار دایره‌ای فرض می‌شود، M جرم زمین و m جرم ماهواره است.

برای تعیین انرژی جنبشی ماهواره در روی مدار دایره‌ای قانون دوم نیوتـون $(F = ma)$ را چنین می‌نویسیم

$$\frac{GMm}{r^{۲}} = m\frac{v^{۲}}{r} \qquad (۱۳\text{-}۳۷)$$

که در آن $\frac{v^{۲}}{r}$ شتاب مرکزگرای ماهواره است. بنابراین، با استفاده کـردن از معادلـه‌ی ۱۳-۳۷ انرژی جنبشی ماهواره برابر است با

$$K = \frac{۱}{۲}mv^{۲} = \frac{GMm}{۲r} \qquad (۱۳\text{-}۳۸)$$

این معادله نشان می‌دهد که برای مدار دایره‌ای یک ماهواره، داریم

$$K = -\frac{U}{۲} \quad (\text{مدار دایره‌ای}) \qquad (۱۳\text{-}۳۹)$$

بدین ترتیب، انرژی مکانیکی ماهواره در حین گردش، برابر است با

$$E = K + U = \frac{GMm}{۲r} - \frac{GMm}{r} \Rightarrow$$

$$E = -\frac{GMm}{۲r} \quad (\text{مدار دایره‌ای}) \qquad (۱۳\text{-}۴۰)$$

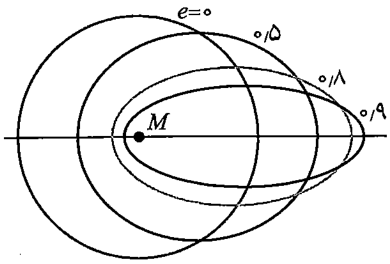
این معادله نشان می‌دهد که E، انرژی مکانیکی ماهواره در روی مدار دایره‌ای برابر اسـت با انرژی جنبشی ماهواره K، با علامت منفی:

$$E = -K \quad (\text{مدار دایره‌ای}) \qquad (۱۳\text{-}۴۱)$$

برای ماهواره‌ای که بر روی یک مدار بیضی شکل با نیم‌قطر بـزرگ a حرکـت مـی‌کـند، می‌توان در معادله‌ی ۱۳-۴۰، r را با a جانشین کرد. در این صورت، انرژی مکانیکی ماهواره چنین به دست می‌آید:

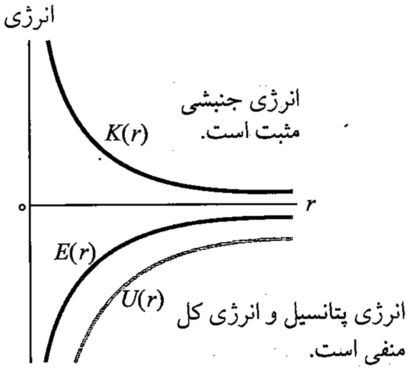
$$E = -\frac{GMm}{۲a} \quad (\text{مدار بیضی شکل}) \qquad (۱۳\text{-}۴۲)$$

معادله‌ی ۱۳-۴۲ نشان می‌دهد که انرژی مکانیکی یک ماهواره تنها به نیم‌قطر بـزرگ مـدار گردش آن بستگی دارد، نه به خروج از مرکز e. به عنوان مثال، در شکل ۱۳-۱۵، چهار مدار با نیم‌قطر بزرگ یکسان مربوط به یک ماهواره نشان داده شده است. ایـن مـاهواره در هـر چهـار مدار دارای انرژی مکانیکی یکسان E، است. شکل ۱۳-۱۶ نمودار تغییرات K، U و E را برحسب r، برای یک ماهواره‌ی در حال حرکت در مداری دایره‌ای به دور یک جسم مرکـزی سنگین، نشان می‌دهد. توجه کنید که وقتی r افزایش می‌یابد، انرژی جنبشی (و از آنجا تنـدی مداری کاهش می‌یابد.



شکل ۱۳-۱۵ نمودار چهار مدار گـردش بـا خروج از مرکزهای مختلف e، بـه دور شیئی به جرم M. هـر چهـار مـدار دارای نـیم‌قطر بزرگ یکسـان a هسـتند و در نتیجـه، انـرژی مکانیکی آن‌ها E، یکی است.

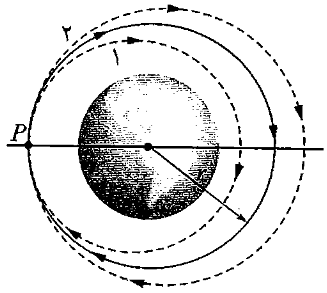
نمودار تغییرات انرژی ماهواره بر حسب شعاع مدار



شکل ۱۳-۱۶ نمودار تغییرات انرژی جنبشی K، انرژی پتانسیل U و انرژی مکـانیکی E برحسب شعاع مدار r، برای ماهواره‌ی با مدار دایره‌ای. به ازای هر مقدار r، مقادیر U و E منفـی هسـتند و مقـدار K مثبت اسـت، و $E = -K$. هنگامی‌که $r \to \infty$، هر سه نمودار انرژی به مقدار صفر نزدیک می‌شوند.

خودآزمایی ۵

در شکل زیر، یک شاتل فضایی در آغاز در مداری دایره‌ای به شعاع r به دور زمین می‌گردد. خلبان در نقطه‌ی P، برای کاهش دادن انرژی جنبشی K و انرژی مکانیکی شاتل، در مدتی کوتاه، یک موتور کنترل کننده‌ی حرکت به پیش‌سو را روشن می‌کند. (الف) شاتل کدام یک از مدارهای خط‌چین نشان داده شده در شکل را می‌پیماید؟ (ب) آیا دوره‌ی تناوب مداری شاتل (مدت زمان برگشت به نقطه‌ی P) نسبت به مدار دایره‌ای، بیشتر می‌شود، کمتر می‌شود، یا تغییر نمی‌کند؟



مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۳-۵ انرژی مکانیکی یک توپ بولینگ در حال دوران

فضانوردی به قصد شوخی یک توپ بولینگ به جرم $m = ۷/۲۰\text{kg}$ را در ارتفاع $h = ۳۵۰\text{ km}$ به درون یک مدار دایره‌ای دور زمین، رها می‌کند.

(الف) انرژی مکانیکی توپ E، در حرکت روی مدار خود چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

اگر ابتدا شعاع مداری r، را پیدا کنیم (که با ارتفاع داده شده ***برابر نیست***)، می‌توانیم انرژی E را با استفاده کردن از انرژی مداری داده شده با معادله‌ی ۱۳-۴۰ ($E = -GMm/۲r$) به‌دست آوریم.

محاسبات: شعاع مدار برابر است با

$$r = R + h = ۶۳۷۰\text{ km} + ۳۵۰\text{ km} = ۶/۷۲ \times ۱۰^۶\text{m}$$

در اینجا R شعاع زمین است. پس، با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۳-۴۰ و به ازای جرم زمین برابر با $M = ۵/۹۸ \times ۱۰^{۲۴}\text{kg}$، انرژی مکانیکی برابر است با

$$E = -\frac{GMm}{۲r}$$

$$E = -\frac{(۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\text{N}\cdot\text{m}^۲/\text{kg}^۲)(۵/۹۸ \times ۱۰^{۲۴}\text{kg})(۷/۲۰\text{ kg})}{(۲)(۶/۷۲ \times ۱۰^۶\text{m})} \Rightarrow$$

$$E = -۲/۱۴ \times ۱۰^۸\text{J} = -۲۱۴\text{ MJ} \qquad \textbf{(پاسخ)}$$

(ب) انرژی مکانیکی توپ $E_۰$، در سکوی پرتاب دماغه‌ی کاناورال چقدر است (پیش از آن، فضانورد و فضاپیما پرتاب شده‌اند)؟ از محل سکو تا روی مدار گردش توپ تغییر انرژی مکانیکی توپ ΔE، چقدر است؟

نکته‌ی کلیدی

در سکوی پرتاب توپ در مدار گردش ***قرار ندارد*** و در نتیجه، از معادله‌ی ۱۳-۴۰ ***استفاده نمی‌شود.*** در عوض، $E_۰$ را می‌توان از معادله‌ی $E_۰ = K_۰ + U_۰$ به دست آورد. $K_۰$ انرژی جنبشی توپ و $U_۰$ انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه توپ ـ زمین است.

محاسبات: برای تعیین $U_۰$ با استفاده کردن از معادله‌ی ۱۳-۲۱ می‌توان نوشت

$$U_{\circ} = -\frac{GMm}{R}$$

$$U_{\circ} = -\frac{(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\mathrm{N\cdot m^۲/kg^۲})(۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}\mathrm{kg})(۷/۲۰\,\mathrm{kg})}{۶/۳۷\times ۱۰^{۶}\mathrm{m}} \Rightarrow$$

$$U_{\circ} = -۴/۵۱\times ۱۰^{۸}\mathrm{J} = -۴۵۱\,\mathrm{MJ}$$

انرژی جنبشی توپ $K_{\circ}$، از حرکت کردن توپ با چرخش زمین ناشی می‌شود. می‌توان نشان داد که این انرژی کمتر از $۱\mathrm{MJ}$ است، که نسبت به $U_{\circ}$ درخور چشم‌پوشی است. بنابراین، انرژی مکانیکی توپ در روی سکوی پرتاب برابر است با

$$E_{\circ} = K_{\circ} + U_{\circ} \approx ۰ - ۴۵۱\,\mathrm{MJ} \Rightarrow$$

$$E_{\circ} = -۴۵۱\,\mathrm{MJ} \qquad \text{(پاسخ)}$$

افزایش یافتن انرژی مکانیکی توپ از محل سکوی پرتاب تا مدار برابر است با

$$\Delta E = E - E_{\circ} = (-۲۱۴\,\mathrm{MJ}) - (۴۵۱\,\mathrm{MJ}) \Rightarrow$$

$$\Delta E = ۲۳۷\,\mathrm{MJ} \qquad \text{(پاسخ)}$$

این مقدار انرژی را می‌توان با صرف کردن چند دلار از شرکت‌های خدمات عمومی خریداری کرد. واضح است که هزینه‌ی بالای قرار دادن اشیا در مدار گردش به دور زمین مربوط به انرژی مکانیکی مورد نیاز آن‌ها نیست.

مسئله‌ی نمونه‌ی ۱۳-۶ تبدیل یک مدار دایره‌ای به یک مدار بیضی شکل

سفینه‌ای به جرم $m = ۴/۵۰\times ۱۰^{۳}\,\mathrm{kg}$ در یک مدار زمینی دایره‌ای به شعاع $r = ۸/۰۰\times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m}$ با دوره‌ی تناوب $T_{\circ} = ۱۱۸/۶\,\mathrm{min} = ۷/۱۱۹\times ۱۰^{۳}\,\mathrm{s}$ گردش می‌کند و در همان حال یک موشک پیش رانگر به پیش‌سو شلیک می‌شود تا تندی را به $۹۶/۰$ درصد تندی آغازی کاهش دهد. دوره‌ی تناوب مدار بیضی شکل حاصل T (شکل ۱۳-۱۷) چقدر است؟

نکته‌های کلیدی

(۱) مدار یک مدار بیضی شکل بنا به قانون سوم کپلر که به‌صورت معادله‌ی ۱۳-۳۴ ($T^{۲} = ۴\pi^{۲}r^{۳}/GM$) نوشته می‌شود، به نیم قطر بزرگ a، ربط دارد به شرطی که a به جای r قرار داده شود. (۲) نیم قطر بزرگ a از طریق معادله‌ی ۱۳-۴۲ ($E = -GMm/۲a$) به انرژی مکانیکی کل سفینه E، ربط دارد، که در آن $M = ۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}\,\mathrm{kg}$ جرم زمین است. (۳) انرژی پتانسیل سفینه در فاصله‌ی r از مرکز زمین، از معادله‌ی ۱۳-۲۱ ($U = -GMm/r$) به دست می‌آید.

محاسبات: با توجه به نکته‌های کلیدی معلوم می‌شود که باید انرژی کل E را حساب کنیم تا نیم قطر بزرگ a به دست آید. پس از آن می‌توان دوره‌ی تناوب مدار بیضی شکل را معین کرد. ابتدا از محاسبه‌ی انرژی جنبشی آغاز و آن را درست پس از شلیک شدن پیش رانگر حساب می‌کنیم. پس از شلیک شدن موشک تندی v به ۹۶ درصد تندی آغازی $v_{\circ}$ می‌رسد که با نسبت محیط مدار دایره‌ای آغازی به دوره‌ی تناوب آغازی مدار برابر است. بنابراین، درست پس از شلیک شدن موشک، انرژی جنبشی برابر است با

$$K = \frac{۱}{۲}mv^{۲} = \frac{۱}{۲}m(۰/۹۶v_{\circ})^{۲} = \frac{۱}{۲}m(۰/۹۶)^{۲}\left(\frac{۲\pi r}{T_{\circ}}\right)^{۲}$$

$$K = \frac{۱}{۲}(۴/۵۰\times ۱۰^{۳}\,\mathrm{kg})(۰/۹۶)^{۲}\left[\frac{۲\pi(۸/۰۰\times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m})}{۷/۱۱۹\times ۱۰^{۳}\,\mathrm{s}}\right]^{۲}$$

$$K = ۱/۰۳۳۸\times ۱۰^{۱۱}\,\mathrm{J}$$

درست پس از شلیک شدن موشک، سفینه هنوز در شعاع مداری r قرار دارد، و در نتیجه انرژی پتانسیل گرانشی آن برابر است با

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

$$U = -\frac{(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\mathrm{N.m^۲/kg^۲})(۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}\mathrm{kg})(۴/۵۰\times ۱۰^{۳}\mathrm{kg})}{۸/۰۰\times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m}}$$

$$U = -۲/۲۴۳۶\times ۱۰^{۱۱}\,\mathrm{J}$$

اکنون، پس از بازآرایش معادله‌ی ۱۳-۴۲ با قرار دادن a به جای r، و سپس جانشانی نتیجه‌های انرژی، می‌توان نیم قطر بزرگ را به دست آورد:

$$a = -\frac{GMm}{۲E} = -\frac{GMm}{۲(K+U)}$$

$$a = -\frac{(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\mathrm{N.m^۲/kg^۲})(۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}\mathrm{kg})(۴/۵۰\times ۱۰^{۳}\mathrm{kg})}{۲(۱/۰۳۳۸\times ۱۰^{۱۱}\mathrm{J} - ۲/۲۴۳۶\times ۱۰^{۱۱}\mathrm{J})}$$

$$a = ۷/۴۱۸\times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m}$$

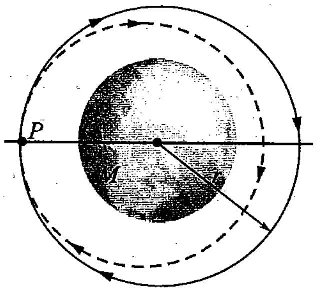
بسیارخوب، اکنون، باید گام بعدی را برداریم. درمعادله‌ی ۱۳-۳۴ مقدار a را به جای r قرار می‌دهیم و سپس دوره‌ی تناوب T را با جانشانی نتیجه‌ی به دست آمده برای a، حساب می‌کنیم:

$$T = \left(\frac{۴\pi^۲ a^۳}{GM}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

$$T = \left[\frac{۴\pi^۲(۷/۴۱۸\times ۱۰^۶\,\mathrm{m})^۳}{(۶/۶۷\times ۱۰^{-۱۱}\,\mathrm{N.m^۲/kg^۲})(۵/۹۸\times ۱۰^{۲۴}\,\mathrm{kg})}\right]^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow$$

$$T = ۶/۳۵۶\times ۱۰^۳\,\mathrm{s} = ۱۰۶\,\mathrm{min}$$ **(پاسخ)**

این، دوره‌ی تناوب مدار بیضی شکل است که سفینه پس از شلیک شدن موشک می‌پیماید. این مقدار به دو دلیل از دوره‌ی تناوب مدار دایره‌ای $T_۰$، کمتر است. (۱) اکنون، طول مسیر مداری کمتر است. (۲) مسیر بیضی شکل، در همه جا، به جز در نقطه‌ی شلیک، سفینه را به زمین نزدیک‌تر می‌کند (شکل ۱۳-۱۷). کاهش یافتن انرژی پتانسیل گرانشی، انرژی جنبشی و نیز تندی سفینه را افزایش می‌دهد.



شکل ۱۳-۱۷ در نقطه‌ی P یک موشک شلیک می‌شود، تا مدار سفینه را از دایره شکل به بیضی شکل تغییر دهد.

۱۳-۸ اینشتین و گرانش

هدف‌های آموزشی

پس از خواندن مطالب این پودمان، باید بتوانید ...

۱۳-۲۴ اصل هم‌ارزی اینشتین را توضیح دهید.

۱۳-۲۵ مشخص کنید که مدل اینشتین برای گرانش از خمیدگی فضا زمان ناشی می‌شود.

نکته‌ی کلیدی

- اینشتین نشان داد که گرانش و شتاب هم‌ارزند. این اصل هم‌ارزی او را به نظریه‌ی گرانش (نظریه‌ی نسبیت عام) که اثرهای گرانشی را برحسب خمیدگی فضا توضیح می‌دهد، رهنمون شد.

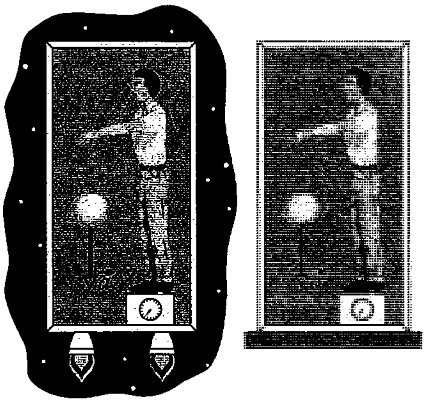
اینشتین و گرانش

اصل هم‌ارزی

آلبرت اینشتین[1] زمانی گفته بود: «من ... در اداره‌ی ثبت اختراعات در برن[2] (سویس) بودم که ناگهان فکری به خاطرم رسید: اگر کسی به طور آزاد سقوط کند، وزن خود را احساس نخواهد کرد. از این فکر یکه خوردم. این فکر ساده اثر عمیقی بر من نهاد و مرا به سوی نظریه‌ی گرانش کشاند».

1. Albert Einstein 2. Bern

به این ترتیب، اینشتین می‌گوید که چگونه شروع به تدوین **نظریه‌ی نسبیت عام** خود کرد. فرض اساسی این نظریه درباره‌ی گرانش (جذب شدن اشیا به سوی هم) **اصل هم‌ارزی** نام دارد، که بنا به این اصل گرانش و شتاب هم‌ارزند. اگر فیزیک‌دانی در جعبه‌ی کوچکی، بنا به شکل ۱۳–۱۸، محبوس باشد، قادر نیست بگوید که جعبه، مطابق شکل ۱۳–۱۸ الف، در روی زمین به حال سکون (و فقط تحت اثر نیروی گرانشی زمین) قرار دارد، یا، مطابق شکل ۱۳–۱۸ ب، در فضای میان ستاره‌ها با شتاب $۹/۸ \mathrm{m/s^2}$ (و فقط تحت اثر نیروی به وجود آورنده‌ی شتاب) حرکت می‌کند. فیزیک‌دان در هر دو وضعیت احساس یکسانی دارد و با ترازو وزن خود را یکسان اندازه‌گیری می‌کند. در ضمن، اگر او شیئی را در حال سقوط ببیند، در هر دو وضعیت، شیء نسبت به او شتاب یکسانی خواهد داشت.



(الف) (ب)

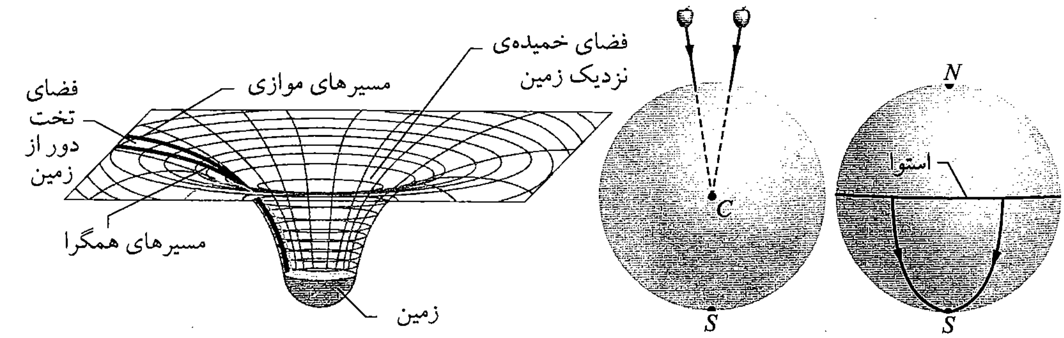
شکل ۱۳–۱۸ (الف) فیزیک‌دانی درون یک جعبه‌ی واقع در روی زمین مشاهده می‌کند که میوه‌ی طالبی در حال سقوط دارای شتاب $a = ۹/۸ \mathrm{m/s^2}$ است. (ب) اگر او و جعبه در اعماق فضا با شتاب $۹/۸ \mathrm{m/s^2}$ حرکت کنند، میوه‌ی طالبی نسبت به او همان شتاب را خواهد داشت. برای فیزیک‌دان امکان ندارد که با انجام دادن هر آزمایشی در درون جعبه بگوید در چه وضعیتی قرار دارد. به عنوان مثال، در هر دو وضعیت ترازویی که فیزیک‌دان روی آن ایستاده است، وزن یکسانی را نشان می‌دهد.

خمیدگی فضا

تاکنون گرانش را به صورت نیروی میان جرم‌ها توصیف کردیم. اما اینشتین نشان داد که گرانش از خمیدگی فضا به وجود می‌آید و ناشی از جرم‌هاست. (چنان‌که بعداً در این کتاب بحث خواهد شد، فضا و زمان با هم درگیرند. در نتیجه، خمیدگی‌ای که اینشتین از آن سخن می‌گوید، به واقع، ***خمیدگی فضازمان***، یعنی، ترکیب چهاربعدی عالم، است).

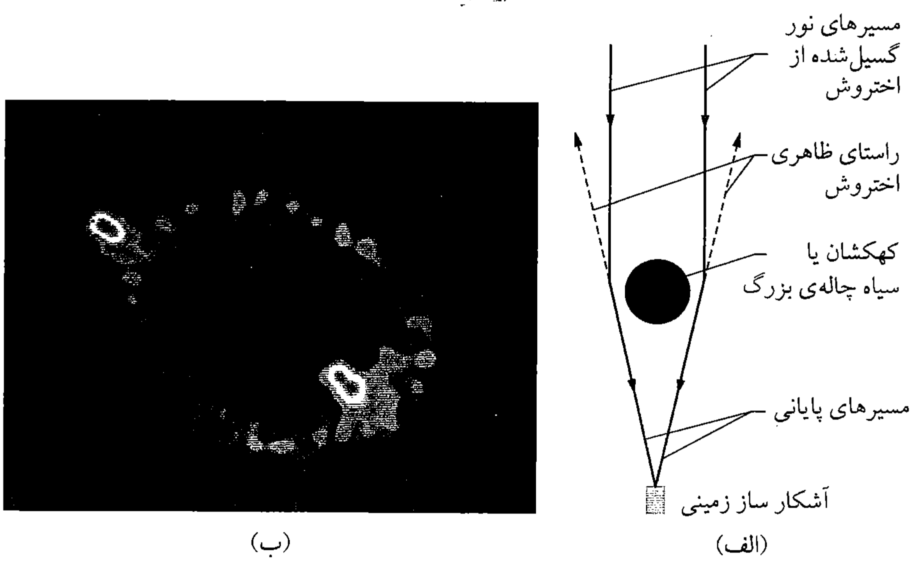
تجسم اینکه فضا (مثلاً، خلأ) چگونه می‌تواند خمیدگی داشته باشد مشکل است. یک مقایسه ممکن است به ما کمک کند: فرض کنیم از روی مداری در پیرامون زمین مسابقه‌ای را تماشا می‌کنیم، که در آن دو قایق واقع در استوا با فاصله‌ی $۲۰ \mathrm{km}$ از هم به سمت قطب جنوب پیش می‌روند (شکل ۱۳–۱۹ الف). از نظر ملوان‌ها این قایق‌ها در مسیرهای تخت و موازی حرکت می‌کنند. اما با گذشت زمان قایق‌ها به سمت هم کشیده می‌شوند، تا در قطب به هم می‌رسند. ملوان‌های قایق‌ها این کشش به سوی یکدیگر را می‌توانند ناشی از نیروی وارد شده به قایق‌ها تعبیر کنند. اما به آسانی می‌توان دریافت که کشیده شدن قایق‌ها به سوی هم در اثر خمیدگی سطح زمین است. ما می‌توانیم این موضوع را ببینیم، زیرا در حال مشاهده‌ی مسابقه از «بیرون» سطح زمین هستیم.

در شکل ۱۳–۱۹ ب، آزمایش مشابهی مشاهده می‌شود: دو سیب جدا از هم واقع در یک سطح افقی از ارتفاع یکسان بالای زمین رها می‌شوند. گرچه ممکن است به‌نظر بیاید که سیب‌ها در طول مسیرهای موازی سیر می‌کنند، اما در واقع، به سوی هم حرکت می‌کنند، زیرا، هر دو، به سوی مرکز زمین سقوط می‌کنند. حرکت این سیب‌ها را می‌توان ناشی از نیروی گرانشی وارد شده به آن‌ها از سوی زمین تعبیر کرد. هم‌چنین، این حرکت می‌تواند ناشی از خمیدگی فضا در نزدیکی زمین به‌خاطر جرم زمین، تعبیر شود. در این حالت، خمیدگی را نمی‌توان مشاهده کرد. زیرا، آن‌طور که در مثال قایق‌ها زمین خمیده از «بیرون» دیده شد، خمیدگی فضا نمی‌تواند از «بیرون» مشاهده شود. با وجود این، خمیدگی را می‌توان با نموداری شبیه نمودار شکل ۱۳–۱۹ پ، ترسیم کرد. در این شکل سیب‌ها در امتداد سطحی که، به خاطر جرم زمین، به سوی زمین خمیده می‌شود، حرکت می‌کنند.



شکل ۱۳-۱۹ (الف) دو شیء که در حال حرکت کردن در امتداد خط‌های نصف‌النهار به سوی جنوب هستند، به دلیل خمیدگی سطح زمین همگرا می‌شوند. (ب) دو شیء در حال سقوط آزاد در نزدیکی زمین، به دلیل خمیدگی فضای نزدیک زمین، در امتداد خط‌هایی که در مرکز زمین همگرا می‌شوند، حرکت می‌کنند. (پ) در فاصله‌های دور از زمین (و جرم‌های دیگر) فضا تخت است و مسیرهای موازی هم چنان موازی باقی می‌مانند. در نزدیکی زمین مسیرهای موازی شروع به همگرا شدن می‌کنند، زیرا به خاطر جرم زمین فضا خمیده است.

هنگامی که نور از کنار زمین عبور می‌کند مسیر آن در اثر خمیدگی فضای پیرامون اندکی منحرف می‌شود. این اثر خاصیتی به نام ***همگرایی گرانشی*** را نشان می‌دهد. هرگاه نور از کنار یک ساختار سنگین‌تر، نظیر کهکشان یا سیاه‌چاله‌ی با جرم بزرگ بگذرد، مسیرش خمیده‌تر می‌شود. اگر چنین ساختار سنگینی بین زمین و ***یک اختروش*** (چشمه‌ی نوری بسیار درخشان و بسیار دور) قرار داشته باشد، نور گسیل شده از اختروش درحین عبور از کنار ساختار سنگین خمیده می‌شود و به سوی ما می‌آید (شکل ۱۳-۲۰ الف). پس، چون به نظر می‌آید نور از آسمان درجهت‌هایی با تفاوت اندک به‌ما می‌رسد، ما همان اختروش را در همه‌ی آن جهت‌های متفاوت مشاهده می‌کنیم. در برخی حالت‌ها، اختروش‌ها را می‌بینیم که در هم آمیخته‌اند تا یک کمان درخشان بزرگ، به نام ***حلقه‌ی اینشتین*** را تشکیل دهند (شکل ۱۳-۲۰ ب).



شکل ۱۳-۲۰ (الف) نور گسیل شده از اختروش دوردست در حین عبور از کنار یک کهکشان، یا یک سیاه‌چاله‌ی بزرگ، مسیرهای خمیده‌ای را دنبال می‌کند، زیرا جرم کهکشان، یا سیاه‌چاله، فضای پیرامون را خمیده می‌کند. نور هنگام آشکار شدن، به نظر می‌رسد که از راستاهای مسیرهای پایانی (خط‌چین‌ها در شکل) آمده است. (ب) نمایش حلقه‌ی اینشتین، به‌نام MG1131+0456، روی صفحه‌ی رایانه‌ی یک تلسکوپ. چشمه‌ی نور (در عمل، موج‌های رادیویی، که شکلی ازنورمرئی هستند) درفاصله‌ی دوردست و درپشت کهکشان بزرگ و نامرئی به وجود آورنده‌ی حلقه قرار دارد. جزئی از چشمه به صورت دو نقطه‌ی روشن، که در روی حلقه دیده‌می‌شود، ظاهرشده است.

آیا، گرانش را باید به خمیدگی فضازمان ناشی از حضور جرم‌ها یا نیروی میان جرم‌ها نسبت داد؟ یا، باید آن را به اثرهای نوعی ذره‌ی بنیادی به نام ***گراویتون***، آن‌طور که در برخی نظریه‌های فیزیک نوین دیده می‌شود، نسبت داد؟ اگرچه نظریه‌های ما درباره‌ی گرانش برای توصیف هر چیزی، از سیب در حال سقوط گرفته تا حرکت‌های سیاره‌ای و ستاره‌ای بسیار موفق بوده‌اند، هنوز درباره‌ی آن‌ها در مقیاس کیهان شناختی یا مقیاس فیزیک کوانتومی اطلاعات کافی نداریم.

مرور و چکیده‌ی مطالب

قانون گرانش هر ذره در عالم ذره‌ی دیگری را با یک **نیروی گرانشی** جذب می‌کند، که بزرگی‌اش از معادله‌ی زیر به‌دست می‌آید

$$F = G\frac{m_۱ m_۲}{r^۲} \quad \text{(قانون گرانش نیوتون)} \quad (۱-۱۳)$$

که در آن $m_۱$ و $m_۲$ جرم‌های ذرات هستند. r فاصله‌ی میان ذرات و G (مساوی با $۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} \mathrm{N \cdot m^۲/kg^۲}$) ***ثابت گرانش*** است.

رفتار گرانشی پوسته‌های کروی یکنواخت نیروی گرانشی میان اجسام گسترده را، به‌طورکلی، باید از جمع‌کردن (انتگرال‌گیری) نیروهای فردی وارد شده به ذرات فردی درون اجسام به‌دست آورد. اما اگر جسم به صورت پوسته‌ی کروی یکنواخت یا کره‌ی توپر متقارن باشد، نیروی گرانشی خالص وارد شده به یک شیء بیرونی از سوی آن، می‌تواند به گونه‌ای که همه‌ی جرم پوسته یا جسم در مرکزش قرار داشته باشد، محاسبه شود.

اصل برهم نهی نیروهای گرانشی از **اصل برهم نهی** پیروی می‌کنند؛ یعنی، هرگاه n ذره برهم کنش داشته باشند نیروی خالص $\vec{F}_{۱,\mathrm{net}}$ وارد شده به ذره‌ی ۱ برابر با مجموع نیروهای وارد شده به آن از سوی ذرات فردی دیگر است:

$$\vec{F}_{۱,\mathrm{net}} = \sum_{i=۲}^{n} \vec{F}_{۱i} \quad (۵-۱۳)$$

در اینجا مجموع برابر است با جمع برداری نیروهای $\vec{F}_{۱i}$ که به ذره‌ی ۱ از سوی ذره‌های ۲،۳، ... ، n وارد می‌شوند. نیروی گرانشی $\vec{F}_۱$ وارد شده به ذره از سوی یک جسم گسترده، با تقسیم کردن جسم به اجزاء دیفرانسیلی به جرم dm، که هر کدام نیروی دیفرانسیلی $d\vec{F}$ را به ذره وارد می‌کنند، و سپس انتگرال‌گیری برای تعیین مجموع این نیروها، به دست می‌آید:

$$\vec{F}_۱ = \int d\vec{F} \quad (۶-۱۳)$$

شتاب گرانشی شتاب گرانشی a_g یک ذره (به جرم m) فقط از نیروی گرانشی واردشده به‌ذره ناشی می‌شود. اگر ذره در فاصله‌ی r از مرکز یک جسم کروی یکنواخت به جرم M قرار داشته باشد، F بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به ذره از معادله‌ی ۱۳-۱ به‌دست می‌آید. بنابراین، با استفاده کردن از قانون دوم نیوتون، داریم

$$F = ma_g \quad (۱۰-۱۳)$$

که در آن

$$a_g = \frac{GM}{r^۲} \quad (۱۱-۱۳)$$

شتاب سقوط آزاد و وزن چون جرم زمین به طور یکنواخت توزیع نشده است، چون زمین شکل کروی کامل ندارد، و چون زمین می‌چرخد، شتاب واقعی سقوط آزاد یک ذره در نزدیکی زمین $\vec{g}$، با شتاب گرانشی $\vec{a}_g$ اندکی تفاوت دارد و وزن ذره (مساوی با mg) با بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به آن متفاوت است (معادله‌ی ۱۳-۱).

گرانش در درون پوسته‌ی کروی پوسته‌ی کروی یکنواخت ماده هیچ نیروی گرانشی برایندی به ذره‌ی واقع در درون خود وارد نمی‌کند. یعنی، اگر ذره‌ای درون یک کره‌ی توپر یکنواخت در

فاصله‌ی r از مرکز کره قرار گیرد، نیروی گرانشی وارد شده به ذره فقط ناشی از جرم درون کره‌ای به شعاع r (***کره‌ی درونی***) است. بزرگی این نیرو از معادله‌ی زیر به دست می‌آید

$$F = \frac{GmM}{R^3} \qquad (۱۹-۱۳)$$

که در آن M جرم کره و R شعاع کره است.

انرژی پتانسیل گرانشی انرژی پتانسیل گرانشی $U(r)$ یک دستگاه شامل دو ذره به جرم‌های M و m، که در فاصله‌ی r از هم قرار دارند، برابر است با کار انجام شده، با علامت منفی، توسط نیروی گرانشی وارد شده از سوی یک ذره به ذره‌ی دیگر، وقتی که فاصله‌ی میان دو ذره از بی‌نهایت (فاصله‌ی خیلی زیاد) تا r تغییر کند. این انرژی برابر است با

$$U = -\frac{GMm}{r} \quad \text{(انرژی پتانسیل گرانشی)} \qquad (۲۱-۱۳)$$

انرژی پتانسیل یک دستگاه هرگاه دستگاهی شامل بیش از دو ذره باشد، انرژی پتانسیل گرانشی کل آن U، برابر است با مجموع انرژی‌های پتانسیل مربوط به همه‌ی زوج‌های ذرات. به عنوان مثال، برای سه ذره به جرم‌های m_1، m_2 و m_3، داریم

$$U = -\left(\frac{Gm_1m_2}{r_{12}} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}}\right) \qquad (۲۲-۱۳)$$

تندی فرار یک شیء هنگامی می‌تواند از تأثیر نیروی جاذبه‌ی یک جسم نجومی به جرم M و شعاع R فرار کند (به فاصله‌ی بی‌نهایت برسد) که تندی آن در نزدیکی سطح جسم، دست کم، برابر با **تندی فرار** باشد. این تندی از معادله‌ی زیر به دست می‌آید

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad (۲۸-۱۳)$$

قانون‌های کپلر حرکت ماهواره‌های طبیعی و مصنوعی از این قانون‌ها پیروی می‌کند:

۱. ***قانون مدارها.*** همه‌ی سیاره‌ها در روی مدارهایی بیضی شکل حرکت می‌کنند که خورشید در یکی از کانون‌های بیضی قراردارد.

۲. ***قانون مساحت‌ها.*** خط وصل کننده‌ی هر سیاره به خورشید، در زمان‌های مساوی مساحت‌های مساوی را جارو می‌کند (این گزاره با قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای هم‌ارز است).

۳. ***قانون دوره‌های متناوب.*** مجذور دوره‌ی تناوب گردش هر سیاره به‌دور خورشید T، با مکعب نیم‌قطر بزرگ مدار سیاره a، متناسب است. در مورد مدارهای دایره‌ای به شعاع r می‌توان نوشت:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right) r^3 \quad \text{(قانون دوره‌های تناوب)} \qquad (۳۴-۱۳)$$

که در آن M جرم جسم جذب کننده، یعنی خورشید، در حالت مربوط به‌دستگاه منظومه‌ی شمسی است. درمورد مدارهای سیاره‌ای، نیم‌قطر بزرگ a به جای r، شعاع مدار دایره‌ای قرار داده می‌شود.

انرژی در حرکت سیاره‌ای هرگاه سیاره یا ماهواره‌ای به جرم m بر روی مداری دایره‌ای به شعاع r حرکت کند، انرژی پتانسیل آن U، و انرژی جنبشی آن K، از معادله‌های زیر به دست می‌آیند

$$K = \frac{GMm}{2r} \quad \text{و} \quad U = -\frac{GMm}{r} \qquad (۲۱-۱۳، ۳۸-۱۳)$$

در این صورت، انرژی مکانیکی $E = K + U$ برابر است با

$$E = -\frac{GMm}{2r} \qquad (۴۰-۱۳)$$

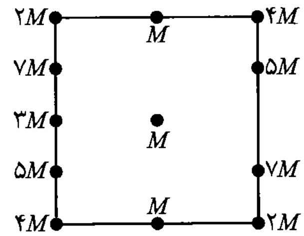
این انرژی برای مدار بیضی شکل با نیم‌قطر بزرگ a برابر است با

$$E = -\frac{GMm}{2a} \qquad (۴۲-۱۳)$$

دیدگاه اینشتین درباره‌ی گرانش اینشتین دریافت که گرانش و شتاب هم‌ارزند. این مفهوم که **اصل هم‌ارزی** نامیده می‌شود، اینشتین را به نظریه‌ای از گرانش (**نظریه‌ی نسبیت عام**) رهنمون ساخت، که بنا به آن نظریه اثرهای گرانشی برحسب خمیدگی فضا بیان می‌شوند.

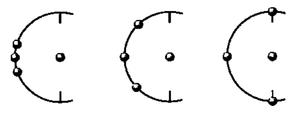
پرسش‌ها

۱ در شکل ۱۳-۲۱، ذره‌ی مرکزی به جرم M با آرایه‌ی مربع شکلی، شامل ذره‌های دیگر، احاطه شده است. فاصله‌ی ذره‌های واقع شده بر روی محیط مربع برابر با d یا $d/2$ است. بزرگی و جهت نیروی گرانشی برایند وارد شده به ذره‌ی مرکزی از سوی ذره‌های دیگر، چیست؟



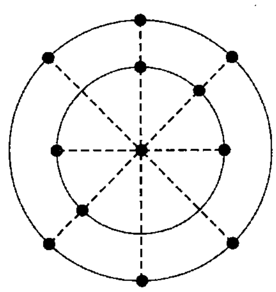
شکل ۱۳-۲۱ پرسش ۱.

۲ شکل ۱۳-۲۲ سه آرایش مربوط به ذره‌های مشابه را نشان می‌دهد که سه تای آن‌ها بر روی دایره‌ای به شعاع ۰٫۲۰m و ذره‌ی چهارم در مرکز دایره قرار دارد. (الف) این آرایش‌ها را با توجه به بزرگی نیروی گرانشی برایند وارد شده به ذره‌ی مرکزی از سوی سه‌ذره‌ی دیگر، ازبیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید. (ب) این ترتیب را با توجه به انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه چهار ذره‌ای از کمترین تا بیشترین مقدار منفی انجام دهید.



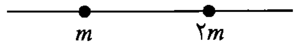
شکل ۱۳-۲۲ پرسش ۲.

۳ در شکل ۱۳-۲۳، ذره‌ی مرکزی با دو حلقه‌ی دایره‌ای به شعاع‌های r و R با شرط $R > r$، احاطه شده است. جرم تمام ذره‌ها m است. بزرگی و جهت نیروی گرانشی برایند وارد شده به ذره‌ی مرکزی از سوی ذره‌های واقع شده بر روی حلقه‌ها چیست؟



شکل ۱۳-۲۳ پرسش ۳.

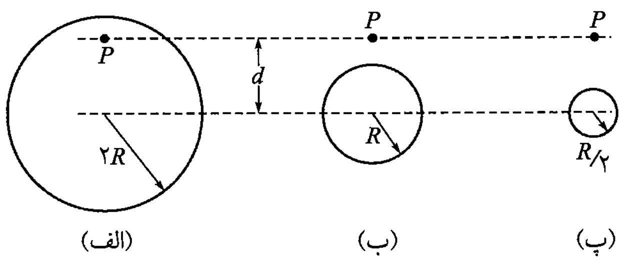
۴ در شکل ۱۳-۲۴، دو ذره به جرم‌های m و $۲m$ روی محوری قرار دارند. (الف) در چه نقطه‌ای روی محور (به جز در بی‌نهایت) ذره‌ی سومی را به جرم $۳m$ می‌توان قرار داد تا



شکل ۱۳-۲۴ پرسش ۴.

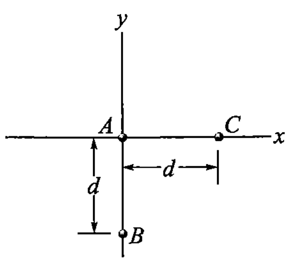
نیروی گرانشی برایند وارد شده به آن از سوی دو ذره‌ی اول صفر شود: سمت چپ دو ذره‌ی اول، سمت راست دو ذره‌ی اول، بین دو ذره و نزدیک به ذره‌ی سنگین‌تر، یا، بین دو ذره و نزدیک به ذره‌ی سبک‌تر؟ (ب) اگر جرم ذره‌ی سوم $۱۶m$ باشد، آیا پاسخ قسمت (الف) تغییر می‌کند؟ (پ) آیا نقطه‌ای در خارج محور (به جز در بی‌نهایت) وجود دارد که در آن نیروی برایند وارد شده به ذره‌ی سوم صفر باشد؟

۵ شکل ۱۳-۲۵ سه وضعیت را نشان می‌دهد که شامل یک ذره‌ی نقطه‌ای P به جرم m و یک پوسته‌ی کروی با جرم M است، که در آن جرم به طور یکنواخت توزیع شده است. در شکل شعاع‌های پوسته‌های کروی داده شده‌اند. این وضعیت‌ها را با توجه به بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به ذره‌ی P از سوی پوسته را از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۱۳-۲۵ پرسش ۵.

۶ در شکل ۱۳-۲۶، سه ذره درجای خود ثابت شده‌اند. جرم ذره‌ی B بیشتر از جرم ذره‌ی C است. آیا می‌توان ذره‌ی چهارمی (مانند ذره‌ی D) را در جایی قرار داد که نیروی گرانشی برایند وارد شده به ذره‌ی A از سوی ذره‌های B، C و D صفر شود؟

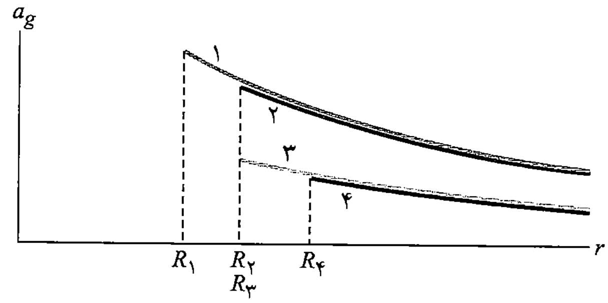


شکل ۱۳-۲۶ پرسش ۶.

اگر چنین است، این ذره در چه ربعی از دستگاه مختصات قرار دارد و به چه محوری نزدیک خواهد بود؟

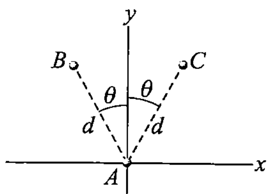
۷ چهار دستگاه ذره‌های با جرم‌های مساوی خودآزمایی ۲ را با توجه به قدر مطلق انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.

۸ شکل ۱۳-۲۷ نمودار تغییرات a_g مربوط به چهار سیاره را به صورت تابعی از فاصله‌ی شعاعی r نسبت به مرکز سیاره نشان می‌دهد. نمودارها از سطح سیاره‌ها (به شعاع‌های $R_۱$، $R_۲$، $R_۳$ و $R_۴$) به برون‌سو رسم شده‌اند. نمودارهای ۱ و ۲ در شرایط $r \geq R_۲$ و نمودارهای ۳ و ۴ در شرایط $r \geq R_۴$ به هم نزدیک می‌شوند. این چهار سیاره را، (الف) با توجه به جرم‌های آن‌ها و (ب) با توجه به جرم یکای حجم آن‌ها، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



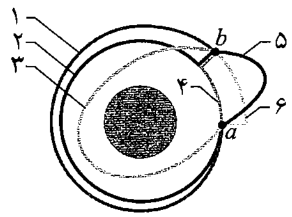
شکل ۱۳-۲۷ پرسش ۸.

۹ شکل ۱۳-۲۸ سه ذره را نشان می‌دهد که در آغاز در جای خود ثابت شده‌اند؛ ذره‌های B و C مشابه‌اند و به طور متقارن نسبت به محور y و به فاصله‌ی d از ذره‌ی A قرار دارند. (الف) جهت نیروی گرانشی برایند $\vec{F}_{net}$، وارد شده به ذره‌ی A چیست؟ (ب) اگر ذره‌ی C را به خط راست از مبداء دور کنیم، آیا جهت $\vec{F}_{net}$ تغییر می‌کند؟ اگر چنین است، چگونه و حد این تغییر چیست؟



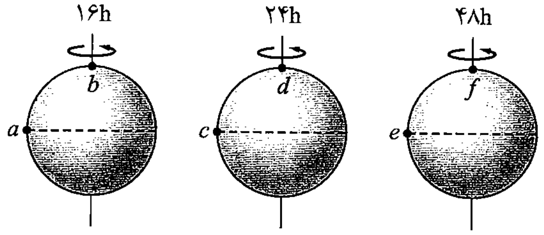
شکل ۱۳-۲۸ پرسش ۹.

۱۰ شکل ۱۳-۲۹ شش مسیر را نشان می‌دهد که یک موشک باید آن‌ها را در حین حرکت کردن به دور ماه از نقطه‌ی a تا نقطه‌ی b بپیماید. این مسیرها را، (الف) با توجه به تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه موشک ـ ماه و (ب) با توجه به کار خالص انجام شده روی موشک توسط نیروی گرانشی ماه، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



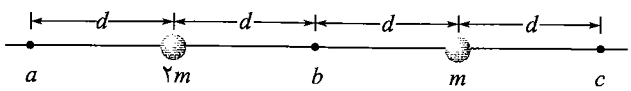
شکل ۱۳-۲۹ پرسش ۱۰.

۱۱ شکل ۱۳-۳۰ سه سیاره‌ی کروی یکنواخت را که دارای اندازه و جرم مشابه‌اند، نشان می‌دهد. در شکل، دوره‌های تناوب چرخش سیاره‌ها T، داده شده و شش نقطه با حروف مشخص شده‌اند. از شش نقطه سه نقطه روی استوای سیاره‌ها و سه نقطه در قطب شمال قرار دارند. این نقطه‌ها را با توجه به شتاب سقوط آزاد g، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۱۳-۳۰ پرسش ۱۱.

۱۲ در شکل ۱۳-۳۱، ذره‌ای به جرم m (که نشان داده نشده) از فاصله‌ی بی‌نهایت تا یکی از سه نقطه‌ی a، b و c حرکت داده شده است. دو ذره‌ی دیگر به جرم‌های m و $۲m$ نیز در جاهای خود بر روی محور ثابت‌اند. این سه نقطه را با توجه به‌کار انجام شده توسط نیروی گرانشی برایند وارد شده به ذره‌ی متحرک از سوی ذرات ثابت، از بیشترین تا کمترین مقدار، مرتب کنید.



شکل ۱۳-۳۱ پرسش ۱۲.

مسئله‌ها

پودمان ۱۳-۱ قانون گرانش نیوتون

* ۱ جسمی به جرم M به دو پاره به جرم‌های m و $M-m$ تقسیم می‌شود و سپس دو پاره در فاصله‌ی معینی از هم قرار می‌گیرند. به ازای چه نسبتی از $\frac{m}{M}$ بزرگی نیروی گرانشی میان دو پاره بیشینه است؟

* ۲ ***اثر ماه.*** برخی مردم بر این باورند که ماه فعالیت‌های آن‌ها را کنترل می‌کند. اگر ماه از وضعیتی که درست درطرف دیگر زمین نسبت به ما دارد حرکت کند و درست در بالای سر ما قرار گیرد، (الف)جاذبه‌ی گرانشی ماه بر روی ما چند درصد افزایش، و (ب) وزن ما (آن‌طور که ترازو نشان می‌دهد) چند درصد کاهش پیدا می‌کند؟ فرض کنید فاصله‌ی زمین ـ ماه (مرکز تا مرکز) $۳/۸۲\times ۱۰^{۸}\,m$ و شعاع زمین $۶/۳۷\times ۱۰^{۶}\,m$ است.

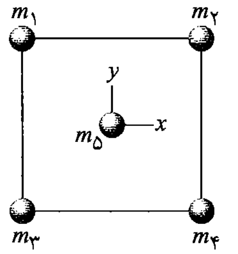
* ۳ فاصله‌ی میان ذره‌ای به جرم $۵/۲\,kg$ و ذره‌ی دیگری به جرم $۲/۴\,kg$، چقدر باید باشد تا بزرگی نیروی جاذبه‌ی گرانشی میان آن‌ها $۲/۳\times ۱۰^{-۱۲}\,N$ شود؟

* ۴ خورشید و زمین هر کدام به ماه یک نیروی گرانشی وارد می‌کنند. نسبت این دو نیرو $\frac{F_{(\text{خورشید})}}{F_{(\text{زمین})}}$، چقدر است؟ (فاصله‌ی متوسط خورشید ـ ماه برابر با فاصله‌ی خورشید ـ زمین است).

* ۵ ***سیاه‌چاله‌های مینیاتوری.*** از همان زمان مه بانگ، که آغازکننده‌ی عالم بوده است، ممکن است سیاه‌چاله‌های بسیار کوچکی در سراسر عالم سرگردان شده باشند. اگر یکی از این سیاه‌چاله‌ها با جرم $۱\times ۱۰^{۱۱}\,kg$ (و شعاعی فقط به اندازه‌ی $۱\times ۱۰^{-۱۶}\,m$) به زمین برسد، در چه فاصله‌ای از کلّه‌ی ما جاذبه‌ی گرانشی آن روی ما با جاذبه‌ی گرانشی زمین روی ما برابر می‌شود؟

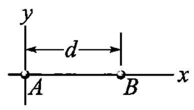
پودمان ۱۳-۲ گرانش و اصل برهم نهی

* ۶ در شکل ۱۳-۳۲، مربعی به ضلع $۲۰/۰\,cm$ توسط چهار کره با جرم‌های $m_1 = ۵/۰۰\,g$، $m_2 = ۳/۰۰\,g$، $m_3 = ۱/۰۰\,g$ و $m_4 = ۵/۰۰\,g$ تشکیل شده است. نیروی گرانشی برایند وارد شده به کره‌ی واقع در مرکز با جرم $m_5 = ۲/۵۰\,g$ از سوی این کره‌ها، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟



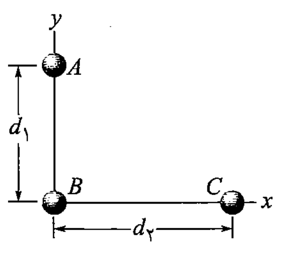
شکل ۱۳-۳۲ مسئله‌ی ۶.

* ۷ ***دستگاه یک بُعدی.*** در شکل ۱۳-۳۳، دو ذره‌ی نقطه‌ای به فاصله‌ی d از یکدیگر بر روی محور x ثابت شده‌اند. ذره‌ی A دارای جرم m_A و ذره‌ی B دارای جرم $۳/۰۰m_A$ است. می‌خواهیم ذره‌ی سوم C به‌جرم $۷۵/۰m_A$ را بر روی محور x و در نزدیکی ذره‌های A و B قرار دهیم. ذره‌ی C را در چه مختصه‌ی x برحسب d باید قرار داد تا نیروی گرانشی برایند وارد شده به ذره‌ی A از سوی ذره‌های B و C صفر شود؟



شکل ۱۳-۳۳ مسئله‌ی ۷.

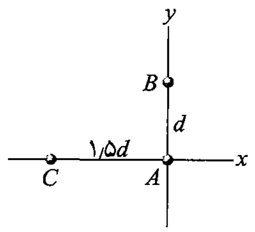
* ۸ در شکل ۱۳-۳۴، سه کره، هر یک به جرم $۵/۰۰\,kg$، در فاصله‌های $d_1 = ۰/۳۰۰\,m$ و $d_2 = ۰/۴۰۰\,m$ قرار گرفته‌اند. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به محور x مثبت) نیروی گرانشی برایند وارد شده به کره‌ی B از سوی کره‌های A و C، چیست؟



شکل ۱۳-۳۴ مسئله‌ی ۸.

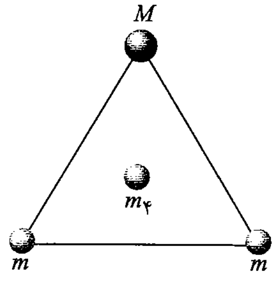
* ۹ می‌خواهیم یک کاوند فضایی را در راستای خطی که به سوی خورشید کشیده می‌شود قرار دهیم تا شراره‌های خورشید را پایشگری کنیم. کاوند را در چه نقطه‌ای از این خط و در چه فاصله‌ای از مرکز زمین باید قرار داد تا جاذبه‌ی گرانشی خورشید بر روی آن با جاذبه‌ی گرانشی زمین متوازن شود؟

** ۱۰ ***دستگاه دوبُعدی.*** در شکل ۱۳-۳۵، سه ذره‌ی نقطه‌ای در صفحه‌ی xy در جای خود ثابت شده‌اند. ذره‌ی A دارای جرم m_A، ذره‌ی B دارای جرم $۲/۰۰ m_A$ و ذره‌ی C دارای جرم $۳/۰۰ m_A$ است. می‌خواهیم ذره‌ی چهارم D با جرم $۴/۰۰ m_A$ را در نزدیکی سه ذره‌ی دیگر قرار دهیم. (الف) مختصه‌ی x و (ب) مختصه‌ی y ذره‌ی D را برحسب d چنان پیدا کنید که نیروی گرانشی برایند وارد شده به ذره‌ی A از سوی ذره‌های B، C و D صفر شود.



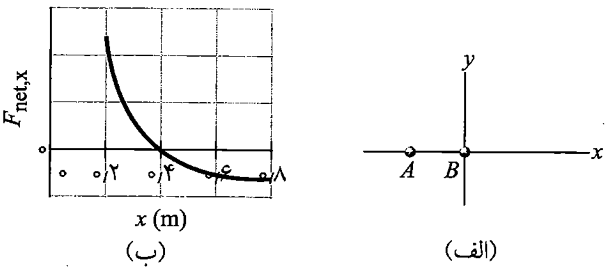
شکل ۱۳-۳۵ مسئله‌ی ۱۰.

** ۱۱ همان‌طور که در شکل ۱۳-۳۶ دیده می‌شود، دو کره، هر یک به‌جرم m، وکره‌ی سوم به‌جرم M، یک‌مثلث سه‌ضلع برابر تشکیل داده‌اند و کره‌ی چهارم به جرم $m_۴$ در مرکز مثلث قرار دارد. نیروی گرانشی برایند وارد شده به کره‌ی مرکزی از سوی کره‌های دیگرصفر است. (الف) مقدار M برحسب m چیست؟ (ب) اگر مقدار $m_۴$ را دو برابر کنیم، در این صورت، بزرگی نیروی گرانشی برایند واردشده به کره‌ی مرکزی چه خواهد بود؟



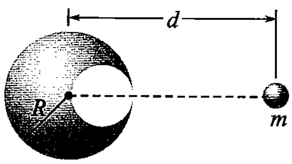
شکل ۱۳-۳۶ مسئله‌ی ۱۱.

** ۱۲ در شکل ۱۳-۳۷ الف، ذره‌ی A در مکان $x = -۰/۲۰\,\mathrm{m}$ بر روی محور x و ذره‌ی B به جرم $۱/۰\,\mathrm{kg}$ در مبداء دستگاه مختصات قرار داده شده است. ذره‌ی C (نشان داده نشده) را می‌توان در راستای محور x در بین ذره B و $x = \infty$ حرکت داد. شکل ۱۳-۳۷ ب نمودار تغییرات مؤلفه‌ی x نیروی گرانشی برایند $F_{\mathrm{net},x}$، وارد شده به ذره‌ی B از سوی ذره‌های A و C را به صورت تابعی از مکان x ذره‌ی C نشان می‌دهد. این منحنی به سمت راست ادامه می‌یابد و به‌ازای $x \to \infty$ به سمت مجانب $-۴/۱۷\times ۱۰^{-۱۰}\,\mathrm{N}$ میل می‌کند. (الف) جرم ذره‌ی A و (ب) جرم ذره‌ی C، چیست؟



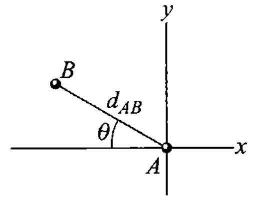
شکل ۱۳-۳۷ مسئله‌ی ۱۲.

** ۱۳ شکل ۱۳-۳۸ یک حفره‌ی کروی را در درون یک کره‌ی سربی به شعاع $R = ۴/۰۰\,\mathrm{cm}$ نشان می‌دهد؛ سطح حفره‌ی کروی در طرف چپ از مرکز کره‌ی سربی می‌گذرد و در طرف راست با سطح کره «مماس است». جرم کره پیش از ایجاد حفره $M = ۲/۹۵\,\mathrm{kg}$ است. این کره‌ی سربی حفره‌دار با چه نیروی گرانشی کره‌ی کوچکی به جرم $m = ۰/۴۳۱\,\mathrm{kg}$ را، که در روی خط راست وصل کننده‌ی مرکزهای کره‌ها و حفره‌ی کروی، و به فاصله‌ی $d = ۹/۰۰\,\mathrm{cm}$ از مرکز کره‌ی سربی قرار دارد، جذب می‌کند؟



شکل ۱۳-۳۸ مسئله‌ی ۱۳.

** ۱۴ سه ذره‌ی نقطه‌ای در صفحه‌ی xy در جای خود ثابت‌اند. دو تا از این ذره‌ها، ذره‌ی A به‌جرم ۶/۰۰ گرم و ذره‌ی

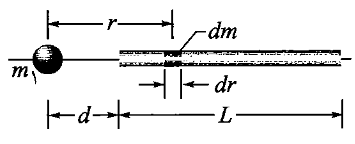


شکل ۱۳-۳۹ مسئله‌ی ۱۴.

B به جرم ۱۲٫۰ گرم، که در شکل ۱۳-۳۹ نشان داده شده‌اند، به فاصله‌ی $d_{AB} = ۰٫۵۰۰\,\mathrm{m}$ از هم تحت زاویه‌ی $\theta = ۳۰^\circ$ قرار دارند. ذره‌ی C به جرم ۸٫۰۰ گرم نشان داده نشده است. نیروی گرانشی برایند وارد شده به ذره‌ی A از سوی ذره‌های B و C، $۲٫۷۷ \times ۱۰^{-۱۴}\,\mathrm{N}$ تحت زاویه‌ی $-۱۶۳٫۸$ درجه نسبت به محور x مثبت است. (الف) مختصه‌ی x و (ب) مختصه‌ی y مکان ذره‌ی C، چیست؟

*** ۱۵ ***دستگاه سه بُعدی.*** سه ذره‌ی نقطه‌ای در دستگاه محورهای مختصات x، y و z در جای خود ثابت‌اند. ذره‌ی A به جرم m_A در مبداء، ذره‌ی B به جرم $۲٫۰۰ m_A$ در مختصات $(۲٫۰۰d$، $۱٫۰۰d$ و $۲٫۰۰d)$ و ذره‌ی C به جرم $۳٫۰۰ m_A$ در مختصات $(-۱٫۰۰d$، $۲٫۰۰d$ و $-۳٫۰۰d)$، واقع است. ذره‌ی چهارم D به جرم $۴٫۰۰ m_A$ باید در نزدیکی ذرات دیگر قرار داده شود. مختصه‌ی (الف) x، (ب) y و (پ) z، نقطه‌ای را برحسب d معین کنید که ذره‌ی D باید در آنجا قرار گیرد تا نیروی گرانشی برایند وارد شده به ذره‌ی A از سوی ذره‌های B، C و D صفر شود.

*** ۱۶ در شکل ۱۳-۴۰، ذره‌ای به جرم $m_۱ = ۰٫۶۷\,\mathrm{kg}$ در فاصله‌ی $d = ۲۳\,\mathrm{cm}$ از یک سر میله یکنواختی به طول $L = ۳٫۰\,\mathrm{m}$ و جرم $M = ۵٫۰\,\mathrm{kg}$ قرار دارد. بزرگی نیروی گرانشی $\vec{F}$ وارد شده به این ذره از سوی میله چیست؟



شکل ۱۳-۴۰ مسئله‌ی ۱۶.

پودمان ۱۳-۳ گرانش در نزدیکی سطح زمین

* ۱۷ (الف) اگر وزن شیئی در سطح زمین $۱۰۰\,\mathrm{N}$ باشد، وزن شیء در سطح ماه چقدر خواهد بود؟ (ب) این شیء چند برابر شعاع زمین باید از مرکز زمین فاصله داشته باشد تا در آنجا وزنش با وزن در روی ماه برابر شود؟

* ۱۸ ***جاذبه‌ی گرانشی کوه.*** یک کوه بزرگ می‌تواند روی راستای «قائم» که با شاغول معین می‌شود، اثر بگذارد. فرض کنید کوهی را به صورت کره‌ای به شعاع $R = ۲٫۰۰\,\mathrm{km}$ و چگالی (جرم یکای حجم) $۲٫۶ \times ۱۰^۳\,\mathrm{kg/m^۳}$ در نظر می‌گیریم. هم‌چنین، فرض کنید شاغولی به طول $۰٫۵۰\,\mathrm{m}$ را در فاصله‌ی $۳R$ از مرکز کره به گونه‌ای می‌آویزیم که سر پایینی آن به طور افقی به سمت کوه کشیده می‌شود. سر پایینی شاغول چقدر به سمت کوه جابه‌جا می‌شود؟

* ۱۹ در چه ارتفاعی از سطح زمین شتاب گرانشی برابر با $۴٫۹\,\mathrm{m/s^۲}$ می‌شود؟

* ۲۰ ***ساختمانی به ارتفاع یک مایل.*** در سال ۱۹۵۶، فرانک لوید رایت[1] بنا کردن ساختمانی به ارتفاع یک مایل در شیکاگو را پیشنهاد کرد. فرض کنید چنین ساختمانی ساخته شده باشد. با چشم‌پوشی از دوران زمین و با این فرض که وزن شما در سطح خیابان $۶۰۰\,\mathrm{N}$ است، تغییر وزن خود را وقتی از سطح خیابان با آسانسور به بالای این ساختمان می‌روید، پیدا کنید.

** ۲۱ باور بر این است که برخی ستاره‌های نوترونی (ستاره‌های بسیار چگال) دارای تندی چرخش در حدود $۱\,\mathrm{rev/s}$ هستند. اگر شعاع چنین ستاره‌ای $۲۰\,\mathrm{km}$ باشد، کمینه‌ی جرم آن چقدر باید باشد تا در حین این چرخش سریع مواد بر روی سطح آن در جای خود باقی بمانند؟

** ۲۲ رابطه‌ی میان R_h شعاع و M_h جرم یک سیاه‌چاله به‌صورت $R_h = ۲GM_h/c^۲$ است، که در آن c تندی نور است. فرض کنید شتاب گرانشی یک شیء a_g، در فاصله‌ی $r_۰ = ۱٫۰۰۱ R_h$ از مرکز سیاه‌چاله از معادله‌ی ۱۳-۱۱ (که برای سیاه‌چاله‌های بزرگ است) به دست می‌آید. (الف) رابطه‌ی مربوط به a_g را در فاصله‌ی $r_۰$ برحسب M_h پیدا کنید. (ب) آیا a_g در فاصله‌ی $r_۰$ با افزایش یافتن M_h افزایش می‌یابد یا کاهش؟ (پ) a_g در فاصله‌ی $r_۰$ برای یک سیاه‌چاله‌ی

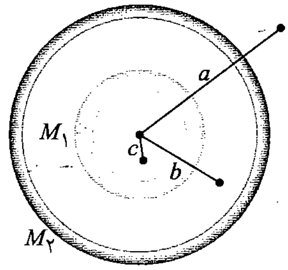
1. Frank Lloyd Wright

بزرگ با جرمی $۱٫۵۵ \times ۱۰^{۱۲}$ برابر جرم خورشید، $۱٫۹۹ \times ۱۰^{۳۰}$kg، چقدر است؟ (ت) اگر فضانوردی با قد $۱٫۷۰$ m در حالی که پاهایش به سمت پایین است، در فاصله‌ی r_o قرار داشته باشد، اختلاف شتاب گرانشی بین محل سر و محل پاها چقدر است؟ (ث) آیا تمایل به قد کشیدن فضانورد جدّی است؟

** ۲۳ یکی از مدل‌های مربوط به نوعی سیاره دارای هسته‌ای به شعاع R و جرم M است، که با پوسته‌ای بیرونی به شعاع درونی R، شعاع بیرونی $۲R$ و جرم $۴M$، احاطه شده است. به ازای $M = ۴٫۱ \times ۱۰^{۲۴}$kg و $R = ۶٫۰ \times ۱۰^{۶}$m، شتاب گرانشی یک ذره‌ی واقع در نقطه‌هایی به فاصله‌ی (الف) R و (ب) $۳R$، از مرکز سیاره، چقدر است؟

پودمان ۱۳-۴ گرانش در درون زمین

* ۲۴ وضعیت دو پوسته‌ی کروی هم مرکز با چگالی یکنواخت و جرم‌های $M_۱$ و $M_۲$ به صورت شکل ۱۳-۴۱ است. بزرگی نیروی گرانشی برایند وارد شده به ذره‌ای به جرم m از سوی پوسته‌ها را وقتی که ذره در فاصله‌ی شعاعی (الف) a، (ب) b و (پ) c، قرار دارد، پیدا کنید.

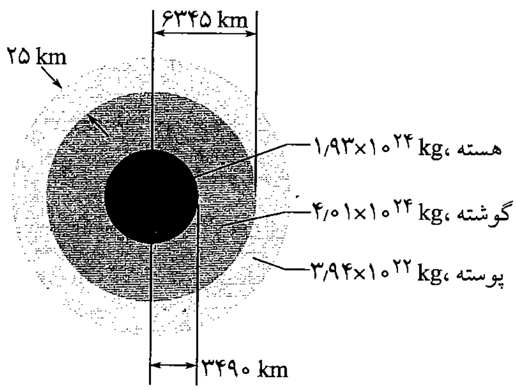


شکل ۱۳-۴۱ مسئله‌ی ۲۴.

** ۲۵ کره‌ی توپری با چگالی یکنواخت دارای جرم $۱٫۰ \times ۱۰^{۴}$kg و شعاع $۱٫۰$ m است. بزرگی نیروی گرانشی حاصل از کره که به ذره‌ای به جرم m واقع شده در فاصله‌ی (الف) $۱٫۵$ m و (ب) $۰٫۵۰$ m، از مرکز کره وارد می‌شود، چقدر است؟ (پ) رابطه‌ی کلی مربوط به بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به ذره را که در فاصله‌ی $r \le ۱٫۰$ m از مرکز کره واقع است، بنویسید.

** ۲۶ کره‌ای یکنواخت و توپر به شعاع R، در سطح خود شتاب گرانشی a_g را ایجاد می‌کند. در چه فاصله‌ای از مرکز کره نقطه‌هایی (الف) در درون و (ب) در بیرون کره وجود دارند که در آنجا شتاب گرانشی $a_g / ۳$ است؟

** ۲۷ شکل ۱۳-۴۲ بدون توجه به مقیاس، مقطعی از درون زمین را نشان می‌دهد. زمین به جای آنکه ساختاری یکنواخت داشته باشد، به سه منطقه‌ی، ***پوسته‌ی بیرونی***، ***گوشته*** و ***هسته‌ی درونی***، تقسیم شده است و ابعاد و جرم‌های درون این منطقه‌ها در شکل نشان داده شده‌اند. جرم کل زمین $۵٫۹۸ \times ۱۰^{۲۴}$kg و شعاع آن ۶۳۷۰ km است. چرخش زمین را نادیده بگیرید و زمین را کروی فرض کنید. (الف) a_g مربوط به سطح زمین را حساب کنید. (ب) فرض کنید چاهی از سطح زمین تا مرز پوسته ـ گوشته به عمق $۲۵٫۰$ km حفر شده است. مقدار a_g در ته چاه چقدر است؟ (پ) فرض کنید زمین کره‌ای یکنواخت با همان جرم کل و ابعاد می‌بود. در این صورت، مقدار a_g در عمق $۲۵٫۰$ km چقدر می‌شد؟ (اندازه‌گیری‌های دقیق a_g کاوندهای حساسی از ساختار درون زمین هستند، اگرچه ممکن است تغییرات چگالی محلی در توزیع جرم بر نتیجه‌های حاصل اثرگذار باشد).



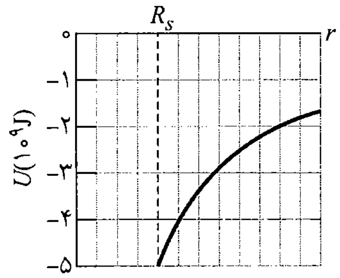
شکل ۱۳-۴۲ مسئله‌ی ۲۷.

** ۲۸ فرض کنید سیاره‌ای یک کره‌ی یکنواخت به شعاع R است که در آن (به طریقی) یک تونل باریک گذرنده از مرکزش ایجاد شده است (شکل ۱۳-۷). هم‌چنین، فرض کنید یک سیب را می‌توان در جایی در راستای این تونل یا بیرون کره قرار داد. فرض کنید F_R بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به سیب در

هنگامی است که سیب در سطح سیاره قرار دارد. اگر سیب را (الف) به برون سوی سیاره و (ب) به درون تونل، ببریم در چه فاصله‌ای از سطح سیاره نقطه‌ای وجود دارد که در آن بزرگی نیروی گرانشی برابر با $\frac{۱}{۲}F_R$ است؟

پودمان ۱۳-۵ انرژی پتانسیل گرانشی

* **۲۹** شکل ۱۳-۴۳ نمودار تابع انرژی پتانسیل یک پرتابه $U(r)$، را نشان می‌دهد که از سطح سیاره‌ای به شعاع R_S به برون‌سوی سیاره رسم شده است. کمترین انرژی جنبشی لازم چقدر باید باشد تا پرتابه از سطح سیاره «فرار کند»؟



شکل ۱۳-۴۳ مسئله‌های ۲۹ و ۳۴.

* **۳۰** در مسئله‌ی ۱، به ازای چه نسبتی از $\frac{m}{M}$ انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه کمترین مقدار را دارد؟

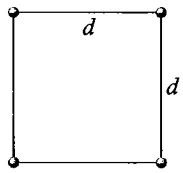
* **۳۱** قطر متوسط سیاره‌های مریخ و زمین، به ترتیب، $۶٫۹\times۱۰^{۳}\,\mathrm{km}$ و $۱٫۳\times۱۰^{۴}\,\mathrm{km}$ و جرم مریخ ۰٫۱۱ برابر جرم زمین است. (الف) نسبت چگالی (جرم یکای حجم) متوسط مریخ به چگالی متوسط زمین چقدر است؟ (ب) مقدار شتاب گرانشی در سطح مریخ چقدر است؟ (پ) تندی فرار از سطح مریخ چیست؟

* **۳۲** (الف) انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه دو ذره‌ای در مسئله‌ی ۳ چقدر است؟ برای آنکه فاصله‌ی میان ذرات سه برابر شود چه مقدار کار، (ب) توسط نیروی گرانشی میان ذرات و (پ) توسط شما، باید انجام شود؟

* **۳۳** چند برابر انرژی لازم برای فرار از زمین، برای فرار از (الف) ماه و (ب) سیاره‌ی مشتری، لازم است؟

* **۳۴** شکل ۱۳-۴۳ نمودار تابع انرژی پتانسیل یک پرتابه $U(r)$، را نشان می‌دهد که از سطح سیاره‌ای به شعاع R_S به برون‌سوی سطح رسم شده است. اگر این پرتابه با انرژی مکانیکی $-۲٫۰\times۱۰^{۹}\,\mathrm{J}$ در راستای شعاع از سطح سیاره به برون سو پرتاب شود، (الف) انرژی جنبشی پرتابه در شعاع $r = ۱٫۲۵\,R_S$ چقدر است و (ب) ***نقطه‌ی برگشت*** آن (به پودمان ۸-۳ رجوع کنید) برحسب R_S، در کجاست؟

** **۳۵** شکل ۱۳-۴۴ چهار ذره، هر یک به جرم ۲۰٫۰ گرم، را نشان می‌دهد که مربعی به ضلع $d = ۰٫۶۰۰\,\mathrm{m}$ تشکیل می‌دهند. اگر d به $۰٫۲۰۰\,\mathrm{m}$ کاهش یابد، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه چهار ذره‌ای چه خواهد بود؟



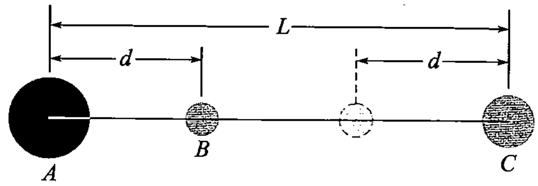
شکل ۱۳-۴۴ مسئله‌ی ۳۵.

** **۳۶** **زیرو**[1]، که سیاره‌ای فرضی است، دارای جرم $۵٫۰\times۱۰^{۲۳}\,\mathrm{kg}$ و شعاع $۳٫۰\times۱۰^{۶}\,\mathrm{m}$ است و جوّ ندارد. یک کاوند فضایی به جرم $۱۰\,\mathrm{kg}$ به طور قائم از سطح این سیاره پرتاب می‌شود. (الف) اگر کاوند با انرژی آغازی $۵٫۰\times۱۰^{۷}\,\mathrm{J}$ پرتاب شود، انرژی جنبشی‌اش در موقعی که به اندازه‌ی $۴٫۰\times۱۰^{۶}\,\mathrm{m}$ از مرکز سیاره‌ی زیرو فاصله دارد، چقدر است؟ (ب) هرگاه کاوند به فاصله‌ی بیشینه‌ای به اندازه‌ی $۸٫۰\times۱۰^{۶}\,\mathrm{m}$ از مرکز زیرو برسد، با چه انرژی جنبشی آغازی‌ای باید از سطح سیاره پرتاب شده باشد؟

** **۳۷** در شکل ۱۳-۴۵، مرکزهای سه کره به جرم‌های $m_A = ۸۰\,\mathrm{g}$، $m_B = ۱۰\,\mathrm{g}$، و $m_C = ۲۰\,\mathrm{g}$ روی یک خط راست قرار دارند و $L = ۱۲\,\mathrm{cm}$ و $d = ۴٫۰\,\mathrm{cm}$. کره‌ی B را در راستای خط آن‌قدر حرکت می‌دهید تا فاصله‌ی مرکز آن تا مرکز کره‌ی C برابر با $d = ۴٫۰\,\mathrm{cm}$ شود. چقدر کار روی کره‌ی B، (الف) توسط شما و (ب) توسط نیروی گرانشی برایند وارد شده به B از سوی کره‌های A و C، انجام می‌شود؟

---

1. Zero



شکل ۱۳-۴۵ مسئله‌ی ۳۷.

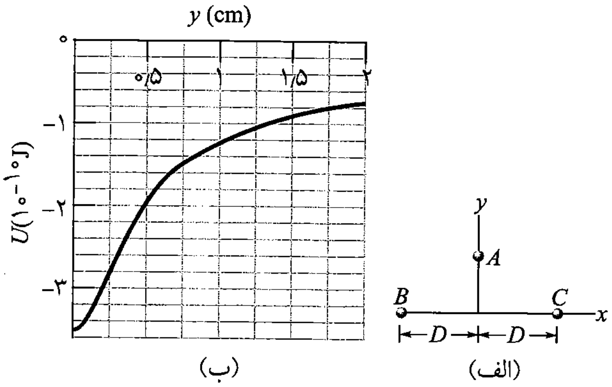
** ۳۸ در اعماق فضا، کره‌ی A به جرم ۲۰kg روی مبداء محور x و کره‌ی B به جرم ۱۰kg روی محور و در نقطه‌ی $x =$ ۰/۸۰m قرار دارد. در حالی که کره‌ی A در مبداء واقع است، کره‌ی B از حالت سکون رها می‌شود. (الف) انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه دو کره در لحظه‌ی رها شدن B چیست؟ (ب) انرژی جنبشی B در موقعی که به اندازه‌ی ۰/۲۰m به سوی A حرکت کرده چقدر است؟

** ۳۹ (الف) تندی فرار از روی سیارکی کروی به شعاع ۵۰۰km، که شتاب گرانشی در سطح آن ۳/۰m/s^{۲} است، چقدر است؟ (ب) اگر ذره‌ای سطح سیارک را با تندی شعاعی ۱۰۰۰m/s ترک کند تا چه مسافتی از سطح آن دور خواهد شد؟ (پ) اگر شیئی از ارتفاع ۱۰۰۰ کیلومتری سطح سیارک رها شود، با چه تندی‌ای به سطح برخورد خواهد کرد؟

** ۴۰ پرتابه‌ای یک راست به برون سوی سطح زمین پرتاب می‌شود. از دوران زمین چشم‌پوشی کنید. این پرتابه به چه فاصله‌ی شعاعی‌ای برحسب R_E می‌رسد، اگر (الف) تندی آغازی پرتابه ۰/۵۰۰ برابر تندی فرار از زمین باشد و (ب) انرژی جنبشی آغازی پرتابه ۰/۵۰۰ برابر انرژی جنبشی لازم برای فرار از زمین باشد؟ (پ) کمترین انرژی مکانیکی آغازی لازم برای فرار پرتابه از زمین چقدر است؟

** ۴۱ فاصله‌ی دو ستاره‌ی نوترونی از هم ۱/۰×۱۰^{۱۰}m است. هر ستاره دارای جرم ۱/۰×۱۰^{۳۰}kg و شعاع ۱/۰×۱۰^{۵}m است. این دو ستاره در آغاز نسبت به هم ساکن‌اند. نسبت به این چارچوب ساکن، تندی هر ستاره وقتی که (الف) فاصله‌ی آن‌ها به نصف مقدار آغازی کاهش می‌یابد، و (ب) هنگام قرار گرفتن در آستانه‌ی برخورد به یکدیگر، چقدر است؟

** ۴۲ شکل ۱۳-۴۶ الف ذره‌ی A را نشان می‌دهد که می‌توان آن را در راستای محور y از بی‌نهایت تا مبداء مختصات حرکت داد. این مبداء در وسط فاصله‌ی میان ذره‌های B و C، که جرم‌های مساوی دارند، قرار دارد و محور y عمودمنصف فاصله‌ی میان دو ذره است. فاصله‌ی D برابر با ۰/۳۰۵۷m است. شکل ۱۳-۴۶ ب نمودار تغییرات U، انرژی پتانسیل دستگاه سه ذره‌ای را به صورت تابعی از مکان ذره‌ی A در راستای محور y نشان می‌دهد. این منحنی به راست‌سو امتداد می‌یابد و به ازای $y \to \infty$ به سمت مجانب ۲/۷×۱۰$^{-۱۱}$J− میل می‌کند. (الف) جرم ذره‌های B و C و (ب) جرم ذره‌ی A، چیست؟



شکل ۱۳-۴۶ مسئله‌ی ۴۲.

پودمان ۱۳-۶ سیاره‌ها و ماهواره‌ها: قانون‌های کپلر

* ۴۳ (الف) ماهواره‌ای که باید در ارتفاع ۱۶۰ کیلومتری بالای سطح زمین در مداری دایره‌ای به دور زمین بگردد، چه تندی خطی‌ای باید داشته باشد؟ (ب) دوره‌ی تناوب گردش این ماهواره چقدر است؟

* ۴۴ ماهواره‌ای با یک شعاع مداری برابر با دو سوم شعاع گردش ماه در مداری دایره‌ای به دور زمین قرار داده می‌شود. دوره‌ی تناوب گردش ماهواره برحسب ماه قمری چیست (مدت ماه قمری برابر با همان دوره‌ی تناوب گردش ماه به دور زمین است)؟

* ۴۵ سیاره‌ی مریخ قمری به نام **فوبوس**[1] دارد که بر روی مداری، به تقریب، دایره‌ای به شعاع ۹/۴×۱۰^{۶}m با دوره‌ی تناوب ۷ ساعت و ۳۹ دقیقه مریخ را دور می‌زند. با این اطلاعات جرم سیاره‌ی مریخ را حساب کنید.

1. Phobos

* **۴۶** نخستین برخورد شناخته شده بین تکه پاره‌های بازمانده‌ی فضایی و یک ماهواره‌ی در حال کار، در سال ۱۹۹۶ چنین رخ داد: ماهواره‌ی جاسوسی یک ساله‌ی فرانسوی در ارتفاع ۷۰۰ کیلومتری با تکه‌ای از موشک آریان برخورد کرد. بخش متعادل کننده‌ی ماهواره منهدم شد و ماهواره بدون کنترل به دور خودش به چرخش در آمد. در حالت‌های زیر تندی تکه‌ی موشک نسبت به ماهواره (برحسب کیلومتر بر ساعت) را درست پیش از برخورد، پیدا کنید. فرض کنید هر دو در مدارهایی دایره‌ای می‌چرخیدند و برخورد (الف) به طور شاخ به شاخ و (ب) در راستای مسیرهای عمود بر هم صورت گرفته است.

* **۴۷** خورشید، که در فاصله‌ی $۲/۲ \times ۱۰^{۲۰}\,\mathrm{m}$ از مرکز کهکشان راه شیری قرار دارد، در هر $۲/۵ \times ۱۰^{۸}$ سال یک بار به دور آن مرکز می‌چرخد. فرض کنید در این کهکشان هر ستاره جرمی برابر با جرم $۲/۰ \times ۱۰^{۳۰}\,\mathrm{kg}$ خورشید دارد، ستاره‌ها به طور یکنواخت در کره‌ای پیرامون مرکز کهکشان توزیع شده‌اند و خورشید در کناره‌ی این کره واقع است. عده‌ی ستاره‌های موجود در این کهکشان را برآورد کنید.

* **۴۸** فاصله‌ی متوسط سیاره‌ی مریخ از خورشید ۱/۵۲ برابر فاصله‌ی متوسط زمین از خورشید است. با استفاده کردن از قانون دوره‌های تناوب کپلر، عده‌ی سال‌هایی را که لازم است تا مریخ یک دور به دور خورشید گردش کند، حساب کنید. پاسخ حاصل را با مقدار داده شده در پیوست پ پایان کتاب مقایسه کنید.

* **۴۹** دنباله‌دار مشاهده شده در ماه آوریل سال ۵۷۴ میلادی توسط اخترشناسان چینی در روزی که آنان آن را به نام روز **وو ـ وو** می‌شناسند، دوباره در ماه مِه سال ۱۹۹۴ مشاهده شد. فرض کنید بازه‌ی زمانی میان این مشاهدات، دوره‌ی تناوب دنباله‌دار **روز وو ـ وو**، و خروج از مرکز مدار دنباله‌دار ۰/۹۹۳۲ باشد. (الف) نیم‌قطر بزرگ مدار دنباله‌دار و (ب) دورترین فاصله‌ی دنباله‌دار از خورشید، برحسب شعاع متوسط مدار سیاره‌ی پلوتو R_P، چیست؟

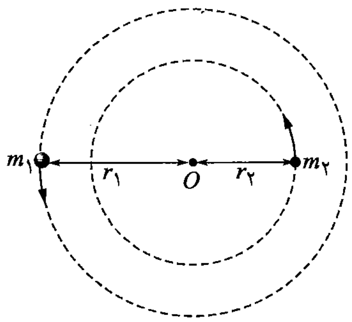
* **۵۰** ماهواره‌ی چرخانی در بالای نقطه‌ی معینی از استوای زمین (چرخان) قرار دارد. ارتفاع مدار (که ***مدار زمین ـ همگام*** نامیده می‌شود) چقدر است؟

* **۵۱** ماهواره‌ای بر روی مداری بیضی شکل حرکت می‌کند. فاصله‌ی ماهواره تا سطح زمین در دورترین نقطه $۳۶۰\,\mathrm{km}$ و در نزدیک‌ترین نقطه $۱۸۰\,\mathrm{km}$ است. (الف) نیم‌قطر بزرگ مدار و (ب) خروج از مرکز مدار، را حساب کنید.

* **۵۲** مرکز خورشید در یکی از کانون‌های مدار گردش زمین قرار دارد. فاصله‌ی این کانون تا کانون دیگر مدار، (الف) برحسب متر، و (ب) برحسب شعاع خورشید، برابر با $۶/۹۶ \times ۱۰^{۸}\,\mathrm{m}$، چقدر است؟ مدار گردش زمین دارای خروج از مرکز ۰/۰۱۶۷ و نیم‌قطر بزرگ $۱/۵۰ \times ۱۰^{۱۱}\,\mathrm{m}$ است.

** **۵۳** قمری به جرم $۲۰\,\mathrm{kg}$ بر روی مداری دایره‌ای با دوره‌ی تناوب ۲/۴ ساعت و شعاع $۸/۰ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m}$ به دور سیاره‌ای به جرم نامعلوم می‌گردد. اگر بزرگی شتاب گرانشی در سطح سیاره $۸/۰\,\mathrm{m/s^2}$ باشد، شعاع سیاره چقدر است؟

** **۵۴** ***شکار کردن سیاه‌چاله.*** رصدهای مربوط به نور ستاره‌ای معین نشان می‌دهند که این ستاره بخشی از یک منظومه‌ی دوتایی (دوستاره‌ای) است. تندی مداری این ستاره‌ی مرئی $v = ۲۷۰\,\mathrm{km/s}$، دوره‌ی تناوب مداری آن، $T = ۱/۷۰$ روز، و جرم تقریبی آن $m_1 = ۶M_S$ است، که در آن M_S جرم خورشید و برابر با $۱/۹۹ \times ۱۰^{۳۰}\,\mathrm{kg}$ است. فرض کنید این ستاره‌ی مرئی و ستاره‌ی جفت آن، که تاریک و نامرئی است، هر دو در مدارهایی دایره‌ای می‌چرخند (شکل ۱۳-۴۷). جرم تقریبی ستاره‌ی تاریک m_2، چه مضربی از M_S است؟



شکل ۱۳-۴۷ مسئله‌ی ۵۴.

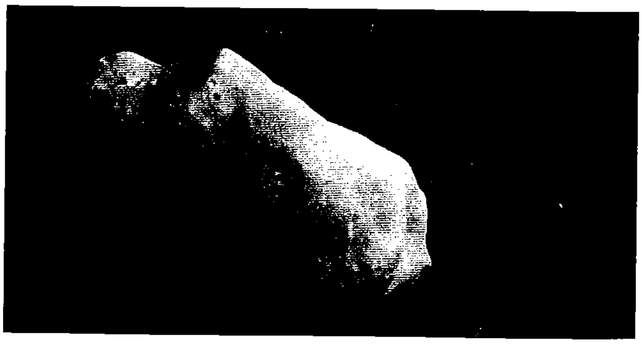
** **۵۵** در سال ۱۶۱۰/۹۸۹ **گالیلئو گالیله** برای کشف چهار قمر مشهوری که به دور سیاره‌ی مشتری گردش می‌کنند از تلسکوپ خویش استفاده کرد. شعاع‌های متوسط مدارها a، و دوره‌های

تناوب گردش قمرها T، در جدول زیر داده شده‌اند.

نام	$a(10^8 m)$	T (روز)
آیو	۴٫۲۲	۱٫۷۷
اروپا	۶٫۷۱	۳٫۵۵
گانیمد	۱۰٫۷	۷٫۱۶
کالیستو	۱۸٫۸	۱۶٫۷

(الف) نمودار تغییرات $\log a$ (محور y) را برحسب $\log T$ (محور x) رسم کنید و نشان دهید که این نمودار به صورت یک خط راست است. (ب) شیب این خط را اندازه بگیرید و آن را با مقداری که از قانون سوم کپلر انتظار دارید، مقایسه کنید. (پ) جرم سیاره‌ی مشتری را از روی محل تلاقی خط با محور y پیدا کنید.

** ۵۶ در سال ۱۹۹۳/۱۳۷۲ ***فضاپیمای گالیله*** یک تصویر (شکل ۱۳–۴۸) از سیارک آیدا[1] ۲۴۳ و قمر کوچکی که آن را دور می‌زند (و اکنون به نام داکتیل[2] معروف است)، به زمین فرستاد. این تصویر نخستین نمونه‌ی تأییدشده از منظومه‌ی سیارک ـ قمر است. در تصویر قمر با پهنای ۱٫۵ km، به اندازه‌ی ۱۰۰ km از مرکز سیارک به طول ۵۵ km، فاصله دارد. شکل مدار این قمر به خوبی شناخته شده نیست؛ فرض کنید مدار دایره‌ای با دوره‌ی تناوب ۲۷ ساعت است. (الف) جرم سیارک چقدر است؟ (ب) حجم اندازه‌گیری شده‌ی سیارک از روی تصویرهای ***فضاپیمای گالیله*** برابر با ۱۴۱۰۰ km³ است. چگالی (جرم یکای حجم) سیارک چقدر است؟

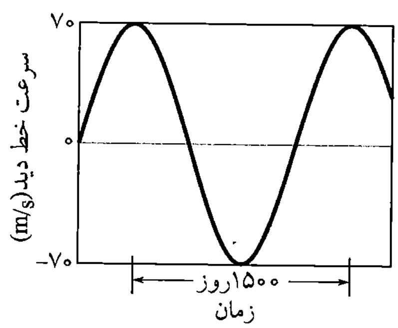


شکل ۱۳–۴۸ مسئله‌ی ۵۶. قمر بسیار کوچک (واقع در سمت راست) به دور سیارک آیدا ۲۴۳ می‌گردد.

1. Ida 2. Dactyl

** ۵۷ در یک منظومه‌ی دو ستاره‌ای هر ستاره جرمی برابر با جرم خورشید دارد و به دور مرکز جرم دستگاه می‌گردد. فاصله‌ی میان دو ستاره برابر با فاصله‌ی میان زمین و خورشید است. دوره‌ی تناوب گردش ستاره‌ها برحسب سال چیست؟

*** ۵۸ وجود سیاره‌ای دیده نشده، که به دور ستاره‌ای دوردست می‌چرخد، گاهی با توجه به حرکت مشاهده شده در آن ستاره استنباط می‌شود. در حین گردش ستاره و سیاره به دور مرکز جرم منظومه‌ی ستاره ـ سیاره، ستاره نسبت به ما با سرعتی به نام ***سرعت خط دید*** دور و نزدیک می‌شود و این حرکت می‌تواند آشکارسازی شود. شکل ۱۳–۴۹ نمودار تغییرات سرعت خط دید برحسب زمان مربوط به‌ستاره‌ی هرکولیس[1] ۱۴ را نشان می‌دهد. باور بر این است که جرم این ستاره ۰٫۹۰ برابر جرم خورشید است. فرض کنید تنها یک سیاره به دور این ستاره می‌گردد و خط دید ما در صفحه‌ی مدار قرار دارد. در این صورت، (الف) جرم این سیاره را برحسب جرم سیاره‌ی مشتری m_J، و (ب) شعاع مداری سیاره را برحسب شعاع مداری زمین r_E، به طور تقریبی به دست آورید.



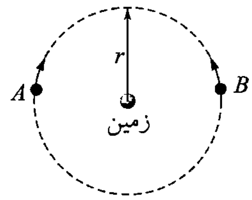
شکل ۱۳–۴۹ مسئله‌ی ۵۸.

*** ۵۹ سه ستاره‌ی مشابه، هر یک به جرم M، یک مثلث سه ضلع برابر تشکیل می‌دهند و به دور مرکز مثلث می‌چرخند. چرخش ستاره‌ها در یک مدار دایره‌ای مشترک به دور این مرکز صورت می‌گیرد. طول ضلع مثلث L است. تندی حرکت ستاره‌ها چقدر است؟

1. Herculis

پودمان ۱۳-۷ مدارها و انرژی ماهواره‌ها

* **۶۰** در شکل ۱۳-۵۰، دو ماهواره‌ی A و B، هر یک به جرم $m = ۱۵۰\,\mathrm{kg}$، در مداری دایره‌ای به شعاع $r = ۷/۸۷ \times ۱۰^{۶}\,\mathrm{m}$ به دور زمین و ناهمسو با یکدیگر می‌چرخند و در نتیجه، با هم برخورد می‌کنند. (الف) انرژی مکانیکی کل $E_A + E_B$ ***دستگاه دو ماهواره + زمین*** پیش از برخورد را پیدا کنید. (ب) اگر برخورد ناکشسان کامل باشد، به گونه‌ای که ماهواره‌های درهم شکسته به صورت یک تکه (با جرم $۲m$) درآیند، انرژی مکانیکی کل را بی‌درنگ پس از برخورد پیدا کنید. (پ) درست پس از برخورد، آیا تکه‌های ماهواره‌ها به سوی مرکز زمین سقوط می‌کنند یا به دور زمین گردش می‌کنند؟



شکل ۱۳-۵۰ مسئله‌ی ۶۰.

* **۶۱** (الف) در چه ارتفاعی بالای سطح زمین انرژی لازم برای بالا بردن یک ماهواره به آن ارتفاع با انرژی جنبشی لازم برای ماندن ماهواره در مداری در آن ارتفاع برابر می‌شود؟ (ب) در ارتفاع‌های بالاتر، انرژی لازم برای بالا بردن ماهواره بیشتر است یا انرژی جنبشی لازم برای گردش ماهواره در مدار؟

* **۶۲** دو ماهواره‌ی زمینی A و B، هریک به‌جرم m، به مدارهایی دایره‌ای پرتاب می‌شوند تا به دور مرکز زمین بگردند. ماهواره‌ی A در مداری به ارتفاع ۶۳۷۰ km و ماهواره‌ی B در مداری به ارتفاع ۱۹۱۱۰ km از سطح زمین گردش می‌کند. شعاع زمین $R_E = ۶۳۷۰\,\mathrm{km}$ است. در روی مدارها، (الف) نسبت انرژی پتانسیل ماهواره‌ی B به انرژی پتانسیل ماهواره‌ی A و (ب) نسبت انرژی جنبشی ماهواره‌ی B به انرژی جنبشی ماهواره‌ی A چیست؟ اگر جرم هر ماهواره ۱۴/۶ kg باشد، (پ) انرژی مکانیکی کدام ماهواره بیشتر است؟ (ت) چقدر بیشتر است؟

* **۶۳** سیارکی با جرمی $۲/۰ \times ۱۰^{-۴}$ برابر جرم زمین بر روی مداری دایره‌ای در فاصله‌ای دو برابر فاصله‌ی زمین تا خورشید به دور خورشید می‌گردد. (الف) دوره‌ی تناوب گردش سیارک را برحسب سال حساب کنید. (ب) نسبت انرژی جنبشی سیارک به انرژی جنبشی زمین چقدر است؟

* **۶۴** ماهواره‌ای به دور سیاره‌ای با جرم نامعلوم در مداری دایره‌ای به شعاع $۲/۰ \times ۱۰^{۷}\,\mathrm{m}$ می‌گردد. بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به ماهواره از سوی سیاره $F = ۸۰\,\mathrm{N}$ است. (الف) انرژی جنبشی ماهواره در این مدار چقدر است؟ (ب) اگر شعاع مدار ماهواره به $۳/۰ \times ۱۰^{۷}\,\mathrm{m}$ افزایش یابد، مقدار F چقدر خواهد بود؟

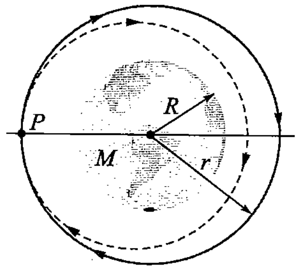
** **۶۵** ماهواره‌ای در یک مدار زمینی دایره‌ای به شعاع r قرار دارد. مساحت محصور شده توسط این مدار A، به $r^{۲}$ بستگی دارد، زیرا $A = \pi r^{۲}$. مطلوب است تعیین چگونگی رابطه‌ی کمیت‌های ماهواره‌ای زیر با r: (الف) دوره‌ی تناوب، (ب) انرژی جنبشی، (پ) تکانه‌ی زاویه‌ای و (ت) تندی.

** **۶۶** یکی از راه‌های حمله کردن به ماهواره‌ی واقع در مدار زمین پرتاب کردن دسته‌ای گلوله به همان مدار، اما ناهمسو با حرکت ماهواره، است. فرض کنید ماهواره‌ای واقع در مداری دایره‌ای به فاصله‌ی ۵۰۰ km از سطح زمین با گلوله‌ای به جرم ۴/۰ گرم برخورد می‌کند. (الف) انرژی جنبشی گلوله نسبت به چارچوب مرجع ماهواره درست پیش از برخورد چقدر است؟ (ب) نسبت این انرژی جنبشی به انرژی جنبشی یک گلوله‌ی ۴/۰ گرمی شلیک شده با تندی ۹۵۰ m/s از دهانه‌ی یک تفنگ نوین نظامی، چیست؟

*** **۶۷** ماهواره‌ای به جرم ۲۲۰ kg بر روی مداری، به تقریب، دایره‌ای در ارتفاع ۶۴۰ کیلومتری سطح زمین گردش می‌کند. (الف) تندی و (ب) دوره‌ی تناوب گردش ماهواره چقدر است؟ فرض کنید ماهواره انرژی مکانیکی خود را در هر دور گردش به اندازه‌ی $۱/۴ \times ۱۰^{۵}\,\mathrm{J}$ از دست می‌دهد. با پذیرفتن این تقریب منطقی که، مدار ماهواره «دایره‌ای با کاهش تدریجی شعاع است»، (پ) ارتفاع، (ت) تندی و (ث) دوره‌ی تناوب حرکت ماهواره را در پایان ۱۵۰۰ اُمین دور گردش، پیدا کنید. (ج) بزرگی متوسط نیروی کند کننده‌ی وارد شده به ماهواره چقدر است؟ آیا تکانه‌ی زاویه‌ای نسبت به مرکز زمین، (چ) برای

ماهواره و (ح) برای دستگاه ماهواره ـ زمین، پایسته است (فرض کنید دستگاه منزوی است)؟

*** ۶۸ دو سفینه‌ی فضایی کوچک، هر یک به جرم $m = ۲۰۰۰\,\text{kg}$، در ارتفاع $h = ۴۰۰\,\text{km}$ در یک مدار دایره‌ای، مطابق شکل ۱۳-۵۱، به دور زمین گردش می‌کنند. ایگور فرمانده‌ی یکی از سفینه‌ها ۹۰ ثانیه زودتر از پیکارد، فرمانده‌ی سفینه دیگر، به نقطه‌ی ثابتی از مدار می‌رسد. (الف) دوره‌ی تناوب $T_۰$ و (ب) تندی $v_۰$ سفینه‌ها، چیست؟ در نقطه‌ی P در شکل ۱۳-۵۱، پیکارد موشکی را به پیش‌سو جلو شلیک می‌کند که موجب ***کاهش یافتن*** تندی سفینه‌ی او به مقدار ۱٫۰۰ درصد می‌شود. پس از شلیک کردن، سفینه‌ی او مداری بیضی شکل را می‌پیماید که در شکل با خط‌چین نشان داده شده است. (پ) انرژی جنبشی و (ت) انرژی پتانسیل سفینه‌ی او بی‌درنگ پس از شلیک کردن موشک چیست؟ در مدار بیضی شکل جدید پیکارد، (ث) انرژی کل E، (ج) نیم‌قطر بزرگ a و (چ) دوره‌ی تناوب مداری T، چقدر است؟ (ح) پیکارد چقدر زودتر از ایگور به نقطه‌ی P برمی‌گردد؟



شکل ۱۳-۵۱ مسئله‌ی ۶۸.

پودمان ۱۳-۸ اینشتین و گرانش

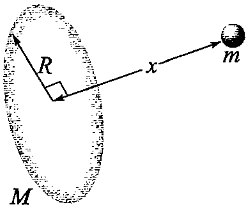
* ۶۹ در شکل ۱۳-۱۸ ب، ترازویی که فیزیک‌دان به جرم ۶۰kg روی آن ایستاده است، ۲۲۰N را نشان می‌دهد. اگر فیزیک‌دان میوه‌ی طالبی را از ارتفاع ۲٫۱ متری کف جعبه (از حالت سکون نسبت به خودش) رها کند، چه مدت طول می‌کشد تا طالبی به کف جعبه برسد؟

مسئله‌های بیشتر

۷۰ شعاع یک سیاه‌چاله R_h، همان شعاع کره‌ای هندسی است که افق رویداد نامیده می‌شود و مرکز این کره بر مرکز سیاه‌چاله منطبق است. اطلاعات مربوط به رویدادهای درون افق رویداد نمی‌توانند به دنیای بیرون برسند. بنا به نظریه‌ی نسبیت عام اینشتین، داریم $R_h = ۲GM/c^۲$، که در آن M جرم سیاه‌چاله و c تندی نور است.

فرض کنید می‌خواهیم سیاه‌چاله‌ای را از نزدیک و در فاصله‌ی شعاعی $۵۰R_h$ مطالعه کنیم. اما نمی‌خواهیم اختلاف شتاب گرانشی میان پا و سرما، در حالی که پا (یا سرما) به سوی سیاه‌چاله است، از $۱۰\,\text{m/s}^۲$ بیشتر شود. (الف) حد تقریبی جرم این سیاه‌چاله به صورت مضربی از جرم خورشید M_s، چقدر باید باشد تا ما بتوانیم اختلاف شتاب گرانشی در آن فاصله‌ی شعاعی را تحمل کنیم. (در اینجا نیاز داریم طول قد خودمان را برآورد کنیم) (ب) آیا این حد یک حد بالایی است (یعنی ما می‌توانیم جرم‌های کمتر را تحمل کنیم)، یا یک حد پایینی است (یعنی ما می‌توانیم جرم‌های بیشتر را تحمل کنیم)؟

۷۱ چند سیاره (مشتری، زحل، اورانوس) با حلقه‌هایی احاطه شده‌اند که شاید از موادی تشکیل شده باشند که نتوانسته‌اند به‌صورت قمر درآیند. علاوه بر این، عده‌ی زیادی از کهکشان‌ها نیز دارای ساختارهای حلقه مانند هستند. حلقه‌ی باریک همگنی به جرم M و شعاع بیرونی R (شکل ۱۳-۵۲) را در نظر می‌گیریم. (الف) این حلقه چه شتاب گرانشی‌ای به ذره‌ای به جرم m واقع در فاصله‌ی x از مرکز حلقه و بر روی محور مرکزی حلقه، وارد می‌کند؟ (ب) فرض کنید این ذره بر اثر جاذبه‌ی حلقه‌ی مادی از حال سکون سقوط می‌کند. این ذره با چه تندی‌ای از مرکز حلقه می‌گذرد؟

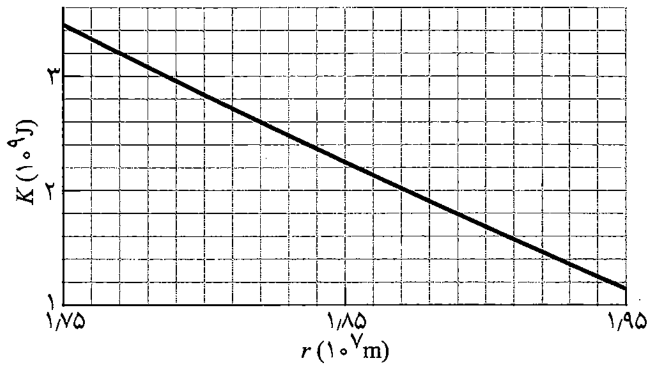


شکل ۱۳-۵۲ مسئله‌ی ۷۱.

۷۲ یک ستاره‌ی نوترونی نوعی ممکن است دارای جرمی برابر با جرم خورشید اما شعاعی فقط به اندازه‌ی ۱۰km باشد. (الف)

شتاب گرانشی در سطح این ستاره چقدر است؟ (ب) اگر شیئی از حال سکون از ارتفاع ۱٫۰ متری سطح این ستاره سقوط کند، در سطح چه تندی‌ای خواهد داشت؟ (فرض کنید این ستاره نمی‌چرخد).

۷۳ شکل ۱۳-۵۳ نمودار تغییرات K، انرژی جنبشی یک سیارک برحسب فاصله‌ی r از مرکز زمین را در حالی نشان می‌دهد که سیارک یک راست به سوی مرکز زمین سقوط می‌کند. (الف) جرم (تقریبی) سیارک چقدر است؟ (ب) تندی آن در فاصله‌ی $r =$ ۱٫۹۴۵ × $۱۰^{۷}$m چیست؟



شکل ۱۳-۵۳ مسئله‌ی ۷۳.

۷۴ گردشگر اسرارآمیزی که در داستان مسحور کننده‌ی ***شاهزاده کوچولو*** ظاهر می‌شود، بنا به گفته‌ی راوی از سیاره‌ای آمده است که «اندازه‌اش چندان بزرگ‌تر از یک خانه نیست!» فرض کنید این سیاره دارای جرم یکای حجمی در حدود چگالی زمین است و چرخش چندانی ندارد. (الف) شتاب سقوط آزاد در سطح این سیاره و (ب) تندی فرار از این سیاره، را به طور تقریبی حساب کنید.

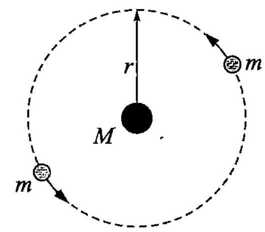
۷۵ جرم‌ها ومختصه‌های سه‌کره عبارت‌اند از: ۲۰kg، $x =$ ۰٫۵۰m، $y =$ ۱٫۰m؛ ۴۰kg، $x = -$۱٫۰m، $y = -$۱٫۰m؛ ۶۰kg، $x =$ ۰m، $y = -$۰٫۵۰m. بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به کره‌ای به جرم ۲۰kg واقع در مبداء مختصات از سوی کره‌های دیگر، چقدر است؟

۷۶ ماهواره‌ای ساده و بسیار ابتدایی شامل یک بالون آلومینیومی کروی باد شده به قطر ۳۰m و به جرم ۲۰kg است. فرض کنید شهاب سنگی به جرم ۷٫۰kg از فاصله‌ی ۳٫۰ متری سطح این ماهواره عبور می‌کند. بزرگی نیروی گرانشی وارد شده به شهاب‌سنگ از سوی ماهواره درنزدیک‌ترین فاصله چقدر است؟

۷۷ چهار کره به جرم‌های $m_A =$ ۴۰kg، $m_B =$ ۳۵kg، $m_C =$ ۲۰۰kg، و $m_D =$ ۵۰kg، به ترتیب، دارای مختصات (x و y) به صورت (۰ و ۵۰cm)، (۰ و ۰)، (۸۰cm- و ۰) و (۴۰cm و ۰) هستند. نیروی گرانشی برایند وارد شده به کره‌ی B از سوی کره‌های دیگر، چیست؟

۷۸ (الف) در مسئله‌ی ۷۷، کره‌ی A را حذف کنید و انرژی پتانسیل گرانشی دستگاه سه ذره‌ای باقی‌مانده را حساب کنید. (ب) اگر کره‌ی A را دوباره به جای خود برگردانید، آیا انرژی پتانسیل دستگاه چهار ذره‌ای بیشتر یا کمتر از دستگاه قسمت (الف) خواهد شد؟ (پ) در قسمت (الف)، آیا کار انجام شده توسط شما برای حذف کردن کره‌ی A، مثبت است یا منفی؟ (ت) در قسمت (ب)، آیا کار انجام شده توسط شما برای برگرداندن کره‌ی A به جای خود، مثبت است یا منفی؟

۷۹ یک منظومه‌ی ستاره‌ای سه‌گانه شامل دو ستاره، هر یک به جرم m، به دور یک ستاره‌ی مرکزی به جرم M، بر روی مداری دایره‌ای به شعاع r می‌گردد (شکل ۱۳-۵۴). دو ستاره همواره در دو سر قطری از مدار دایره‌ای قرار دارند. رابطه‌ی مربوط به دوره‌ی تناوب گردش ستاره‌ها را به دست آورید.



شکل ۱۳-۵۴ مسئله‌ی ۷۹.

۸۰ تندترین آهنگ ممکن برای چرخش یک سیاره آهنگی است که به ازای آن نیروی گرانشی وارد شده به مواد واقع در استوای سیاره درست نیروی مرکزگرای لازم برای چرخش را تأمین کند. (چرا؟) (الف) نشان دهید که در این حالت کوتاه‌ترین دوره‌ی تناوب چرخش برابر است با

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

که در آن ρ چگالی یکنواخت سیاره‌ی کروی است. (ب) با فرض $\rho = ۳/۰\, g/cm^{۳}$، که مقداری نوعی برای بسیاری از سیاره‌ها، ماهواره‌ها و سیارک‌هاست، دوره‌ی تناوب چرخش را حساب کنید. هیچ شیء نجومی‌ای تاکنون پیدا نشده است که با دوره‌ی تناوبی کوچک‌تر از مقدار به دست آمده در این تحلیل، به دور خود بچرخد.

۸۱ در یک منظومه‌ی ستاره‌ای دوگانه، دو ستاره هر یک به جرم $۳/۰ \times ۱۰^{۳۰}kg$، در روی مداری به شعاع $۱/۰ \times ۱۰^{۱۱}m$ به دور مرکز جرم منظومه می‌چرخند. (الف) تندی زاویه‌ای مشترک آن‌ها چقدر است؟ (ب) اگر شهاب سنگی به طور عمود بر صفحه‌ی مداری ستاره‌ها از مرکز جرم منظومه عبور کند، تندی کمینه‌ی آن در مرکز جرم چقدر باید باشد تا بتواند از این منظومه‌ی دو ستاره‌ای به «بی‌نهایت» فرار کند؟

۸۲ ماهواره‌ای با دوره‌ی تناوب $۸/۰۰ \times ۱۰^{۴}$ ثانیه در مداری بیضی شکل به دور سیاره‌ای به جرم $۷/۰۰ \times ۱۰^{۲۴}kg$ گردش می‌کند. در اوج مدار در شعاع $۴/۵ \times ۱۰^{۷}m$، تندی زاویه‌ای ماهواره $۷/۱۵۸ \times ۱۰^{-۵} rad/s$ است. تندی زاویه‌ای ماهواره در حضیض مدار چقدر است؟

۸۳ در فضاپیمایی به جرم $m = ۳۰۰۰kg$، جین وی[1] فرمانده‌ی فضاپیما به دور سیاره‌ای به جرم $M = ۹/۵۰ \times ۱۰^{۲۵}kg$ در مداری دایره‌ای به شعاع $r = ۴/۲۰ \times ۱۰^{۷}m$ گردش می‌کند. (الف) دوره‌ی تناوب گردش این مدار و (ب) تندی فضاپیما چقدر است؟ جین وی یک موشک به پیش‌سو شلیک می‌کند تا تندی فضاپیما ۲/۰۰ درصد کاهش پیدا کند. درست پس از شلیک کردن موشک، (پ) تندی، (ت) انرژی جنبشی، (ث) انرژی پتانسیل گرانشی و (ج) انرژی مکانیکی فضاپیما، چیست؟ (چ) نیم‌قطر مدار بیضی شکلی که اکنون فضاپیما طی می‌کند چقدر است؟ (ح) اختلاف میان دوره‌ی تناوب مدار دایره‌ای اولی و دوره تناوب مدار بیضی شکل فعلی چقدر است؟ (خ) دوره‌ی تناوب کدام مدار کمتر است؟

۸۴ تپ‌اختری را، که ستاره‌ی رمبیده‌ای با چگالی بسیار زیاد، با جرم M مساوی با جرم خورشید ($۱/۹۸ \times ۱۰^{۳۰}kg$)، شعاع کم

1. Janeway

۱۲km، و دوره‌ی تناوب دوران $T = ۰/۰۴۱s$ است، در نظر بگیرید. شتاب سقوط آزاد زمین g، چند درصد با شتاب گرانشی a_g در استوای این ستاره‌ی کروی تفاوت دارد؟

۸۵ پرتابه‌ای از سطح زمین با تندی آغازی $۱۰ km/s$ در راستای قائم و به سمت بالا پرتاب می‌شود. با چشم‌پوشی از نیروی پسار هوا، پرتابه تا چه ارتفاعی از سطح زمین بالا خواهد رفت؟

۸۶ یک شیء واقع در استوای زمین شتاب‌دار است، (الف) شتاب به سوی مرکز زمین، چون زمین می‌چرخد، (ب) شتاب به سوی خورشید، چون زمین در مداری تقریباً دایره‌ای به دور خورشید می‌چرخد و (پ) شتاب به سوی مرکز کهکشان، چون خورشید به دور مرکز کهکشان می‌گردد. در حالت (پ) دوره‌ی تناوب $۲/۵ \times ۱۰^{۸}$ سال و شعاع دوران $۲/۲ \times ۱۰^{۲۰}m$ است. این سه شتاب را به صورت مضربی از $g = ۹/۸ m/s^{۲}$ حساب کنید.

۸۷ (الف) اگر سیب افسانه‌ای نیوتون از حال سکون از ارتفاع ۲ متری سطح یک ستاره‌ی نوترونی با جرمی ۱/۵ برابر جرم خورشید ما و به شعاع ۲۰km، رها می‌شد تندی سیب در موقع رسیدن به سطح ستاره چقدر می‌شد؟ (ب) اگر این سیب در سطح آن ستاره قرار داده می‌شد، اختلاف تقریبی میان شتاب گرانشی در بالا وپایین سیب چقدر می‌بود؟ (برای سیب اندازه‌ی قابل قبولی انتخاب کنید؛ پاسخ نشان می‌دهد که یک سیب هرگز نمی‌تواند در نزدیکی یک ستاره‌ی نوترونی سالم بماند).

۸۸ اگر بسته‌ای پستی در یک تونل گذرنده از مرکز زمین سقوط کند، با چه تندی‌ای از مرکز زمین عبور خواهد کرد؟

۸۹ مدار گردش زمین به دور خورشید *اغلب* به شکل دایره است: نزدیک‌ترین و دورترین فاصله‌ی زمین از خورشید، به ترتیب، $۱/۴۷ \times ۱۰^{۸}km$ و $۱/۵۲ \times ۱۰^{۸}km$ است. تغییرات متناظر بین این دو فاصله را در (الف) انرژی کل، (ب) انرژی پتانسیل گرانشی، (پ) انرژی جنبشی و (ت) تندی مداری زمین، معین کنید. (*راهنمایی:* از پایستگی انرژی و پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای استفاده کنید).

۹۰ ماهواره‌ای به جرم ۵۰kg در هر ۶/۰ ساعت یک بار به دور سیاره‌ی کروتون[1] می‌گردد. بزرگی نیروی گرانشی وارد شده

1. Cruton

به ماهواره از سوی کروتون $80\,\mathrm{N}$ است. (الف) شعاع مدار ماهواره چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی ماهواره چیست؟ (پ) جرم سیاره‌ی کروتون چقدر است؟

۹۱ دو جسم نجومی مشابه A و B، هریک به جرم m، را مشاهده می‌کنیم که به خاطر نیروی گرانشی وارد شده به یک جسم از سوی جسم دیگر، از حال سکون به سوی هم سقوط می‌کنند. فاصله‌ی مرکز تا مرکز آغازی آن‌ها R_i است. فرض کنید در چارچوب مرجعی لخت قرار داریم که این دستگاه دو جسمی نسبت به مرکز جرم ساکن است. با استفاده کردن از اصل پایستگی انرژی مکانیکی $(K_f + U_f = K_i + U_i)$ کمیت‌های زیر را در حالتی پیدا کنید که فاصله‌ی مرکز تا مرکز دو جسم $0{,}5 R_i$ باشد: (الف) انرژی جنبشی کل دستگاه، (ب) انرژی جنبشی هرجسم، (پ) تندی هر جسم نسبت به ما و (ت) تندی جسم B نسبت به جسم A.

سپس، فرض کنید در چارچوب مرجعی متصل به جسم A قرار داریم (بر روی جسم A سوار شده‌ایم). در این صورت، مشاهده می‌کنیم که جسم B از حال سکون به سوی ما سقوط می‌کند. در این چارچوب مرجع، باز هم با استفاده کردن از معادله‌ی $K_f + U_f = K_i + U_i$ کمیت‌های زیر را در حالتی پیدا کنید که فاصله‌ی مرکز تا مرکز دو جسم $0{,}5 R_i$ است: (ث) انرژی جنبشی جسم B و (ج) تندی جسم B نسبت به جسم A. (چ) چرا پاسخ‌های قسمت‌های (ت) و (ج) متفاوت‌اند؟ کدام پاسخ درست است؟

۹۲ موشکی به جرم $150{,}0\,\mathrm{kg}$ در راستای شعاع زمین با تندی $3{,}70\,\mathrm{km/s}$ به بیرون سوی زمین در حال حرکت است. موشک در حالی که در ارتفاع ۲۰۰ کیلومتری بالای زمین قرار دارد موتورش خاموش می‌شود. (الف) با چشم‌پوشی از نیروی پسار هوا، انرژی جنبشی موشک را در موقعی که در ارتفاع ۱۰۰۰ کیلومتری سطح زمین قرار دارد، پیدا کنید. (ب) بیشینه‌ی ارتفاعی که موشک به آن می‌رسد چقدر است؟

۹۳ سیاره‌ی روتون[1] به جرم $7{,}0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ و شعاع $1600\,\mathrm{km}$ یک شهاب سنگ در آغاز در حال سکون نسبت به سیاره را از فاصله‌ی به نسبت دور، در حد بی‌نهایت، تحت اثر گرانش جذب می‌کند. شهاب سنگ به سوی سیاره سقوط می‌کند. با فرض آنکه سیاره بدون جوّ است، تندی شهاب سنگ را هنگام رسیدن به سطح سیاره پیدا کنید.

1. Roton

۹۴ دو کره، هر یک به جرم $20\,\mathrm{kg}$، روی محور y، یکی در نقطه‌ی $y = 0{,}40\,\mathrm{m}$ و دیگری در نقطه‌ی $y = -0{,}40\,\mathrm{m}$ قرار دارد. اکنون، گلوله‌ای به جرم $10\,\mathrm{kg}$ را از حال سکون از نقطه‌ای بر روی محور x واقع در دورترین فاصله از کره‌ها (از بی‌نهایت) رها می‌کنیم. اگر تنها نیروهای وارد شده به گلوله نیروهای گرانشی ناشی از کره‌ها باشند، هنگامی که گلوله به نقطه‌ای با مختصات x و y ($0{,}30\,\mathrm{m}$ و ۰) می‌رسد، (الف) انرژی جنبشی آن و (ب) نیروی برایند وارد شده به آن از سوی کره‌ها، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟

۹۵ کره‌ی A به‌جرم $80\,\mathrm{kg}$ درمبداء دستگاه مختصات x و y قرار دارد. کره‌ی B به جرم $60\,\mathrm{kg}$ در مختصات ($0{,}25\,\mathrm{m}$ و ۰) و کره‌ی C به جرم $0{,}20\,\mathrm{kg}$ در ربع اول دستگاه مختصات به فاصله‌ی $0{,}20\,\mathrm{m}$ از کره‌ی A و به فاصله‌ی $0{,}15\,\mathrm{m}$ از کره‌ی B قرار دارد. نیروی گرانشی وارد شده به C از سوی A و B، به صورت نمادگذاری بردارهای یکه، چیست؟

۹۶ ژول ورن[1] در سال ۱۸۶۵ در داستان علمی ـ تخیلی خود به نام ***از زمین تا ماه***، شرح می‌دهد که چگونه سه فضانورد را به وسیله‌ی توپ بزرگی به سوی ماه پرتاب می‌کنند. به روایت ژول ورن، کپسول آلومینیومی حاوی فضانوردان با مصرف کردن سوخت نیتروسلولز، در طول لوله‌ی ۲۲۰ متری توپ تا تندی $11\,\mathrm{km/s}$ شتاب پیدا می‌کند. (الف) شتاب متوسط کپسول و فضانوردان در درون لوله‌ی توپ، برحسب g، چقدر است؟ (ب) آیا این شتاب برای فضانوردان قابل تحمل است یا مرگ‌آور؟

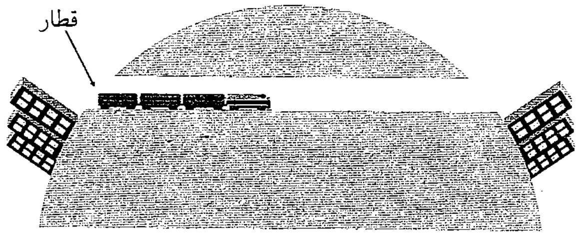
گونه‌ی نوینی از این نوع فضاپیماهای شلیک شونده با توپ (اما بی‌سرنشین) پیشنهاد شده است. در این گونه‌ی نوین، که **شارپ**[2] نامیده می‌شود، با سوختن متان و هوا پیستونی در راستای لوله‌ی توپ به پیش رانده می‌شود. این عمل گاز هیدروژن را متراکم و سپس این گاز هم یک موشک را پرتاب می‌کند. در حین این پرتاب، موشک پس از پیمودن $3{,}5\,\mathrm{km}$ به تندی $7{,}0\,\mathrm{km/s}$ می‌رسد. موشک همین که پرتاب شد می‌توان

1. Jules Verne
2. Super High Altitude Research Project (SHARP)

موتور آن را روشن کرد تا تندی بیشتری به فضاپیما بدهد. (پ) شتاب متوسط موشک در درون دستگاه پرتاب کننده، برحسب g، چقدر است؟ (ت) چه تندی بیشتری (از طریق موتور موشک) لازم است تا موشک بتواند در ارتفاع ۷۰۰ کیلومتری به دور زمین گردش کند؟

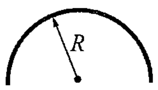
۹۷ شیئی به جرم m در آغاز در فاصله‌ی شعاعی $r = ۳R_E$ از مرکز زمین نگه داشته شده است، که در آن R_E شعاع زمین است. جرم زمین را M_E بگیرید. به این شیء نیرویی وارد می‌شود که آن را تا فاصله‌ی شعاعی $r = ۴R_E$ حرکت دهد و در آنجا دوباره در جای خود قرار گیرد. کار انجام شده توسط نیروی وارد شده در حین حرکت را با انتگرال‌گیری از بزرگی نیرو حساب کنید.

۹۸ برای کم کردن ازدحام ترافیک میان دو شهر، مانند بوستون و واشینگتن دی سی، مهندسان پیشنهاد کرده‌اند که در راستای خط وتر وصل کننده‌ی این شهرها یک تونل خط آهن ساخته شود. قطاری بدون آنکه توسط موتوری رانده شود از حال سکون به راه می‌افتد، در نیمه‌ی اول تونل سقوط می‌کند و سپس در نیمه‌ی دوم به بالا می‌رود. با این فرض که زمین کره‌ای یکنواخت است و از اصطکاک و نیروی پَسار هوا چشم‌پوشی می‌شود، مدت زمان مسافرت میان دو شهر را پیدا کنید.



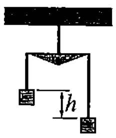
شکل ۱۳-۵۵ مسئله‌ی ۹۸.

۹۹ میله‌ای باریک به جرم $M = ۵/۰۰\,\mathrm{kg}$ به صورت نیم‌دایره‌ای به شعاع $R = ۰/۶۵۰\,\mathrm{m}$ خم شده است (شکل ۱۳-۵۶). (الف) نیروی گرانشی وارد شده (بزرگی و جهت) به ذره‌ای به جرم $m = ۳/۰ \times ۱۰^{-۳}\,\mathrm{kg}$ واقع شده در نقطه‌ی P مرکز خمیدگی میله، چیست؟ (ب) اگر میله به صورت دایره‌ی کامل می‌بود، نیروی گرانشی وارد شده به ذره چقدر می‌شد؟



شکل ۱۳-۵۶ مسئله‌ی ۹۹.

۱۰۰ در شکل ۱۳-۵۷، دو جسم مشابه با جرم‌های مساوی $m = ۲/۰۰\,\mathrm{kg}$ از دو ریسمان با طول‌های متفاوت یک ترازو در سطح زمین آویخته شده‌اند. جرم این ریسمان‌ها ناچیز و اختلافشان $h = ۵/۰۰\,\mathrm{cm}$ است. زمین را کروی با چگالی یکنواخت $\rho = ۵/۵۰\,\mathrm{g/cm^۳}$ فرض کنید. اختلاف وزن این جسم به خاطر نزدیک‌تر بودن یکی از آن‌ها به زمین نسبت به دیگری، چیست؟



شکل ۱۳-۵۷ مسئله‌ی ۱۰۰.

۱۰۱ سفینه‌ای در فاصله‌ی میان زمین و ماه به خط راست حرکت می‌کند. در چه فاصله‌ای از زمین نیروی گرانشی وارد شده به سفینه صفر است؟

پیوست‌ها APPENDICES

پیوست الف — دستگاه بین‌المللی یکاها (SI)*

جدول ۱ یکاهای اصلی SI

کمیت	نام	نماد	تعریف
طول	متر	m	«... طولی است، که نور در بازه‌ی زمانی $\frac{۱}{۲۹۹۷۹۲۴۵۸}$ ثانیه در خلاء می‌پیماید» (۱۹۸۳/۱۳۶۲).
جرم	کیلوگرم	kg	«... این نمونه‌ی اصلی (که استوانه‌ی معینی از پلاتین ـ ایریدیوم است) از این پس به عنوان یکای جرم در نظر گرفته می‌شود» (۱۸۸۹/۱۲۶۸).
زمان	ثانیه	s	«... زمانی معادل ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ برابر دوره‌ی تناوب تابش متناظر با گذار میان دو تراز فوق ریز حالت پایه‌ی اتم سزیوم ـ ۱۳۳ است» (۱۹۶۷/۱۳۴۶).
جریان الکتریکی	آمپر	A	«... جریان ثابتی است که اگر از دو سیم مستقیم موازی با طول بی‌نهایت و سطح مقطع دایره‌ای ناچیز، به فاصله‌ی یک متر از هم در خلاء بگذرد، میان سیم‌ها برای هر متر طول نیرویی برابر با ۲×۱۰^{-۷} نیوتون ایجاد شود» (۱۹۴۶/۱۳۲۵)
دمای ترمودینامیکی	کلوین	K	«... $\frac{۱}{۲۷۳/۱۶}$ برابر دمای ترمودینامیکی نقطه‌ی سه گانه آب است» (۱۹۶۷/۱۳۴۶).
مقدار ماده	مول	mol	«... مقدار ماده‌ی دستگاهی است، که عده‌ی موجودات بنیادی آن با عده‌ی اتم‌های موجود در ۰/۰۱۲ کیلوگرم کربن ـ ۱۲ برابر باشد» (۱۹۷۱/۱۳۵۰).
شدت نور	کاندلا	cd	«... شدت نور در جهت معینی از چشمه‌ای که تابش تکفام با بسامد ۵۴۰×۱۰^{۱۲}Hz گسیل می‌کند و شدت تابش در آن جهت $\frac{۱}{۶۸۳}$ وات بر استرادیان است» (۱۹۷۹/۱۳۵۸).

* برگرفته از نشریه‌ی ویژه‌ی ۳۳۰، ویرایش ۱۹۷۲، اداره‌ی ملی استانداردها، «دستگاه بین‌المللی یکاها (SI)». تعریف‌های بالا در تاریخ‌های یاد شده از سوی مجمع عمومی وزن‌ها و مقیاس‌ها، که یک مرجع بین‌المللی است، پذیرفته شده‌اند. در این کتاب از یکای **کاندلا** استفاده نمی‌شود.

جدول ۲ برخی یکاهای فرعی SI

کمیت	نام یکا	نماد	
مساحت	متر مربع	m^2	
حجم	متر مکعب	m^3	
بسامد	هرتز	Hz	s^{-1}
چگالی جرمی (چگالی)	کیلوگرم بر متر مکعب	kg/m^3	
تندی، سرعت	متر بر ثانیه	m / s	
سرعت زاویه‌ای	رادیان بر ثانیه	rad / s	
شتاب	متر بر مجذور ثانیه	m/s^2	
شتاب زاویه‌ای	رادیان بر مجذور ثانیه	rad/s^2	
نیرو	نیوتون	N	$kg.m/s^2$
فشار	پاسکال	Pa	N/m^2
کار، انرژی، مقدار گرما	ژول	J	N.m
توان	وات	W	J / s
مقدار بار الکتریکی	کولن	C	A.s
اختلاف پتانسیل، نیروی محرک الکتریکی	ولت	V	W / A
شدت میدان الکتریکی	ولت بر متر (یا نیوتون بر کولن)	V / m	N / C
مقاومت الکتریکی	اهم	Ω	V / A
ظرفیت	فاراد	F	A.s / V
شار مغناطیسی	وبر	Wb	V.s
القاییدگی	هانری	H	V.s / A
چگالی شار مغناطیسی	تسلا	T	Wb/m^2
شدت میدان مغناطیسی	آمپر بر متر	A / m	
آنتروپی	ژول بر کلوین	J / K	
گرمای ویژه	ژول بر کیلوگرم کلوین	J(kg.K)	
رسانندگی گرمایی	وات بر متر کلوین	W /(m.K)	
شدت تابش	وات بر استرادیان	W / sr	

جدول ۳ یکاهای تکمیلی SI

کمیت	نام یکا	نماد
زاویه‌ی مسطحه	رادیان	rad
زاویه‌ی فضایی	استرادیان	sr

پیوست ب

برخی ثابت‌های بنیادی فیزیک*

ثابت	نماد	مقدار مورد استفاده در محاسبه	بهترین مقدار (۱۹۹۸) مقدار[۱]	عدم قطعیت[۲]
تندی نور در خلاء	c	۳٫۰۰×۱۰^{۸}m/s	۲٫۹۹۷۹۲۴۵۸	دقیق
بار بنیادی	e	۱٫۶۰×۱۰$^{-۱۹}$C	۱٫۶۰۲۱۷۶۴۸۷	۰٫۰۲۵
ثابت گرانش	G	۶٫۶۷×۱۰$^{-۱۱}$m^{۳}/s^{۲}.kg	۶٫۶۷۴۲۸	۱۰۰
ثابت عمومی گازها	R	۸٫۳۱J/mol.K	۸٫۳۱۴۴۷۲	۱٫۷
ثابت آووگادرو	N_A	۶٫۰۲×۱۰^{۲۲}mol$^{-۱}$	۶٫۰۲۲۱۴۱۷۹	۰٫۰۵۰
ثابت بولتزمن	k	۳٫۳۸×۱۰$^{-۲۳}$J/K	۱٫۳۸۰۶۵۰۴	۱٫۷
ثابت استفان ـ بولتزمن	σ	۵٫۶۷×۱۰$^{-۸}$W/m^{۲}.K^{۴}	۵٫۶۷۰۴۰۰	۷٫۰
حجم مولی گاز ایده‌آل در STP[۴]	V_{m}	۲٫۲۷×۱۰$^{-۲}$m^{۳}/mol	۲٫۲۷۱۰۹۸۱	۱٫۷
ثابت گذردهی	ε_0	۸٫۸۵×۱۰$^{-۱۲}$F/m	۸٫۸۵۴۱۸۷۸۱۷۶۲	دقیق
ثابت تراوایی	μ_0	۱٫۲۶×۱۰$^{-۶}$H/m	۱٫۲۵۶۶۳۷۰۶۱۴۳	دقیق
ثابت پلانک	h	۶٫۶۳×۱۰$^{-۳۴}$Js	۶٫۶۲۶۰۶۸۹۶	۰٫۰۵۰
جرم الکترون[۳]	m_{e}	۹٫۱۱×۱۰$^{-۳۱}$kg	۹٫۱۰۹۳۸۲۱۵	۰٫۰۵۰
		۵٫۴۹×۱۰$^{-۴}$u	۵٫۴۸۵۷۹۹۰۹۴۳	۴٫۲×۱۰$^{-۴}$
جرم پروتون[۳]	m_{p}	۱٫۶۷×۱۰$^{-۲۷}$kg	۱٫۶۷۲۶۲۱۶۳۷	۰٫۰۵۰
		۱٫۰۰۷۳u	۱٫۰۰۷۲۷۶۴۶۶۷۷	۱٫۰×۱۰$^{-۴}$
نسبت جرم پروتون به جرم الکترون	$m_{\mathrm{p}}/m_{\mathrm{e}}$	۱۸۴۰	۱۸۳۶٫۱۵۲۶۷۲۴۷	۴٫۳×۱۰$^{-۴}$
نسبت بار به جرم الکترون	e/m_{e}	۱٫۷۶×۱۰^{۱۱}C/kg	۱٫۷۵۸۸۲۰۱۵۰	۰٫۰۲۵
جرم نوترون[۳]	m_{n}	۱٫۶۸×۱۰$^{-۲۷}$kg	۱٫۶۷۴۹۲۷۲۱۱	۰٫۰۵۰
		۱٫۰۰۸۷u	۱٫۰۰۸۶۶۴۹۱۵۹۷	۴٫۳×۱۰$^{-۴}$
جرم اتمی هیدروژن[۳]	$m_{{}^{1}\mathrm{H}}$	۱٫۰۰۷۸u	۱٫۰۰۷۸۲۵۰۳۱۶	۰٫۰۰۰۵
جرم اتمی دوتریوم[۳]	$m_{{}^{2}\mathrm{H}}$	۲٫۰۱۳۶u	۲٫۰۱۳۵۵۳۲۱۲۷۲۴	۳٫۹×۱۰$^{-۵}$
جرم اتمی هلیوم[۳]	$m_{{}^{3}\mathrm{H}}$	۴٫۰۰۲۶u	۴٫۰۰۲۶۰۳۲	۰٫۰۶۷
جرم میوئون	m_{μ}	۱٫۸۸×۱۰$^{-۲۸}$kg	۱٫۸۸۳۵۳۱۳۰	۰٫۰۵۶
گشتاور مغناطیسی الکترون	μ_{e}	۹٫۲۸×۱۰$^{-۲۴}$J/T	۹٫۲۸۴۷۶۳۷۷	۰٫۰۲۵
گشتاور مغناطیسی پروتون	μ_{p}	۱٫۴۱×۱۰$^{-۲۶}$J/T	۱٫۴۱۰۶۰۶۶۶۲	۰٫۰۲۶
مگنتون بور	μ_{B}	۹٫۲۷×۱۰$^{-۲۴}$J/T	۹٫۲۷۴۰۰۹۱۵	۰٫۰۲۵
مگنتون هسته‌ای	μ_{N}	۵٫۰۵×۱۰$^{-۲۷}$J/T	۵٫۰۵۰۷۸۳۲۴	۰٫۰۲۵
شعاع بور	a	۵٫۲۹×۱۰$^{-۱۱}$m	۵٫۲۹۱۷۷۲۰۸۵۹	۶٫۸×۱۰$^{-۴}$
ثابت ریدبرگ	R	۱٫۱۰×۱۰^{۷}m$^{-۱}$	۱٫۰۹۷۳۷۳۱۵۶۸۵۲۷	۶٫۶×۱۰$^{-۶}$
طول موج کامپیتون الکترون	λ_{C}	۲٫۴۳×۱۰$^{-۱۲}$m	۲٫۴۲۶۳۱۰۲۱۷۵	۰٫۰۰۱۴

۱. مقادیر داده شده در این ستون باید همان یکا و توان ۱۰ مربوط به مقادیر مورد استفاده در محاسبه را داشته باشند.

۲. برحسب قسمت در میلیون.

۳. جرم‌ها برحسب یکاهای جرم اتمی یکی شده‌ی u، داده شده‌اند، که در آن ۱u = ۱٫۶۶۰۵۳۸۷۸۲×۱۰$^{-۲۷}$kg.

۴. STP (standard temperatue and pressure) به معنی دما و فشار متعارفی است، که عبارت‌اند از دمای صفر درجه سلسیوس و فشار یک اتمسفر (مساوی با ۰٫۱MPa).

* مقادیر داده شده در این جدول از مقادیر پیشنهادی 1998 CODATA (www.physics.nist.gov) انتخاب شده‌اند.

پیوست پ — برخی اطلاعات اخترشناختی

برخی فاصله‌ها نسبت به زمین

فاصله‌ی ماه*	$۳/۸۲ \times ۱۰^{۸}$ m	فاصله‌ی مرکز کهکشان ما	$۲/۲ \times ۱۰^{۲۰}$ m
فاصله‌ی خورشید*	$۱/۵۰ \times ۱۰^{۱۱}$ m	فاصله‌ی کهکشان آندرومدا (امرأةالمسلسله)	$۲/۱ \times ۱۰^{۲۲}$ m
فاصله‌ی نزدیک‌ترین ستاره (پروکزیما قنطوروس)	$۴/۰۴ \times ۱۰^{۱۶}$ m	فاصله‌ی کرانه‌ی عالم مشاهده‌پذیر	$\sim ۱۰^{۲۶}$ m

* فاصله‌ی متوسط.

اطلاعات مربوط به خورشید، زمین، و ماه

کمیت	یکا	خورشید	زمین	ماه
جرم	kg	$۱/۹۹ \times ۱۰^{۳۰}$	$۵/۹۸ \times ۱۰^{۲۴}$	$۷/۳۶ \times ۱۰^{۲۲}$
شعاع متوسط	m	$۶/۹۶ \times ۱۰^{۸}$	$۶/۳۷ \times ۱۰^{۶}$	$۱/۷۴ \times ۱۰^{۶}$
چگالی متوسط	kg/m^3	۱۴۱۰	۵۵۲۰	۳۳۴۰
شتاب سقوط آزاد در سطح	m/s^2	۲۷۴	۹/۸۱	۱/۶۷
سرعت فرار	km/s	۶۱۸	۱۱/۲	۲/۳۸
دوره‌ی تناوب دوران[1]	_	۳۷ روز درقطب‌ها[1]؛ ۲۶ روز در استوا[2]	۲۳h۵۶min	۲۷/۳d
توان تابشی[3]	W	$۳/۹۰ \times ۱۰^{۲۶}$		

۱. نسبت به ستاره‌های دور اندازه‌گیری شده است.

۲. خورشید توده‌ای از گاز است و مانند جسم صُلب نمی‌چرخد.

۳. انرژی خورشیدی دریافت شده درست در خارج جوّ زمین، با فرض کردن تابش عمودی با آهنگ $۱۳۴۰ W/m^2$.

برخی مشخصه‌های سیاره‌ها

کمیت	عطارد	زهره	زمین	مریخ	مشتری	زحل	اورانوس	نپتون	پلوتو[4]
فاصله‌ی متوسط از خورشید (برحسب $۱۰^{۶}$Km)	۵۷/۹	۱۰۸	۱۵۰	۲۲۸	۷۷۸	۱۴۳۰	۲۸۷۰	۴۵۰۰	۵۹۰۰
دوره‌ی تناوب گردش (برحسب سال)	۰/۲۴۱	۰/۶۱۵	۱/۰۰	۱/۸۸	۱۱/۹	۲۹/۵	۸۴/۰	۱۶۵	۲۴۸
دوره‌ی تناوب دوران[1] (برحسب روز)	۵۸/۷	−۲۴۳[2]	۰/۹۹۷	۱/۰۳	۰/۴۰۹	۰/۴۲۶	−۰/۴۵۱[2]	۰/۶۵۸	۶/۳۹
تندی مداری (برحسب km/s)	۴۷/۹	۳۵/۰	۲۹/۸	۲۴/۱	۱۳/۱	۹/۶۴	۶/۸۱	۵/۴۳	۴/۷۴
زاویه‌ی محور نسبت به مدار	$<۲۸°$	$\approx ۳°$	۲۳/۴°	۲۵/۰°	۳/۰۸°	۲۶/۷°	۹۷/۹°	۲۹/۶°	۵۷/۵°
زاویه‌ی مدار نسبت به صفحه‌ی مدار زمین	۷/۰۰°	۳/۳۹°		۱/۸۵°	۱/۳۰°	۲/۴۹°	۰/۷۷°	۱/۷۷°	۱۷/۲
خروج از مرکز مدار	۰/۲۰۶	۰/۰۰۶۸	۰/۰۱۶۷	۰/۰۹۳۴	۰/۰۴۸۵	۰/۰۵۵۶	۰/۰۴۷۲	۰/۰۰۸۶	۰/۲۵۰
قطر استوایی (برحسب km)	۴۸۸۰	۱۲۱۰۰	۱۲۸۰۰	۶۷۹۰	۱۴۳۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	۵۱۸۰۰	۴۹۵۰۰	۲۳۰۰
جرم (نسبت به زمین)	۰/۰۵۵۸	۰/۸۱۵	۱/۰۰۰	۰/۱۰۷	۳۱۸	۹۵/۱	۱۴/۵	۱۷/۲	۰/۰۰۲
چگالی (نسبت به آب)	۵/۶۰	۵/۲۰	۵/۵۲	۳/۹۵	۱/۳۱	۰/۷۰۴	۱/۲۱	۱/۶۷	۲/۰۳
مقدار g در سطح[3] (برحسب m/s^2)	۳/۷۸	۸/۶۰	۹/۷۸	۳/۷۲	۲۲/۹	۹/۰۵	۷/۷۷	۱۱/۰	۰/۵
سرعت فرار (برحسب km/s)	۴/۳	۱۰/۳	۱۱/۲	۵/۰	۵۹/۵	۳۵/۶	۲۱/۲	۲۳/۶	۱/۳
قمرهای شناخته شده	۰	۰	۱	۲	حلقه+۶۳	حلقه‌ها+۶۰	حلقه‌ها+۲۷	حلقه‌ها+۱۳	۳

۱. نسبت به ستاره‌های دور اندازه‌گیری شده است.

۲. زهره و اورانوس برخلاف جهت حرکت مداری خود می‌چرخند.

۳. شتاب گرانشی اندازه‌گیری شده در استوای سیاره.

۴. پلوتو اکنون مانند یک سیاره‌ی کوتوله‌ی سفید رده‌بندی شده است.

پیوست ت — ضریب‌های تبدیل

ضریب‌های تبدیل را می‌توان به طور مستقیم از جدول‌ها خواند. به عنوان مثال، یک درجه برابر با $۲٫۷۷۸\times۱۰^{-۳}$rev است، در نتیجه $۱۶٫۷^\circ = ۱۶٫۷\times۲٫۷۷۸\times۱۰^{-۳}$rev. یکاهای SI با حروف درشت مشخص شده‌اند*.

زاویه‌ی مسطحه

		° (درجه)	′ (دقیقه)	″ (ثانیه)	**rad (رادیان)**	rev (دور)
یک درجه	=	۱	۶۰	۳۶۰۰	$۱٫۷۴۵\times۱۰^{-۲}$	$۲٫۷۷۸\times۱۰^{-۳}$
یک دقیقه	=	$۱٫۶۶۷\times۱۰^{-۲}$	۱	۶۰	$۲٫۹۰۹\times۱۰^{-۴}$	$۴٫۶۳۰\times۱۰^{-۵}$
یک ثانیه	=	$۲٫۷۷۸\times۱۰^{-۴}$	$۱٫۶۶۷\times۱۰^{-۲}$	۱	$۴٫۸۴۸\times۱۰^{-۶}$	$۷٫۷۱۶\times۱۰^{-۷}$
یک رادیان	=	۵۷٫۳۰	۳۴۳۸	$۲٫۰۶۳\times۱۰^{۵}$	۱	۰٫۱۵۹۲
یک دور	=	۳۶۰	$۲٫۱۶\times۱۰^{۴}$	$۱٫۲۹۶\times۱۰^{۶}$	۶٫۲۸۳	۱

زاویه‌ی فضایی

یک کره = ۴π استرادیان = ۱۲٫۵۷ استرادیان

طول

		cm	**m**	km	in	ft	mi
یک سانتی‌متر	=	۱	$۱۰^{-۲}$	$۱۰^{-۵}$	۰٫۳۹۳۷	$۳٫۲۸۱\times۱۰^{-۲}$	$۶٫۲۱۴\times۱۰^{-۶}$
یک متر	=	۱۰۰	۱	$۱۰^{-۳}$	۳۹٫۳۷	۳٫۲۸۱	$۶٫۲۱۴\times۱۰^{-۴}$
یک کیلومتر	=	$۱۰^{۵}$	۱۰۰۰	۱	$۳٫۹۳۷\times۱۰^{۴}$	۳۲۸۱	۰٫۶۲۱۴
یک اینچ	=	۲٫۵۴۰	$۲٫۵۴۰\times۱۰^{-۲}$	$۲٫۵۴۰\times۱۰^{-۵}$	۱	$۸٫۳۳۳\times۱۰^{-۲}$	$۱٫۵۷۸\times۱۰^{-۵}$
یک فوت	=	۳۰٫۴۸	۰٫۳۰۴۸	$۳٫۰۴۸\times۱۰^{-۴}$	۱۲	۱	$۱٫۸۹۴\times۱۰^{-۴}$
یک مایل	=	$۱٫۶۰۹\times۱۰^{۵}$	۱۶۰۹	۱٫۶۰۹	$۶٫۳۳۶\times۱۰^{۴}$	۵۲۸۰	۱

یک آنگستروم = $۱۰^{-۱۰}$m

یک مایل دریایی = ۱۸۵۲m = ۱٫۱۵۱mi = ۶۰۷۶ft

یک فرمی = $۱۰^{-۱۵}$m

یک سال نوری = $۹٫۴۶۱\times۱۰^{۱۲}$km

یک پارسک = $۳٫۰۸۴\times۱۰^{۱۳}$km

یک فاتوم = ۶ft

شعاع بور = $۵٫۲۹۲\times۱۰^{-۱۱}$m

یک یارد = ۳ft

یک راد = ۱۶٫۵ft

یک میل = $۱۰^{-۳}$in

یک نانومتر = $۱۰^{-۹}$m

مساحت

		m²	cm²	ft²	in²
یک مترمربع	=	۱	$۱۰^{۴}$	۱۰٫۷۶	۱۵۵۰
یک سانتی‌متر مربع	=	$۱۰^{-۴}$	۱	$۱٫۰۷۶\times۱۰^{-۳}$	۰٫۱۵۵۰
یک فوت مربع	=	$۹٫۲۹۰\times۱۰^{-۲}$	۹۲۹٫۰	۱	۱۴۴
یک اینچ مربع	=	$۶٫۴۵۲\times۱۰^{-۴}$	۶٫۴۵۲	$۶٫۹۴۴\times۱۰^{-۳}$	۱

یک مایل مربع = $۲٫۷۸۸\times۱۰^{۷}$ft² = ۶۴۰ جریب

یک بارن = $۱۰^{-۲۸}$m²

یک جریب = ۴۳۵۶۰ft²

یک هکتار = $۱۰^{۴}$m² = ۲٫۴۷۱ جریب

* بخشی از داده‌ها از این مرجع گرفته شده‌اند: G. Shortley and D. Williams, *Elements of Physics*, 1971, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J.

حجم

		$m^۳$	$cm^۳$	L	$ft^۳$	$in^۳$
یک **مترمکعب**	=	۱	$۱۰^{۶}$	۱۰۰۰	۳۵/۳۱	$۶/۱۰۲\times۱۰^{۴}$
یک سانتی‌متر مکعب	=	$۱۰^{-۶}$	۱	$۱/۰۰۰\times۱۰^{-۳}$	$۳/۵۳۱\times۱۰^{-۵}$	$۶/۱۰۲\times۱۰^{-۲}$
یک لیتر	=	$۱/۰۰۰\times۱۰^{-۳}$	۱۰۰۰	۱	$۳/۵۳۱\times۱۰^{-۲}$	۶۱/۰۲
یک فوت مکعب	=	$۲/۸۳۲\times۱۰^{-۲}$	$۲/۸۳۲\times۱۰^{۴}$	۲۸/۲۳	۱	۱۷۲۸
یک اینچ مکعب	=	$۱/۶۳۹\times۱۰^{-۵}$	۱۶/۳۹	$۱/۶۳۹\times۱۰^{-۲}$	$۵/۷۸۷\times۱۰^{-۴}$	۱

یک گالن مایع آمریکایی = ۴ کوارت مایع آمریکایی = ۸ پینت آمریکایی = ۱۲۸ اونس مایع آمریکایی = $۲۳۱in^۳$

یک گالن امپریال انگلیسی = $۲۷۷/۴in^۳$ = ۱/۲۰۱ گالن مایع آمریکایی

جرم

کمیت‌هایی که در زمینه‌ی تیره درج شده‌اند یکای جرم نیستند، اما اغلب به این عنوان به کار می‌روند. مثلاً وقتی می‌نویسیم "۱kg" = "۲/۲۰۵lb"، منظور این است که در محلی که g دارای مقدار استاندارد $۹/۸۰۶۶۵ m/s^۲$ است، یک کیلوگرم ***جرمی* است** که ۲/۲۰۵ پوند ***وزن* دارد**.

		g	**kg**	slug	u	oz	lb	ton
یک گرم	=	۱	۰/۰۰۱	$۶/۸۵۲\times۱۰^{-۵}$	$۶/۰۲۲\times۱۰^{۲۳}$	$۳/۵۲۷\times۱۰^{-۲}$	$۲/۲۰۵\times۱۰^{-۳}$	$۱/۱۰۲\times۱۰^{-۶}$
یک **کیلوگرم**	=	۱۰۰۰	۱	$۶/۸۵۲\times۱۰^{-۲}$	$۶/۰۲۲\times۱۰^{۲۶}$	۳۵/۲۷	۲/۲۰۵	$۱/۱۰۲\times۱۰^{-۳}$
یک اسلاگ	=	$۱/۴۵۹\times۱۰^{۴}$	۱۴/۵۹	۱	$۸/۷۸۶\times۱۰^{۲۷}$	۵۱۴/۸	۳۲/۱۷	$۱/۶۰۹\times۱۰^{-۲}$
یک‌یکای جرم اتمی	=	$۱/۶۶۱\times۱۰^{-۲۴}$	$۱/۶۶۱\times۱۰^{-۲۷}$	$۱/۱۳۸\times۱۰^{-۲۸}$	۱	$۵/۸۵۷\times۱۰^{-۲۶}$	$۳/۶۶۲\times۱۰^{-۲۷}$	$۱/۸۳۰\times۱۰^{-۳۰}$
یک اونس	=	۲۸/۳۵	$۲/۸۳۵\times۱۰^{-۲}$	$۱/۹۴۳\times۱۰^{-۳}$	$۱/۷۱۸\times۱۰^{-۲۵}$	۱	$۶/۲۵۰\times۱۰^{-۲}$	$۳/۱۲۵\times۱۰^{-۵}$
یک پوند	=	۴۵۳/۶	۰/۴۵۳۶	$۳/۱۰۸\times۱۰^{-۲}$	$۲/۷۳۲\times۱۰^{۲۶}$	۱۶	۱	۰/۰۰۰۵
یک تن	=	$۹/۰۷۲\times۱۰^{۵}$	۹۰۷/۲	۶۲/۱۶	$۵/۴۶۳\times۱۰^{۲۹}$	$۳/۲\times۱۰^{۴}$	۲۰۰۰	۱

یک تن متریک = ۱۰۰۰kg

چگالی

کمیت‌هایی که در زمینه‌ی تیره درج شده‌اند، چگالی‌های وزنی هستند و به این جهت، از نظر ابعادی با چگالی‌های جرمی متفاوت‌اند. به جدول جرم رجوع کنید.

		$slug/ft^۳$	$\mathbf{kg/m^۳}$	$g/cm^۳$	$lb/ft^۳$	$lb/in^۳$
یک اسلاگ بر فوت مکعب	=	۱	۱۵۱۵/۴	۰/۵۱۵۴	۳۲/۱۷	$۱/۸۶۲\times۱۰^{-۲}$
یک **کیلوگرم بر متر مکعب**	=	$۱/۹۴۰\times۱۰^{-۳}$	۱	۰/۰۰۱	$۶/۲۴۳\times۱۰^{-۲}$	$۳/۶۱۳\times۱۰^{-۵}$
یک گرم بر سانتی‌متر مکعب	=	۱/۹۴۰	۱۰۰۰	۱	۶۲/۴۳	$۳/۶۱۳\times۱۰^{-۲}$
یک پوند بر فوت مکعب	=	$۳/۱۰۸\times۱۰^{-۲}$	۱۶/۰۲	$۱/۶۰۲\times۱۰^{-۲}$	۱	$۵/۷۸۷\times۱۰^{-۴}$
یک پوند بر اینچ مکعب	=	۵۳/۷۱	$۲/۷۶۸\times۱۰^{۴}$	۲۷/۶۸	۱۷۲۸	۱

زمان

		y	d	h	min	s
یک سال	=	۱	۳۶۵/۲	$۸/۷۶۶\times۱۰^{۳}$	$۵/۲۵۹\times۱۰^{۵}$	$۳/۱۵۶\times۱۰^{۷}$
یک روز	=	$۲/۷۳۸\times۱۰^{-۳}$	۱	۲۴	۱۴۴۰	$۸/۶۴۰\times۱۰^{۴}$
یک ساعت	=	$۱/۱۴۱\times۱۰^{-۴}$	$۴/۱۶۷\times۱۰^{-۲}$	۱	۶۰	۳۶۰۰
یک دقیقه	=	$۱/۹۰۱\times۱۰^{-۶}$	$۶/۹۴۴\times۱۰^{-۴}$	$۱/۶۶۷\times۱۰^{-۲}$	۱	۶۰
یک **ثانیه**	=	$۳/۱۶۹\times۱۰^{-۸}$	$۱/۱۵۷\times۱۰^{-۵}$	$۲/۷۷۸\times۱۰^{-۴}$	$۱/۶۶۷\times۱۰^{-۲}$	۱

تندی

		ft/s	km/h	**m/s**	mi/h	cm/s
یک فوت بر ثانیه	=	۱	۱٫۰۹۷	۰٫۳۰۴۸	۰٫۶۸۱۸	۳۰٫۴۸
یک کیلومتر بر ثانیه	=	۰٫۹۱۱۳	۱	۰٫۲۷۷۸	۰٫۶۲۱۴	۲۷٫۷۸
یک متر بر ثانیه	=	۳٫۲۸۱	۳٫۶	۱	۲٫۲۳۷	۱۰۰
یک مایل بر ساعت	=	۱٫۴۶۷	۱٫۶۰۹	۰٫۴۴۷۰	۱	۴۴٫۷۰
یک سانتی‌متر بر ثانیه	=	$۳٫۲۸۱\times۱۰^{-۲}$	$۳٫۶\times۱۰^{-۲}$	۰٫۰۱	$۲٫۲۳۷\times۱۰^{-۲}$	۱

یک گره = یک مایل دریایی بر ساعت = ۱٫۶۸۸ ft/s   یک مایل بر دقیقه = ۸۸٫۰۰ ft/s = ۶۰٫۰۰ mi/h

نیرو

یکاهای نیرو که در زمینه‌ی تیره درجه شده‌اند، اکنون کمتر به کار می‌روند. مثال: یک گرم ـ نیرو (مساوی با ۱gf) نیروی گرانشی وارد بر شیئی به جرم یک گرم است در محلی که g دارای مقدار استاندارد $۹٫۸۰۶۶۵ m/s^{۲}$ است.

		dyne	**N**	lb	pdl	gf	kgf
یک دین	=	۱	$۱۰^{-۵}$	$۲٫۲۴۸\times۱۰^{-۶}$	$۷٫۲۳۳\times۱۰^{-۵}$	$۱٫۰۲۰\times۱۰^{-۳}$	$۱٫۰۲۰\times۱۰^{-۶}$
یک نیوتون	=	$۱۰^{۵}$	۱	۰٫۲۲۴۸	۷٫۲۳۳	۱۰۲٫۰	۰٫۱۰۲۰
یک پوند	=	$۴٫۴۴۸\times۱۰^{۵}$	۴٫۴۴۸	۱	۳۲٫۱۷	۴۵۳٫۶	۰٫۴۵۳۶
یک پوندال	=	$۱٫۳۸۳\times۱۰^{۴}$	۰٫۱۳۸۳	$۳٫۱۰۸\times۱۰^{-۲}$	۱	۱۴٫۱۰	$۱٫۴۱۰\times۱۰^{-۲}$
یک گرم ـ نیرو	=	۹۸۰٫۷	$۹٫۸۰۷\times۱۰^{-۳}$	$۲٫۲۰۵\times۱۰^{-۳}$	$۷٫۰۹۳\times۱۰^{-۲}$	۱	۰٫۰۰۱
یک کیلوگرم ـ نیرو	=	$۹٫۸۰۷\times۱۰^{۵}$	۹٫۸۰۷	۲٫۲۰۵	۷۰٫۹۳	۱۰۰۰	۱

یک تن = ۲۰۰۰lb

فشار

		atm	$dyne/cm^{۲}$	اینچ آب	cmHg	**Pa**	$lb/in^{۲}$	$lb/ft^{۲}$
یک اتمسفر	=	۱	$۱٫۰۱۳\times۱۰^{۶}$	۴۰۶٫۸	۷۶	$۱٫۰۱۳\times۱۰^{۵}$	۱۴٫۷۰	۲۱۱۶
یک‌دین برسانتی‌متر مربع	=	$۹٫۸۶۹\times۱۰^{-۷}$	۱	$۴٫۰۱۵\times۱۰^{-۴}$	$۷٫۵۰۱\times۱۰^{-۵}$	۰٫۱	$۱٫۴۵۰\times۱۰^{-۵}$	$۲٫۰۸۹\times۱۰^{-۳}$
یک اینچ آب در ۴°C	=	$۲٫۴۵۸\times۱۰^{-۳}$	۲۴۹۱	۱	۰٫۱۸۶۸	۲۴۹٫۱	$۳٫۶۱۳\times۱۰^{-۲}$	۵٫۲۰۴
یک‌سانتی‌متر جیوه* در ۰°	=	$۱٫۳۱۶\times۱۰^{-۲}$	$۱٫۳۳۳\times۱۰^{۴}$	۵٫۳۵۳	۱	۱۳۳۳	۰٫۱۴۹۳۴	۲۷٫۸۵
یک پاسکال	=	$۹٫۸۶۹\times۱۰^{-۶}$	۱۰	$۴٫۰۱۵\times۱۰^{-۳}$	$۷٫۵۰۱\times۱۰^{-۴}$	۱	$۱٫۴۵۰\times۱۰^{-۴}$	$۲٫۰۸۹\times۱۰^{-۲}$
یک پوند بر اینچ مربع	=	$۶٫۸۰۵\times۱۰^{-۲}$	$۶٫۸۹۵\times۱۰^{۴}$	۲۷٫۶۸	۵٫۱۷۱	$۶٫۸۹۵\times۱۰^{۳}$	۱	۱۴۴
یک پوند بر فوت مربع	=	$۴٫۷۲۵\times۱۰^{-۴}$	۴۷۸٫۸	۰٫۱۹۲۲	$۳٫۵۹۱\times۱۰^{-۲}$	۴۷٫۸۸	$۶٫۹۴۴\times۱۰^{-۳}$	۱

* در محلی که شتاب گرانشی دارای مقدار استاندارد $۹٫۸۰۶۶۵ m/s^{۲}$ است.

یک بار = $۰٫۱MPa = ۱۰^{۶} dyne/cm^{۲}$ یک میلی‌بار = $۱۰^{۳} dyne/cm^{۲} = ۱۰^{۲}Pa$ یک تور = یک میلی‌متر جیوه

انرژی، کار، گرما

کمیت‌هایی که در زمینه‌ی تیره درج شده‌اند، یکاهای انرژی نیستند، اما در اینجا برای اطلاعات بیشتر ذکر شده‌اند. این کمیت‌ها از فرمول هم‌ارزی نسبیتی جرم ـ انرژی، $E = mc^{۲}$، ناشی می‌شوند و انرژی آزاد شده را هنگام تبدیل کامل یک کیلوگرم یا یک یکای جرم اتمی یکی شده (u) به انرژی (دو ردیف پایین)، یا جرم تبدیل شده به یکی از یکاهای انرژی (دو ستون سمت چپ) را به دست می‌دهند.

		Btu	erg	ft.lb	hp.h	J	cal	kW.h	eV	MeV	kg	u
یکای بریتانیایی گرما	=	۱	$۱٫۰۵۵\times۱۰^{۱۰}$	۷۷۷٫۹	$۳٫۹۲۹\times۱۰^{-۴}$	۱۰۵۵	۲۵۲٫۰	$۲٫۹۳۰\times۱۰^{-۴}$	$۶٫۵۸۵\times۱۰^{۲۱}$	$۶٫۵۸۵\times۱۰^{۱۵}$	$۱٫۱۷۴\times۱۰^{-۱۴}$	$۷٫۰۷۰\times۱۰^{۱۲}$
یک ارگ	=	$۹٫۴۸۱\times۱۰^{-۱۱}$	۱	$۷٫۳۷۶\times۱۰^{-۸}$	$۳٫۷۲۵\times۱۰^{-۱۴}$	$۱۰^{-۷}$	$۲٫۳۸۹\times۱۰^{-۸}$	$۲٫۷۷۸\times۱۰^{-۱۴}$	$۶٫۲۴۲\times۱۰^{۱۱}$	$۶٫۲۴۲\times۱۰^{۵}$	$۱٫۱۱۳\times۱۰^{-۲۴}$	۶۷۰٫۲
یک فوت ـ پوند	=	$۱٫۲۸۵\times۱۰^{-۳}$	$۱٫۳۵۶\times۱۰^{۷}$	۱	$۵٫۰۵۱\times۱۰^{-۷}$	۱٫۳۵۶	۰٫۳۲۳۸	$۳٫۷۶۶\times۱۰^{-۷}$	$۸٫۴۶۴\times۱۰^{۱۸}$	$۸٫۴۶۴\times۱۰^{۱۲}$	$۱٫۵۰۹\times۱۰^{-۱۷}$	$۹٫۰۳۷\times۱۰^{۹}$
یک قوه اسب ـ ساعت =	=	۲۵۴۵	$۲٫۶۸۵\times۱۰^{۱۳}$	$۱٫۹۸۰\times۱۰^{۶}$	۱	$۲٫۶۸۵\times۱۰^{۶}$	$۶٫۴۱۳\times۱۰^{۵}$	۰٫۷۴۵۷	$۱٫۶۷۶\times۱۰^{۲۵}$	$۱٫۶۷۶\times۱۰^{۱۹}$	$۲٫۹۸۸\times۱۰^{-۱۱}$	$۱٫۷۹۹\times۱۰^{۱۶}$
یک ژول	=	$۹٫۴۸۱\times۱۰^{-۴}$	$۱۰^{۷}$	۰٫۷۳۷۶	$۳٫۷۲۵\times۱۰^{-۷}$	۱	۰٫۲۳۸۹	$۲٫۷۷۸\times۱۰^{-۷}$	$۶٫۲۴۲\times۱۰^{۱۸}$	$۶٫۲۴۲\times۱۰^{۱۲}$	$۱٫۱۱۳\times۱۰^{-۱۷}$	$۶٫۷۰۲\times۱۰^{۹}$
یک کالری	=	$۳٫۹۶۸\times۱۰^{-۳}$	$۴٫۱۸۶\times۱۰^{۷}$	۳٫۰۸۸	$۱٫۵۶۰\times۱۰^{-۶}$	۴٫۱۸۶۸	۱	$۱٫۱۶۳\times۱۰^{-۶}$	$۲٫۶۱۴\times۱۰^{۱۹}$	$۲٫۶۱۳\times۱۰^{۱۳}$	$۴٫۶۶۰\times۱۰^{-۱۷}$	$۲٫۸۰۶\times۱۰^{۱۰}$
یک کیلووات ـ ساعت =	=	۳۴۱۳	$۳٫۶۰۰\times۱۰^{۱۳}$	$۲٫۶۵۵\times۱۰^{۶}$	۱٫۳۴۱	$۳٫۶۰۰\times۱۰^{۶}$	$۸٫۶۰۰\times۱۰^{۵}$	۱	$۲٫۲۴۷\times۱۰^{۲۵}$	$۲٫۲۴۷\times۱۰^{۱۹}$	$۴٫۰۰۷\times۱۰^{-۱۱}$	$۲٫۴۱۳\times۱۰^{۱۶}$
یک الکترون ولت	=	$۱٫۵۱۹\times۱۰^{-۲۲}$	$۱٫۶۰۲\times۱۰^{-۱۲}$	$۱٫۱۸۲\times۱۰^{-۱۹}$	$۵٫۹۶۷\times۱۰^{-۲۶}$	$۱٫۶۰۲\times۱۰^{-۱۹}$	$۳٫۸۲۷\times۱۰^{-۲۰}$	$۴٫۴۵۰\times۱۰^{-۲۶}$	۱	$۱۰^{-۶}$	$۱٫۷۸۳\times۱۰^{-۳۶}$	$۱٫۰۷۴\times۱۰^{-۹}$
یک میلیون eV	=	$۱٫۵۱۹\times۱۰^{-۱۶}$	$۱٫۶۰۲\times۱۰^{-۶}$	$۱٫۱۸۲\times۱۰^{-۱۳}$	$۵٫۹۶۷\times۱۰^{-۲۰}$	$۱٫۶۰۲\times۱۰^{-۱۳}$	$۳٫۸۲۷\times۱۰^{-۱۴}$	$۴٫۴۵۰\times۱۰^{-۲۰}$	$۱۰^{۶}$	۱	$۱٫۷۸۳\times۱۰^{-۳۰}$	$۱٫۰۷۴\times۱۰^{-۳}$
یک کیلوگرم	=	$۸٫۵۲۱\times۱۰^{۱۳}$	$۸٫۹۸۷\times۱۰^{۲۳}$	$۶٫۶۲۹\times۱۰^{۱۶}$	$۳٫۳۴۸\times۱۰^{۱۶}$	$۸٫۹۸۷\times۱۰^{۱۶}$	$۲٫۱۴۶\times۱۰^{۱۰}$	$۲٫۴۹۷\times۱۰^{۱۰}$	$۵٫۶۱۰\times۱۰^{۳۵}$	$۵٫۶۱۰\times۱۰^{۲۹}$	۱	$۶٫۰۲۲\times۱۰^{۲۶}$
یکای جرم اتمی (u)	=	$۱٫۴۱۵\times۱۰^{-۱۳}$	$۱٫۴۹۲\times۱۰^{-۴}$	$۱٫۱۰۱\times۱۰^{-۱۰}$	$۵٫۵۵۹\times۱۰^{-۱۷}$	$۱٫۴۹۲\times۱۰^{-۱۹}$	$۳٫۵۶۴\times۱۰^{-۱۱}$	$۴٫۱۴۶\times۱۰^{-۱۷}$	$۹٫۳۲\times۱۰^{۸}$	۹۳۲٫۰	$۱٫۶۶۱\times۱۰^{-۲۷}$	۱

توان

		Btu/h	ft.lb/s	hp	cal/s	kW	W
یک یکای بریتانیایی گرما بر ساعت	=	۱	۰٫۲۱۶۱	$۳٫۹۲۹\times۱۰^{-۴}$	$۶٫۹۹۸\times۱۰^{-۲}$	$۲٫۹۳۰\times۱۰^{-۴}$	۰٫۲۹۳۰
یک فوت. پوند بر ثانیه	=	۴٫۶۲۸	۱	$۱٫۸۱۸\times۱۰^{-۳}$	۰٫۳۲۳۹	$۱٫۳۵۶\times۱۰^{-۳}$	۱٫۳۵۶
یک قوه اسب	=	۲۵۴۵	۵۵۰	۱	۱۷۸٫۱	۰٫۷۴۵۷	۷۴۵٫۷
یک کالری بر ثانیه	=	۱۴٫۲۹	۳٫۰۸۸	$۵٫۶۱۵\times۱۰^{-۳}$	۱	$۴٫۱۸۶\times۱۰^{-۳}$	۴٫۱۸۶
یک کیلووات	=	۳۴۱۳	۷۳۷٫۶	۱٫۳۴۱	۲۳۸٫۹	۱	۱۰۰۰
یک وات	=	۳٫۴۱۳	۰٫۷۳۷۶	$۱٫۳۴۱\times۱۰^{-۳}$	۰٫۲۳۸۹	۰٫۰۰۱	۱

میدان مغناطیسی

		گاؤس	تسلا	میلی گاؤس
یک گاؤس	=	۱	$۱۰^{-۴}$	۱۰۰۰
یک تسلا	=	$۱۰^{۴}$	۱	$۱۰^{۷}$
یک میلی گاؤس	=	۰٫۰۰۱	$۱۰^{-۷}$	۱

یک تسلا = یک وبر بر متر مربع

شار مغناطیسی

		ماکسول	وبر
یک ماکسول	=	۱	$۱۰^{-۸}$
یک وبر	=	$۱۰^{۸}$	۱

پیوست ث — فرمول‌های ریاضی

هندسه

در دایره‌ای به شعاع r: محیط $= 2\pi r$؛ مساحت $= \pi r^2$

در کره‌ای به شعاع r: مساحت $= 4\pi r^2$؛ حجم $= \frac{4}{3}\pi r^3$

در استوانه‌ی قائمی به شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h:

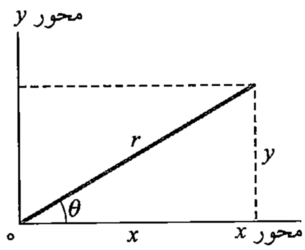
مساحت $= 2\pi r^2 + 2\pi rh$؛ حجم $= \pi r^2 h$

در مثلثی به قاعده‌ی a و ارتفاع h: مساحت $= \frac{1}{2}ah$

فرمول‌های معادله‌ی درجه دوم

اگر $ax^2 + bx + c = 0$، داریم $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

تابع‌های مثلثاتی زاویه‌ی θ

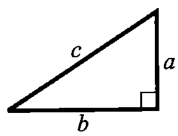


$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$ $\quad \cos\theta = \dfrac{x}{r}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ $\quad \cot\theta = \dfrac{x}{y}$

$\sec\theta = \dfrac{r}{x}$ $\quad \csc\theta = \dfrac{r}{y}$

قضیه‌ی فیثاغورس



در این مثلث راستگوشه: $a^2 + b^2 = c^2$

رابطه‌های مربوط به مثلث

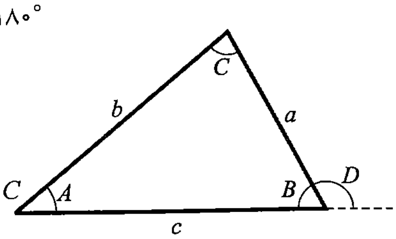
A، B و C زاویه‌های مثلث و a، b و c ضلع‌های روبه‌رو به این زاویه‌ها هستند.

زاویه‌های $A + B + C = 180^\circ$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

زاویه‌ی خارجی $D = A + C$



علامت‌ها و نمادهای ریاضی

$=$ مساوی است با

$\approx$ تقریباً مساوی است با

$\sim$ مرتبه‌ی بزرگی برابر است با

$\neq$ مساوی نیست با

$\equiv$ متحد است با، تعریف می‌شود به صورت ...

$>$ بزرگ‌تر است از ($\gg$ خیلی بزرگ‌تر است از)

$<$ کوچک‌تر است از ($\ll$ خیلی کوچک‌تر است از)

$\pm$ به علاوه یا منها

$\propto$ متناسب است با

Σ مجموع

x_{avg} مقدار متوسط x

اتحادهای مثلثاتی

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\sin\theta / \cos\theta = \tan\theta$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

قضیه‌ی دوجمله‌ای

$$(۱+x)^{n}=۱+\frac{nx}{۱!}+\frac{n(n-۱)}{۲!}x^{۲}+\cdots \qquad (x^{۲}<۱)$$

بسط نمایی

$$e^{۲}=۱+x+\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۳}}{۳!}+\cdots$$

بسط لگاریتمی

$$\ln(۱+x)=x-\frac{۱}{۲}x^{۲}+\frac{۱}{۳}x^{۲}-\cdots \qquad (|x|<۱)$$

بسط تابع‌های مثلثاتی (θ برحسب رادیان است)

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^{۳}}{۳!}+\frac{\theta^{۵}}{۵!}-\cdots$$

$$\cos\theta=۱-\frac{\theta^{۲}}{۲!}+\frac{\theta^{۴}}{۴!}-\cdots$$

$$\tan\theta=\theta+\frac{\theta^{۳}}{۳}+\frac{۲\theta^{۵}}{۱۵}+\cdots$$

قاعده‌ی کرامر

پاسخ‌های دو معادله‌ی هم‌زمان با مجهول‌های x و y:

$$a_{۲}x+b_{۲}y=c_{۲} \quad \text{و} \quad a_{۱}x+b_{۱}y=c_{۱}$$

عبارت‌اند از:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_{۱} & b_{۱} \\ c_{۲} & b_{۲} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{۱} & b_{۱} \\ a_{۲} & b_{۲} \end{vmatrix}}=\frac{c_{۱}b_{۲}-c_{۲}b_{۱}}{a_{۱}b_{۲}-a_{۲}b_{۱}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_{۱} & c_{۱} \\ a_{۲} & c_{۲} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{۱} & b_{۱} \\ a_{۲} & b_{۲} \end{vmatrix}}=\frac{a_{۱}c_{۲}-a_{۲}c_{۱}}{a_{۱}b_{۲}-a_{۲}b_{۱}}$$

ضرب‌های بردارها

فرض می‌کنیم $\hat{\mathrm{i}}$، $\hat{\mathrm{j}}$، و $\hat{\mathrm{k}}$، بردارهای یکه در راستاهای x، y و z هستند. پس

$$\hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{j}}=\hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{k}}=\hat{\mathrm{k}}\cdot\hat{\mathrm{i}}=۰ \qquad \hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{i}}=\hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{j}}=\hat{\mathrm{k}}\cdot\hat{\mathrm{k}}=۱$$

$$\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{i}}=\hat{\mathrm{j}}\times\hat{\mathrm{j}}=\hat{\mathrm{k}}\times\hat{\mathrm{k}}=۰$$

$$\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{j}}=\hat{\mathrm{k}} \qquad \hat{\mathrm{j}}\times\hat{\mathrm{k}}=\hat{\mathrm{i}} \qquad \hat{\mathrm{k}}\times\hat{\mathrm{i}}=\hat{\mathrm{j}}$$

هر بردار مانند $\vec{a}$ را که مؤلفه‌های آن (a_x، a_y و a_z) در راستای محورهای x، y و z هستند، می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\vec{a}=a_x\hat{\mathrm{i}}+a_y\hat{\mathrm{j}}+a_z\hat{\mathrm{k}}$$

فرض می‌کنیم $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ بردارهای اختیاری با بزرگی‌های a، b و c هستند. در این صورت

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$$

$$(s\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(s\vec{b})=s(\vec{a}\times\vec{b}) \qquad (s = \text{نرده‌ای})$$

فرض می‌کنیم θ زاویه‌ی کوچک‌تر میان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد. در آن‌صورت

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=ab\cos\theta$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} & \hat{\mathrm{j}} & \hat{\mathrm{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$=\hat{\mathrm{i}}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}-\hat{\mathrm{j}}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+\hat{\mathrm{k}}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$=(a_yb_z-b_ya_z)\hat{\mathrm{i}}+(a_zb_x-b_za_x)\hat{\mathrm{j}}+(a_xb_y-b_xa_y)\hat{\mathrm{k}}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=ab\sin\theta$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

مشتق‌ها و انتگرال‌ها

در رابطه‌های زیر، حرف‌های u و v تابع‌هایی از x هستند و a و m مقادیری ثابت‌اند. به هر یک از انتگرال‌ها باید یک ثابت انتگرال‌گیری اختیاری اضافه شود*.

۱. $\frac{dx}{dx} = 1$

۲. $\frac{d}{dx}(au) = a\frac{du}{dx}$

۳. $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

۴. $\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$

۵. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$

۶. $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

۷. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

۸. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

۹. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

۱۰. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

۱۱. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

۱۲. $\frac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$

۱۳. $\frac{d}{dx}\csc x = -\cot x \csc x$

۱۴. $\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$

۱۵. $\frac{d}{dx}\sin u = \cos u\frac{du}{dx}$

۱۶. $\frac{d}{dx}\cos u = -\sin u\frac{du}{dx}$

۱. $\int dx = x$

۲. $\int au\,dx = a\int u\,dx$

۳. $\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$

۴. $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \qquad (m \neq -1)$

۵. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$

۶. $\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx$

۷. $\int e^x\,dx = e^x$

۸. $\int \sin x\,dx = -\cos x$

۹. $\int \cos x\,dx = \sin x$

۱۰. $\int \tan x\,dx = \ln|\sec x|$

۱۱. $\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$

۱۲. $\int e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$

۱۳. $\int xe^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$

۱۴. $\int x^2e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2+2ax+2)e^{-ax}$

۱۵. $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

۱۶. $\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx = \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

۱۷. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

۱۸. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}$

۱۹. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}$

۲۰. $\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-ax^2}\,dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \qquad (a>0)$

۲۱. $\int \frac{x\,dx}{x+d} = x - d\ln(x+d)$

---

* جدول‌های کامل‌تر در کتاب زیر آمده‌اند:
The *Handbook of Chemistry and Physics* (CRC Press InC.)

پیوست ج

جدول خواص عنصرهای شیمیایی

همه‌ی خواص فیزیکی، به جز در موارد مشخص شده، مربوط به فشار یک اتمسفر هستند.

عنصر	نماد	عدد اتمی Z	جرم مولی (g / mol)	چگالی در ۲۰°C (g/cm^3)	نقطه‌ی ذوب (°C)	نقطه‌ی جوش (°C)	گرمای‌ویژه در ۲۵°C [J /(g.°C)]
آرگون	Ar	۱۸	۳۹٫۹۴۸	$۱٫۶۶۲۶\times ۱۰^{-۳}$	−۱۸۹٫۴	−۱۸۵٫۸	۰٫۵۲۳
آلومینیوم	Al	۱۳	۲۶٫۹۸۱۵	۲٫۶۹۹	۶۶۰	۲۴۵۰	۰٫۹۰۰
آنتیموان	Sb	۵۱	۱۲۱٫۷۵	۶٫۶۹۱	۶۳۰٫۵	۱۳۸۰	۰٫۲۰۵
آهن	Fe	۲۶	۵۵٫۸۴۷	۷٫۸۷۴	۱۵۳۶٫۵	۳۰۰۰	۰٫۴۴۷
اِربیوم	Er	۶۸	۱۶۷٫۲۶	۹٫۱۵	۱۵۲۲	۲۶۳۰	۰٫۱۶۷
ارسنیک	As	۳۳	۷۴٫۹۲۱۶	۵٫۷۸	۸۱۷(۲۸atm)	۶۱۳	۰٫۳۳۱
اروپیوم	Eu	۶۳	۱۵۱٫۹۶	۵٫۲۴۳	۸۱۷	۱۴۹۰	۰٫۱۶۳
استاتین	At	۸۵	(۲۱۰)	–	(۳۰۲)	–	–
استرونسیوم	Sr	۳۸	۸۷٫۶۲	۲٫۵۴	۷۶۸	۱۳۸۰	۰٫۷۳۷
اُسمیوم	Os	۷۶	۱۹۰٫۲	۲۲٫۵۹	۳۰۲۷	۵۵۰۰	۰٫۱۳۰
اکتینیوم	Ac	۸۹	(۲۲۷)	۱۰٫۰۶	۱۳۲۳	(۳۴۷۳)	۰٫۰۹۲
اکسیژن	O	۸	۱۵٫۹۹۹۴	$۱٫۳۳۱۸\times ۱۰^{-۳}$	−۲۱۸٫۸۰	−۱۸۳٫۰	۰٫۹۱۳
اِمریشیوم	Am	۹۵	(۲۴۳)	۱۳٫۶۷	۱۵۴۱	–	–
اورانیوم	U	۹۲	(۲۳۸)	۱۸٫۹۵	۱۱۳۲	۳۸۱۸	۰٫۱۱۷
ایتربیوم	Yb	۷۰	۱۷۳٫۰۴	۶٫۹۶۵	۸۲۴	۱۵۳۰	۰٫۱۵۵
ایتریوم	Y	۳۹	۸۸٫۹۰۵	۴٫۴۶۹	۱۵۲۶	۳۰۳۰	۰٫۲۹۷
ایریدیوم	Ir	۷۷	۱۹۲٫۲	۲۲٫۵	۲۴۴۷	(۵۳۰۰)	۰٫۱۳۰
ایندیوم	In	۴۹	۱۱۴٫۸۲	۷٫۳۱	۱۵۶٫۶۳۴	۲۰۰۰	۰٫۲۳۳
اینشتینیوم	Es	۹۹	(۲۵۴)	–	–	–	–
باریوم	Ba	۵۶	۱۳۷٫۳۴	۳٫۵۹۴	۷۲۹	۱۶۴۰	۰٫۲۰۵
برکلیوم	Bk	۹۷	(۲۴۷)	۱۴٫۷۹	–	–	–
بروم	Br	۳۵	۷۹٫۹۰۹	۳٫۱۲ (مایع)	−۷٫۲	۵۸	۰٫۲۹۳
بریلیوم	Be	۴	۹٫۰۱۲۲	۱٫۸۴۸	۱۲۸۷	۲۷۷۰	۱٫۸۳
بور	B	۵	۱۰٫۸۱۱	۲٫۳۴	۲۰۳۰	–	۱٫۱۱
بوریوم	Bh	۱۰۷	۲۶۲٫۱۲	–	–	–	–
بیسموت	Bi	۸۳	۲۰۸٫۹۸۰	۹٫۷۴۷	۲۷۱٫۳۷	۱۵۶۰	۰٫۱۲۲
پالادیوم	Pd	۴۶	۱۰۶٫۴	۱۲٫۰۲	۱۵۵۲	۳۹۸۰	۰٫۲۴۳
پتاسیوم	K	۱۹	۳۹٫۱۰۲	۰٫۸۶۲	۶۳٫۲۰	۷۶۰	۰٫۷۵۸
پرازئودیمیوم	Pr	۵۹	۱۴۰٫۹۰۷	۶٫۷۷۳	۹۳۱	۳۰۲۰	۰٫۱۹۷
پروتاکتینیوم	Pa	۹۱	(۲۳۱)	۱۵٫۳۷ (تخمینی)	(۱۲۳۰)	–	–
پرومتیوم	Pm	۶۱	(۱۴۵)	۷٫۲۲	(۱۰۲۷)	–	–

عنصر	نماد	عدد اتمی Z	جرم مولی (g / mol)	چگالی در ۲۰°C (g / cm³)	نقطه‌ی ذوب (°C)	نقطه‌ی جوش (°C)	گرمای‌ویژه در ۲۵°C [J /(g.°C)]
پلاتین	Pt	۷۸	۱۹۵٫۰۹	۲۱٫۴۵	۱۷۶۹	۴۵۳۰	۰٫۱۳۴
پلوتونیوم	Pu	۹۴	(۲۴۴)	۱۹٫۸	۶۴۰	۳۲۳۵	۰٫۱۳۰
پلونیوم	Po	۸۴	(۲۱۰)	۹٫۳۲	۲۵۴	–	–
تالیوم	Tl	۸۱	۲۰۴٫۳۷	۱۱٫۸۵	۳۰۴	۱۴۵۷	۰٫۱۳۰
تانتال	Ta	۷۳	۱۸۰٫۹۴۸	۱۶٫۶	۳۰۱۴	۵۴۲۵	۰٫۱۳۸
تربیوم	Tb	۶۵	۱۵۸٫۹۲۴	۸٫۲۲۹	۱۳۵۷	۲۵۳۰	۰٫۱۸۰
تکنیسیوم	Tc	۴۳	(۹۹)	۱۱٫۴۶	۲۲۰۰	–	۰٫۲۰۹
تلور	Te	۵۲	۱۲۷٫۶۰	۶٫۲۴	۴۴۹٫۵	۹۹۰	۰٫۲۰۱
تنگستن	W	۷۴	۱۸۳٫۸۵	۱۹٫۳	۳۳۸۰	۵۹۳۰	۰٫۱۳۴
توریوم	Th	۹۰	(۲۳۲)	۱۱٫۷۲	۱۷۵۵	(۳۸۵۰)	۰٫۱۱۷
تولیوم	Tm	۶۹	۱۶۸٫۹۳۴	۹٫۳۲	۱۵۴۵	۱۷۲۰	۰٫۱۵۹
تیتان	Ti	۲۲	۴۷٫۹۰	۴٫۵۴	۱۶۷۰	۳۲۶۰	۰٫۵۲۳
جیوه	Hg	۸۰	۲۰۰٫۵۹	۱۳٫۵۵	−۳۸٫۸۷	۳۵۷	۰٫۱۳۸
دارمشتاتیوم	Ds	۱۱۰	(۲۷۱)	–	–	–	–
دوبنیوم	Db	۱۰۵	۲۶۲٫۱۱۴	–	–	–	–
دیسپروزیوم	Dy	۶۶	۱۶۲٫۵۰	۸٫۵۵	۱۴۰۹	۲۳۳۰	۰٫۱۷۲
رادرفوردیوم	Rf	۱۰۴	۲۶۱٫۱۱	–	–	–	–
رادون	Rn	۸۶	(۲۲۲)	۹٫۹۶×۱۰⁻³(۰°C)	(−۷۱)	−۶۱٫۸	۰٫۰۹۲
رادیوم	Ra	۸۸	(۲۲۶)	۵٫۰	۷۰۰	–	–
رِنیوم	Re	۷۵	۱۸۶٫۲	۲۱٫۰۲	۳۱۸۰	۵۹۰۰	۰٫۱۳۴
روبیدیوم	Rb	۳۷	۸۵٫۴۷	۱٫۵۳۲	۳۹٫۴۹	۶۸۸	۰٫۳۶۴
روتنیوم	Ru	۴۴	۱۰۱٫۱۰۷	۱۲٫۳۷	۲۲۵۰	۴۹۰۰	۰٫۲۳۹
رودیوم	Rh	۴۵	۱۰۲٫۹۰۵	۱۲٫۴۱	۱۹۶۳	۴۵۰۰	۰٫۲۴۳
رونتگنیوم	Rg	۱۱۱	(۲۸۰)	–	–	–	–
روی	Zn	۳۰	۶۵٫۳۷	۷٫۱۳۳	۴۱۹٫۵۸	۹۰۶	۰٫۳۸۹
زیرکنیوم	Zr	۴۰	۹۱٫۲۲	۶٫۵۰۶	۱۸۵۲	۳۵۸۰	۰٫۲۷۶
ژرمانیوم	Ge	۳۲	۷۲٫۵۹	۵٫۳۲۳	۹۳۷٫۲۵	۲۸۳۰	۰٫۳۲۲
ساماریوم	Sm	۶۲	۱۵۰٫۳۵	۷٫۵۲	۱۰۷۲	۱۶۳۰	۰٫۱۹۷
سدیوم	Na	۱۱	۲۲٫۹۸۹۸	۰٫۹۷۱۲	۹۷٫۸۵	۸۹۲	۱٫۲۳
سرب	Pb	۸۲	۲۰۷٫۱۹	۱۱٫۳۵	۳۲۷٫۴۵	۱۷۲۵	۰٫۱۲۹
سِریوم	Ce	۵۸	۱۴۰٫۱۲	۶٫۷۶۸	۸۰۴	۳۴۷۰	۰٫۱۸۸
سزیوم	Cs	۵۵	۱۳۲٫۹۰۵	۱٫۸۷۳	۲۸٫۴۰	۶۹۰	۰٫۲۴۳
سکاندیوم	Sc	۲۱	۴۴٫۹۵۶	۲٫۹۹	۱۵۳۹	۲۷۳۰	۰٫۵۶۹
سلنیوم	Se	۳۴	۷۸٫۹۶	۴٫۷۹	۲۲۱	۶۸۵	۰٫۳۱۸
سیبورگیوم	Sg	۱۰۶	۲۶۳٫۱۱۸	–	–	–	–

عنصر	نماد	عدد اتمی Z	جرم مولی (g / mol)	چگالی در $۲۰^{\circ}C$ ($g / cm^{۳}$)	نقطه‌ی ذوب (°C)	نقطه‌ی جوش (°C)	گرمای‌ویژه در $۲۵^{\circ}C$ [J /(g.°C)]
سیلیسیوم	Si	۱۴	۲۸/۰۸۶	۲/۳۳	۱۴۱۲	۲۶۸۰	۰/۷۱۲
طلا	Au	۷۹	۱۹۶/۹۶۷	۱۹/۳۲	۱۰۶۴/۴۳	۲۹۷۰	۰/۱۳۱
فرانسیوم	Fr	۸۷	(۲۲۳)	–	(۲۷)	–	–
فِرمیوم	Fm	۱۰۰	(۲۳۷)	–	–	–	–
فسفر	P	۱۵	۳۰/۹۷۳۸	۱/۸۳	۴۴/۲۵	۲۸۰	۰/۷۴۱
فلوئور	F	۹	۱۸/۹۹۸۴	$۱/۶۹۶\times۱۰^{-۳}$(۰°C)	−۲۱۹/۶	−۱۱۸/۲	۰/۷۵۳
قلع	Sn	۵۰	۱۱۸/۶۹	۷/۲۹۸۴	۲۳۱/۸۶۸	۲۲۷۰	۰/۲۲۶
کادمیوم	Cd	۴۸	۱۱۲/۴۰	۸/۶۵	۳۲۱/۰۳	۷۶۵	۰/۲۲۶
کالیفرنیوم	Cf	۹۸	(۲۵۱)	–	–	–	–
کبالت	Co	۲۷	۵۸/۹۳۳۲	۸/۸۵	۱۴۹۵	۲۹۰۰	۰/۴۲۳
کربن	C	۶	۱۲/۰۱۱۱۵	۲/۲۶	۳۷۲۷	۴۸۳۰	۰/۶۹۱
کروم	Cr	۲۴	۵۱/۹۹۶	۷/۱۹	۱۸۵۷	۲۶۶۵	۰/۴۴۸
کریپتون	Kr	۳۶	۸۳/۸۰	$۳/۴۸۸\times۱۰^{-۳}$	−۱۵۷/۳۷	−۱۵۲	۰/۲۴۷
کلر	Cl	۱۷	۳۵/۴۵۳	$۳/۲۱۴\times۱۰^{-۳}$(۰°C)	−۱۰۱	−۳۴/۷	۰/۴۸۶
کلسیوم	Ca	۲۰	۴۰/۰۸	۱/۵۵	۸۳۸	۱۴۴۰	۰/۶۲۴
کوپرنیشیوم	Cp	۱۱۲	(۲۸۵)	–	–	–	–
کوریوم	Cm	۹۶	(۲۴۷)	۱۳/۳	–	–	–
گادولینیوم	Gd	۶۴	۱۵۷/۲۵	۷/۹۰	۱۳۱۲	۲۷۳۰	۰/۲۳۴
گالیوم	Ga	۳۱	۶۹/۷۲	۵/۹۰۷	۲۹/۷۵	۲۲۳۷	۰/۳۷۷
گزنون	Xe	۵۴	۱۳۱/۳۰	$۵/۴۹۵\times۱۰^{-۳}$	−۱۱۱/۷۹	−۱۰۸	۰/۱۵۹
گوگرد	S	۱۶	۳۲/۰۶۴	۲/۰۷	۱۱۹/۰	۴۴۴/۶	۰/۷۰۷
لارنسیوم	Lr	۱۰۳	(۲۵۷)	–	–	–	–
لانتان	La	۵۷	۱۳۸/۹۱	۶/۱۸۹	۹۲۰	۳۴۷۰	۰/۱۹۵
لوتسیوم	Lu	۷۱	۱۷۴/۹۷	۹/۸۴۹	۱۶۶۳	۱۹۳۰	۰/۱۵۵
لیتیوم	Li	۳	۶/۹۳۹	۰/۵۳۴	۱۸۰/۵۵	۱۳۰۰	۳/۵۸
مس	Cu	۲۹	۶۳/۵۴	۸/۹۶	۱۰۸۳/۴۰	۲۵۹۵	۰/۳۸۵
مِندلویوم	Md	۱۰۱	(۲۵۶)	–	–	–	–
منگنز	Mn	۲۵	۵۴/۹۳۸۰	۷/۴۴	۱۲۴۴	۲۱۵۰	۰/۴۸۱
منیزیوم	Mg	۱۲	۲۴/۳۱۲	۱/۷۳۸	۶۵۰	۱۱۰۷	۱/۰۳
مولیبدن	Mo	۴۲	۹۵/۹۴	۱۰/۲۲	۲۶۱۷	۵۵۶۰	۰/۲۵۱
مَیتنریوم	Mt	۱۰۹	(۲۶۶)	–	–	–	–
نئودیمیوم	Nd	۶۰	۱۴۴/۲۴	۷/۰۰۷	۱۰۱۶	۳۱۸۰	۰/۱۸۸
نئون	Ne	۱۰	۲۰/۱۸۳	$۰/۸۳۸۷\times۱۰^{-۳}$	−۲۴۸/۵۹۷	−۲۴۶/۰	۱/۰۳
نپتونیوم	Np	۹۳	(۲۳۷)	۲۰/۲۵	۶۳۷	–	۱/۲۶
نقره	Ag	۴۷	۱۰۷/۸۷۰	۱۰/۴۹	۹۶۰/۸	۲۲۱۰	۰/۲۳۴

عنصر	نماد	عدد اتمی Z	جرم مولی (g / mol)	چگالی در ۲۰°C (g / cm^{۳})	نقطه‌ی ذوب (°C)	نقطه‌ی جوش (°C)	گرمای‌ویژه در ۲۵°C [J /(g.°C)]
نوبلیوم	No	۱۰۲	(۲۵۵)	–	–	–	–
نیتروژن	N	۷	۱۴/۰۰۶۷	۱/۱۶۴۹×۱۰$^{-۳}$	−۲۱۰	−۱۹۵۰/۳	۱/۰۳
نیکل	Ni	۲۸	۵۸/۷۱	۸/۹۰۲	۱۴۵۳	۲۷۳۰	۰/۴۴۴
نیوبیوم	Nb	۴۱	۹۲/۹۰۶	۸/۵۷	۲۴۶۸	۴۹۲۷	۰/۲۶۴
وانادیوم	V	۲۳	۵۰/۹۴۲	۶/۱۱	۱۹۰۲	۳۴۰۰	۰/۴۹۰
هَسیوم	Hs	۱۰۸	(۲۶۵)	–	–	–	–
هَفنیوم	Hf	۷۲	۱۷۸/۴۹	۱۳/۳۱	۲۲۲۷	۵۴۰۰	۰/۱۴۴
هُلمیوم	Ho	۶۷	۱۶۴/۹۳۰	۸/۷۹	۱۴۷۰	۲۳۳۰	۰/۱۶۵
هلیوم	He	۲	۴/۰۰۲۶	۰/۱۶۶۴×۱۰$^{-۳}$	−۲۶۹/۷	−۲۶۸/۹	۵/۲۳
هیدروژن	H	۱	۱/۰۰۷۹۷	۰/۰۸۳۷۵×۱۰$^{-۳}$	−۲۵۹/۱۹	−۲۵۲/۷	۱۴/۴
ید	I	۵۳	۱۲۶/۹۰۴۴	۴/۹۳	۱۱۳/۷	۱۸۳	۰/۲۱۸
بی‌نام	Uut	۱۱۳	(۲۸۴)	–	–	–	–
بی‌نام	Unq	۱۱۴	(۲۸۹)	–	–	–	–
بی‌نام	Uup	۱۱۵	(۲۸۸)	–	–	–	–
بی‌نام	Uuh	۱۱۶	(۲۹۳)	–	–	–	–
بی‌نام	Uus	۱۱۷	–	–	–	–	–
بی‌نام	Uuo	۱۱۸	(۲۹۴)	–	–	–	–

مقادیر درون پرانتزها در ستون جرم‌های مولی مربوط به عددهای جرمی پایدارترین ایزوتوپ عنصرهای پرتوزا هستند.

مقادیر نقطه‌های ذوب و نقطه‌های جوش درون پرانتزها نامعین‌اند.

داده‌های مربوط به گازها فقط برای حالت‌های مولکولی، مانند H_2، He، O_2، Ne، و نظیر آن‌ها، معتبرند. مقادیر گرمای ویژه‌ی گازها مربوط به حالت فشار ثابت‌اند.

داده‌های این جدول از این مرجع گرفته شده‌اند: J.Emsley, *The Elements*, 3rd ed., 1998, Clarendon Press, Oxford.

در ضمن، برای اطلاع از آخرین داده‌ها و جدیدترین عنصرها رجوع کنید به: www.webelements.com

پیوست چ

جدول تناوبی عنصرهای شیمیایی

فلزها
شبه فلزها
نافلزها

فلزهای قلیایی — گازهای نادر — فلزهای واسطه

دوره‌های تناوب افقی	IA	IIA	IIIB	IVB	VB	VIB	VIIB	VIIIB			IB	IIB	IIIA	IVA	VA	VIA	VIIA	0
۱	۱ H																	۲ He
۲	۳ Li	۴ Be											۵ B	۶ C	۷ N	۸ O	۹ F	۱۰ Ne
۳	۱۱ Na	۱۲ Mg											۱۳ Al	۱۴ Si	۱۵ P	۱۶ S	۱۷ Cl	۱۸ Ar
۴	۱۹ K	۲۰ Ca	۲۱ Sc	۲۲ Ti	۲۳ V	۲۴ Cr	۲۵ Mn	۲۶ Fe	۲۷ Co	۲۸ Ni	۲۹ Cu	۳۰ Zn	۳۱ Ga	۳۲ Ge	۳۳ As	۳۴ Se	۳۵ Br	۳۶ Kr
۵	۳۷ Rb	۳۸ Sr	۳۹ Y	۴۰ Zr	۴۱ Nb	۴۲ Mo	۴۳ Tc	۴۴ Ru	۴۵ Rh	۴۶ Pd	۴۷ Ag	۴۸ Cd	۴۹ In	۵۰ Sn	۵۱ Sb	۵۲ Te	۵۳ I	۵۴ Xe
۶	۵۵ Cs	۵۶ Ba	۵۷-۷۱ *	۷۲ Hf	۷۳ Ta	۷۴ W	۷۵ Re	۷۶ Os	۷۷ Ir	۷۸ Pt	۷۹ Au	۸۰ Hg	۸۱ Tl	۸۲ Pb	۸۳ Bi	۸۴ Po	۸۵ At	۸۶ Rn
۷	۸۷ Fr	۸۸ Ra	۸۹-۱۰۳ †	۱۰۴ Rf	۱۰۵ Db	۱۰۶ Sg	۱۰۷ Bh	۱۰۸ Hs	۱۰۹ Mt	۱۱۰ Ds	۱۱۱ Rg	۱۱۲ Cp	۱۱۳	۱۱۴	۱۱۵	۱۱۶	۱۱۷	۱۱۸

فلزهای واسطه‌ی درونی

* سری لانتانید	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	[illegible]	[illegible]	Yb	Lu
† سری اکتینید	[illegible]	[illegible]	Pa	[illegible]	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	[illegible]

برای کشف شدن عنصرهای ۱۱۳ تا ۱۱۸ مدارکی گزارش شده است. برای آگاهی از آخرین داده‌ها و جدیدترین عنصرها رجوع کنید به:
www.webelements.com

پاسخ‌ها

خودآزمایی‌ها، و پرسش‌ها و مسئله‌های با شماره‌ی فرد

فصل ۱

مسئله‌ها

۱. (الف) $۴/۰۰\times۱۰^{۴}\,\mathrm{km}$؛ (ب) $۵/۱۰\times۱۰^{۸}\,\mathrm{km}^{۲}$؛ (پ) $۱/۰۸\times۱۰^{۱۲}\,\mathrm{km}^{۳}$

۳. (الف) $۱۰^{۹}\,\mu\mathrm{m}$؛ (ب) $۱۰^{-۴}$؛ (پ) $۹/۱\times۱۰^{۵}\,\mu\mathrm{m}$

۵. (الف) ۱۶۰ راد؛ (ب) ۴۰ زنجیره

۷. $۱/۱\times۱۰^{۳}$ جریب ـ فوت

۹. $۱/۹\times۱۰^{۲۲}\,\mathrm{cm}^{۳}$

۱۱. (الف) ۱/۴۳؛ (ب) ۰/۸۶۴

۱۳. (الف) ۴۹۵ s؛ (ب) ۱۴۱ s؛ (پ) ۱۹۸ s؛ (ت) ۲۴۵ s−

۱۵. $۱/۲۱\times۱۰^{۱۲}\,\mu\mathrm{s}$

۱۷. پ، ت، الف، ب، ث؛ معیار مهم سازگاری تغییرات شبانه‌روز است، نه بزرگی آن

۱۹. $۵/۲\times۱۰^{۶}\,\mathrm{m}$

۲۱. $۹/۰\times۱۰^{۴۹}$ اتم

۲۳. (الف) $۱\times۱۰^{۳}\,\mathrm{kg}$؛ (ب) ۱۵۸ kg/s

۲۵. $۱/۹\times۱۰^{۵}\,\mathrm{kg}$

۲۷. (الف) $۱/۱۸\times۱۰^{-۲۹}\,\mathrm{m}^{۳}$؛ (ب) ۰/۲۸۲ nm

۲۹. $۱/۷۵\times۱۰^{۳}\,\mathrm{kg}$

۳۱. ۱/۴۳ kg/min

۳۳. (الف) ۲۹۳ بوشل امریکایی؛ (ب) $۳/۸۱\times۱۰^{۳}$ بوشل امریکایی

۳۵. (الف) ۲۲ پِک؛ (ب) ۵/۵ بوشل انگلیسی؛ (پ) ۲۰۰ L

۳۷. $۸\times۱۰^{۲}\,\mathrm{km}$

۳۹. (الف) ۱۸/۸ گالن؛ (ب) ۲۲/۵ گالن

۴۱. ۰/۳ کورد

۴۳. ۳/۸ mg/s

۴۵. (الف) بله؛ (ب) ۸/۶ ثانیه‌ی جهانی

۴۷. ۰/۱۲ AU/min

۴۹. (الف) ۳/۸۸؛ (ب) ۷/۶۵؛ (پ) $۱۵۶\,\mathrm{ken}^{۳}$؛ (ت) $۱/۱۹\times۱۰^{۳}\,\mathrm{m}^{۳}$

۵۱. (الف) ۳/۹ m، ۴/۸ m؛ (ب) $۳/۹\times۱۰^{۳}\,\mathrm{mm}$، $۴/۸\times۱۰^{۳}\,\mathrm{mm}$؛ (پ) $۲/۲\,\mathrm{m}^{۳}$، $۴/۲\,\mathrm{m}^{۳}$

۵۳. (الف) $۴/۹\times۱۰^{-۶}\,\mathrm{pc}$؛ (ب) $۱/۶\times۱۰^{-۵}\,\mathrm{ly}$

۵۵. (الف) ۳ نبوشادنزار، ۱ متوسلاه؛ (ب) ۰/۳۷ بطری استاندارد؛ (پ) ۰/۲۶ L

۵۷. ۱۰/۷ هابانرو

۵۹. ۷۰۰ تا ۱۵۰۰ صدف خوراکی

فصل ۲

خودآزمایی‌ها

۱. (ب) و (پ)

۲. (مشتق dx/dt را امتحان کنید). (الف) ۱ و ۴؛ (ب) ۲ و ۳

۳. (الف) مثبت؛ (ب) منفی؛ (ب) منفی؛ (پ) منفی؛ (ت) مثبت

۴. ۱ و ۴ ($a=d^{۲}x/dt^{۲}$ باید ثابت باشد)

۵. (الف) مثبت (جابه‌جایی بر روی محور y به بالاسو است)؛ (ب) منفی (جابه‌جایی بر روی محور y به پایین‌سو است)؛ (پ) $a=-g=-۹/۸\,\mathrm{m/s}^{۲}$

پرسش‌ها

۱. (الف) منفی؛ (ب) مثبت؛ (پ) بله؛ (ت) مثبت؛ (ث) ثابت

۳. (الف) همه‌ی مسیرها؛ (ب) ۴، مسیرهای ۱ و ۲، سپس مسیر ۳

۵. جهت مثبت؛ (ب) جهت منفی؛ (پ) نقطه‌های ۳ و ۵؛ (ت) نقطه‌های ۲ و ۶، سپس نقطه‌های ۳ و ۵، سپس نقطه‌های ۱ و ۴ (صفر)

۷. (الف) D؛ (ب) E

۹. (الف) پنجره‌های ۳، ۲ و ۱؛ (ب) پنجره‌های ۱، ۲ و ۳؛ (پ) همه‌ی پنجره‌ها؛ (ت) پنجره‌های ۱، ۲ و ۳,

۱۱. ۱ و ۲، سپس ۳

مسئله‌ها

۱. ۱۳m

۳. (الف) +۴۰km/h؛ (ب) ۴۰km/h

۵. (الف) صفر؛ (ب) −۲m؛ (پ) صفر؛ (ت) ۱۲m؛ (ث) +۱۲m؛ (ج) +۷m/s

۷. ۶۰km

۹. ۱٫۴m

۱۱. ۱۲۸km/h

۱۳. (الف) ۷۳km/h؛ ۶۸km/h؛ (پ) ۷۰km/h؛ (ت) صفر

۱۵. (الف) −۶m/s؛ (ب) در جهت $-x$؛ (پ) ۶m/s؛ (ت) کاهش می‌یابد؛ (ث) ۲s؛ (ج) نه.

۱۷. (الف) ۲۸٫۵cm/s؛ (ب) ۱۸٫۰cm/s؛ (پ) ۴۰٫۵cm/s؛ (ت) ۲۸٫۱cm/s؛ (ث) ۳۰٫۳cm/s

۱۹. −۲۰m/s^2

۲۱. (الف) ۱٫۱۰m/s؛ (ب) ۶٫۱۱mm/s^2؛ (پ) ۱٫۴۷m/s؛ (ت) ۶٫۱۱mm/s^2

۲۳. ۱٫۶۲×۱۰^{15}m/s^2

۲۵. (الف) ۳۰s؛ (ب) ۳۰۰m

۲۷. (الف) +۱٫۶m/s؛ (ب) +۱۸m/s

۲۹. (الف) ۱۰٫۶m؛ (ب) ۴۱٫۵s

۳۱. (الف) ۳٫۱×۱۰^{6}s؛ (ب) ۴٫۶×۱۰^{13}m

۳۳. ۳٫۵۶m/s^2؛ (ب) ۸٫۴۳m/s

۳۵. ۰٫۹۰m/s^2

۳۷. (الف) ۴٫۰m/s^2؛ (ب) $+x$

۳۹. (الف) −۲٫۵m/s^2؛ (ب) ۱ ؛ (ت) صفر؛ (ث) ۲

۴۱. ۴۰m

۴۳. (الف) ۰٫۹۹۴m/s^2

۴۵. (الف) ۳۱m/s؛ (ب) ۶٫۴s

۴۷. (الف) ۲۹٫۴m؛ (ب) ۲٫۴۵s

۴۹. (الف) ۵٫۴s؛ (ب) ۴۱m/s

۵۱. (الف) ۲۰m؛ (ب) ۵۹m

۵۳. ۴٫۰m/s

۵۵. (الف) ۸۵۷m/s^2؛ (ب) بالاسو

۵۷. (الف) ۱٫۲۶×۱۰^{3}m/s^2؛ (ب) بالاسو

۵۹. (الف) ۸۹cm؛ (ب) ۲۲cm

۶۱. ۲۰٫۴m

۶۳. ۲٫۳۴m

۶۵. (الف) ۲٫۲۵m/s؛ (ب) ۳٫۹۰m/s

۶۷. ۰٫۵۶m/s

۶۹. ۱۰۰m

۷۱. (الف) ۲٫۰۰s؛ (ب) ۱۲cm؛ (پ) −۹٫۰۰cm/s^2؛ (ت) راست‌سو؛ (ث) چپ‌سو؛ (ج) ۳٫۴۶s

۷۳. (الف) ۸۲m؛ (ب) ۱۹m/s

۷۵. (الف) ۰٫۷۴s؛ (ب) ۶٫۲m/s^2

۷۷. (الف) ۳٫۱m/s^2؛ (ب) ۴۵m؛ (پ) ۱۳s

۷۹. ۱۷m/s

۸۱. +۴۷m/s

۸۳. (الف) ۱٫۲۳cm؛ (ب) ۴ برابر؛ (پ) ۹ برابر؛ (ت) ۱۶ برابر؛ (ث) ۲۵ برابر

۸۵. ۲۵km/h

۸۷. ۱٫۲h

۸۹. ۴H

۹۱. (الف) ۳٫۲s؛ (ب) ۱٫۳s

۹۳. (الف) ۸٫۸۵m/s؛ (ب) ۱٫۰۰m

۹۵. (الف) ۲٫۰m/s^2؛ (ب) ۱۲m/s؛ (پ) ۴۵m

۹۷. (الف) ۴۸٫۵m/s؛ (ب) ۴٫۹۵s؛ (پ) ۳۴٫۳m/s؛ (ت) ۳٫۵۰s

۹۹. ۲۲٫۰m/s

۱۰۱. (الف) $v=(v_0^2+2gh)^{0.5}$؛ (ب) $t=[(v_0^2+2gh)^{0.5}-v_0]/g$؛ (پ) مانند (الف)؛ (ت) $t=[(v_0^2+2gh)^{0.5}+v_0]/g$، بزرگ‌تر

۱۰۳. ۴۱۴ms

۱۰۵. ۹۰m

۱۰۷. ۰٫۵۵۶s

۱۰۹. (الف) ۰٫۲۸ $m/s^{۲}$؛ (ب) ۰٫۲۸ $m/s^{۲}$

۱۱۱. (الف) ۱۰٫۲s؛ (ب) ۱۰٫۰m

۱۱۳. (الف) ۵٫۴۴s؛ (ب) ۵۳٫۳m/s؛ (پ) ۵٫۸۰m

۱۱۵. ۲٫۳cm/min

۱۱۷. ۰٫۱۵m/s

۱۱۹. (الف) ۱٫۰cm/s؛ (ب) ۱٫۶cm/s، ۱٫۱cm/s، صفر؛ (پ) ۰٫۷۹− $cm/s^{۲}$؛ (ت) صفر، ۰٫۸۷− $cm/s^{۲}$، ۰−، ۱٫۲− $cm/s^{۲}$

فصل ۳

خودآزمایی‌ها

۱. (الف) ۷m ($\vec{a}$ و $\vec{b}$ همسوی‌اند)؛
(ب) ۱m ($\vec{a}$ و $\vec{b}$ ناهمسوی‌اند)

۲. c، d، f (مؤلفه‌ها باید سر به دُم باشند؛ بردار $\vec{a}$ باید از دُم یک مؤلفه تا سر مؤلفه‌ی دیگر ادامه یابد)

۳. (الف) +، +؛ (ب) +، −؛ (پ) +، + (بردار را از دُم $\vec{d}_۱$ تا سر $\vec{d}_۲$ رسم کنید)

۴. (الف) ۹۰ درجه؛ (ب) صفر درجه (بردارها موازی وهمسوی‌اند)؛ (پ) ۱۸۰ درجه (بردارها پادموازی و ناهمسوی‌اند)

۵. (الف) صفر درجه یا ۱۸۰ درجه؛ (ب) ۹۰ درجه

پرسش‌ها

۱. بله، وقتی بردارها همسو باشند.

۳. ترتیب $\vec{d}_۲$، $\vec{d}_۱$ یا ترتیب $\vec{d}_۲$، $\vec{d}_۲$، $\vec{d}_۳$

۵. همه به جز (ث)

۷. (الف) بله؛ (ب) بله؛ (پ) نه

۹. (الف) x+ برای (۱)، z+ برای (۲)، z+ برای (۳)؛ (ب) x− برای (۱)، z− برای (۲)، z− برای (۳)

۱۱. $\vec{s}$، $\vec{p}$، $\vec{r}$ یا $\vec{p}$، $\vec{s}$، $\vec{r}$

۱۳. درست: پ، ت، ج، ح. نادرست: الف (نمی‌توان بردار را در نرده‌ای ضرب نقطه‌ای کرد)، ب (نمی‌توان بردار را در نرده‌ای ضرب برداری کرد)، ث، چ، خ، د (نمی‌توان بردار و نرده‌ای را با هم جمع کرد).

مسئله‌ها

۱. (الف) ۲٫۵m−؛ (ب) ۶٫۹m−

۳. (الف) ۴۷٫۲m؛ (ب) ۱۲۲ درجه

۵. (الف) ۱۵۶km؛ (ب) ۳۹٫۸ درجه باختر محور شمالی

۷. (الف) موازی؛ (ب) پادموازی؛ (پ) عمود بر هم

۹. (الف) $(۳٫۰m)\hat{i}-(۲٫۰m)\hat{j}+(۵٫۰m)\hat{k}$؛
(ب) $(۵٫۰m)\hat{i}-(۴٫۰m)\hat{j}-(۳٫۰m)\hat{k}$؛
(پ) $(-۵٫۰m)\hat{i}+(۴٫۰m)\hat{j}+(۳٫۰m)\hat{k}$

۱۱. (الف) $(-۹٫۰m)\hat{i}+(۱۰m)\hat{j}$؛ (ب) ۱۳m؛ (پ) ۱۳۲ درجه

۱۳. ۴٫۷۴km

۱۵. (الف) ۱٫۵۹m؛ (ب) ۱۲٫۱m؛ (پ) ۱۲٫۲m؛ (ت) ۸۲٫۵ درجه

۱۷. (الف) ۳۸m؛ (ب) ۳۷٫۵− درجه؛ (پ) ۱۳۰m؛ (ت) ۱٫۲ درجه؛ (ث) ۶۲m؛ (ج) ۱۳۰ درجه

۱۹. ۵٫۳۹m تحت زاویه‌ی ۲۱٫۸ درجه‌ی چپ نسبت به پیش‌سو

۲۱. (الف) ۷۰٫۰cm−؛ (ب) ۸۰٫۰cm؛ (پ) ۱۴۱cm؛ (ت) ۱۷۲− درجه

۲۳. ۳٫۲

۲۵. ۲٫۶km

۲۷. (الف) $۸\hat{i}+۱۶\hat{j}$؛ (ب) $۲\hat{i}+۴\hat{j}$

۲۹. (الف) ۷٫۵cm؛ (ب) ۹۰ درجه؛ (پ) ۸٫۶cm؛ (ت) ۴۸ درجه

۳۱. (الف) ۹٫۵۱m؛ (ب) ۱۴٫۱m؛ (پ) ۱۳٫۴m؛ (ت) ۱۰٫۵m

۳۳. (الف) ۱۲؛ (ب) z+؛ (پ) ۱۲؛ (ت) z−؛ (ث) ۱۲؛ (ج) z+

۳۵. (الف) ۱۸٫۸− واحد؛ (ب) ۲۶٫۹ واحد؛ جهت z+

۳۷. (الف) ۲۱−؛ (ب) ۹−؛ (پ) $۵\hat{i}-۱۱\hat{j}-۹\hat{k}$

۳۹. ۷۰٫۵ درجه

۴۱. ۲۲ درجه

۴۳. (الف) ۳٫۰۰ m؛ (ب) صفر؛ (پ) ۳٫۴۶ m؛ (ت) ۲٫۰۰ m؛ (ث) ۵٫۰۰- m؛ (ج) ۸٫۶۶ m؛ (چ) ۶٫۶۷-؛ (ح) ۴٫۳۳

۴۵. (الف) ۸۳٫۴-؛ (ب) $(1.14\times10^{3})\hat{k}$؛ (پ) 1.14×10^{3}، θ معلوم نیست، $\phi=0°$؛ (ت) ۹۰٫۰ درجه؛ (ث) $-5.14\hat{i}+6.13\hat{j}+3.00\hat{k}$؛ (ج) ۸٫۵۴، $\theta=130°$ و $\phi=69.4°$

۴۷. (الف) ۱۴۰ درجه؛ (ب) ۹۰٫۰ درجه؛ (پ) ۹۹٫۱ درجه

۴۹. (الف) ۱۰۳ km؛ (ب) ۶۰٫۹ درجه شمال محور باختری

۵۱. (الف) ۲۷٫۸ m؛ (ب) ۱۳٫۴ m

۵۳. (الف) ۳۰؛ (ب) ۵۲

۵۵. (الف) ۲٫۸۳- m؛ (ب) ۲٫۸۳- m؛ (پ) ۵٫۰۰ m؛ (ت) صفر؛ (ث) ۳٫۰۰ m؛ (ج) ۵٫۲۰ m؛ (چ) ۵٫۱۷ m؛ (ح) ۲٫۳۷ m؛ (خ) ۵٫۶۹ m؛ (د) ۲۵ درجه شمال محور خاوری؛ (ذ) ۵٫۶۹ m؛ (ر) ۲۵ درجه جنوب محور باختری

۵۷. ۴٫۱

۵۹. (الف) $(9.19\,m)\hat{i}'+(7.71\,m)\hat{j}'$؛ (ب) $(14.0\,m)\hat{i}'+(3.41\,m)\hat{j}'$

۶۱. (الف) $11\hat{i}+5.0\hat{j}-7.0\hat{k}$؛ (ب) ۱۲۰ درجه؛ (پ) ۴٫۹-؛ (ت) ۷٫۳

۶۳. (الف) $3.0\,m^2$؛ (ب) $52\,m^3$؛ (پ) $(11\,m^2)\hat{i}+(9.0\,m^2)\hat{j}+(3.0\,m^2)\hat{k}$

۶۵. (الف) $(-40\hat{i}-20\hat{j}+25\hat{k})$؛ (ب) ۴۵ m

۶۷. (الف) صفر؛ (ب) صفر؛ (پ) ۱-؛ (ت) باختر؛ (ث) بالا؛ (ج) باختر

۶۹. (الف) ۱۶۸ cm؛ (ب) ۳۲٫۵ درجه

۷۱. (الف) ۱۵ m؛ (ب) جنوب؛ (پ) ۶٫۰ m؛ (ت) شمال

۷۳. (الف) $2\hat{k}$؛ (ب) ۲۶؛ (پ) ۴۶؛ (ت) ۵٫۸۱

۷۵. (الف) بالا؛ (ب) صفر؛ (پ) جنوب؛ (ت) ۱؛ (ث) صفر

۷۷. (الف) $(1300\,m)\hat{i}+(2200\,m)\hat{j}-(410\,m)\hat{k}$؛ (ب) $2.59\times10^{3}\,m$

۷۹. ۸٫۴

فصل ۴

خودآزمایی‌ها

۱. (بردار $\vec{v}$ را مماس بر مسیر به گونه‌ای رسم کنید که دُم آن بر روی مسیر باشد) (الف) اول؛ (ب) سوم

۲. (مشتق دوم نسبت به زمان را بگیرید) (۱) و (۳) a_x و a_y هر دو ثابت‌اند و در نتیجه $\vec{a}$ ثابت است؛ (۲) و (۴) a_y ثابت است اما a_x ثابت نیست، در نتیجه، $\vec{a}$ هم ثابت نیست.

۳. بله

۴. (الف) v_x ثابت است؛ (ب) v_y در آغاز مثبت است، تا صفر کاهش می‌یابد و سپس رفته رفته منفی‌تر می‌شود؛ (پ) $a_x=0$ در همه جا؛ (ت) $a_y=-g$ در همه جا

۵. (الف) $-(4\,m/s)\hat{i}$؛ (ب) $-(8\,m/s^2)\hat{j}$

پرسش‌ها

۱. نقطه‌ی a و نقطه‌ی c، سپس نقطه‌ی b

۳. کاهش می‌یابد

۵. a، b و c

۷. (الف) صفر؛ (ب) ۳۵۰ km/h؛ (پ) ۳۵۰ km/h؛ (ت) مساوی (چیزی در حرکت قائم تغییر نکرده است)

۹. (الف) همه‌ی مسیرها؛ (ب) همه‌ی مسیرها؛ (پ) مسیرهای ۳، ۲ و ۱؛ (ت) ۳، ۲، ۱

۱۱. مسیر ۲، سپس مسیرهای ۱ و ۴، سپس مسیر ۳

۱۳. (الف) بله؛ (ب) نه؛ (پ) بله

۱۵. (الف) کاهش می‌یابد؛ (ب) افزایش می‌یابد

۱۷. ارتفاع بیشینه

مسئله‌ها

۱. (الف) ۶٫۲ m

۳. $(-2.0\,m)\hat{i}+(6.0\,m)\hat{j}-(10\,m)\hat{k}$

۵. (الف) ۷٫۵۹ km/h؛ (ب) ۲۲٫۵ درجه خاور محور شمالی

۷. $(-0.70\,m/s)\hat{i}+(1.4\,m/s)\hat{j}-(0.40\,m/s)\hat{k}$

۹. (الف) ۰٫۸۳ cm/s؛ (ب) صفر درجه؛ (پ) ۰٫۱۱ m/s؛ (ت) ۶۳- درجه

۱۱. (الف) $(۶/۰۰\ \mathrm{m})\hat{i} - (۱۰۶\ \mathrm{m})\hat{j}$؛
(ب) $(۱۹/۰\ \mathrm{m/s})\hat{i} - (۲۲۴\ \mathrm{m/s})\hat{j}$؛
(پ) $(۲۴/۰\ \mathrm{m/s^2})\hat{i} - (۳۳۶\ \mathrm{m/s^2})\hat{j}$؛ (ت) −۸۵/۲ درجه

۱۳. (الف) $(۱\ \mathrm{m/s})\hat{k} + (۸\ \mathrm{m/s^2})t\,\hat{j}$؛ (ب) $(۸\ \mathrm{m/s^2})\hat{j}$

۱۵. (الف) $(-۱/۵۰\ \mathrm{m/s})\hat{j}$؛ (ب) $(۴/۵۰\ \mathrm{m})\hat{i} - (۲/۲۵\ \mathrm{m})\hat{j}$

۱۷. $(۳۲\ \mathrm{m/s})\hat{i}$

۱۹. (الف) $(۷۲/۰\ \mathrm{m})\hat{i} + (۹۰/۷\ \mathrm{m})\hat{j}$؛ (ب) ۴۹/۵ درجه

۲۱. (الف) ۱۸ cm؛ (ب) ۱/۹ m

۲۳. (الف) ۳/۰۳ s؛ (ب) ۷۵۸ m؛ (پ) ۲۹/۷ m/s

۲۵. ۴۳/۱ m/s (مساوی با ۱۵۵ km/h)

۲۷. (الف) ۱۰/۰ s؛ (ب) ۸۹۷ m

۲۹. ۷۸/۵ درجه

۳۱. ۳/۳۵ m

۳۳. (الف) ۲۰۲ m/s؛ (ب) ۸۰۶ m؛ (پ) ۱۶۱ m/s؛
(ت) −۱۷۱ m/s

۳۵. ۴/۸۴ cm

۳۷. (الف) ۱/۶۰ m؛ (ب) ۶/۸۶ m؛ (پ) ۲/۸۶ m

۳۹. (الف) ۳۲/۳ m؛ (ب) ۲۱/۹ m/s؛ (پ) ۴۰/۴ درجه؛
(ت) پایین

۴۱. ۵۵/۵ درجه

۴۳. (الف) ۱۱ m؛ (ب) ۲۳ m؛ (پ) ۱۷ m/s؛ (ت) ۶۳ درجه

۴۵. (الف) شیب‌راهه؛ (ب) ۵/۸۲ m؛ (پ) ۳۱/۰ درجه

۴۷. (الف) بله؛ (ب) ۲/۵۶ m

۴۹. (الف) ۳۱ درجه؛ (ب) ۶۳ درجه

۵۱. (الف) ۲/۳ درجه؛ (ب) ۱/۱ m؛ (پ) ۱۸ درجه

۵۳. (الف) ۷۵/۰ m؛ (ب) ۳۱/۹ m/s؛ (پ) ۶۶/۹ درجه؛
(ت) ۲۵/۵ m

۵۵. سومی

۵۷. (الف) ۷/۳۲ m؛ (ب) باختر؛ (پ) شمال

۵۹. (الف) ۱۲ s؛ (ب) ۴/۱ $\mathrm{m/s^2}$؛ (پ) به پایین‌سو؛
(ت) ۴/۱ $\mathrm{m/s^2}$؛ (ث) به بالاسو

۶۱. (الف) $۱/۳\times۱۰^{۵}\ \mathrm{m/s}$؛ (ب) $۷/۹\times۱۰^{۵}\ \mathrm{m/s^2}$؛ (پ) افزایش می‌یابد.

۶۳. ۲/۹۲ m

۶۵. $(۳/۰۰\ \mathrm{m/s^2})\hat{i} + (۶/۰۰\ \mathrm{m/s^2})\hat{j}$

۶۷. ۱۶۰ $\mathrm{m/s^2}$

۶۹. (الف) ۱۳ $\mathrm{m/s^2}$؛ (ب) خاورسو؛ (پ) ۱۳ $\mathrm{m/s^2}$؛
(ت) خاورسو

۷۱. ۱/۶۷

۷۳. (الف) $(۸۰\ \mathrm{km/h})\hat{i} - (۶۰\ \mathrm{km/h})\hat{j}$؛ (ب) صفر؛ (پ) پاسخ‌ها تغییر نمی‌کنند.

۷۵. ۳۲ m/s

۷۷. ۶۰ درجه

۷۹. (الف) ۳۸ گره؛ (ب) ۱/۵ درجه خاور محور شمالی؛ (پ) ۴/۲ h؛ (ت) ۱/۵ درجه باختر محور جنوبی

۸۱. (الف) $(-۳۲\ \mathrm{km/h})\hat{i} - (۴۶\ \mathrm{km/h})\hat{j}$؛
(ب) $[(۲/۵\ \mathrm{km}) - (۳۲\ \mathrm{km/h})t]\hat{i} + [(۴/۰\ \mathrm{km}) - (۴۶\ \mathrm{km/h})t]\hat{j}$؛
(پ) ۰/۰۸۴ h؛ (ت) $۲\times۱۰^{۲}\ \mathrm{m}$

۸۳. (الف) −۳۰ درجه؛ (ب) ۶۹ min؛ (پ) ۸۰ min؛
(ت) ۸۰ min؛ (ث) صفر درجه؛ (ج) ۶۰ min

۸۵. (الف) ۲/۷ km؛ (ب) ۷۶ درجه ساعت‌گرد

۸۷. (الف) ۴۴ m؛ (ب) ۱۳ m؛ (پ) ۸/۹ m

۸۹. (الف) ۴۵ m؛ (ب) ۲۲ m/s

۹۱. (الف) $۲/۶\times۱۰^{۲}\ \mathrm{m/s}$؛ (ب) ۴۵ s؛ (پ) افزایش می‌دهد

۹۳. (الف) ۶۳ km؛ (ب) ۱۸ درجه جنوب محور خاوری؛
(پ) ۰/۷۰ km/h؛ (ت) ۱۸ درجه جنوب محور خاوری؛
(ث) ۱/۶ km/h؛ (ج) ۱/۲ km/h؛
(چ) ۳۳ درجه شمال محور خاوری

۹۵. (الف) ۱/۵؛ (ب) (۳۶ m و ۵۴ m)

۹۷. (الف) ۶۲ ms؛ (ب) $۴/۸\times۱۰^{۲}\ \mathrm{m/s}$

۹۹. ۲/۶۴ m

۱۰۱. (الف) ۲/۵ m؛ (ب) ۰/۸۲ m؛ (پ) ۹/۸ $\mathrm{m/s^2}$؛
(ت) ۹/۸ $\mathrm{m/s^2}$

۱۰۳. (الف) ۶/۷۹ km/h؛ (ب) ۶/۹۶ درجه

۱۰۵. (الف) ۱۶ m/s؛ (ب) ۲۳ درجه؛ (پ) بالا؛ (ت) ۲۷ m/s؛ (ث) ۵۷ درجه؛ (ج) زیر

۱۰۷. (الف) ۴/۲ m، ۴۵ درجه؛ (ب) ۵/۵ m، ۶۸ درجه؛ (پ) ۶/۰ m، ۹۰ درجه؛ (ت) ۴/۲ m، ۱۳۵ درجه؛ (ث) ۰/۸۵ m/s، ۱۳۵ درجه؛ (ج) ۰/۹۴ m/s، ۹۰ درجه؛ (چ) ۰/۹۴ m/s، ۱۸۰ درجه؛ (ح) ۰/۳۰ m/s^2، ۱۸۰ درجه؛ (خ) ۰/۳۰ m/s^2، ۲۷۰ درجه

۱۰۹. (الف) ۵/۴×۱۰$^{-۱۳}$ m؛ (ب) کاهش می‌یابد

۱۱۱. (الف) ۰/۰۳۴ m/s^2؛ (ب) ۸۴ min

۱۱۳. (الف) ۸/۴۳ m؛ (ب) ۱۲۹- درجه

۱۱۵. (الف) ۲/۰۰ ns؛ (ب) ۲/۰۰ mm؛ (پ) ۱/۰۰×۱۰^{۷} m/s؛ (ت) ۲/۰۰×۱۰^{۶} m/s

۱۱۷. (الف) ۲۴ m/s؛ (ب) ۶۵ درجه

۱۱۹. ۹۳ درجه نسبت به راستای خط آهن

۱۲۱. (الف) ۴/۶×۱۰^{۱۲} m؛ (ب) ۲/۴×۱۰^{۵} s

۱۲۳. (الف) ۶/۲۹ درجه؛ (ب) ۸۳/۷ درجه

۱۲۵. (الف) ۳×۱۰^{۱} m

۱۲۷. (الف) $(۶/۰\hat{i}+۴/۲\hat{j})$ m/s؛ (ب) $(۱۸\hat{i}+۶/۳\hat{j})$ m

۱۲۹. (الف) ۳۸ ft/s؛ (ب) ۳۲ ft/s؛ (پ) ۹/۳ ft

۱۳۱. (الف) ۱۱ m؛ (ب) ۴۵ m/s

۱۳۳. (الف) ۵/۸ m/s؛ (ب) ۱۷ m؛ (پ) ۶۷ درجه

۱۳۵. (الف) ۳۲/۴ m؛ (ب) ۳۷/۷ m-

۱۳۷. ۸۸/۶ km/h

فصل ۵

خودآزمایی‌ها

۱. (پ)، (ت) و (ث) ($\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ باید سر به دُم وصل شوند و $\vec{F}_{net}$ باید از دُم یک بردار به سر بردار دیگر وصل شود)

۲. (الف) و (ب) ۲N، به چپ‌سو (شتاب در هر دو حالت صفر است)

۳. (الف) مساوی؛ (ب) بزرگ‌تر (شتاب به بالاسو است، در نتیجه نیروی وارد شده به جسم باید به بالاسو باشد)

۴. (الف) مساوی؛ (ب) بزرگ‌تر؛ (پ) کوچک‌تر

۵. (الف) افزایش می‌یابد؛ (ب) بله؛ (پ) ثابت می‌ماند؛ (ت) بله

پرسش‌ها

۱. (الف) ۲، ۳ و ۴؛ (ب) ۱، ۳ و ۴؛ (پ) ۱، $+y$؛ ۲، $+x$؛ ۳، ربع چهارم؛ ۴، ربع سوم

۳. افزایش داد

۵. (الف) ۲ و ۴؛ (ب) ۲ و ۴

۷. (الف) M؛ (ب) M؛ (پ) M؛ (ت) $۲M$؛ (ث) $۳M$

۹. (الف) ۲۰ kg؛ (ب) ۱۸ kg؛ (پ) ۱۰ kg؛ (ت) همه‌ی موارد؛ (ث) ۳، ۲ و ۱

۱۱. (الف) از مقدار آغازی mg بیشتر می‌شود؛ (ب) از مقدار آغازی mg به صفر کاهش می‌یابد (که پس از آن جسم از کف به بالاسو حرکت می‌کند)

مسئله‌ها

۱. ۲/۹ m/s^2

۳. (الف) ۱/۸۸ N؛ (ب) ۰/۶۸۴ N؛ (پ) $(۱/۸۸\,N)\hat{i}+(۰/۶۸۴\,N)\hat{j}$

۵. (الف) $(۰/۸۶\,m/s^2)\hat{i}-(۰/۱۶\,m/s^2)\hat{j}$؛ (ب) ۰/۸۸ m/s^2؛ (پ) ۱۱- درجه

۷. (الف) $(-۳۲/۰\,N)\hat{i}-(۲۰/۸\,N)\hat{j}$؛ (ب) ۳۸/۲ N؛ (پ) ۱۴۷- درجه

۹. (الف) ۸/۳۷ N؛ (ب) ۱۳۳- درجه؛ (پ) ۱۲۵- درجه

۱۱. ۹/۰ m/s^2

۱۳. (الف) ۴/۰ kg؛ (ب) ۱/۰ kg؛ (پ) ۴/۰ kg؛ (ت) ۱/۰ kg

۱۵. (الف) ۱۰۸ N؛ (ب) ۱۰۸ N؛ (پ) ۱۰۸ N

۱۷. (الف) ۴۲ N؛ (ب) ۷۲ N؛ (پ) ۴/۹ m/s^2

۱۹. ۱/۲×۱۰^{۵} N

۲۱. (الف) ۱۱/۷ N؛ (ب) ۵۹/۰- درجه

۲۳. (الف) $(۲۸۵\ \mathrm{N})\hat{i} - (۱۱۵\ \mathrm{N})\hat{j}$؛ (ب) $(۲۸۵\ \mathrm{N})\hat{i} + (۷۰۵\ \mathrm{N})\hat{j}$؛ (پ) ۳۰۷ N؛ (ت) ۲۲٫۰- درجه؛ (ث) ۳٫۶۷ m/s^{۲}؛ (ج) ۲۲٫۰- درجه

۲۵. (الف) ۰٫۰۲۲ m/s^{۲}؛ (ب) ۸٫۳×۱۰^{۴} km؛ (پ) ۱٫۹×۱۰^{۳} m/s

۲۷. ۱٫۵ mm

۲۹. (الف) ۴۹۴ N؛ (ب) به بالاسو؛ (پ) ۴۹۴ N؛ (ت) به پایین‌سو

۳۱. (الف) ۱٫۱۸ m؛ (ب) ۰٫۶۷۴ s؛ (پ) ۳٫۵۰ m/s

۳۳. ۱٫۸×۱۰^{۴} N

۳۵. (الف) ۴۶٫۷ درجه؛ (ب) ۲۸٫۰ درجه

۳۷. (الف) ۰٫۶۲ m/s^{۲}؛ (ب) ۰٫۱۳ m/s^{۲}؛ (پ) ۲٫۶ m

۳۹. (الف) ۲٫۲×۱۰$^{-۳}$ N؛ (ب) ۳٫۷×۱۰$^{-۳}$ N

۴۱. (الف) ۱٫۴ m/s^{۲}؛ (ب) ۴٫۱ m/s

۴۳. (الف) ۱٫۲۳ N؛ (ب) ۲٫۴۶ N؛ (پ) ۳٫۶۹ N؛ (ت) ۴٫۹۲ N؛ (ث) ۶٫۱۵ N؛ (ج) ۰٫۲۵۰ N

۴۵. (الف) ۳۱٫۳ kN؛ (ب) ۲۴٫۳ kN

۴۷. ۶٫۴×۱۰^{۳} N

۴۹. (الف) ۲٫۱۸ m/s^{۲}؛ (ب) ۱۱۶ N؛ (پ) ۲۱٫۰ m/s^{۲}

۵۱. (الف) ۳٫۶ m/s^{۲}؛ (ب) ۱۷ N

۵۳. (الف) ۰٫۹۷۰ m/s^{۲}؛ (ب) ۱۱٫۶ N؛ (پ) ۳۴٫۹ N

۵۵. (الف) ۱٫۱ N

۵۷. (الف) ۰٫۷۳۵ m/s^{۲}؛ (ب) به پایین‌سو؛ (پ) ۲۰٫۸ N

۵۹. (الف) ۴٫۹ m/s^{۲}؛ (ب) ۲٫۰ m/s^{۲}؛ (پ) به بالاسو؛ (ت) ۱۲۰ N

۶۱. $۲Ma/(a+g)$

۶۳. (الف) ۸٫۰ m/s؛ (ب) $+x$

۶۵. (الف) ۰٫۶۵۳ m/s^{۳}؛ (ب) ۰٫۸۹۶ m/s^{۳}؛ (پ) ۶٫۵۰ s

۶۷. ۸۱٫۷ N

۶۹. ۲٫۴ N

۷۱. ۱۶ N

۷۳. (الف) ۲٫۶ N؛ (ب) ۱۷ درجه

۷۵. (الف) صفر؛ (ب) ۰٫۸۳ m/s^{۲}؛ (پ) صفر

۷۷. (الف) ۰٫۷۴ m/s^{۲}؛ (ب) ۷٫۳ m/s^{۲}

۷۹. (الف) ۱۱ N؛ (ب) ۲٫۲ kg؛ (پ) صفر؛ (ت) ۲٫۲ kg

۸۱. ۱۹۵ N

۸۳. (الف) ۴٫۶ m/s^{۲}؛ (ب) ۲٫۶ m/s^{۲}

۸۵. (الف) طناب پاره می‌شود؛ (ب) ۱٫۶ m/s^{۲}

۸۷. (الف) ۶۵ N؛ (ب) ۴۹ N

۸۹. (الف) ۴٫۶×۱۰^{۳} N؛ (ب) ۵٫۸×۱۰^{۳} N

۹۱. (الف) ۱٫۸×۱۰^{۲} N؛ (ب) ۶٫۴×۱۰^{۲} N

۹۳. (الف) ۴۴ N؛ (ب) ۷۸ N؛ (پ) ۵۴ N؛ (ت) ۱۵۲ N

۹۵. (الف) ۴ kg؛ (ب) ۶٫۵ m/s^{۲}؛ (پ) ۱۳ N

۹۷. (الف) $(۱٫۰\hat{i} - ۲٫۰\hat{j})\mathrm{N}$؛ (ب) ۲٫۲ N؛ (پ) ۶۳- درجه؛ (ت) ۲٫۲ m/s^{۲}؛ (ث) ۶۳- درجه

فصل ۶

خودآزمایی‌ها

۱. (الف) صفر (چون جسم نمی‌لغزد)؛ (ب) ۵ N؛ (پ) نه؛ (ت) بله؛ (ث) ۸ N

۲. ($\vec{a}$ به سوی مرکز مسیر دایره‌ای است) (الف) $\vec{a}$ به پایین‌سو است، $\vec{F}_N$ به بالاسو است؛ (ب) $\vec{a}$ و $\vec{F}_N$ به بالاسو هستند.

پرسش‌ها

۱. (الف) کاهش می‌یابد؛ (ب) کاهش می‌یابد؛ (پ) افزایش می‌یابد؛ (ت) افزایش می‌یابد؛ (ث) افزایش می‌یابد

۳. (الف) ثابت می‌ماند؛ (ب) افزایش می‌یابد؛ (پ) افزایش می‌یابد؛ (ت) نه

۵. (الف) به سمت بالا؛ (ب) افقی، به سمت شما؛ (پ) تغییر نمی‌کند؛ (ت) افزایش می‌یابد؛ (ث) افزایش می‌یابد

۷. ابتدا $\vec{f}_s$ به بالاسوی شیب‌راهه است و بزرگی‌اش از $mg\sin\theta$ افزایش می‌یابد تا به $f_{s,\max}$ می‌رسد. بنابراین، نیروی اصطکاک جنبشی به بالاسوی شیب‌راهه با بزرگی f_k (مقدار ثابت کوچک‌تر از $f_{s,\max}$) است.

۹. مسیرهای ۴ و ۳ و سپس ۱، ۲ و ۵

۱۱. (الف) همه‌ی نقطه‌ها؛ (ب) همه‌ی نقطه‌ها؛ (پ) نقطه‌های ۲، ۳ و ۱

۱۳. (الف) افزایش می‌یابد؛ (ب) افزایش می‌یابد؛ (پ) کاهش می‌یابد؛ (ت) کاهش می‌یابد؛ (ث) کاهش می‌یابد.

مسئله‌ها

۱. ۳۶ m

۳. (الف) ۲/۰×۱۰^{۲}N؛ (ب) ۱/۲×۱۰^{۲}N

۵. (الف) ۶/۰N؛ (ب) ۳/۶N؛ (پ) ۳/۱N

۷. (الف) ۱/۹×۱۰^{۲}N؛ (ب) ۰/۵۶ m/s^{۲}

۹. (الف) ۱۱N؛ (ب) ۰/۱۴ m/s^{۲}

۱۱. (الف) ۳/۰×۱۰^{۲}N؛ (ب) ۱/۳ m/s^{۲}

۱۳. (الف) ۱/۳×۱۰^{۲}N؛ (ب) نه؛ (پ) ۱/۱×۱۰^{۲}N؛ (ت) ۴۶N؛ (ث) ۱۷N

۱۵. ۲ درجه

۱۷. (الف) $(۱۷N)\hat{i}$؛ (ب) $(۲۰N)\hat{i}$؛ (پ) $(۱۵N)\hat{i}$

۱۹. (الف) نه؛ (ب) $(-۱۲N)\hat{i} + (۵/۰N)\hat{j}$

۲۱. (الف) ۱۹ درجه؛ (ب) ۳/۳ kN

۲۳. ۰/۳۷

۲۵. ۱/۰×۱۰^{۲}N

۲۷. (الف) صفر؛ (ب) $(-۳/۹ m/s^{۲})\hat{i}$؛ (پ) $(-۱/۰ m/s^{۲})\hat{i}$

۲۹. (الف) ۶۶N؛ (ب) ۲/۳ m/s^{۲}

۳۱. (الف) ۳/۵ m/s^{۲}؛ (ب) ۰/۲۱N

۳۳. ۹/۹s

۳۵. ۴/۹×۱۰^{۲}N

۳۷. (الف) ۳/۲×۱۰^{۲}km/h؛ (ب) ۶/۵×۱۰^{۲}km/h؛ (پ) نه

۳۹. ۲/۳

۴۱. ۰/۶۰

۴۳. ۲۱m

۴۵. (الف) سبکی؛ (ب) ۷۷۸N؛ (پ) ۲۲۳N؛ (ت) ۱/۱۱kN

۴۷. (الف) ۱۰s؛ (ب) ۴/۹×۱۰^{۲}N؛ (پ) ۱/۱×۱۰^{۳}N

۴۹. ۱/۳۷×۱۰^{۳}N

۵۱. ۲/۲ km

۵۳. ۱۲ درجه

۵۵. ۲/۶×۱۰^{۳}N

۵۷. ۱/۸۱ m/s

۵۹. (الف) ۸/۷۴N؛ (ب) ۳۷/۹N؛ (پ) ۶/۴۵ m/s؛ (ت) در راستای شعاع به درون‌سو

۶۱. (الف) ۲۷N؛ (ب) ۳/۰ m/s^{۲}

۶۳. (ب) ۲۴۰N؛ (پ) ۰/۶۰

۶۵. (الف) ۶۹ km؛ (ب) ۱۳۹ km/h؛ (پ) بله

۶۷. $g(\sin\theta - ۲^{۰/۵}\mu_k \cos\theta)$

۶۹. ۳/۴ m/s^{۲}

۷۱. (الف) ۳۵/۳N؛ (ب) ۳۹/۷N؛ (پ) ۳۲۰N

۷۳. (الف) ۷/۵ m/s^{۲}؛ (ب) به پایین‌سو؛ (پ) ۹/۵ m/s^{۲}؛ (ت) به پایین‌سو

۷۵. (الف) ۳/۰×۱۰^{۵}N؛ (ب) ۱/۲ درجه

۷۷. ۱۴۷ m/s

۷۹. (الف) ۱۳N؛ (ب) ۱/۶ m/s^{۲}

۸۱. (الف) ۲۷۵N؛ (ب) ۸۷۷N

۸۳. (الف) ۸۴/۲N؛ (ب) ۵۲/۸N؛ (پ) ۱/۸۷ m/s^{۲}

۸۵. ۳/۴ درصد

۸۷. (الف) ۳/۲۱×۱۰^{۳}N؛ (ب) بله

۸۹. (الف) ۲۲۲N؛ (ب) ۳۳۴N؛ (پ) ۳۱۱N؛ (ت) ۳۱۱N؛ (ث) پ و ت

۹۱. (الف) $v_0^{۲}/(۴g\sin\theta)$؛ (ب) نه

۹۳. (الف) ۰/۳۴؛ (ب) ۰/۲۴

۹۵. (الف) $\mu_k mg/(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)$؛ (ب) $\theta_0 = \tan^{-1}\mu_s$

۹۷. ۰/۱۸

۹۹. (الف) ۵۶N؛ (ب) ۵۹N؛ (پ) ۱/۱×۱۰^{۳}N

۱۰۱. ۰/۷۶

۱۰۳. (الف) پایین دایره؛ (ب) ۹٫۵ m/s

۱۰۵. ۰٫۵۶

فصل ۷

خودآزمایی‌ها

۱. (الف) کاهش می‌یابد؛ (ب) ثابت می‌ماند؛ (پ) منفی، صفر

۲. (الف) مثبت؛ (ب) منفی؛ (پ) صفر

۳. صفر

پرسش‌ها

۱. همه‌ی موارد

۳. (الف) مثبت؛ (ب) منفی؛ (پ) منفی

۵. ب (کار مثبت)، الف (کار صفر)، پ (کار منفی)، ت (کار منفی‌تر)

۷. همه‌ی سُرسُره‌ها

۹. (الف) A؛ (ب) B

۱۱. ۲، ۳، ۱

مسئله‌ها

۱. (الف) ۲٫۹×۱۰^{۷} m/s؛ (ب) ۲٫۱×۱۰$^{-۱۳}$ J

۳. (الف) ۵×۱۰^{۱۴} J؛ (ب) ۰٫۱ مگاتُن TNT؛ (پ) ۸ بمب

۵. (الف) ۲٫۴ m/s؛ (ب) ۴٫۸ m/s

۷. ۰٫۹۶ J

۹. ۲۰ J

۱۱. (الف) ۶۲٫۳ درجه؛ (ب) ۱۱۸ درجه

۱۳. (الف) ۱٫۷×۱۰^{۲} N؛ (ب) ۳٫۴×۱۰^{۲} m؛ (پ) −۵٫۸×۱۰^{۴} J؛ (ت) ۳٫۴×۱۰^{۲} N؛ (ث) ۱٫۷×۱۰^{۲} m؛ (ج) −۵٫۸×۱۰^{۴} J

۱۵. (الف) ۱٫۵۰ J؛ (ب) افزایش می‌یابد

۱۷. (الف) ۱۲ kJ؛ (ب) −۱۱ kJ؛ (پ) ۱٫۱ kJ؛ (ت) ۵٫۴ m/s

۱۹. ۲۵ J

۲۱. (الف) −۳Mgd/۴؛ (ب) Mgd؛ (پ) Mgd/۴؛ (ت) (gd/۲)$^{۰٫۵}$

۲۳. ۴٫۴۱ J

۲۵. (الف) ۲۵٫۹ kJ؛ (ب) ۲٫۴۵ N

۲۷. (الف) ۷٫۲ J؛ (ب) ۷٫۲ J؛ (پ) صفر؛ (ت) −۲۵ J

۲۹. (الف) ۰٫۹۰ J؛ (ب) ۲٫۱ J؛ (پ) صفر

۳۱. (الف) ۶٫۶ m/s؛ (ب) ۴٫۷ m

۳۳. (الف) ۰٫۱۲ m؛ (ب) ۰٫۳۶ J؛ (پ) −۰٫۳۶ J؛ (ت) ۰٫۰۶۰ m؛ (ث) ۰٫۰۹۰ J

۳۵. (الف) صفر؛ (ب) صفر

۳۷. (الف) ۴۲ J؛ (ب) ۳۰ J؛ (پ) ۱۲ J؛ (ت) ۶٫۵ m/s، محور $+x$؛ (ث) ۵٫۵ m/s، محور $+x$؛ (ج) ۳٫۵ m/s، محور $+x$

۳۹. ۴٫۰۰ N/m

۴۱. ۵٫۳×۱۰^{۲} J

۴۳. (الف) ۰٫۸۳ J؛ (ب) ۲٫۵ J؛ (پ) ۴٫۲ J؛ (ت) ۵٫۰ W

۴۵. ۴٫۹×۱۰^{۲} W

۴۷. (الف) ۱٫۰×۱۰^{۲} J؛ (ب) ۸٫۴ W

۴۹. ۷٫۴×۱۰^{۲} W

۵۱. (الف) ۳۲٫۰ J؛ (ب) ۸٫۰۰ W؛ (پ) ۷۸٫۲ درجه

۵۳. (الف) ۱٫۲۰ J؛ (ب) ۱٫۱۰ m/s

۵۵. (الف) ۱٫۸×۱۰^{۵} ft·lb؛ (ب) ۰٫۵۵ hp

۵۷. (الف) ۷۹۷ N؛ (ب) صفر؛ (پ) −۱٫۵۵ kJ؛ (ت) صفر؛ (ث) ۱٫۵۵ kJ؛ (ج) F در حین جابه‌جایی تغییر می‌کند

۵۹. (الف) ۱۱ J؛ (ب) −۲۱ J

۶۱. −۶ J

۶۳. (الف) ۳۱۴ J؛ (ب) −۱۵۵ J؛ (پ) صفر؛ (ت) ۱۵۸ J

۶۵. (الف) ۹۸ N؛ (ب) ۴٫۰ cm؛ (پ) ۳٫۹ J؛ (ت) −۳٫۹ J

۶۷. (الف) ۲۳ mm؛ (ب) ۴۵ N

۶۹. ۱۶۵ kW

۷۱. −۳۷ J

۷۳. (الف) ۱۳ J؛ (ب) ۱۳ J

۷۵. ۲۳۵ kW

۷۷. (الف) ۶٫۰ J؛ (ب) ۶٫۰ J

۷۹. (الف) ۰٫۶J؛ (ب) صفر؛ (پ) −۰٫۶J

۸۱. (الف) ۳٫۳۵ m/s؛ (ب) ۲۲٫۵J؛ (پ) صفر؛ (ت) صفر؛ (ث) ۰٫۲۱۲m

۸۳. (الف) $-۵٫۲۰\times ۱۰^{-۲}$ J؛ (ب) −۰٫۱۶۰J

۸۵. ۶٫۶۳ m/s

فصل ۸

خودآزمایی

۱. نه (حرکت رفت و برگشت در یک حلقه‌ی کوچک را در نظر بگیرید).

۲. حالت‌های ۳، ۱ و ۲ (معادله‌ی ۸-۶ را ببینید)

۳. (الف) همه‌ی حالت‌ها؛ (ب) همه‌ی حالت‌ها

۴. (الف) CD، AB و BC (صفر) (بزرگی‌های شیب را بررسی کنید)؛ (ب) جهت مثبت x

۵. همه‌ی آزمایش‌ها

پرسش‌ها

۱. (الف) ۳، ۲ و ۱؛ (ب) ۱، ۲ و ۳

۳. (الف) ۱۲J؛ (ب) −۲J

۵. (الف) افزایش می‌یابد؛ (ب) کاهش می‌یابد؛ (پ) کاهش می‌یابد؛ (ت) در AB و BC ثابت می‌ماند، و در CD کاهش می‌یابد

۷. +۳۰J

۹. ۲، ۱ و ۳

۱۱. −۴۰J

مسئله‌ها

۱. ۸۹ N/cm

۳. (الف) ۱۶۷J؛ (ب) −۱۶۷J؛ (پ) ۱۹۶J؛ (ت) ۲۹J؛ (ث) ۱۶۷J؛ (ج) −۱۶۷J؛ (چ) ۲۹۶J؛ (ح) ۱۲۹J

۵. (الف) ۴٫۳۱mJ؛ (ب) −۴٫۳۱mJ؛ (پ) ۴٫۳۱mJ؛ (ت) −۴٫۳۱mJ؛ (ث) همه افزایش می‌یابند

۷. (الف) ۱۳٫۱J؛ (ب) −۱۳٫۱J؛ (پ) ۱۳٫۱J؛ (ت) همه افزایش می‌یابند

۹. (الف) ۱۷٫۰ m/s؛ (ب) ۲۶٫۵ m/s؛ (پ) ۳۳٫۴ m/s؛ (ت) ۵۶٫۷m؛ (ث) همان خواهد بود

۱۱. (الف) ۲٫۰۸ m/s؛ (ب) ۲٫۰۸ m/s؛ (پ) افزایش می‌یابد

۱۳. (الف) ۰٫۹۸J؛ (ب) −۰٫۹۸J؛ (پ) ۳٫۱N/cm

۱۵. (الف) $۲٫۶\times ۱۰^{۲}$m؛ (ب) ثابت می‌ماند؛ (پ) کاهش می‌یابد

۱۷. (الف) ۲٫۵N؛ (ب) ۰٫۳۱N؛ (پ) ۳۰cm

۱۹. (الف) ۷۸۴ N/m؛ (ب) ۶۲٫۷J؛ (پ) ۶۲٫۷J؛ (ت) ۸۰٫۰cm

۲۱. (الف) ۸٫۳۵ m/s؛ (ب) ۴٫۳۳ m/s؛ (پ) ۷٫۴۵ m/s؛ (ت) هر دو کاهش می‌یابند.

۲۳. (الف) ۴٫۸۵ m/s؛ (ب) ۲٫۴۲ m/s

۲۵. $-۳٫۲\times ۱۰^{۲}$J

۲۷. (الف) نه؛ (ب) $۹٫۳\times ۱۰^{۲}$N

۲۹. (الف) ۳۵cm؛ (ب) ۱٫۷ m/s

۳۱. (الف) ۳۹٫۲J؛ (ب) ۳۹٫۲J؛ (پ) ۴٫۰۰m

۳۳. (الف) ۲٫۴۰ m/s؛ (ب) ۴٫۱۹ m/s

۳۵. (الف) ۳۹٫۶cm؛ (ب) ۳٫۶۴cm

۳۷. −۱۸mJ

۳۹. (الف) ۲٫۱ m/s؛ (ب) ۱۰N؛ (پ) جهت $+x$؛ (ت) ۵٫۷m؛ (ث) ۳۰N؛ (ج) جهت $-x$

۴۱. (الف) −۳٫۷J؛ (پ) ۱٫۳m؛ (ت) ۹٫۱m؛ (ث) ۲٫۲J؛ (ج) ۴٫۰m؛ (چ) $(۴-x)e^{-x/۴}$؛ (ح) ۴٫۰m

۴۳. (الف) ۵٫۶J؛ (ب) ۳٫۵J

۴۵. (الف) ۳۰٫۱J؛ (ب) ۳۰٫۱J؛ (پ) ۰٫۲۲۵

۴۷. ۰٫۵۳J

۴۹. (الف) −۲٫۹kJ؛ (ب) $۳٫۹\times ۱۰^{۲}$J؛ (پ) $۲٫۱\times ۱۰^{۲}$N

۵۱. (الف) ۱٫۵MJ؛ (ب) ۰٫۵۱MJ؛ (پ) ۱٫۰MJ؛ (ت) ۶۳ m/s

۵۳. (الف) ۶۷J؛ (ب) ۶۷J؛ (پ) ۴۶cm

۵۵. (الف) −۰٫۹۰J؛ (ب) ۰٫۴۶J؛ (پ) ۱٫۰ m/s

۵۷. ۱٫۲m

۵۹. (الف) ۱۹٫۴m؛ (ب) ۱۹٫۰ m/s

۶۱. (الف) $۱/۵\times ۱۰^{-۲}$ N؛ (ب) $(۳/۸\times ۱۰^{۲})g$

۶۳. (الف) ۷/۴ m/s؛ (ب) ۹۰ cm؛ (پ) ۲/۸ m؛ (ت) ۱۵ m

۶۵. ۲۰ cm

۶۷. (الف) ۷/۰ J؛ (ب) ۲۲ J

۶۹. ۳/۷ J

۷۱. ۴/۳۳ m/s

۷۳. ۲۵ J

۷۵. (الف) ۴/۹ m/s؛ (ب) ۴/۵ N؛ (پ) ۷۱ درجه؛ (ت) ثابت می‌ماند

۷۷. (الف) ۴/۸ N؛ (ب) جهت $+x$؛ (پ) ۱/۵ m؛ (ت) ۱۳/۵ m؛ (ث) ۳/۵ m/s

۷۹. (الف) ۲۴ kJ؛ (ب) $۴/۷\times ۱۰^{۲}$ N

۸۱. (الف) ۵/۰۰ J؛ (ب) ۹/۰۰ J؛ (پ) ۱۱/۰ J؛ (ت) ۳/۰۰ J؛ (ث) ۱۲/۰ J؛ (ج) ۲/۰۰ J؛ (چ) ۱۳/۰ J؛ (ح) ۱/۰۰ J؛ (خ) ۱۳/۰ J؛ (د) ۱/۰۰ J؛ (ر) ۱۱/۰ J؛ (ز) ۱۰/۸ m؛ (ژ) به $x = ۰$ برمی‌گردد و متوقف می‌شود.

۸۳. (الف) ۶/۰ kJ؛ (ب) $۶/۰\times ۱۰^{۲}$ W؛ (پ) $۳/۰\times ۱۰^{۲}$ W؛ (ت) $۹/۰\times ۱۰^{۲}$ W

۸۵. ۸۸۰ MW

۸۷. (الف) $v_۰ = (۲gL)^{۰/۵}$؛ (ب) $۵mg$؛ (پ) $-mgL$؛ (ت) $-۲mgL$

۸۹. (الف) ۱۰۹ J؛ (ب) ۶۰/۳ J؛ (پ) ۶۸/۲ J؛ (ت) ۴۱/۰ J

۹۱. (الف) ۲/۷ J؛ (ب) ۱/۸ J؛ (پ) ۰/۳۹ m

۹۳. (الف) ۱۰ m؛ (ب) ۴۹ N؛ (پ) ۴/۱ m؛ (ت) $۱/۲\times ۱۰^{۲}$ N

۹۵. (الف) ۵/۵ m/s؛ (ب) ۵/۴ m؛ (پ) ثابت می‌ماند

۹۷. ۸۰ mJ

۹۹. ۲۴ W

۱۰۱. −۱۲ J

۱۰۳. (الف) ۸/۸ m/s؛ (ب) ۲/۶ kJ؛ (پ) ۱/۶ kW

۱۰۵. (الف) $۷/۴\times ۱۰^{۲}$ J؛ (ب) $۲/۴\times ۱۰^{۲}$ J

۱۰۷. ۱۵ J

۱۰۹. (الف) $۲/۳۵\times ۱۰^{۳}$ J؛ (ب) ۳۵۲ J

۱۱۱. ۷۳۸ m

۱۱۳. (الف) −۳/۸ kJ؛ (ب) ۳۱ kN

۱۱۵. (الف) ۳۰۰ J؛ (ب) ۹۳/۸ J؛ (پ) ۶/۳۸ m

۱۱۷. (الف) ۵/۶ J؛ (ب) ۱۲ J؛ (پ) ۱۳ J

۱۱۹. (الف) ۱/۲ J؛ (ب) ۱۱ m/s؛ (پ) نه؛ (ت) نه

۱۲۱. (الف) $۲/۱\times ۱۰^{۶}$ kg؛ (ب) $(۱۰۰+۱/۵t)^{۰/۵}$ m/s؛ (پ) $(۱/۵\times ۱۰^{۶})/(۱۰۰+۱/۵t)^{۰/۵}$ N؛ (ت) ۶/۷ km

۱۲۳. ۵۴ درصد

۱۲۵. (الف) $۲/۷\times ۱۰^{۹}$ J؛ (ب) $۲/۷\times ۱۰^{۹}$ W؛ (پ) $۷/۲\times ۱۰^{۱۲}$ ریال

۱۲۷. ۵/۴ kJ

۱۲۹. $۳/۱\times ۱۰^{۱۱}$ W

۱۳۱. زیرا نیروی شما روی کلم (هنگام پایین آوردن آن) کار انجام می‌دهد.

۱۳۵. (الف) ۸/۶ kJ؛ (ب) $۸/۶\times ۱۰^{۲}$ W؛ (پ) $۴/۳\times ۱۰^{۲}$ W؛ (ت) ۱/۳ kW

فصل ۹

خودآزمایی‌ها

۱. (الف) مبداء مختصات؛ (ب) ربع چهارم؛ (پ) روی محور y در زیر مبداء؛ (ت) مبداء؛ (ث) ربع سوم؛ (ج) مبداء

۲. (الف) تا (پ) در مرکز جرم، باز هم در مبداء (نیروهای آن‌ها نسبت به دستگاه درونی‌اند و نمی‌توانند مرکز جرم را حرکت دهند)

۳. (شیب‌ها و معادله‌ی ۹-۲۳ را در نظر بگیرید) (الف) ۱، ۳ و سپس ۲ و ۴ (نیرو صفر است)؛ (ب) ۳

۴. (الف) بی‌تغییر می‌ماند؛ (ب) بی‌تغییر می‌ماند (معادله‌ی ۹-۳۲ را ببینید)؛ (پ) کاهش می‌یابد (معادله‌ی ۹-۳۵)

۵. (الف) صفر؛ (ب) مثبت (p_y آغازی به پایین‌سوی محور y؛ p_y پایانی به بالاسوی محور y)؛ (پ) جهت مثبت محور y.

۶. (نیروی خارجی برایند وجود ندارد؛ $\vec{P}$ پایسته است) (الف) صفر؛ (ب) نه؛ (پ) $-x$

۷. (الف) ۱۰kg·m/s؛ (ب) ۱۴kg·m/s؛ (پ) ۶kg·m/s

۸. (الف) ۴kg·m/s؛ (ب) ۸kg·m/s؛ (پ) ۳J

۹. (الف) ۲kg·m/s (تکانه در راستای محور x پایسته است)؛ (ب) ۳kg·m/s (تکانه در راستای محور y پایسته است)

پرسش‌ها

۱. (الف) ۲N، به راست‌سو؛ (ب) ۲N، به راست‌سو؛ (پ) بزرگ‌تر از ۲N، به راست‌سو

۳. ب، پ، الف

۵. (الف) x بله، y نه؛ (ب) x بله، y نه؛ (پ) x نه، y بله

۷. (الف) حالت پ، انرژی جنبشی نمی‌تواند منفی باشد، حالت ت، انرژی جنبشی کل نمی‌تواند افزایش یابد؛ (ب) گزینه‌ی الف؛ (پ) گزینه‌ی ب

۹. (الف) یکی ساکن بوده است؛ (ب) ۲؛ (پ) ۵؛ (ت) مساوی (نتیجه‌ی بازیکن بیلیارد)

۱۱. (الف) C؛ (ب) B؛ (پ) ۳

مسئله‌ها

۱. (الف) −۱٫۵۰m؛ (ب) −۱٫۴۳m

۳. (الف) −۶٫۵cm؛ (ب) ۸٫۳cm؛ (پ) ۱٫۴cm

۵. (الف) −۰٫۴۵cm؛ (ب) −۲٫۰cm

۷. (الف) صفر؛ (ب) ۳٫۱۳×۱۰$^{-۱۱}$m

۹. (الف) ۲۸cm؛ (ب) ۲٫۳m/s

۱۱. (−۴٫۰m)î + (۴٫۰m)ĵ

۱۳. ۵۳m

۱۵. (الف) (۲٫۳۵î − ۱٫۵۷ĵ)m/s^{۲}؛ (ب) (۲٫۳۵î − ۱٫۵۷ĵ)t m/s، که t برحسب ثانیه است؛ (ت) مستقیم، تحت زاویه‌ی ۳۴ درجه به پایین‌سو

۱۷. ۴٫۲m

۱۹. (الف) ۷٫۵×۱۰^{۴}J؛ (ب) ۳٫۸×۱۰^{۴}kg·m/s؛ (پ) ۳۹ درجه جنوب محور خاوری

۲۱. (الف) ۵٫۰kg·m/s؛ (ب) ۱۰kg·m/s

۲۳. ۱٫۰×۱۰^{۳}kg·m/s تا ۱٫۲×۱۰^{۳}kg·m/s

۲۵. (الف) ۴۲N·s؛ (ب) ۲٫۱kN

۲۷. (الف) ۶۷m/s؛ (ب) $-x$؛ (پ) ۱٫۲kN؛ (ت) $-x$

۲۹. ۵N

۳۱. (الف) ۲٫۳۹×۱۰^{۳}N·s؛ (ب) ۴٫۷۸×۱۰^{۵}N؛ (پ) ۱٫۷۶×۱۰^{۳}N·s؛ (ت) ۳٫۵۲×۱۰^{۵}N

۳۳. (الف) ۵٫۸۶kg·m/s؛ (ب) ۵۹٫۸ درجه؛ (پ) ۲٫۹۳kN؛ (ت) ۵۹٫۸ درجه

۳۵. ۹٫۹×۱۰^{۲}N

۳۷. (الف) ۹٫۰kg·m/s؛ (ب) ۳٫۰kN؛ (پ) ۴٫۵kN؛ (ت) ۲۰m/s

۳۹. ۳٫۰mm/s

۴۱. (الف) −(۰٫۱۵m/s)î؛ (ب) ۰٫۱۸m

۴۳. ۵۵cm

۴۵. (الف) (۱٫۰۰î − ۰٫۱۶۷ĵ)km/s؛ (ب) ۳٫۲۳MJ

۴۷. (الف) ۱۴m/s؛ (ب) ۴۵ درجه

۴۹. ۳٫۱×۱۰^{۲}m/s

۵۱. (الف) ۷۲۱m/s؛ (ب) ۹۳۷m/s

۵۳. (الف) ۳۳%؛ (ب) ۲۳%؛ (پ) کاهش می‌یابد

۵۵. (الف) +۲٫۰m/s؛ (ب) −۱٫۳J؛ (پ) +۴۰J؛ (ت) دستگاه انرژی را از برخی چشمه‌ها، نظیر یک انفجار کوچک، می‌گیرد

۵۷. (الف) ۴٫۴m/s؛ (ب). ۰٫۸۰

۵۹. ۲۵cm

۶۱. (الف) ۹۹ گرم؛ (ب) ۱٫۹m/s؛ (پ) ۰٫۹۳m/s

۶۳. (الف) ۳٫۰۰m/s؛ (ب) ۶٫۰۰m/s

۶۵. (الف) ۱٫۲kg؛ (ب) ۲٫۵m/s

۶۷. −۲۸cm

۶۹. (الف) ۰٫۲۱kg؛ (ب) ۷٫۲m

۷۱. (الف) ۴٫۱۵×۱۰^{۵}m/s؛ (ب) ۴٫۸۴×۱۰^{۵}m/s

۷۳. ۱۲۰ درجه

۷۵. (الف) ۴۳۳m/s؛ (ب) ۲۵۰m/s

۷۷. (الف) ۴۶N؛ (ب) هیچ

۷۹. (الف) $۱٫۵۷\times۱۰^{۶}$ N؛ (ب) $۱٫۳۵\times۱۰^{۵}$ kg؛ (پ) ۲٫۰۸ km/s

۸۱. (الف) ۷۲۹۰ m/s؛ (ب) ۸۲۰۰ m/s؛ (پ) $۱٫۲۷۱\times۱۰^{۱۰}$ J؛ (ت) $۱٫۲۷۵\times۱۰^{۱۰}$ J

۸۳. (الف) ۱٫۹۲ m؛ (ب) ۰٫۶۴۰ m

۸۵. (الف) ۱٫۷۸ m/s؛ (ب) کمتر؛ (پ) کمتر؛ (ت) بیشتر

۸۷. (الف) ۳٫۷ m/s؛ (ب) ۱٫۳ N·s؛ (پ) $۱٫۸\times۱۰^{۲}$ N

۸۹. (الف) $(۷٫۴\times۱۰^{۳}\,\mathrm{N\cdot s})\hat{\mathrm{i}}-(۷٫۴\times۱۰^{۳}\,\mathrm{N\cdot s})\hat{\mathrm{j}}$؛ (ب) $(-۷٫۴\times۱۰^{۳}\,\mathrm{N\cdot s})\hat{\mathrm{i}}$؛ (پ) $۲٫۳\times۱۰^{۳}$ N؛ (ت) $۲٫۱\times۱۰^{۴}$ N؛ (ث) ۴۵- درجه

۹۱. ۴٫۴+ m/s

۹۳. $۱٫۱۸\times۱۰^{۴}$ kg

۹۵. (الف) ۱٫۹ m/s؛ (ب) ۳۰- درجه؛ (پ) کشسان

۹۷. (الف) ۶٫۹ m/s؛ (ب) ۳۰ درجه؛ (پ) ۶٫۹ m/s؛ (ت) ۳۰- درجه؛ (ث) ۲٫۰ m/s؛ (ج) ۱۸۰- درجه

۹۹. (الف) ۲۵ mm؛ (ب) ۲۶ mm؛ (پ) به پایین‌سو؛ (ت) $۱٫۶\times۱۰^{-۲}\,\mathrm{m/s^{۲}}$

۱۰۱. ۲۹ J

۱۰۳. ۲٫۲ kg

۱۰۵. ۵٫۰ kg

۱۰۷. (الف) ۵۰ kg/s؛ (ب) $۱٫۶\times۱۰^{۲}$ kg/s

۱۰۹. (الف) $۴٫۶\times۱۰^{۳}$ km؛ (ب) ۷۳%

۱۱۱. ۱۹۰ m/s

۱۱۳. ۲۸٫۸ N

۱۱۵. (الف) ۰٫۷۴۵ mm؛ (ب) ۱۵۳ درجه؛ (پ) ۱٫۶۷ mJ

۱۱۷. (الف) $(۲٫۶۷\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{i}}+(-۳٫۰۰\,\mathrm{m/s})\hat{\mathrm{j}}$؛ (ب) ۴٫۰۱ m/s؛ (پ) ۴۸٫۴ درجه

۱۱۹. (الف) ۰٫۵۰- m؛ (ب) ۱٫۸- cm؛ (پ) ۰٫۵۰ m

۱۲۱. ۰٫۲۲ درصد

۱۲۳. ۳۶٫۵ km/s

۱۲۵. (الف) $(-۱٫۰۰\times۱۰^{-۱۹}\,\hat{\mathrm{i}}+۰٫۶۷\times۱۰^{-۱۹}\,\hat{\mathrm{j}})\,\mathrm{kg\cdot m/s}$؛ (ب) $۱٫۱۹\times۱۰^{-۱۲}$ J

۱۲۷. $۲٫۲\times۱۰^{-۳}$

فصل ۱۰

خودآزمایی‌ها

۱. (ب) و (پ)

۲. (الف) و (ت) ($\alpha = d^{۲}\theta/dt^{۲}$ باید ثابت باشد)

۳. (الف) بله؛ (ب) نه؛ (پ) بله؛ (ت) بله

۴. هر سه کره

۵. (۱)، (۲)، (۴) و (۳) (معادله‌ی ۱۰-۳۶ را ببینید)

۶. (معادله‌ی ۱۰-۴۰ را ببینید) (۱) و (۳)، (۴)، سپس (۲) و (۵) (صفر)

۷. (الف) به پایین‌سو در شکل ($\tau_{net}=۰$)؛ (ب) کمتر (بازوهای گشتاور نیرو را در نظر بگیرید).

پرسش‌ها

۱. (الف) c، a، سپس b و d؛ (ب) b، سپس a و c، آنگاه d

۳. تمام حالت‌ها

۵. (الف) کاهش می‌یابد؛ (ب) ساعت‌گرد؛ (پ) پادساعت‌گرد

۷. بزرگ‌تر

۹. c، a، b

۱۱. کمتر

مسئله‌ها

۱. ۱۴ rev

۳. (الف) ۴٫۰ rad/s؛ (ب) ۱۱٫۹ rad/s

۵. ۱۱ rad/s

۷. (الف) ۴٫۰ m/s؛ (ب) نه

۹. (الف) ۳٫۰۰ s؛ (ب) ۱۸٫۹ rad

۱۱. (الف) ۳۰ s؛ (ب) $۱٫۸\times۱۰^{۳}$ rad

۱۳. (الف) $۳٫۴\times۱۰^{۲}$ s؛ (ب) $-۴٫۵\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{rad/s^{۲}}$؛ (پ) ۹۸ s

۱۵. ۸٫۰ s

۱۷. (الف) ۴۴ rad؛ (ب) ۵٫۵ s؛ (پ) ۳۲ s؛ (ت) ۲٫۱- s؛ (ث) ۴۰ s

۱۹. (الف) $۲٫۵۰\times۱۰^{-۳}$ rad/s؛ (ب) $۲۰٫۲\,\mathrm{m/s^{۲}}$؛ (پ) صفر

۲۱. ۶٫۹×۱۰$^{-۱۳}$ rad/s

۲۳. (الف) ۲۰٫۹ rad/s؛ (ب) ۱۲٫۵ m/s؛ (پ) ۸۰۰ rev/min^{۲}؛ (ت) ۶۰۰ rev

۲۵. (الف) ۷٫۳×۱۰$^{-۵}$ rad/s؛ (ب) ۳٫۵×۱۰^{۲} m/s؛ (پ) ۷٫۳×۱۰$^{-۵}$ rad/s؛ (ت) ۴٫۶×۱۰^{۲} m/s

۲۷. (الف) ۷۳ cm/s^{۲}؛ (ب) ۰٫۰۷۵؛ (پ) ۰٫۱۱

۲۹. (الف) ۳٫۸×۱۰^{۳} rad/s؛ (ب) ۱٫۹×۱۰^{۲} m/s

۳۱. (الف) ۴۰ s؛ (ب) ۲٫۰ rad/s^{۲}

۳۳. ۱۲٫۳ kg·m^{۲}

۳۵. (الف) ۱٫۱ kJ؛ (ب) ۹٫۷ kJ

۳۷. ۰٫۰۹۷ kg·m^{۲}

۳۹. (الف) ۴۹ MJ؛ (ب) ۱٫۰×۱۰^{۲} min

۴۱. (الف) ۰٫۰۲۳ kg·m^{۲}؛ (ب) ۱٫۱ mJ

۴۳. ۴٫۷×۱۰$^{-۴}$ kg·m^{۲}

۴۵. −۳٫۸۵ N·m

۴۷. ۴٫۶ N·m

۴۹. (الف) ۲۸٫۲ rad/s^{۲}؛ (ب) ۳۳۸ N·m

۵۱. (الف) ۶٫۰۰ cm/s^{۲}؛ (ب) ۴٫۸۷ N؛ (پ) ۴٫۵۴ N؛ (ت) ۱٫۲۰ rad/s^{۲}؛ (ث) ۰٫۰۱۳۸ kg·m^{۲}

۵۳. ۰٫۱۴۰ N

۵۵. ۲٫۵۱×۱۰$^{-۴}$ kg·m^{۲}

۵۷. (الف) ۴٫۲×۱۰^{۲} rad/s^{۲}؛ (ب) ۵٫۰×۱۰^{۲} rad/s

۵۹. ۳۹۶ N

۶۱. (الف) −۱۹٫۸ kJ؛ (ب) ۱٫۳۲ kW

۶۳. ۵٫۴۲ m/s

۶۵. (الف) ۵٫۳۲ m/s^{۲}؛ (ب) ۸٫۴۳ m/s^{۲}؛ (پ) ۴۱٫۸ درجه

۶۷. ۹٫۸۲ rad/s

۶۹. ۶٫۱۶×۱۰$^{-۵}$ kg·m^{۲}

۷۱. (الف) ۳۱٫۴ rad/s^{۲}؛ (ب) ۰٫۷۵۴ m/s^{۲}؛ (پ) ۵۶٫۱ N؛ (ت) ۵۵٫۱ N

۷۳. (الف) ۴٫۸۱×۱۰^{۵} N؛ (ب) ۱٫۱۲×۱۰^{۴} N·m؛ (پ) ۱٫۲۵×۱۰^{۶} J

۷۵. (الف) ۲٫۳ rad/s^{۲}؛ (ب) ۱٫۴ rad/s^{۲}

۷۷. (الف) −۶۷ rev/min^{۲}؛ (ب) ۸٫۳ rev

۸۱. ۳٫۱ rad/s

۸۳. (الف) ۱٫۵۷ m/s^{۲}؛ (ب) ۴٫۵۵ N؛ (پ) ۴٫۹۴ N

۸۵. ۳۰ rev

۸۷. ۰٫۰۵۴ kg·m^{۲}

۸۹. ۱٫۴×۱۰^{۲} N·m

۹۱. (الف) ۱۰ J؛ (ب) ۰٫۲۷ m

۹۳. ۴٫۶ rad/s^{۲}

۹۵. ۲٫۶ J

۹۷. (الف) ۵٫۹۲×۱۰^{۴} m/s^{۲}؛ (ب) ۴٫۳۹×۱۰^{۴} s$^{-۲}$

۹۹. (الف) ۰٫۷۹۱ kg·m^{۲}؛ (ب) ۱٫۷۹×۱۰$^{-۲}$ N·m

۱۰۱. (الف) ۱٫۵×۱۰^{۲} cm/s؛ (ب) ۱۵ rad/s؛ (پ) ۱۵ rad/s؛ (ت) ۷۵ cm/s؛ (ث) ۳٫۰ rad/s

۱۰۳. (الف) ۷٫۰ kg·m^{۲}؛ (ب) ۷٫۲ m/s؛ (پ) ۷۱ درجه

۱۰۵. (الف) ۰٫۳۲ rad/s؛ (ب) ۱٫۰×۱۰^{۲} km/h

۱۰۷. (الف) ۱٫۴×۱۰^{۲} rad؛ (ب) ۱۴ s

فصل ۱۱

خودآزمایی‌ها

۱. (الف) مساوی است؛ (ب) کمتر است

۲. کمتر است (تبدیل انرژی از انرژی جنبشی دورانی به انرژی پتانسیل گرانشی را در نظر بگیرید)

۳. (بردارها را رسم، و از قاعده‌ی دست راست استفاده کنید) (الف) $\pm z$؛ (ب) $+y$؛ (پ) $-x$

۴. (معادله‌ی ۱۱-۲۱ را ببینید) (الف) ۱ و ۳؛ سپس ۲ و ۴، آنگاه ۵ (صفر)؛ (ب) ۲ و ۳

۵. (معادله‌های ۱۱-۲۳ و ۱۱-۱۶ را ببینید) (الف) ۳ و ۱؛ سپس ۲ و ۴ (صفر)؛ (ب) ۳

۶. (الف) همه‌ی موارد، (τ یکسان، t یکسان، پس ΔL هم یکسان)؛ (ب) کره، قرص، طوقه (برعکس ترتیب مقدار I)

۷. (الف) کاهش می‌یابد؛ (ب) ثابت می‌ماند ($\tau_{\mathrm{net}} = ۰$، بنابراین L پایسته است)؛ (پ) افزایش می‌یابد

پرسش‌ها

۱. a، سپس b و c، آنگاه e و d (صفر)

۳. (الف) در جای خود می‌چرخد؛ (ب) به سوی شما می‌غلتد؛ (پ) در جهت دور شدن از شما می‌غلتد.

۵. (الف) ۱، ۲ و ۳ (صفر)؛ (ب) ۱ و ۲، سپس ۳؛ (پ) ۱ و ۳، سپس ۲

۷. (الف) ثابت می‌ماند؛ (ب) افزایش می‌یابد؛ (پ) کاهش می‌یابد؛ (ت) ثابت می‌ماند، کاهش می‌یابد، افزایش می‌یابد

۹. D، B، سپس A و C

۱۱. (الف) مساوی؛ (ب) مساوی

مسئله‌ها

۱. (الف) صفر؛ (ب) $(۲۲\ \mathrm{m/s})\hat{i}$؛ (پ) $(-۲۲\ \mathrm{m/s})\hat{i}$؛ (ت) صفر؛ (ث) $۱٫۵\times۱۰^{۳}\ \mathrm{m/s^{۲}}$؛ (ج) $۱٫۵\times۱۰^{۳}\ \mathrm{m/s^{۲}}$؛ (چ) $(۲۲\ \mathrm{m/s})\hat{i}$؛ (ح) $(۴۴\ \mathrm{m/s})\hat{i}$؛ (خ) صفر؛ (د) صفر؛ (ذ) $۱٫۵\times۱۰^{۳}\ \mathrm{m/s^{۲}}$؛ (ر) $۱٫۵\times۱۰^{۳}\ \mathrm{m/s^{۲}}$

۳. $-۳٫۱۵\ \mathrm{J}$

۵. ۰٫۰۲۰

۷. (الف) $۶۳\ \mathrm{rad/s}$؛ (ب) $۴٫۰\ \mathrm{m}$

۹. $۴٫۸\ \mathrm{m}$

۱۱. (الف) $(-۴٫۰\ \mathrm{N})\hat{i}$؛ (ب) $۰٫۶۰\ \mathrm{kg\cdot m^{۲}}$

۱۳. ۰٫۵۰

۱۵. (الف) $-(۰٫۱۱\ \mathrm{m})\omega$؛ (ب) $-۲٫۱\ \mathrm{m/s^{۲}}$؛ (پ) $-۴۷\ \mathrm{rad/s^{۲}}$؛ (ت) $۱٫۲\ \mathrm{s}$؛ (ث) $۸٫۶\ \mathrm{m}$؛ (ج) $۶٫۱\ \mathrm{m/s}$

۱۷. (الف) $۱۳\ \mathrm{cm/s^{۲}}$؛ (ب) $۴٫۴\ \mathrm{s}$؛ (پ) $۵۵\ \mathrm{cm}$؛ (ت) $۱۸\ \mathrm{mJ}$؛ (ث) $۱٫۴\ \mathrm{J}$؛ (ج) $۲۷\ \mathrm{rev/s}$

۱۹. $(-۲٫۰\ \mathrm{N\cdot m})\hat{i}$

۲۱. (الف) $(۶٫۰\ \mathrm{N\cdot m})\hat{j}+(۸٫۰\ \mathrm{N\cdot m})\hat{k}$؛ (ب) $(-۲۲\ \mathrm{N\cdot m})\hat{i}$

۲۳. (الف) $(-۱٫۵\ \mathrm{N\cdot m})\hat{i}-(۴٫۰\ \mathrm{N\cdot m})\hat{j}-(۱٫۰\ \mathrm{N\cdot m})\hat{k}$؛ (ب) $(-۱٫۵\ \mathrm{N\cdot m})\hat{i}-(۴٫۰\ \mathrm{N\cdot m})\hat{j}-(۱٫۰\ \mathrm{N\cdot m})\hat{k}$

۲۵. (الف) $(۵۰\ \mathrm{N\cdot m})\hat{k}$؛ (ب) ۹۰ درجه

۲۷. (الف) صفر؛ (ب) $(۸٫۰\ \mathrm{N\cdot m})\hat{i}+(۸٫۰\ \mathrm{N\cdot m})\hat{k}$

۲۹. (الف) $۹٫۸\ \mathrm{kg\cdot m^{۲}/s}$؛ (ب) جهت $+z$

۳۱. (الف) صفر؛ (ب) $-۲۲٫۶\ \mathrm{kg\cdot m^{۲}/s}$؛ (پ) $-۷٫۸۴\ \mathrm{N\cdot m}$؛ (ت) $-۷٫۸۴\ \mathrm{N\cdot m}$

۳۳. (الف) $(-۱٫۷\times۱۰^{۲}\ \mathrm{kg\cdot m^{۲}/s})\hat{k}$؛ (ب) $(+۵۶\ \mathrm{N\cdot m})\hat{k}$؛ (پ) $(+۵۶\ \mathrm{kg\cdot m^{۲}/s^{۲}})\hat{k}$

۳۵. (الف) $۴۸t\,\hat{k}\ \mathrm{N\cdot m}$؛ (ب) در حال افزایش یافتن

۳۷. (الف) $۴٫۶\times۱۰^{-۳}\ \mathrm{kg\cdot m^{۲}}$؛ (ب) $۱٫۱\times۱۰^{-۳}\ \mathrm{kg\cdot m^{۲}/s}$؛ (پ) $۳٫۹\times۱۰^{-۳}\ \mathrm{kg\cdot m^{۲}/s}$

۳۹. (الف) $۱٫۴۷\ \mathrm{N\cdot m}$؛ (ب) $۲۰٫۴\ \mathrm{rad}$؛ (پ) $-۲۹٫۹\ \mathrm{J}$؛ (ت) $۱۹٫۹\ \mathrm{W}$

۴۱. (الف) $۱٫۶\ \mathrm{kg\cdot m^{۲}}$؛ (ب) $۴٫۰\ \mathrm{kg\cdot m^{۲}/s}$

۴۳. (الف) $۱٫۵\ \mathrm{m}$؛ (ب) $۰٫۹۳\ \mathrm{rad/s}$؛ (پ) $۹۸\ \mathrm{J}$؛ (ت) $۸٫۴\ \mathrm{rad/s}$؛ (ث) $۸٫۸\times۱۰^{۲}\ \mathrm{J}$؛ (ج) انرژی درونی اسکیت‌بازها

۴۵. (الف) $۳٫۶\ \mathrm{rev/s}$؛ (ب) ۳٫۰؛ (پ) نیروهای وارد شده به آجرها از سوی شخص انرژی درونی شخص را به انرژی جنبشی تبدیل می‌کنند.

۴۷. $۰٫۱۷\ \mathrm{rad/s}$

۴۹. (الف) $۷۵۰\ \mathrm{rev/min}$؛ (ب) $۴۵۰\ \mathrm{rev/min}$؛ (پ) ساعت‌گرد

۵۱. (الف) $۲۶۷\ \mathrm{rev/min}$؛ (ب) ۰٫۶۶۷

۵۳. $۱٫۳\times۱۰^{۳}\ \mathrm{m/s}$

۵۵. $۳٫۴\ \mathrm{rad/s}$

۵۷. (الف) $۱۸\ \mathrm{rad/s}$؛ (ب) ۰٫۹۲

۵۹. $۱۱٫۰\ \mathrm{m/s}$

۶۱. $۱٫۵\ \mathrm{rad/s}$

۶۳. $۰٫۰۷۰\ \mathrm{rad/s}$

۶۵. (الف) $۰٫۱۴۸\ \mathrm{rad/s}$؛ (ب) ۰٫۰۱۲۳؛ (پ) ۱۸۱ درجه

۶۷. (الف) ۰٫۱۸۰ m؛ (ب) ساعت‌گرد

۶۹. ۰٫۰۴۱ rad/s

۷۱. (الف) ۱٫۶ $\mathrm{m/s^2}$؛ (ب) ۱۶ $\mathrm{rad/s^2}$؛ (پ) $(4.0\,\mathrm{N})\hat{\mathrm{i}}$

۷۳. (الف) صفر؛ (ب) صفر؛ (پ) $-30t^3\hat{\mathrm{k}}\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$؛ (ت) $-90t^2\hat{\mathrm{k}}\ \mathrm{N\cdot m}$؛ (ث) $30t^3\hat{\mathrm{k}}\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$؛ (ج) $90t^2\hat{\mathrm{k}}\ \mathrm{N\cdot m}$

۷۵. (الف) ۱۴۹ $\mathrm{kg\cdot m^2}$؛ (ب) ۱۵۸ $\mathrm{kg\cdot m^2/s}$؛ (پ) ۰٫۷۴۴ rad/s

۷۷. (الف) $6.65\times10^{-5}\ \mathrm{kg\cdot m^2/s}$؛ (ب) نه؛ (پ) صفر؛ (ت) بله

۷۹. (الف) ۰٫۳۳۳؛ (ب) ۰٫۱۱۱

۸۱. (الف) ۵۸٫۸ J؛ (ب) ۳۹٫۲ J

۸۳. (الف) ۶۱٫۷ J؛ (ب) ۳٫۴۳ m؛ (پ) نه

۸۵. (الف) $mvR/(I+MR^2)$؛ (ب) $mvR^2/(I+MR^2)$

فصل ۱۲

خودآزمایی‌ها

۱. (پ)، (ث) و (ج)

۲. (الف) نه؛ (ب) بر روی $\vec{F}_1$، عمود برصفحه‌ی شکل؛ (پ) ۴۵ N

۳. (ت)

پرسش‌ها

۱. (الف) ۱ و ۳، سپس ۲؛ (ب) همه‌ی موارد؛ (پ) ۱ و ۳، سپس ۲ (صفر)

۳. گزینه‌های الف و پ (توازن نیروها و گشتاورهای نیرو)

۵. (الف) ۱۲kg؛ (ب) ۳kg؛ (پ) ۱kg

۷. (الف) در C (برای حذف کردن نیروها از معادله‌ی گشتاور نیرو)؛ (ب) مثبت؛ (پ) منفی؛ (ت) مساوی است

۹. افزایش می‌یابد

۱۱. A و B، سپس C

مسئله‌ها

۱. (الف) ۱٫۰۰ m؛ (ب) ۲٫۰۰ m؛ (پ) ۰٫۹۸۷ m؛ (ت) ۱٫۹۷ m

۳. (الف) ۹٫۴ N؛ (ب) ۴٫۴ N

۵. ۷٫۹۲ kN

۷. (الف) $8.8\times10^2\ \mathrm{N}$؛ (ب) $2.8\times10^2\ \mathrm{N}$؛ (پ) ۷۱ درجه

۹. ۷۴٫۴ گرم

۱۱. (الف) ۱٫۲ kN؛ (ب) به پایین‌سو؛ (پ) ۱٫۷ kN؛ (ت) به بالاسو؛ (ث) به چپ‌سو؛ (ج) به راست‌سو

۱۳. (الف) ۲٫۷ kN؛ (ب) به بالاسو؛ (پ) ۳٫۶ kN؛ (ت) به پایین‌سو

۱۵. (الف) ۵٫۰ N؛ (ب) ۳۰ N؛ (پ) ۱٫۳ m

۱۷. (الف) ۰٫۶۴ m؛ (ب) بیشتر باشد

۱۹. ۸٫۷ N

۲۱. ۶٫۶۳ kN؛ (ب) ۵٫۷۴ kN؛ (پ) ۵٫۹۶ kN

۲۳. (الف) ۱۹۲ N؛ (ب) ۹۶٫۱ N؛ (پ) ۵۵٫۵ N

۲۵. ۱۳٫۶ N

۲۷. (الف) ۱٫۹ kN؛ (ب) به بالاسو؛ (پ) ۲٫۱ kN؛ (ت) به طرف پایین

۲۹. (الف) $(-80\,\mathrm{N})\hat{\mathrm{i}}+(1.3\times10^2\,\mathrm{N})\hat{\mathrm{j}}$؛ (ب) $(80\,\mathrm{N})\hat{\mathrm{i}}+(1.3\times10^2\,\mathrm{N})\hat{\mathrm{j}}$

۳۱. ۲٫۲۰ m

۳۳. (الف) ۶۰٫۰ درجه؛ (ب) ۳۰۰ N

۳۵. (الف) ۴۴۵ N؛ (ب) ۰٫۵۰؛ (پ) ۳۱۵ N

۳۷. ۰٫۳۴

۳۹. (الف) ۲۰۷ N؛ (ب) ۵۳۹ N؛ (پ) ۳۱۵ N

۴۱. (الف) می‌لغزد؛ (ب) ۳۱ درجه؛ (پ) چپه می‌شود؛ (ت) ۳۴ درجه

۴۳. (الف) $6.5\times10^6\ \mathrm{N/m^2}$؛ (ب) $1.1\times10^{-5}\ \mathrm{m}$

۴۵. (الف) ۰٫۸۰؛ (ب) ۰٫۲۰؛ (پ) ۰٫۲۵

۴۷. (الف) $1.4\times10^9\ \mathrm{N}$؛ (ب) ۷۵

۴۹. (الف) ۸۶۶ N؛ (ب) ۱۴۳ N؛ (پ) ۰٫۱۶۵

۵۱. (الف) $1.2\times10^2\ \mathrm{N}$؛ (ب) ۶۸ N

۵۳. (الف) $1.8\times10^7\ \mathrm{N}$؛ (ب) $1.4\times10^7\ \mathrm{N}$؛ (پ) ۱۶

۵۵. ۰٫۲۹

۵۷. ۷۶ N

۵۹. (الف) ۸٫۰۱ kN؛ (ب) ۳٫۶۵ kN؛ (پ) ۵٫۶۶ kN

۶۱. ۷۱٫۷ N

۶۳. (الف) $L/۲$؛ (ب) $L/۴$؛ (پ) $L/۶$؛ (ت) $L/۸$؛ (ث) $۲۵L/۲۴$

۶۵. (الف) ۸۸ N؛ (ب) $(۳۰\hat{i}+۹۷\hat{j})$ N

۶۷. $۲٫۴\times۱۰^{۹}$ N/m^{۲}

۶۹. ۶۰ درجه

۷۱. (الف) $\mu<۰٫۵۷$؛ (ب) $\mu>۰٫۵۷$

۷۳. (الف) $(۳۵\hat{i}+۲۰۰\hat{j})$ N؛ (ب) $(-۴۵\hat{i}+۲۰۰\hat{j})$ N؛ (پ) $۱٫۹\times۱۰^{۲}$ N

۷۵. (الف) BC، CD، DA؛ (ب) ۵۳۵ N؛ (پ) ۷۵۷ N

۷۷. (الف) ۱٫۳۸ kN؛ (ب) ۱۸۰ N

۷۹. (الف) $a_1=L/۲$، $a_2=۵L/۸$، $h=۹L/۸$؛ (ب) $b_1=۲L/۳$، $b_2=L/۲$، $h=۷L/۶$

۸۱. $L/۴$

۸۳. (الف) ۱۰۶ N؛ (ب) ۶۴٫۰ درجه

۸۵. $۱٫۸\times۱۰^{۲}$ N

۸۷. (الف) ۱٫۶۰ N؛ (ب) ۲۴٫۴−؛ (پ) ۳٫۷۵− درجه

فصل ۱۳

خودآزمایی‌ها

۱. تمام اشیا

۲. (الف) (۱)، (۲) و (۴)، سپس (۳)؛ (ب) خط d

۳. (الف) افزایش می‌یابد؛ (ب) منفی

۴. (الف) ماهواره‌ی ۲؛ (ب) ماهواره‌ی ۱

۵. مسیر ۱ [کاهش یافتن E (منفی‌تر شدن) باعث کاهش یافتن a می‌شود]؛ (ب) کمتر (کاهش یافتن a باعث کاهش یافتن T می‌شود)

پرسش‌ها

۱. $۳GM^{۲}/d^{۲}$، به چپ‌سو

۳. $Gm^{۲}/r^{۲}$، به بالاسو

۵. وضعیت‌های ب و پ، سپس وضعیت الف (صفر)

۷. (۱)، (۲) و (۴)، سپس (۳)

۹. (الف) y مثبت؛ (ب) بله، در جهت پادساعت‌گرد می‌چرخد تا به سوی ذره‌ی B قرار گیرد

۱۱. هر سه نقطه‌ی b، d و f، سپس نقطه‌های e، c و a

مسئله‌ها

۱. $\frac{۱}{۲}$

۳. ۱۹ m

۵. ۰٫۸ m

۷. $-۵٫۰۰d$

۹. $۲٫۶۰\times۱۰^{۵}$ km

۱۱. (الف) $M=m$؛ (ب) صفر

۱۳. $۸٫۳۱\times۱۰^{-۹}$ N

۱۵. (الف) $-۱٫۸۸d$؛ (ب) $-۳٫۹۰d$؛ (پ) $۰٫۴۸۹d$

۱۷. (الف) ۱۷ N؛ (ب) ۲٫۴

۱۹. $۲٫۶\times۱۰^{۶}$ m

۲۱. ۵×۱۰^{۲۴} kg

۲۳. (الف) ۷٫۶ m/s^{۲}؛ (ب) ۴٫۲ m/s^{۲}

۲۵. (الف) $(۳٫۰\times۱۰^{-۷}\ \text{N/kg})m$؛ (ب) $(۳٫۳\times۱۰^{-۷}\ \text{N/kg})m$؛ (پ) $(۶٫۷\times۱۰^{-۷}\ \text{N/kg}\cdot\text{m})mr$

۲۷. (الف) ۹٫۸۳ m/s^{۲}؛ (ب) ۹٫۸۴ m/s^{۲}؛ (پ) ۹٫۷۹ m/s^{۲}

۲۹. $۵٫۰\times۱۰^{۹}$ J

۳۱. (الف) ۰٫۷۴؛ (ب) ۳٫۸ m/s^{۲}؛ (پ) ۵٫۰ km/s

۳۳. (الف) ۰٫۰۴۵۱؛ (ب) ۲۸٫۵

۳۵. $-۴٫۸۲\times۱۰^{-۱۳}$ J

۳۷. (الف) ۰٫۵۰ pJ؛ (ب) ۰٫۵۰− pJ

۳۹. (الف) ۱٫۷ km/s؛ (ب) $۲٫۵\times۱۰^{۵}$ m؛ (پ) ۱٫۴ km/s

۴۱. (الف) ۸۲ km/s؛ (ب) $۱٫۸\times۱۰^{۴}$ km/s

۴۳. (الف) ۷٫۸۲ km/s؛ (ب) ۸۷٫۵ min

۴۵. $۶٫۵\times۱۰^{۲۳}$ kg

۴۷. ۵×۱۰^{۱۰} ستاره

۴۹. (الف) $۱٫۹\times۱۰^{۱۳}$ m؛ (ب) $۳٫۶R_P$

۵۱. (الف) $۶٫۶۴\times۱۰^{۳}$ km؛ (ب) ۰٫۰۱۳۶

۵۳. $۵٫۸\times۱۰^{۶}$ m

۵۷. ۰٫۷۱ سال

۵۹. $(GM/L)^{۰٫۵}$

۶۱. (الف) $۳٫۱۹\times۱۰^{۳}$ km؛ (ب) بالا بردن ماهواره

۶۳. (الف) ۲٫۸ سال؛ (ب) $۱٫۰\times۱۰^{-۴}$

۶۵. (الف) $r^{۱٫۵}$؛ (ب) $r^{-۱}$؛ (پ) $r^{۰٫۵}$؛ (ت) $r^{-۰٫۵}$

۶۷. (الف) ۷٫۵ km/s؛ (ب) ۹۷ min؛ (پ) $۴٫۱\times۱۰^{۲}$ km؛
(ت) ۷٫۷ km/s؛ (ث) ۹۳ min؛ (ج) $۳٫۲\times۱۰^{-۳}$ N؛ (چ) نه؛
(ح) بله

۶۹. ۱٫۱ s

۷۱. (الف) $GMmx(x^{۲}+R^{۲})^{-۱٫۵}$؛
(ب) $[۲GM(R^{-۱}-(R^{۲}+x^{۲})^{-۰٫۵}]^{۰٫۵}$

۷۳. (الف) $۱٫۰\times۱۰^{۳}$ kg؛ (ب) ۱٫۵ km/s

۷۵. $۳٫۲\times۱۰^{-۷}$ N

۷۷. $۰٫۰۳۷\hat{j}\,\mu$N

۷۹. $۲\pi r^{۱٫۵}G^{-۰٫۵}(M+m/۴)^{-۰٫۵}$

۸۱. (الف) $۲٫۲\times۱۰^{-۷}$ rad/s؛ (ب) ۸۹ km/s

۸۳. (الف) $۲٫۱۵\times۱۰^{۴}$ s؛ (ب) ۱۲٫۳ km/s؛ (پ) ۱۲٫۰ km/s؛
(ت) $۲٫۱۷\times۱۰^{۱۱}$ J؛ (ث) $-۴٫۵۳\times۱۰^{۱۱}$ J؛
(ج) $-۲٫۳۵\times۱۰^{۱۱}$ J؛ (چ) $۴٫۰۴\times۱۰^{۷}$ m؛ (ح) $۱٫۲۲\times۱۰^{۳}$ s؛
(خ) مدار بیضی شکل

۸۵. $۲٫۵\times۱۰^{۴}$ km

۸۷. (الف) $۱٫۴\times۱۰^{۶}$ m/s؛ (ب) ۳×۱۰^{۶} m/s^{۲}

۸۹. (الف) صفر؛ (ب) $۱٫۸\times۱۰^{۳۲}$ J؛ (پ) $۱٫۸\times۱۰^{۳۲}$ J؛
(ت) ۰٫۹۹ km/s

۹۱. (الف) $Gm^{۲}/R_i$؛ (ب) $Gm^{۲}/۲R_i$؛ (پ) $(Gm/R_i)^{۰٫۵}$؛
(ت) $۲(Gm/R_i)^{۰٫۵}$؛ (ث) $Gm^{۲}/R_i$؛ (ج) $(۲Gm/R_i)^{۰٫۵}$؛
(چ) چارچوب مرکز جرم یک چارچوب لخت است و در آن می‌توان اصل پایستگی انرژی را مانند فصل ۸ نوشت؛ چارچوب مرجع متصل به جسم A، نالخت است و اصل پایستگی انرژی را نمی‌توان مانند فصل ۸ نوشت. پاسخ (ت) درست است.

۹۳. $۲٫۴\times۱۰^{۴}$ m/s

۹۵. $-۰٫۰۴۴\hat{j}\,\mu$N

۹۷. $(GM_E m)/۱۲R_E$

۹۹. $۱٫۵۱\times۱۰^{-۱۲}$ N

۱۰۱. $۳٫۴\times۱۰^{۵}$ km

نمایه‌ی نام‌ها

INDEX OF NAMES

آتوود، جورج ۱۸۸ **Atwood**, George (1746-1807)

ریاضی‌دان انگلیسی. ماشین آتوود را اختراع کرد. این ماشین شامل دو جرم نامساوی آویخته است، که به وسیله‌ی ریسمان عبور کرده از روی یک قرقره به هم وصل شده‌اند، و برای تحقیق قانون‌های حرکت به کار می‌رود.

اینشتین، آلبرت ۱۵۱، ۵۹۲ **Einstein**, Albert (1879-1955)

فیزیک‌دان امریکایی (متولد آلمان). نتیجه‌ی مطالعاتش روند بررسی‌های علمی را به کلی دگرگون کرد؛ نظریه‌ی نسبیت را معرفی کرد؛ کاربرد نظریه‌ی کوانتومی را بسط داد؛ در سال ۱۹۲۱/۱۳۰۰ به‌خاطر کشف قانون اثر فوتوالکتریک به دریافت جایزه‌ی نوبل موفق شد.

براهه، تیکو ۵۸۴ **Brahe**, Tycho (1546-1601)

اخترشناس دانمارکی، سیستم سیاره‌ای را با کوشش‌های توان‌فرسا رصد کرد و از این راه داده‌های ارزشمندی برای اخترشناسان پس از خود باقی گذاشت.

پلانک، ماکس کارل ارنست لودویگ ۸

Planck, Max Karl Ernst Ludwig (1858-1947)

فیزیک‌دان آلمانی. با تحقیق در زمینه‌ی ترمودینامیک و تابش جسم سیاه نظریه‌ی کوانتومی را فرمول‌بندی کرد؛ در سال ۱۹۱۸/۱۲۹۷ به‌خاطر کشف کوانتوم‌های انرژی به‌دریافت جایزه‌ی نوبل موفق شد.

ژول، جیمز پرسکات ۲۳۹ **Joule**, James Prescott (1818-1889)

فیزیک‌دان انگلیسی. نظریه‌ی مکانیکی در مورد گرما را فرمول‌بندی کرد؛ اثر ژول ـ تامسون در مورد افت دمای گاز را ارائه داد؛ نخستین کسی بود که سرعت مولکول‌های یک گاز را برآورد کرد؛ **ژول**، یکای کار یا انرژی، به نام او نام‌گذاری شده است.

کپلر، یوهانس ۵۸۴ **Kepler**, Johannes (1571-1630)

اخترشناس آلمانی. سه قانون کپلر در مورد حرکت سیاره‌ها را پیشنهاد کرد؛ در زمینه‌ی اپتیک، فیزیک عمومی و هندسه به کشف‌هایی نایل شد.

گالیله، گالیلئو ۶۰۵ **Galilei**, Galileo (1564-1642)

اخترشناس ایتالیایی. نخستین کسی است که برای رصدهای فضایی از تلسکوپ شکستی استفاده کرد؛ به کشف‌های بسیاری در ارتباط با سیاره‌ها و خورشید توفیق یافت؛ کارهایی نظری درباره‌ی فیزیک کلاسیک انجام داد.

نیوتون، آیزاک ۱۵۱، ۵۶۵، ۵۸۴ **Newton**, Isaac (1642-1727)

دانشمند و ریاضی‌دان مشهور انگلیسی. آنالیز ریاضی را بنیان نهاد؛ نظریه‌ی دینامیکی گرانش را پیشنهاد کرد و سه قانون مهم حرکت را که پایه‌ی مکانیک عملی هستند ارائه داد: به کشف‌هایی درباره‌ی اپتیک دست یافت؛ **نیوتون**، یکای نیرو به‌نام او نام‌گذاری شده است. نیوتون از چهره‌های مشخص علمی سده‌ی هفدهم میلادی است.

وات، جیمز ۲۶۳ **Watt**, James (1736-1819)

مهندس و مخترع اسکاتلندی. با بهتر کردن طرز کار ماشین بخار سبب شد که از این ماشین در کارهای تجاری استفاده شود؛ واژه‌ی **قوه اسب** نخستین بار توسط او به کار برده شد؛ **وات**، یکای توان به نام او نام‌گذاری شده است.

هالی، ادموند ۵۸۷ **Halley**, Edmond (1656-1742)

اخترشناس و ریاضی‌دان انگلیسی. کاتالوگ ستاره‌های جنوبی را منتشر کرد؛ مدارهای ۲۴ دنباله‌دار راحساب کرد؛ **دنباله‌دار هالی** را کشف کرد.

هوک، رابرت ۲۵۳، ۵۷۷ **Hooke**, Robert (1635-1703)

فیزیک‌دان و مخترع انگلیسی. در سن ۱۸ سالگی وارد دانشگاه آکسفورد شد و به زودی استعداد خود را در زمینه‌ی مکانیک و برخی زمینه‌های دیگر به شخصیت‌های علمی آن زمان، از جمله **رابرت بویل** (شیمی‌دان انگلیسیَ) نشان داد؛ در حالی که دستیار بویل بود، پمپ خلاء استفاده شده در آزمایش قانون بویل را ساخت؛ میکروسکوپ، جوّسنج و مَفصل همه کاره، به نام هوک، را اختراع کرد؛ نخستین تلسکوپ بازتابی را ساخت؛ درباره‌ی نور و حرکت زمین نظریه‌هایی ارائه داد؛ نخستین کسی بود که پدیده‌ی انبساط مواد به هنگام گرم شدن را اعلام کرد.

یانگ، توماس ۵۳۴، ۵۳۷ **Young**, Thomas (1773-1829)

فیزیک‌دان و پزشک بریتانیایی. او اثر ماهیچه‌های مژگانی را بر روی شکل عدسی چشم (ساز و کار تطابق چشم) کشف کرد؛ در سال ۱۸۰۱/۱۱۸۰ با آزمایش معروفی درباره‌ی تداخل نور نظریه‌ی موجی نور را اعتبار بخشید؛ او در سال ۱۸۰۲/۱۱۸۱ معنی فیزیکی ثابت تناسب در قانون هوک را ارائهٔ داد، که به نام او **مدول یانگ** نامیده شد.

فرهنگ‌نامه

GLOSSARY

base standard

استاندارد اصلی

مرجعی است که تمام نمونه‌های مربوط به یک کمیت فیزیکی با آن مقایسه می‌شوند؛ استاندارد اصلی باید هم دسترس‌پذیر و هم تغییرناپذیر باشد.

energy

انرژی

خاصیتی است از ظرفیت انجام دادن کار در یک دستگاه. انرژی صورت‌های گوناگون دارد، که انرژی‌های مکانیکی، گرمایی، الکتریکی، شیمیایی و تابشی از آن جمله‌اند؛ کمیتی نرده‌ای است.

potential energy

انرژی پتانسیل

۱. هر دستگاهی که متشکل از ذراتی باشد که به نوعی برهم کنش داشته باشند دارای انرژی پتانسیل است.

۲. صورتی از انرژی است که یک دستگاه به سبب مکان و موقعیت اجزاء خود نسبت به یک نقطه‌ی مرجع (یا پیکربندی مرجع) معین اختیاری دارد.

elastic potential energy **انرژی پتانسیل کشسانی**

نوعی انرژی پتانسیل وابسته به حالت تراکم یا کشیدگی یک شیء کشسان (مانند فنر) است.

gravitational potential energy **انرژی پتانسیل گرانشی**

۱. انرژی وابسته به دستگاه ذره ـ زمین، که به ارتفاع y ذره از سطح زمین بستگی دارد و برابر است با کار انجام شده، با علامت منفی، توسط نیروی گرانشی وارد شده به ذره در طی جابه‌جایی از زمین (نقطه‌ی مرجع) تا ارتفاع y.

۲. انرژی وابسته به دستگاه شامل دو ذره به فاصله‌ی r که برابر است با کار انجام شده، با علامت منفی، توسط نیروی گرانشی وارد شده به یک ذره از سوی ذره دیگر، وقتی که فاصله‌ی میان دو ذره از بی‌نهایت (نقطه‌ی مرجع) تا r تغییر کند.

kinetic energy

انرژی جنبشی

انرژی وابسته به حالت حرکت یک جسم و برابر با حاصل‌ضرب نصف جرم در مجذور سرعت جسم است.

mechanical energy

انرژی مکانیکی

انرژی یک دستگاه است که می‌تواند به طور مستقیم به صورت کار ظاهر شود و برابر است با مجموع انرژی‌های جنبشی و پتانسیل دستگاه.

collision

برخورد

رویدادی منزوی است که در آن دو یا چند جسم نیروهایی به نسبت قوی در زمانی به نسبت کوتاه، به هم وارد می‌کنند.

elastic collision

برخورد کشسان

برخوردی است که در آن مجموع انرژی‌های جنبشی ذرات برخورد کننده پیش و پس از برخورد ثابت می‌ماند.

inelastic collision

برخورد ناکشسان

برخوردی است که در آن مجموع انرژی‌های جنبشی ذرات برخورد کننده پیش و پس از برخورد یکسان نیست.

completely inelastic collision **برخورد ناکشسان کامل**

برخوردی است که در آن ذرات برخورد کننده پس از برخورد، چسبیده به هم حرکت می‌کنند و دارای سرعت پایانی مشترکی برابر با سرعت مرکز جرم دستگاه ذرات می‌شوند.

resultant vector

بردار برایند

بردار برایند چند بردار برداری است که به تنهایی اثر آن چند بردار را داشته باشد.

position vector

بردار مکان

برداری است که دُم آن در نقطه‌ی مرجع، یا مبدأ دستگاه مختصات و سَر آن در مکان ذره‌ی متحرک قرار دارد.

dynamics

پویایی شناسی، دینامیک

بخشی از مکانیک است که به مطالعه‌ی حرکت ذره یا دستگاه ذرات مادی تحت اثر نیروهای وارد شده می‌پردازد.

position function

تابع مکان

تابع تغییرات مکان یک ذره نسبت به زمان است.

static eqilibrium

تعادل ایستا

یک شیء در حال تعادل ایستا دارای (الف) تکانه‌ی خطی مرکز جرم صفر، و (ب) تکانه‌ی زاویه‌ای نسبت به مرکز جرم (یا نسبت به هر نقطه‌ی دیگر) صفر، است.

تعادل (مکانیکی) **equilibrium**

یک شیء در حال تعادل مکانیکی دارای (الف) تکانه‌ی خطی مرکز جرم ثابت، و (ب) تکانه‌ی زاویه‌ای نسبت به مرکز جرم (یا نسبت به هر نقطه‌ی دیگر) ثابت، است.

تکانه‌ی خطی **linear momentum**

۱. تکانه‌ی خطی یک ذره برابر با حاصل‌ضرب جرم در سرعت ذره است؛ کمیتی برداری است.

۲. تکانه‌ی خطی دستگاه ذرات برابر است با حاصل‌ضرب جرم کل ذرات در سرعت مرکز جرم.

تکانه‌ی زاویه‌ای **angular momentum**

۱. تکانه‌ی زاویه‌ای یک ذره برابر است با حاصل‌ضرب برداری بردار مکان ذره در تکانه‌ی خطی.

۲. تکانه‌ی زاویه‌ای جسم صُلب برابر است با حاصل‌ضرب لختی دورانی (نسبت به محور دوران) در سرعت زاویه‌ای جسم.

تندی حد **terminl speed**

بیشینه‌ی تندی‌ای است که جسم در حین سقوط آزاد در یک شاره (مانند هوا یا آب) پیدا می‌کند وباهمین تندی به‌حرکت ادامه می‌دهد.

تندی خطی **linear speed**

۱. بزرگی سرعت خطی است.

۲. برابر است با مشتق مسافت کمان پیموده شده نسبت به زمان.

تندی زاویه‌ای **angular speed**

آهنگ زمانی تغییرات زاویه‌ی پیموده شده توسط یک ذره در حرکت دورانی و برابر با بزرگی سرعت زاویه‌ای است.

تندی لحظه‌ای، تندی **instantaneous speed**

آهنگ زمانی تغییرات مسافت پیموده شده توسط یک ذره و برابر با بزرگی بردار سرعت در هر لحظه است؛ هیچ‌گونه جهت و علامت جبری ندارد.

تندی متوسط **average speed**

۱. برابر است با نسبت مسافت پیموده شده توسط یک ذره به بازه‌ی زمانی‌ای که در آن این مسافت پیموده شده است؛ کمیتی نرده‌ای است.

۲. کمیتی نرده‌ای است که متوسط آهنگ زمانی مسافت کل پیموده شده را در زمان سپری شده نشان می‌دهد.

توان لحظه‌ای، توان **istantaneous power**

۱. آهنگ زمانی تغییرات کار انجام شده توسط یک دستگاه در هر لحظه است؛ کمیتی نرده‌ای است.

۲. برابر با مشتق تابع کار انجام شده توسط یک دستگاه نسبت به زمان است.

توان متوسط **average power**

برابر با نسبت کار انجام شده توسط یک دستگاه به بازه‌ی زمانی‌ای که در آن کار انجام شده است.

ثانیه **second (s)**

زمانی است که طول می‌کشد تا نور (با طول موج خاص) گسیل شده از اتم سزیوم ـ ۱۳۳، ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ نوسان انجام دهد.

جابه‌جایی، تغییر مکان **displacement**

برداری است که از مکان آغازی ذره‌ی متحرک در جهت مکان پایانی ذره رسم می‌شود و برابر است با تفاضل بردار مکان پایانی و مکان آغازی ذره.

جابه‌جایی زاویه‌ای **angular displacement**

تغییر مکان زاویه‌ای ذره‌ی متحرک در حرکت دورانی است؛ جابه‌جایی زاویه‌ای در جهت پادساعت‌گرد مثبت و در جهت ساعت‌گرد منفی است.

جرم **mass**

معیاری کمّی از مقاومت یک جسم در برابر شتاب‌دار شدن است و مشخصه‌ای است که نیروی وارد شده به جسم را به شتاب حاصل از نیرو ربط می‌دهد.

جسم صُلب **rigid body**

جسمی است که تحت اثر نیروهای خارجی فاصله‌ی اجزاء، شکل و اندازه‌ی آن ثابت می‌ماند.

چارچوب مرجع لَخت، چارچوب لَخت

inertial reference frame

چارچوبی است که در آن قانون‌های نیوتون صدق می‌کنند.

حرکت **motion**

هرگاه فاصله‌ی ذره‌ای نسبت به یک مرجع انتخابی برحسب زمان تغییر کند، گوییم ذره نسبت به آن مرجع در حال حرکت است؛ حرکت و سکون مفاهیمی نسبی‌اند.

حرکت پرتابه‌ای projectile motion

حرکتی دو بعدی در صفحه‌ی قائم است که ذره‌ی پرتاب شده (به نام **پرتابه**) با سرعت آغازی معین v_0 و تحت زاویه‌ی θ_0 (نسبت به راستای افقی) در هوا (یا در خلاء) انجام می‌دهد. این حرکت یک **مؤلفه‌ی افقی** با شتاب صفر و یک **مؤلفه‌ی قائم** با شتاب ثابت و به پایین‌سو (شتاب سقوط آزاد g) دارد؛ با چشم‌پوشی از نیروی پسار هوا مسیر حرکت ذره به ازای $0 \le \theta_0 \le 90°$ سهمی شکل است.

حرکت دایره‌ای یکنواخت uniform circular motion

حرکت یک ذره با تندی ثابت بر روی دایره یا کمانی از دایره است.

حرکت‌شناسی، سینماتیک kinematics

بخشی از مکانیک است که به بحث درباره‌ی حرکت اشیا بدون توجه به نیروهای مؤثر بر آن‌ها می‌پردازد.

زمان پلانک Planck time

زمانی است که می‌گذرد تا یک فوتون با تندی نور مسافتی برابر با طول پلانک را می‌پیماید؛ این زمان نزدیک‌ترین زمان پس از وقوع مِه‌بانگ (انفجار بزرگ) است که در آن قانون‌های فیزیک را آن‌طور که می‌شناسیم اعتبار یافته و به کار رفته‌اند.

سال نوری light-year(ly)

مسافتی است که نور در خلاء در مدت یک سال می‌پیماید.

سرعت خطی linear velocity

همان سرعت است و اصطلاحی است که، به طور معمول، در حرکت دورانی به کار می‌رود؛ برداری است مماس بر مسیر دایره‌ای و در جهت دوران ذره‌ی متحرک.

سرعت زاویه‌ای (لحظه‌ای) angular velocity

۱. آهنگ زمانی تغییرات تابع مکان زاویه‌ای یک ذره در هر لحظه است؛ کمیتی برداری است.

۲. برابر است با مشتق تابع مکان زاویه‌ای یک ذره نسبت به زمان.

سرعت زاویه‌ای متوسط average angular velocity

برابر است با نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای یک ذره به بازه‌ی زمانی‌ای که در آن جابه‌جایی انجام شده است؛ کمیتی برداری است.

سرعت لحظه‌ای، سرعت instantaneous velocity

۱. آهنگ زمانی تغییرات تابع مکان یک ذره در هر لحظه است؛ کمیتی برداری است.

۲. برابر است با مشتق تابع مکان یک ذره نسبت به زمان.

سرعت متوسط average velocity

۱. برابر است با نسبت جابه‌جایی یک ذره به بازه‌ی زمانی‌ای که در آن جابه‌جایی انجام شده است؛ کمیتی برداری است.

۲. کمیتی برداری است که متوسط آهنگ زمانی بردار جابه‌جایی را در بازه‌ی زمانی معینی نشان می‌دهد.

شتاب خطی linear acceleration

۱. همان شتاب است و اصطلاحی است که، به طور معمول، در حرکت دورانی به کار می‌رود؛ دارای دو مؤلفه‌ی شعاعی و مماسی است.

۲. برابر است با مشتق سرعت خطی.

شتاب زاویه‌ای (لحظه‌ای) angular acceleration

۱. آهنگ زمانی تغییرات سرعت زاویه‌ای یک ذره در هر لحظه است؛ کمیتی برداری است.

۲. برابر است با مشتق اول سرعت زاویه‌ای، یا مشتق دوم تابع مکان زاویه‌ای یک ذره نسبت به زمان.

شتاب زاویه‌ای متوسط average angular acceleration

برابر است با نسبت تغییر سرعت زاویه‌ای یک‌ذره به بازه‌ی زمانی‌ای که در آن تغییر سرعت زاویه‌ای انجام شده است؛ کمیتی برداری است.

شتاب لحظه‌ای، شتاب instantaneous acceleration

۱. آهنگ زمانی تغییرات سرعت یک ذره در هر لحظه است؛ کمیتی برداری است؛ شتاب ممکن است حاصل تغییر جهت سرعت، یا تغییر بزرگی سرعت، یا هر دو، باشد.

۲. برابر است با مشتق سرعت یا مشتق دوم تابع مکان یک ذره نسبت به زمان.

شتاب متوسط average acceleration

برابر است با نسبت تغییر سرعت یک ذره به بازه‌ی زمانی‌ای که در آن تغییر سرعت انجام شده است؛ کمیتی برداری است.

ضربه Impulse

برابر با تغییر تکانه‌ی خطی یک جسم در برخورد است.

قانون اول نیوتون درباره‌ی حرکت Newton's first law of motion

هرگاه جسمی تحت اثر هیچ نیروی خالصی قرار نگیرد، سرعت آن نمی‌تواند تغییر کند؛ یعنی جسم نمی‌تواند شتاب داشته باشد.

قانون پایستگی انرژی **law of conservation of energy**

در یک دستگاه منزوی انرژی نه آفریده می‌شود و نه نابود می‌شود، بلکه تنها می‌تواند از صورتی به صورت دیگر تبدیل شود؛ انرژی کل یک دستگاه منزوی همیشه پایسته است.

قانون پایستگی تکانه‌ی خطی
law of conservation of linear momentum

۱. اگر هیچ نیروی خارجی برایندی به دستگاه شامل ذرات وارد نشود، تکانه‌ی خطی کل دستگاه ثابت می‌ماند.
۲. در یک دستگاه بسته و منزوی درگیر در برخورد، تکانه‌ی خطی هر ذره‌ی برخورد کننده می‌تواند تغییر کند، اما تکانه‌ی خطی کل دستگاه، چه برخورد کشسان باشد چه ناکشسان، نمی‌تواند تغییر کند.

قانون پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای
law of conservation of angular momentum

اگر هیچ گشتاور نیروی خارجی برایندی به یک دستگاه وارد نشود، تکانه‌ی زاویه‌ای دستگاه ثابت می‌ماند و موضوع به تغییرات صورت گرفته در درون دستگاه بستگی ندارد.

قانون دوم نیوتون درباره‌ی حرکت
Newton's second law of motion

نیروی برایند وارد شده به یک جسم برابر است با حاصل‌ضرب جرم جسم در شتاب آن.

قانون سوم نیوتون درباره‌ی حرکت
Newton's third law of motion

هرگاه دو جسم برهم کنش داشته باشند نیروهای وارد شده به هر یک از آن دو از سوی جسم دیگر همیشه از لِحاظ بزرگی مساوی و از لحاظِ جهت مخالف یکدیگرند.

قضیه‌ی کار ـ انرژی **work – energy theorem**

در یک جابه‌جایی معین کار خالص انجام شده روی یک جسم توسط نیروی برایند خارجی برابر است با تغییر انرژی جنبشی جسم در طی آن جابه‌جایی.

کار **work**

۱. انرژی‌ای است که با وارد کردن نیروی خارجی به یک دستگاه، به آن داده یا از آن گرفته می‌شود؛ کمیتی نرده‌ای است.
۲. وقتی یک نیرو در راستای خود جابه‌جا شود کار انجام می‌شود؛ کار انجام شده توسط نیروی ثابت برابر است با حاصل‌ضرب جابه‌جایی در تصویر نیرو بر راستای جابه‌جایی.

کشسانی **elasticity**

۱. خاصیتی است در یک ماده‌ی جامد که شکل و اندازه‌ی ماده را تحت اثر نیروهای مخالف تغییر می‌دهد.
۲. عبارت است از وجود نیروهایی که هر بخش جابه‌جا شده از محیط (جامد یا شاره) را می‌خواهند به وضع اول برگردانند.

کمیت برداری **vector quantity**

کمیتی است که با دو مشخصه‌ی جهت و بزرگی تعریف می‌شود و از قاعده جمع برداری پیروی می‌کند.

کمیت فیزیکی **physical quantity**

مفهومی است که برای توصیف کمّی پدیده‌های فیزیکی به کار می‌رود.

کمیت نرده‌ای **scalar quantity**

کمیتی است که فقط با عدد (مثبت یا منفی) و یکای مناسب مشخص می‌شود؛ جهت ندارد و از قاعده‌های جبر معمولی پیروی می‌کند.

کیلوگرم **kilogram(kg)**

جرم استوانه‌ای از آلیاژ پلاتین ـ ایریدیوم است که در اداره‌ی بین‌المللی اوزان و مقیاس‌ها در سِوْر، نزدیک پاریس، نگهداری می‌شود.

گرانیگاه **center of gravity (cog)**

نقطه‌ی اثر نیروی گرانشی وارد شده به یک جسم است.

گشتاور نیرو **torque**

۱. توانایی نیرو برای چرخاندنِ یک جسم به دور یک محور است؛ برابر است با حاصل‌ضرب برداری بردار مکان نقطه‌ی اثر نیرو در بردار نیرو.
۲. برابر است با مشتق تکانه‌ی زاویه‌ای یک ذره نسبت به زمان.

لَختی **inertia**

خاصیتی است از ماده که به صورت مقاومت در برابر تغییر تکانه‌ی خطی یک جسم ظاهر می‌شود؛ لَختی از خاصیت‌های اصلی جرم است.

متر **meter(m)**

مسافتی است که نور در خلاء در بازه‌ی زمانی $\frac{۱}{۲۹۹۷۹۲۴۵۸}$ ثانیه می‌پیماید.

مرتبه‌ی بزرگی **order of magnitude**

مرتبه‌ی بزرگی یک عدد عبارت است از توان ۱۰ در آن عدد وقتی که با نمادگذاری علمی نوشته می‌شود.

مرکز جرم **center of mass(com)**

نقطه‌ای است در یک جسم گسترده که در موقع حرکت کردن جسم گویی تمام جرم در آنجا متمرکز شده است و تمام نیروهای خارجی به آن نقطه اثر می‌کنند.

مسافت کمانی **arc distance**

طول کمان پیموده شده توسط ذره‌ی متحرک در حرکت دورانی است.

مکان **position**

مختصات سَر بردار مکان، یا مختصات محل یک ذره نسبت به یک نقطه‌ی مرجع است.

مکان زاویه‌ای **angular position**

زاویه‌ی خط وصل کننده‌ی ذره‌ی متحرک به دور محور دوران نسبت به خط مرجع، در حرکت دورانی است.

مکانیک **mechanics**

شاخه‌ای از فیزیک است که به مطالعه و فرمول‌بندی قاعده‌های کلی مربوط به رفتار سیستم‌های فیزیکی تحت تأثیر انواع برهم کنش‌های با محیط می‌پردازد؛ به طور کلی، به دو بخش **حرکت‌شناسی (سینماتیک)** و **پویایی شناسی (دینامیک)** تقسیم می‌شود.

مکانیک نیوتونی **Newtonian mechanics**

شاخه‌ای است از فیزیک مبتنی بر قانون‌های نیوتون درباره‌ی حرکت که در مورد اشیای بزرگ (در مقایسه با ابعاد ذرات اتمی و زیراتمی) و دارای تندی‌های کم (در مقایسه با تندی نور) به کار می‌رود؛ این مکانیک مبحث ویژه‌ای از دو مفهوم جامع‌تر **مکانیک کوانتومی** و **مکانیک نسبیتی** است، به طوری که در شرایط مناسب قانون‌های آن را می‌توان از این دو مفهوم استنتاج کرد.

نمودار جسم ـ آزاد **free – body diagram**

نموداری است که جسم منزوی و تنها را همراه با نیروهای خارجی وارد شده به جسم از سوی اشیای پیرامون نشان می‌دهد.

نیرو **force**

۱. کمیتی ناشی از برهم کنش دو ذره (یا ذره و محیط پیرامون) است؛ نیروها همیشه به صورت زوج وجود دارند؛ نیرو موجب شتاب دادن اجسام می‌شود و کمیتی برداری است.

۲. برابر است با مشتق تکانه‌ی خطی یک ذره نسبت به زمان.

نیروی پایستار **conservative force**

نیرویی که کار خالص انجام شده توسط آن روی یک ذره‌ی متحرک از شکل مسیر حرکت مستقل است و تنها به نقطه‌های آغازی و پایانی حرکت بستگی دارد؛ تابع‌های انرژی پتانسیل را فقط برای نیروهای پایستار می‌توان تعریف کرد؛ نیروی گرانشی نمونه‌ای از نیروهای پایستار است.

نیروی گرانشی **gravitational force**

از جاذبه‌ی گرانشی میان دو ذره ناشی می‌شود؛ با جرم ذرات نسبت مستقیم و با مجذور فاصله‌ی میان آن‌ها نسبت معکوس دارد.

نیروی مرکزگرا **centripetal force**

نیرویی است در حرکت دایره‌ای در راستای شعاع و به سوی مرکز دایره، که جسم در حال حرکت را بر روی مسیری دایره‌ای نگه‌می‌دارد. این نیرو با تغییر دادن جهت سرعت به جسم شتابی به نام **شتاب مرکزگرا** می‌دهد.

نیروی ناپایستار **nonconservative force**

نیرویی که کار خالص انجام شده توسط آن روی یک ذره‌ی در حال حرکت میان دو نقطه به شکل مسیر پیموده شده در میان آن دو نقطه بستگی دارد؛ برای نیروهای ناپایستار هیچ تابع انرژی پتانسیلی نمی‌توان تعریف کرد؛ نیروی اصطکاک نمونه‌ای از نیروهای ناپایستار است.

وزن **weight**

نیروی جاذبه‌ی گرانشی وارد شده به اجسام از سوی زمین (یا هر سیاره‌ی دیگر) است و برحسب فاصله از مرکز زمین (یا مرکز سیاره) تغییر می‌کند.

یکای نجومی **astronomical unit(AU)**

فاصله‌ی متوسط زمین از خورشید است، که به تقریب برابر با $۱/۵۰ \times ۱۰^{۸}$km است.

DICTIONARY

واژه‌نامه

absolute value	قدر مطلق
accelerated motion	حرکت تندشونده، حرکت شتاب‌دار
accuracy 1	درستی
accuracy 2	دقت
action-reaction forces	نیروهای کنش ـ واکنش
adding forces	ترکیب کردن نیروها
air resistance	مقاومت هوا
anticlockwise moment	گشتاور پادساعت‌گرد
antiderivative	پادمشتق
aphelion distance	فاصله‌ی اوج
apparent weight	وزن ظاهری
associative law	قانون شرکت‌پذیری
asteroid	سیارک
astronomical unit(AU)	یکای نجومی
atomic mass unit(u)	یکای جرم اتمی
average power	توان متوسط

balance	توازن
ballet performer	باله کار
ballistic pendulum	آونگ بالیستیک
base quantity	کمیت اصلی
base units	یکاهای اصلی
black hole	سیاه چاله
big bang	مِه‌بانگ، انفجار بزرگ
block - spring system	دستگاه جسم ـ فنر
bulk modulus	مدول کپه‌ای، مدول حجمی

calculus	حسابان
centripetal acceleration	شتاب مرکزگرا
chain-link conversion	تبدیل زنجیره‌ای
clockwise moment	گشتاور ساعت‌گرد
coefficient of friction	ضریب اصطکاک
commutative law	قانون جابه‌جایی
component	مؤلفه
computer	رایانه، کامپیوتر
conical pendulum	آونگ مخروطی
conservative force	نیروی پایستار
conversion factor	ضریب تبدیل
conversion of energy	تبدیل انرژی
curtain of death	پوشش مرگ‌بار
curvature of space	خمیدگی فضا
cycloid	چرخزاد

dart	نیزک
decelaration	شتاب کُندکننده
density	چگالی
derived quantity	کمیت فرعی
dimensional analysis	تحلیل ابعادی
dimensions	ابعاد (کمیت‌ها)
direction 1	راستا
direction 2	سو، جهت
displacement	جابه‌جایی، تغییر مکان
dot product	ضرب نقطه‌ای
downward	پایین‌سو، سمت پایین
drag coefficient	ضریب پسار
drag force	نیروی پسار، نیروی پس‌کشی

eastward	خاورسو
eccentricity	خروج از مرکز
effective cross – sectional area	مساحت مقطع مؤثر
elapsed time	زمان سپری شده
energy transfer	انتقال انرژی

equal – arm balance	ترازوی همسان بازو، ترازوی شاهین‌دار
equilibrium points	نقطه‌های تعادل
escape speed	تندی فرار
event horizon	افق رویداد
extended object	شیء گسترده
external force	نیروی خارجی
extreme value	مقدار فرین
extremum	فرین
flywheel	چرخ لنگر
forward	پیش‌سو، سمت جلو
free – fall acceleration	شتاب سقوط آزاد
freely falling bodies	سقوط آزاد اجسام
final	پایانی، نهایی
fixed axis	محور ثابت
force constant	ثابت نیرو
force law	قانون نیرو
free – body diagram	نمودار جسم ـ آزاد
friction force	نیروی اصطکاک
fulcrum	نقطه‌ی اتکا
general theory of relativity	نظریه‌ی نسبیت عام
geosynchronous orbit	مدار زمین ـ همگام
glancing collision	برخورد پهلو به پهلو
gravitational acceleration	شتاب گرانشی
gravitational attraction	جاذبه‌ی گرانشی
gravitational constant	ثابت گرانش
gravitational field	میدان گرانشی
gravitational lensing	همگرایی گرانشی
great attractor	رباینده‌ی بزرگ
hanging body	جسم آویخته
head – on collision	برخورد شاخ به شاخ
hoop	طوقه، حلقه
horizontal range	بُرد افقی

horsepower	قوه اسب
hot rod	(خودرو) گرم تاز
hydraulic stress	تنش هیدرولیکی
hypotenuse	وتر
iceboat	قایق یخ‌پیما
impulse	ضربه
inclined plane	سطح شیب‌دار
indeterminate structures	ساختارهای نامعین
individual	فردی
inertial reference frame	چارچوب مرجع لَخت
initial	آغازی، اولی
interaction	برهم کنش
internal energy	انرژی درونی
internal force	نیروی درونی
International System of Units (SI)	دستگاه بین‌المللی یکاها
inward	درون‌سو، سمت درون
isolated system	دستگاه منزوی
jumper	پرشکار
Kepler's laws	قانون‌های کپلر
kinetic friction	اصطکاک جنبشی
latitude	عرض جغرافیایی
leftward	چپ‌سو، سمت چپ
lift	(نیروی) بر آر، (نیروی) بالابری
lifting force	نیروی برآر
line of action	خط اثر
light pulse	تپ نور، پالس نور
liquifaction	آبگونش
longitude	طول جغرافیائی
magnitude	بزرگی
mass element	عنصر جرمی
maximum	بیشینه

اندازه‌گیری	measurement
نصف‌النهار	meridian
شهاب‌سنگ	meteorite
دستگاه متریک	metric system
کهکشان راه شیری	Milky Way galaxy
کمینه	minimum
پودمان	module
بازوی گشتاور	moment arm
قرقره‌ی متحرک	movable pulley
ضرب کردن بردارها	multiplying vectors
نیروی برآر منفی	negative lift
نیروی خالص، نیروی برایند	net force
تعادل بی‌تفاوت	neutral equilibrium
چارچوب نالَخت	noninertial frame
نیروی عمودی	normal force
حرکت یک بعدی	one – dimensional motion
سمت‌گیری	orientation
برون‌سو، سمت بیرون	outward
سهمی شکل	parabolic
قضیه‌ی محورهای موازی	parallel - axis theorem
مسیر	path
فاصله‌ی حضیض	perihelion distance
دوره‌ی تناوب، دوره	period
ثابت‌های فیزیکی	physical constants
نقطه‌ی چرخشگاه	pivot point
شیء نقطه‌ای	point object
بردار مکان	position vector
تابع انرژی پتانسیل	potetial energy function
آهنگ حرکت تقدیمی	precssion rate
دقت	precision
فشار	pressure
اصل هم‌ارزی	principle of equivalence
پرتابه	projectile
حرکت پرتابه‌ای	projectile motion
مکانیک کوانتومی	quantum mechanics
اختروش	quasar
شعاع چرخش	radius of gyration
شیب‌راهه	ramp
گستره	range 1
بُرد	range 2
حرکت راست‌خط، حرکت در خط راست	rectilinear motion
پیکربندی مرجع	reference configuration
خط مرجع	reference line
نقطه‌ی مرجع	reference point
حرکت نسبی	relative motion
نظریه‌ی نسبیت	relativity theory
حالت آرامش	relaxed state
شرط‌های لازم تعادل	requirements of equilibrium
تجزیه کردن نیرو	resolving a force
نیروی بازگرداننده	restoring force
نیروی برایند	resultant force
دستگاه مختصات راست ـ دست	right – handed coordinate system
قاعده‌ی دست راست	right – hand rule
راست‌سو، سمت راست	rightward
حرکت غلتشی	rolling motion
شیء غلتان	rolling object
تعادل دورانی	rotational equilibrium
لَختی دورانی	rotational inertia
حرکت دورانی	rotational motion
چرخانه، روتور	rotor
ماهواره	satellite
مؤلفه‌ی نرده‌ای	scalar component

ضرب نرده‌ای	scalar product
کمیت نرده‌ای	scalar quantity
نمادگذاری علمی	scientific notation
آن	shake
تنش برشی	shearing stress
مدول برشی	shear modulus
موج ضربه‌ای	shock wave
رقم‌های بامعنی	significant figures
تک برخورد	single collision
تختال	slab
اصطکاک لغزشی	sliding friction
حرکت لغزشی	sliding motion
شیب	slope
منظومه‌ی شمسی	solar system
کاوند فضایی	space probe
نظریه‌ی نسبیت خاص	special theory of relativity
تندی سنج	speedometer
تندی	speed
ترازوی فنری	spring balance
ثابت فنر	spring constant
تعادل پایدار	stable equilibrium
تعادل ایستای پایدار	stable static equilibrium
اصطکاک ایستایی	static friction
سیارک سنگی	stony asteroid
کرنش	strain
پیمانه‌ی کرنش	strain gauge
ذرات زیراتمی	subatomic particles
قایق خورشیدی	sun yacht
اَبرخوشه	supercluster
اصل برهم‌نهی	superposition principle
فنّاوری، تکنولوژی	technology
تلسکوپ، دوربین	telescope
دما	temperature
تنش کششی	tensile stress
نیروی کشش، کشش	tension
(نیروی) پیش‌ران	thrust
بازه‌ی زمانی	time interval
مسیر	trajectory
تعادل انتقالی	translational equilibrium
حرکت انتقالی	translational motion
مسافت پیموده شده	traveled distance
اثر چرخانندگی	turning action
حرکت دوبعدی	two - dimensional motion
استقامت نهایی	ultimate strength
حرکت دایره‌ای یکنواخت	uniform circular motion
بردار یکه	unit vector
نمادگذاری بردار یکه	unit vector notation
زمان جهانی	universal time
تعادل ناپایدار	unstable equilibrium
تعادل ایستای ناپایدار	unstable static equilibrium
مسابقه‌ی رو به زیر	upside – down racing
بالاسو، سمت بالا	upward
مؤلفه‌ی برداری	vector component
ضرب برداری	vector product
کمیت برداری	vector quantity
مجموع برداری	vector sum
سرعت	velocity
راستیابی	verify
باخترسو	westward
پایگاه شبکه‌ی جهانی	world web site
استقامت تسلیم	yield strength
مدول یانگ، ضریب یانگ	Young modulus

BIBLIOGRAPHY

کتاب‌شناسی

الف. مرجع‌های فارسی

۱. **فرهنگ واژه‌های مصوب فرهنگستان**، گروه واژه گزینی فرهنگستان زبان و ادب فارسی، نشر آثار (۱۳۸۷)

۲. **فرهنگ واژه‌های مصوب فرهنگستان**، گروه واژه گزینی فرهنگستان زبان و ادب فارسی، شامل دفترهای پنجم تا نهم، نشر آثار (۱۳۹۰)

۳. **صادقی**، علی اشرف؛ **زندی مقدم**، زهرا، **فرهنگ املایی خط فارسی**، فرهنگستان زبان و ادب فارسی، نشر آثار (۱۳۸۵)

۴. **ابوکاظمی**، محمدابراهیم و همکاران، **واژه‌نامه‌ی فیزیک**، مرکز نشر دانشگاهی (۱۳۷۷)

۵. **دهخدا**، علی‌اکبر، **لغت‌نامه‌ی دهخدا**، مؤسسه‌ی لغت‌نامه‌ی دهخدا (۱۳۷۷)

۶. **انوری**، حسن، **فرهنگ بزرگ سخن**، انتشارات سخن (۱۳۸۱)

ب. مرجع‌های انگلیسی

1. Mc Graw-Hill Concise Encyclopedia of Physics (2005)
2. Dictionary of Physics 3rd.ed. Mc Graw-Hill (2003)
3. Dictionary of Scientists, Cambridge University Press (2002)
4. The Cambridge Encyclopedia, Combridge University Press 4th ed. (2000)
5. Dictionary of Scientists, Oxford University Press (1999)
6. Dictionary of Science and Technology, Chambers (1999)

نمایه

INDEX

آبگونش ۱۱
آن ۱۸
آونگ
~ بالیستیک ۳۷۰
~ مخروطی ۲۳۱
آهنگ
~ برخورد ۳۶۰
~ حرکت تقدیمی ۴۹۹

ابرماژلانی بزرگ ۵۶۴
اجسام صُلب ۳۴۴
اختروش ۵۹۴
استاندارد (ها) ۲
~ جرم ۹
~ زمان ۷
~ طول ۵
کیلوگرم ~ ۱۰
~ ی ثانوی ۵
استروبوسکوپ ۴۱
استقامت تسلیم ۵۳۷
استقامت نهایی ۵۳۷
اصطکاک ۱۹۸، ۲۰۱، ۲۱۶
ضریب ~ ایستایی ۲۰۲، ۲۱۶
ضریب ~ جنبشی ۲۰۲، ۲۱۷
~ لغزشی ۲۰۱
نیروی ~ ۱۹۸، ۲۱۶
~ ایستایی ۱۹۹، ۲۱۶
~ جنبشی ۱۹۹، ۲۱۶
~ و غلتش ۴۷۲
اصل برهم نهی ۱۵۲، ۵۶۸، ۵۹۵
گرانش و ~ ۵۶۸
~ نیروها ۱۵۲، ۵۶۸
اصل پایستگی انرژی مکانیکی ۲۹۴، ۳۱۴
اصل هم‌ارزی ۵۹۲، ۵۹۳
افق رویداد ۵۷۵
اندازه گرفتن اشیا ۲
اندازه‌گیری در فیزیک ۲، ۱۲
انرژی ۲۳۸
پایستگی ~ ۳۰۸، ۳۱۵
~ پتانسیل ۲۸۴، ۳۱۴
~ جنبشی ۲۳۸، ۲۶۶
~ درونی ۳۰۸
~ گرمایی ۲۸۶، ۳۰۵
~ ماهواره‌ها ۵۸۸، ۵۹۶
~ مکانیکی ۲۹۳، ۳۱۴
انرژی پتانسیل ۲۸۴، ۳۱۴
تابع ~ ۲۹۹، ۳۱۴
کار و ~ ۲۸۴
~ کشسانی ۲۸۴، ۲۹۱، ۳۱۴
~ گرانشی ۲۸۴، ۲۹۰، ۳۱۴، ۵۷۸، ۵۹۶
منحنی ~ ۲۹۹، ۳۱۴
~ و نیرو ۵۸۱
~ یک دستگاه ۵۷۸، ۵۹۶
انرژی جنبشی ۲۳۸، ۲۶۶
~ در حرکت غلتشی ۴۷۱
~ دورانی ۴۲۶، ۴۴۷
قضیه‌ی کار ـ ~ ۲۴۴، ۲۶۶
کار و ~ ۲۴۱، ۲۶۶
~ و لختی دورانی ۴۲۷، ۴۴۷
انرژی مکانیکی ۲۹۳، ۳۱۴
اصل پایستگی ~ ۲۹۴، ۳۱۵
بازوی گشتاور ۴۳۶، ۴۴۷
برخورد ۳۵۷، ۳۸۲
آهنگ ~ ۳۶۰
تکانه‌ی خطی در ~ ۳۶۷
~ پهلو به پهلو ۳۴۹
تک ~ ۳۵۷
~ شاخ به شاخ ۳۴۹
~ کشسان ۳۶۷
~ ناکشسان ۳۶۷
~ و ضربه ۳۵۷
~ های کشسان یک بعدی ۳۷۲، ۳۸۲
~ های دوبعدی ۳۷۷، ۳۸۲
~ های ناکشسان یک بعدی ۳۶۷، ۳۸۲
برخورد ناکشسان کامل ۳۶۷
بردار (ها) ۶۶ ، ۸۶
برایند دو ~ ۶۷
تجزیه کردن ~ ۶۹
تفریق کردن ~ ۶۸
~ جابه‌جایی ۶۶
جمع کردن ~ ۶۷، ۷۵، ۸۶
ضرب ~ ی ۸۲ ، ۸۷
ضرب کردن ~ ۸۰
کمیت ~ ی ۶۵، ۶۶
معادله‌ی ~ ی ۶۷
~ مکان ۱۰۰، ۱۲۵
مؤلفه‌ی ~ ی ۶۹، ۸۷
~ و قانون‌های فیزیک ۷۶
~ یکه ۷۴
برد افقی ۱۱۳

پایستگی انرژی ۳۰۸، ۳۱۵

قانون ~ ۳۰۸، ۳۱۵

~ مکانیکی ۲۹۳، ۳۱۴

پایستگی تکانه‌ی خطی ۳۶۲، ۳۸۲

قانون ~ ۳۶۳، ۳۸۲

پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای ۴۹۲، ۵۰۱

قانون ~ ۴۹۲، ۵۰۱

پرتابه ۱۰۹

مسیر ~ ۱۱۳

پیش‌ران موتور موشک ۳۸۰، ۳۸۳

پیکربندی مرجع ۲۹۰

پیمانه‌ی کرنش ۵۳۸

تابع‌های مثلثاتی ۷۲

~ معکوس ۷۲

تبدیل زنجیره‌ای ۱، ۴، ۱۲

تبدیل یکاها ۱، ۴، ۱۲

تپ‌اختر ۱۴

تپ نوری ۸

تحلیل حرکت پرتابه‌ای ۱۱۱

ترازوی فنری ۱۶۳

ترازوی همسان ـ بازو ۱۶۳

تعادل ۵۲۰

~ انتقالی ۵۲۲

~ ایستا ۵۲۰، ۵۴۱

~ بی‌تفاوت ۳۰۱

~ پایدار ۳۰۱

~ دورانی ۵۲۲

~ ناپایدار ۳۰۱

شرط‌های لازم تعادل ۵۲۲

نقطه‌های ~ ۳۰۱

تعادل ایستا (ی) ۵۲۰، ۵۴۱

~ پایدار ۵۲۰

~ ناپایدار ۵۲۰

تغییر دادن یکاها ۴

تکانه‌ی خطی ۳۵۴، ۳۸۱

پایستگی ~ ۳۶۲، ۳۸۲

~ در برخورد ۳۶۸

~ دستگاه ذرات ۳۵۵

ضربه و ~ ۳۵۸، ۳۸۲

قانون پایستگی ~ ۳۶۳، ۳۸۲

قضیه‌ی ضربه ـ ~ ۳۵۸، ۳۸۲

~ و انرژی جنبشی در برخورد ۳۶۷

تکانه‌ی زاویه‌ای ۳۵۴، ۴۸۲، ۵۰۱

پایستگی ~ ۴۹۲، ۵۰۱

~ جسم صُلب ۴۹۰، ۵۰۱

~ دستگاه ذرات ۴۸۹، ۵۰۱

قانون پایستگی ~ ۴۹۲، ۵۰۱

تندی ۲۹

~ حد ۲۰۷، ۲۱۷

~ زاویه‌ای ۴۱۲، ۴۴۶

~ فرار ۵۸۱، ۵۹۶

~ لحظه‌ای ۲۸

~ متوسط ۲۴، ۲۶، ۴۶

~ نور ۶

تنش ۵۳۶، ۵۴۱

~ برشی ۵۳۶

~ کششی ۵۳۶

~ هیدرولیکی ۵۳۸

توان ۲۶۳، ۲۶۷، ۳۱۲، ۳۱۵، ۴۴۵

~ در حرکت دورانی ۴۴۵، ۴۴۷

~ لحظه‌ای ۲۶۳، ۲۶۷، ۳۱۲، ۳۱۵

~ متوسط ۲۶۳، ۲۶۷، ۳۱۲، ۳۱۵

یکای ~ ۲۶۳

ثابت

شتاب ~ ۳۵، ۴۶

شتاب زاویه‌ای ~ ۴۱۸، ۴۴۶

~ فنر ۲۵۳، ۲۶۶

~ گرانش ۵۶۵، ۵۹۵

ثانیه ۹، ۶۱۳

جابه‌جایی ۲۳، ۴۶، ۱۰۰

بردار ~ ۶۶

~ زاویه‌ای ۴۱۱، ۴۴۶

جرم ۱۲، ۱۵۵، ۱۷۷، ۶۱۳

استاندارد ~ ۹

مرکز ~ ۳۴۲، ۳۸۱

جسم صُلب ۳۴۴، ۳۵۰، ۴۰۹

جمع کردن بردارها ۶۷، ۷۵، ۸۶

چارچوب مرجع ۱۲۱، ۱۲۲

~ لَخت ۱۵۳، ۱۷۷

~ نالَخت ۱۵۴، ۱۷۷

چرخانه ۴۳۳

چرخزاد ۴۶۸

چرخ لنگر ۴۵۱

چگالی ۱۰، ۱۲، ۲۰۶

حرکت ۲۲

~ انتقالی ۴۰۸، ۴۶۹

~ با شتاب زاویه‌ای ثابت ۴۱۸، ۴۴۶

~ پرتابه‌ای ۱۰۹، ۱۲۵

~ تقدیمی ژیروسکوپ ۴۹۸

~ دایره‌ای یکنواخت ۱۱۷، ۱۲۶، ۲۱۰، ۲۱۷

~ دورانی ۴۰۸، ۴۶۹

~ زاویه‌ای ۴۰۹

~ شناسی ۲۲

~ غلتشی ۴۶۷

~ ~ هموار ۴۶۸

~ مرکز جرم ۳۴۹

~ نسبی دو بعدی ۱۲۳
~ نسبی یک بعدی ۱۲۱
~ تقدیمی ژیروسکوپ ۴۹۸
حرکت دورانی ۴۰۸، ۴۶۹
توان در ~ ۴۴۵، ۴۴۷
کار در ~ ۴۴۲، ۴۴۷
حلقه‌ی اینشتین ۵۹۴

خروج از مرکز ۵۸۵
خط اثر ۴۳۶، ۴۴۷
خط مرجع ۴۱۰، ۴۴۶
خمیدگی فضا ۵۹۳
خمیدگی فضا زمان ۵۹۳
خودرو گرم تاز ۵۹

دستگاه ۱۵۷، ۳۰۳
~ بسته ۳۵۰، ۳۶۲
~ بین‌المللی یکاها (SI) ۳، ۱۲
~ جسم ـ فنر ۲۸۵
~ دو ذره‌ای ۳۴۳
~ متریک ۳
~ مختصات راست ـ دست ۷۴
~ منزوی ۲۹۴، ۳۰۹، ۳۱۴، ۳۶۲
دستگاه‌ها(ی)
~ با جرم متغیر ۳۷۸، ۳۸۳
~ ذرات ۳۴۳
دنباله‌دار هالی ۵۸۷
دوره‌ی تناوب ۱۱۸، ۱۲۶، ۴۲۲، ۴۴۷

رابطه‌ی میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای ۴۲۱، ۴۴۶
رباینده‌ی بزرگ ۵۶۴

زمان ۷، ۱۲، ۶۱۳
استاندارد ~ ۷
~ پلانک ۸
زن به زنجیر بسته ۵۶۴
زوج نیروی قانون سوم ۱۶۷

ژول (یکای کار و انرژی) ۲۳۹
ژیروسکوپ ۴۹۸

ساختارهای نامعین ۵۳۴
سال نوری ۵۶۴
سرعت ۲۸، ۴۶، ۱۰۳، ۱۲۵
~ خطی ۴۲۲
~ زاویه‌ای ۴۱۱، ۴۴۶
~ لحظه‌ای ۲۸، ۴۶، ۱۰۳، ۱۲۵
~ متوسط ۲۴، ۴۶، ۱۰۳، ۱۲۵
~ مرکز جرم ۳۶۹
سرعت زاویه‌ای ۴۱۱، ۴۴۶
~ لحظه‌ای ۴۱۲، ۴۴۶
~ متوسط ۴۱۱، ۴۴۶
سیارک سنگی ۴۶۲
سیاه‌چاله ۵۶۴، ۶۰۵
~ ابرسنگین ۵۶۴
سینماتیک ۲۲

شاره ۲۰۶
شبکه‌ی سه بعدی ۵۳۵
شتاب ۳۱، ۴۶
~ تند کننده ۳۲
~ ثابت ۳۵، ۴۶
~ خطی ۴۲۳، ۴۴۷
~ زاویه‌ای ۴۱۲، ۴۴۶
~ سقوط آزاد ۴۱، ۲۴۷، ۵۷۲
علامت ~ ۳۳
~ کند کننده ۳۲
~ گرانشی ۵۷۱، ۵۹۵
~ لحظه‌ای ۳۱، ۴۶، ۱۰۶، ۱۲۵
~ متوسط ۳۱، ۴۶، ۱۰۶، ۱۲۵
~ مرکز جرم ۳۵۰
~ مرکزگرا ۱۱۸، ۲۱۰، ۲۱۷
شتاب خطی ۴۲۳، ۴۴۷
مؤلفه‌ی شعاعی ~ ۴۲۴، ۴۴۷
مؤلفه‌ی مماسی ~ ۴۲۳، ۴۴۷
شتاب زاویه‌ای ۴۱۲، ۴۴۶
~ ثابت ۴۱۸، ۴۴۶
~ لحظه‌ای ۴۱۲
~ متوسط ۴۱۲، ۴۴۶
شعاع چرخش ۴۶۱
شکل زاویه‌ای قانون دوم نیوتون ۴۳۷، ۴۴۷

ضرب
~ برداری ۸۲، ۸۷
~ نرده‌ای ۸۱، ۸۷
~ نقطه‌ای ۸۱، ۸۷
ضربه ۳۵۸، ۳۸۱
تکانه‌ی خطی و ~ ۳۵۸، ۳۸۲
~ ی برخورد ۳۵۸
ضریب
~ اصطکاک ایستایی ۲۰۲، ۲۱۶
~ اصطکاک جنبشی ۲۰۲، ۲۱۷
~ پسار ۲۰۶، ۲۱۷
~ تبدیل ۴
~ کشسانی ۵۳۵

طرز کار یویو ۴۷۷
طول ۱۲، ۶۱۳
استاندارد ~ ۵

علامت کار ۲۴۳، ۲۶۶

فاصله‌ی اوج ۵۸۷
فاصله‌ی حضیض ۵۸۷
فشار ۶۱۹
~ تابشی خورشید ۱۸۵

قارچ منجبیقی ۵۲
قاعده‌ی دست راست ۸۳ ، ۸۷
قانون (ها)
~ اول نیوتون ۱۵۱، ۱۷۷
~ پایستگی انرژی ۳۰۸، ۳۱۵
~ پایستگی تکانه‌ی خطی ۳۶۳، ۳۸۲
~ پایستگی تکانه‌ی زاویه‌ای ۴۹۲، ۵۰۱
~ دوم نیوتون ۱۵۵، ۱۷۷، ۳۴۸
~ ~ برای دستگاه ذرات ۳۴۸، ۴۴۷
~ سوم نیوتون ۱۶۷، ۱۷۷
کاربرد ~ ی نیوتون ۱۶۹
~ گرانش نیوتون ۵۶۴، ۵۹۵
~ نیرو ۵۶۵
~ هوک ۲۵۳
~ ی کپلر ۵۸۴، ۵۹۶
قانون دوم نیوتون ۱۵۵، ۱۷۷، ۳۴۸
~ برای دستگاه ذرات ۳۴۸، ۳۸۱
~ در حرکت دورانی ۴۳۷
شکل زاویه‌ای ~ ۴۳۷، ۴۴۷
قانون سوم نیوتون ۱۶۷، ۱۷۷
زوج نیروی ~ ۱۶۷
قایق یخ‌پیما ۶۱
قضیه (ی)
~ پوسته‌ی نیوتون ۵۶۷، ۵۹۵
~ کار ـ انرژی جنبشی ۲۴۴، ۲۶۶
~ ضربه ـ تکانه‌ی خطی ۳۵۸، ۳۸۲
~ محورهای موازی ۴۲۹، ۴۴۷
قوه اسب ۲۶۴

کار ۲۴۱، ۲۶۶
~ خالص ۲۴۳
علامت ~ ۲۴۳، ۲۶۶
~ و انرژی جنبشی دورانی ۴۴۲، ۴۴۷
یکای ~ ۲۴۳
کار نیرو (ی)
~ بازگرداننده ۲۵۳
~ ثابت ۲۴۳، ۲۶۶
~ خارجی روی یک‌دستگاه ۳۰۳، ۳۱۵
~ فنر ۲۵۳، ۲۶۷
~ گرانشی ۲۴۷، ۲۶۶
~ متغیر ۲۵۷، ۲۶۷
کرنش ۵۳۶
پیمانه‌ی ~ ۵۳۸
منحنی تنش ـ ~ ۵۳۷
کشسانی ۵۳۵
مدول ~ ۵۳۶، ۵۴۱
کشش ۱۶۵، ۱۷۸
نیروی ~ ۱۶۵، ۱۷۸
~ و تراکم ۵۳۷، ۵۴۱
کمیت(ها)
~ برداری ۲۴، ۶۶
~ فیزیکی ۲
~ نرده‌ای ۶۶
~ ی اصلی ۲، ۱۲
کوتوله‌ی سفید ۵۶۴
کهکشان راه شیری ۵۳۶
کیلوگرم ۱۰، ۶۱۳
~ استاندارد ۱۰

گرانش (ی) ۵۶۳
انرژی پتانسیل ~ ۲۸۴، ۲۹۰، ۳۱۴، ۵۷۸، ۵۹۶
اینشتین و ~ ۵۹۲، ۵۹۶
ثابت ~ ۵۶۵، ۵۹۵
~ در درون زمین ۵۷۵
~ در نزدیکی سطح زمین ۵۷۱
شتاب ~ ۵۷۱، ۵۹۵
قانون ~ نیوتون ۵۶۴، ۵۹۵
نیروی ~ ۵۶۵
~ و اصل برهم نهی ۵۶۷، ۵۹۵
همگرایی ~ ۵۹۴
گرانیگاه ۵۲۴، ۵۴۱
گراویتون ۵۹۵
گشتاور لَختی ۴۲۷، ۴۴۷
گشتاور نیرو ۴۰۹، ۴۴۷، ۴۷۸
خاصیت برداری ~ ۴۷۸، ۵۰۰
مروری بر ~ ۴۷۸

لختی دورانی ۴۲۷، ۴۴۷
انرژی جنبشی و ~ ۴۲۷، ۴۴۷
محاسبه‌ی ~ ۴۲۹

ماشین آتوود ۱۸۸
متر ۵، ۱۲، ۶۱۳
محور
~ ثابت ۴۰۹، ۴۹۱
~ چرخش ۴۰۹
~ دوران ۴۰۹، ۴۴۹
مدارهای ماهواره‌ها ۵۸۸، ۵۹۶
مدار زمین ـ همگام ۶۰۵
مدول
~ برشی ۵۳۸
~ حجمی ۵۳۸
~ کپه‌ای ۵۳۸، ۵۴۱
~ کشسانی ۵۳۶، ۵۴۱
~ یانگ ۵۳۷، ۵۴۱
مرجع

پیکربندی ~ ۲۹۰
چارچوب ~ ۱۲۱، ۱۲۲
خط ~ ۴۱۰، ۴۴۶
نقطه‌ی ~ ۲۹۰، ۳۱۴
مرکز جرم ۳۴۲، ۳۸۱
سرعت ~ ۳۶۹
مروری بر گشتاور نیرو ۴۷۸
مسئله‌های نامعین ۵۳۴
مساحت مقطع مؤثر ۲۰۶، ۲۱۷
مساحت زاویه‌ای ۴۰۹
مسیر پرتابه ۱۱۳
معادله‌ی برداری ۶۷
معادله‌ی مسیر ۱۱۳
مکان ۲۳، ۴۶، ۱۰۰
~ زاویه‌ای ۴۱۰، ۴۴۶
مکانیک ۱۵۱
~ نیوتونی ۱۵۱، ۱۷۷
منظومه‌ی شمسی ۵۸۷، ۵۹۶
موج ضربه‌ای ۵۰
موشک ۳۷۸
مؤلفه (ی) ۶۹
~ برداری ۷۵، ۸۷
~ شعاعی شتاب خطی ۴۲۴، ۴۴۷
~ مماسی شتاب خطی ۴۲۳، ۴۴۷
~ نرده‌ای ۷۵، ۸۷
~ یک بردار ۶۹، ۸۷
منحنی انرژی پتانسیل ۲۹۹، ۳۱۴
مِه بانگ ۸

نظریه‌ی نسبیت ۱۵۱
~ خاص ۱۵۱
~ عام ۵۹۳، ۵۹۶
نقطه (ی)
~ مرجع ۲۹۰، ۳۱۴
~ های برگشت ۲۹۹، ۳۱۵
~ های تعادل ۳۰۱
نمادگذاری
~ بردارهای یکه ۷۵
~ بزرگی ـ زاویه ۷۰
~ علمی ۳
~ مؤلفه‌ای ۷۰
نمودار جسم ـ آزاد ۱۵۷، ۱۷۸
نیرو (ی) ۱۵۲، ۱۵۳
~ اصطکاک ۱۶۵، ۱۷۸، ۲۱۶
انرژی پتانسیل و ~ ۵۸۱
~ بازگرداننده ۲۵۳
~ برآر منفی ۲۱۳
~ برایند ۱۵۲، ۱۷۷
~ پایستار ۲۸۵، ۳۱۴
~ پسار ۲۰۶، ۲۱۷
~ پس کشی ۲۰۶، ۲۱۷
~ جاذبه ۵۶۶
~ خارجی ۱۵۷، ۳۰۳، ۳۴۹، ۳۵۰
~ خالص ۱۵۲، ۱۷۷
~ درونی ۳۵۰
~ عمودی ۱، ۱۶۴، ۱۷۸

~ فنر ۲۵۲، ۲۶۶
~ کشش ۱۶۵، ۱۷۸
~ گرانشی ۱۶۱، ۱۷۸، ۵۶۵
گشتاور ~ ۴۳۴، ۴۴۷
~ ناپایستار ۲۸۶، ۳۱۴
~ و تکانه ۳۵۵
نیروی اصطکاک ۱۶۵، ۱۷۸، ۱۹۸، ۲۱۶
~ ایستایی ۱۹۹، ۲۱۶، ۴۷۲
~ جنبشی ۱۹۹، ۲۱۶، ۴۷۲
~ و غلتش ۴۷۲
نیوتون (یکای نیرو) ۱۵۲

وات (یکای توان) ۲۶۳
وزن ۱۶۲، ۱۷۸
~ ظاهری ۱۶۳

یکا (ی) ۲
تبدیل ~ ها ۴، ۱۲
~ توان ۲۶۳
~ جرم اتمی ۱۰
دستگاه بین‌المللی ~ ها ۳، ۱۲
~ کار ۲۳۹
~ نجومی ۱۸
~ نیرو ۱۵۲
~ های اصلی ۲
~ های فرعی ۳

برخی ثابت‌های فیزیکی*

تندی نور	c	$۲/۹۹۸ \times ۱۰^{۸} m/s$
ثابت گرانش	G	$۶/۶۷۳ \times ۱۰^{-۱۱} N \cdot m^{۲}/kg^{۲}$
ثابت آووگادرو	N_A	$۶/۰۲۲ \times ۱۰^{۲۳} mol^{-۱}$
ثابت عمومی گازها	R	$۸/۳۱۴ J/mol \cdot K$
رابطه جرم ـ انرژی	$c^{۲}$	$۸/۹۸۸ \times ۱۰^{۱۶} J/kg$
		$۹۳۱/۴۹ MeV/u$
ثابت گذردهی	$\varepsilon_۰$	$۸/۸۵۴ \times ۱۰^{-۱۲} F/m$
ثابت تراوایی	$\mu_۰$	$۱/۲۵۷ \times ۱۰^{-۶} H/m$
ثابت پلانک	h	$۶/۶۲۶ \times ۱۰^{-۳۴} J \cdot s$
		$۴/۱۳۶ \times ۱۰^{-۱۵} eV \cdot s$
ثابت بولتزمن	k	$۱/۳۸۱ \times ۱۰^{-۲۳} J/K$
		$۸/۶۱۷ \times ۱۰^{-۵} eV/K$
بار بنیادی	e	$۱/۶۰۲ \times ۱۰^{-۱۹} C$
جرم الکترون	m_{e}	$۹/۱۰۹ \times ۱۰^{-۳۱} kg$
جرم پروتون	m_{p}	$۱/۶۷۳ \times ۱۰^{-۲۷} kg$
جرم نوترون	m_{n}	$۱/۶۷۵ \times ۱۰^{-۲۷} kg$
جرم دوترون	m_{d}	$۳/۳۴۴ \times ۱۰^{-۲۷} kg$
شعاع بور	a	$۵/۲۹۲ \times ۱۰^{-۱۱} m$
مگنتون بور	μ_{B}	$۹/۲۷۴ \times ۱۰^{-۲۴} J/T$
		$۵/۷۸۸ \times ۱۰^{-۵} eV/T$
ثابت ریدبرگ	R	$۱/۰۹۷۳۷۳ \times ۱۰^{۷} m^{-۱}$

* برای داشتن فهرست کامل‌تر، که داده‌های تجربی را نیز نشان می‌دهد، به پیوست ب رجوع کنید.

الفبای یونانی

آلفا	A	α	یوتا	I	ι	رو	P	ρ
بتا	B	β	کاپا	K	κ	سیگما	Σ	σ
گاما	Γ	γ	لاندا	Λ	λ	تاو	T	τ
دلتا	Δ	δ	میو	M	μ	اوپسیلون	Y	υ
اپسیلون	E	ε	نیو	N	ν	فی	Φ	ϕ,φ
زتا	Z	ζ	کسی	Ξ	ξ	خی	X	χ
اتا	H	η	اومیکرون	O	o	سای	Ψ	ψ
تتا	θ	θ	پی	Π	π	امگا	Ω	ω

برخی ضریب‌های تبدیل*

جرم و چگالی

$1\,kg = 1000\,g = 6{,}02\times10^{26}\,u$

$1\,slug = 14{,}59\,kg$

$1\,u = 1{,}661\times10^{-27}\,kg$

$1\,kg/m^3 = 10^{-3}\,g/cm^3$

طول و حجم

$1\,m = 100\,cm = 39{,}4\,in. = 3{,}28\,ft$

$1\,mi = 1{,}61\,km = 5280\,ft$

$1\,in. = 2{,}54\,cm$

$1\,nm = 10^{-9}\,m = 10\,\mathring{A}$

$1\,pm = 10^{-12}\,m = 1000\,fm$

$1\,light-year = 9{,}461\times10^{15}\,m$

$1\,m^3 = 1000\,L = 35{,}3\,ft^3 = 264\,gal$

زمان

$1\,d = 86400\,s$

$1\,y = 365\frac{1}{4}\,d = 3{,}16\times10^{7}\,s$

مقیاس زاویه‌ای

$1\,rad = 57{,}3^\circ = 0{,}159\,rev$

$\pi\,rad = 180^\circ = \frac{1}{2}\,rev$

تندی

$1\,m/s = 3{,}28\,ft/s = 2{,}24\,mi/h$

$1\,km/h = 0{,}621\,mi/h = 0{,}278\,m/s$

نیرو و فشار

$1\,N = 10^5\,dyne = 0{,}225\,lb$

$1\,lb = 4{,}45\,N$

$1\,ton = 2000\,lb$

$1\,Pa = 1\,N/m^2 = 10\,dyne/cm^2$

$= 1{,}45\times10^{-4}\,lb/in.^2$

$1\,atm = 1{,}01\times10^{5}\,Pa = 14{,}7\,lb/in.^2$

$= 76{,}0\,cm\,Hg$

انرژی و توان

$1\,J = 10^7\,erg = 0{,}2389\,cal = 0{,}738\,ft\cdot lb$

$1\,kW\cdot h = 3{,}6\times10^{6}\,J$

$1\,cal = 4{,}1868\,J$

$1\,eV = 1{,}602\times10^{-19}\,J$

$1\,horsepower = 746\,W = 550\,ft\cdot lb/s$

مغناطیس

$1\,T = 1\,Wb/m^2 = 10^4\,gauss$

* برای داشتن فهرست کامل‌تر، به پیوست ت رجوع کنید.

معرفی کتاب‌های مبتکران

خواننده گرامی

مبتکران علاوه بر این کتاب، کتاب‌های مفید دیگری را هم برای گروه سنی شما منتشر کرده است. شما می‌توانید با مراجعه بـه سـایت مبتکران www.mobtakeran.com با این کتاب‌ها آشنا شوید. برخی از کتاب‌های مناسب برای گروه سنی شما به شرح زیر می‌باشد.

کتاب‌های دانشگاهی / فیزیک

کد	نام کتاب	مترجم / مؤلف
۱۸۳	فیزیک زیمانسکی	دکترمحمود بهار
۱۱۴/۱	مبانی فیزیک هالیدی جلد اول ـ (مکانیک)	دکترگلستانیان ـ دکتربهار
۱۱۴/۲	مبانی فیزیک هالیدی جلد دوم ـ (شاره‌ها، موج‌ها و گرما)	دکترگلستانیان ـ دکتربهار
۷۲۳	مبانی فیزیک هالیدی جلد سوم ـ (الکتریسیته و مغناطیس)	دکترگلستانیان ـ دکتربهار
۱۱۱۷	مبانی فیزیک هالیدی جلد چهارم ـ (اپتیک و فیزیک نوین)	دکترگلستانیان ـ دکتربهار
۴۵۳	حل کامل مسایل فیزیک هالیدی جلد اول ـ (مکانیک)	دکترمحمود بهار
۵۹۵	حل کامل مسایل فیزیک هالیدی جلد دوم ـ (شاره‌ها، موج‌ها و گرما)	دکترمحمود بهار
۹۰۴	حل کامل مسایل فیزیک هالیدی جلد سوم ـ (الکتریسیته و مغناطیس)	دکترمحمود بهار
۱۱۵۰	حل کامل مسایل فیزیک هالیدی جلد چهارم ـ (اپتیک و فیزیک نوین)	دکترمحمود بهار
۱۲۴	فیزیک برای علوم زیستی	دکترمحمود بهار
۱۳۵	حل مسایل فیزیک برای علوم زیستی	دکترمحمود بهار
۱۵۲۵	فیزیک برای علوم و مهندسی جلد اول ـ (مکانیک)	دکتر محمود بهار
۱۷۳۱	فیزیک برای علوم و مهندسی جلد سوم ـ (الکتریسیته و مغناطیس)	دکتر محمود بهار
۱۶۶۸	حل کامل مسایل فیزیک برای علوم و مهندسی جلد اول ـ (مکانیک)	دکتر محمود بهار
۱۱۷	مبانی و کاربردهای الکترونیک	دکتر گلستانیان ـ دکتربهار
۳۴۹	اصول مکانیک کوانتومی	دکتر بهار ـ دکتر اسلامپور.
۱۰۳۰	مکانیک کوانتوم از طریق حل مسئله	دکتر محمد حسین مجلس آرا
۱۲۰۸	مکانیک کوانتومی نانسبیتی	دکتر محمد حسین مجلس آرا
۳۴۸	فیزیک جدید	دکتر محمود بهار
۱۰۸۹	بیوفیزیک پرتوی	دکتر محمود بهار
۱۱۸۹	الکترونیک مدارها و تحلیل آن‌ها	دکترگلستانیان ـ دکتربهار
۱۲۴۰	اختر فیزیک مقدماتی	بابک کبیری منش
۱۲۷۰	فیزیک ستاره‌ها	دکتر بهار ـ دکتر گل نبی
۱۱۴/۱	اصول فیزیک جلد اول ـ (مکانیک) تک رنگ	دکتر گلستانیان ـ دکتر بهار
۱۱۴/۱	اصول فیزیک جلد اول ـ (مکانیک) رنگی	دکتر گلستانیان ـ دکتر بهار
۷۲۳	اصول فیزیک جلد سوم ـ (الکتریسیته و مغناطیس)	دکتر گلستانیان ـ دکتر بهار

نظرخواهی

دانشجوی گرامی / خریدار محترم کتاب

لطفاً با ارائه‌ی نظرات خود درباره‌ی این کتاب، انتشارات مبتکران و مؤلفان کتاب را در ارتقای کیفی محصولات خود یاری فرمایید. هر هفته به تعدادی از عزیزانی که درباره‌ی کتاب‌های مبتکران اعلام نظر می‌کنند، به عنوان قدردانی به **قید قرعه جوایزی تقدیم می‌شود.** شما می‌توانید برای ارائه‌ی نقطه نظرات خود درباره‌ی کتاب‌های مبتکران به یکی از روش‌های زیر عمل کنید:

۱- ارسال از طریق رایانامه (Email) با ذکرنام کتاب و نام خود به نشانی **editor@mobtakeran.com**

۲- به سایت مبتکران به نشانی **www.mobtakeran.com** مراجعه کرده و با انتخاب یک کتاب، نظرات خود را در همان‌جا ذکر کنید.

۳- پاسخ‌های خود را به ۳ پرسش اساسی زیر درباره‌ی این کتاب به شماره **۱۰۰۰۶۱۰۹۴۰۰۰** پیامک کنید.

الف) کتاب را از نظر کیفیت علمی و توانایی پاسخگویی به نیازهایتان چگونه ارزیابی می‌کنید؟

۱) خیلی‌خوب **۲)** خوب **۳)** متوسط **۴)** ضعیف

ب) کتاب را از نظر کیفیت حروفچینی، زیبایی ظاهری و کم بودن غلط‌های تایپی در آن چگونه ارزیابی می‌کنید؟

۱) خیلی‌خوب **۲)** خوب **۳)** متوسط **۴)** ضعیف

ج) کتاب را از نظر قیمت آن، چگونه ارزیابی می‌کنید؟

۱) گران **۲)** مناسب **۳) ارزان**

پس از انتخاب گزینه‌های مورد نظر خود، پاسخ را به‌صورت یک عدد ۷ رقمی به شماره **۱۰۰۰۶۱۰۹۴۰۰۰** پیامک کنید به ترتیبی که ۴ رقم سمت چپ آن عدد، کد کتاب باشد (که برای این کتاب **۲۱۲۲** است) و ۳ رقم سمت راست آن، جواب‌های شما به پرسش‌های مطرح شده. برای مثال اگر شما برای پرسش‌های «الف، ب و ج» به ترتیب گزینه‌های ۱ ، ۲ و ۳ را انتخاب کرده باشید باید عدد ۲۱۲۲۱۲۳ را پیامک کنید.

با تشکر

انتشارات مبتکران